ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Розв’язування матричних ігор за допомогою симплексного методу

Жинкін Ноимі Василівна

Студентка ІІ-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: магістр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Головач Йожеф Ігнацович**

д. т. н., проф.

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Розв’язування матричних ігор за допомогою симплексного методу

Ступінь вищої освіти: магістр

Виконав: студентка II-го курсу

Жинкін Ноимі Василівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Головач Йожеф Ігнацович**

д. т. н., проф.

Рецензент: **О. В. Міца**

кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних управляючих систем та технологій, УжНУ

Берегове
2021

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

MÁTRIXJÁTÉKOK MEGOLDÁSA SZIMPLEX MÓDSZERREL

Szakdolgozat

Képzési szint: mesterképzés

Készítette: Zsinkin Noémi

II. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Holovács József

műszaki tudományok doktora, professzor

Recenzens: Mitsa O. V.

műszaki tudományok kandidátusa, docens, Információs vezérlési rendszerek és technológiák tanszék tanszékvezetője, UNE

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A diplomamunkámban a mátrixjátékok tanulmányozásával foglalkozom. Célja - megismerni és elsajátítani a mátrixjátékok szimplex módszer segtségével történő megoldását.

A mátrixjátékok a játékelmélet egy része. A játékelmélet a 20. században alakult ki, és a tudomány alapjait a magyar származású Neumann János fektette le.

Egy mátrixjáték során megfigyelhetjük azt, hogy amikor a játékos stratégiáját szeretnénk meghatározni, akkor egy lineáris programozási feladatot kell megoldanunk. A lineáris programozási feladat alatt azt értjük, hogy egy lineáris függvény maximumát vagy minimumát szeretnénk megkeresni úgy, hogy különböző korlátozások vannak megadva a számunkra, és ezek a korlátozások szintén lineáris függvények.

A lineáris programozási feladat megoldására ismerünk egy algoritmusos módszert, a szimplex módszert. A szimplex módszert G. B. Dantzig dolgozta ki 1947-ben. Mivel ezt a módszert számítógép segítségével könnyen elvégezhetjük, ezért nagyon elterjedt a használata. A szimplex módszer algebrai átalakításokkal oldja meg a feladatot és a megoldás során úgynevezett szimplex táblázatokat használ. Lehetővé teszi a fokozatos előrehaladást az optimumhoz közelebb lévő megoldások irányában.

A diplomamunkámban a szimplex módszer online megoldó alkalmazását is szeretném ismertetni. Ez az online-kalkulátor a mátrixjátékot lineáris programozási feladattá redukálja, majd szimplex módszer segítségével keresi meg a mátrixjáték megoldását és a játékosok optimális stratégiáit.

A lineáris programozás alkalmazási területe nagyon változatos. A mezőgazdaságban, a közgazdászatban, az iparban, matematikai tudományokban és más területeken is széleskörűen alkalmazzák.

Köszönöm Holovács József Tanár úrnak, a témavezetőmnek, hogy felkeltette a figyelmemet a téma iránt és segítségével, hasznos tanácsaival és bizalmával segített a diplomamunkám megírásában.

1. fejezet

Mátrixjátékok

A játékelmélet eredetileg az elméleti matematika kicsiny részterülete volt, amely - mindenekelőtt Neumann János tevékenysége nyomán - a közgazdaságtan, a szociológia és a pszichológia egyik központi területévé vált [9].

A játékelmélet olyan helyzetekkel foglalkozik, amelyekben legalább két döntéshozó (például egyén, család, vállalat, intézmény, ország, stb.) próbálja saját hasznosságfüggvényét maximalizálni. A nehézséget az okozza, hogy minden szereplő hasznosságfüggvénye függ legalább egy másik szereplő döntésétől is, és a szereplők döntésüket egymástól függetlenül hozzák [5].

Matematikai szempontból két féle játékot különböztetünk meg: **szerencsejátékokat** és **stratégiai játékokat**. A két játékot az különbözteti meg egymástól, hogy a játékban szereplő egyedeknek (játékosoknak, döntéshozóknak) a játék kimenetére a fenálló szabályok keretein belül van-e befolyásuk vagy nincs [1].

A játékelmélet központi területének a stratégiai játékok számítanak és szolgál a közgazdaságtan legfontosabb matematikai alapjaként. Megszületését hagyományosan Neumann János és Oskar Morgenstern *Játékelmélet és gazdasági viselkedés* című könyvének 1944-es megjelenéséhez kötik. Fő kérdésfeltevése olyan szituációk elemzése, amelyekben egymással érdekellentétben álló, racionálisan cselekvő egyének hoznak döntéseket [6].

Stratégiai játékoknak azokat a játékokat nevezzük, amelyekben a játékosoknak a játék kimenetelére befolyásuk van. A játékelmélet a stratégiai játékokkal foglalkozik. A stratégiai játékokban a játékosoknak az érdekei ellentétesek, ezek a játékok tehát mindig valamilyen konfliktushelyzetet jelentenek. A játékban résztvevők száma szerint megkülönböztetünk **két-, három-, általában n-személyes** játékokat. A játékosnak a játék kimenetelét befolyásoló tevékenységeit, döntéseit **stratégiának** nevezzük. A játékosok több stratégia közül választhatnak. A stratégiák összességét **stratégiahalmaznak** nevezzük [1].

A játék kimeneteleit minden játékos számára egy függvénnyel az ún. **kifizetőfüggvénnyel** jellemezhetjük. Minthogy a játék kimenetelét a játékosok által választott stratégiák határozzák meg, ezért az i-edik játékos esetében a kifizetőfüggvény jelölésére a $K_i(s_1, s_2, ..., s_n)$ jelölést használjuk, ahol $s_i \in S_i(i = 1, 2, ..., n)$ az i-edik játékos választott stratégiája, S_i pedig az i-edik játékos stratégiahalmaza. A kifizetőfüggvény értelmezési tartománya általában a stratégiahalmazok S_1 x S_2 x ... x S_n direkt szorzata, értékkészlete pedig a valós számok valamilyen részhalmaza [1].

A játék lehet **determinisztikus** és **sztochasztikus**, attól függően, hogy a játékosok által választott stratégiák a kifizetőfüggvények értékeit egyértelműen vagy bizonyos valószínűséggel határozzák meg [1].

A játékelméletben mindig feltételezzük, hogy minden játékos ismeri az összes többi játékos stratégiahalmazát és kifizetőfüggvényét. A játék során az egyes játékosok stratégiáikat egymástól függetlenül választják meg, azaz egyik játékos sem tudja előre, hogy a többi játékos az adott játékhoz stratégiahalmazából melyik stratégiát választja. Feltételezve azt, hogy a játék során a játékostársak jól fogják stratégiájukat megválasztani, akkor természetesen mondható a játékosoknak biztonságra való törekvése a játék kimenetelét illetően. A játékosok biztonságra, egyensúlyhelyzetre való törekvése olyan stratégiák kiválasztását jelenti, amelynél jobbat egyik játékos sem választhat, feltéve, hogy a többi játékos az egyensúlyhelyzetnek megfelelő stratégiát játssza. Az egyensúlyhelyzetnek megfelelő stratégiákat **egyensúlyi stratégiáknak** nevezik. Az egyensúlyi stratégiák együttesére az **egyensúlypont elnevezés** is használatos [1].

Definiáljuk a játékelmélet alapfogalmát, az egyensúlyi stratégiákat, amelyeket bevezetőjéről NASH-féle egyensúlypontnak is szoktak nevezni.

1.1. Definíció. *Egy játék* ***egyensúlypontján*** *olyan* $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$ *stratégiákat értünk, amelyekre* $i = 1, 2, \ldots, n$ *esetén*

$$K_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geqq K_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

minden $s_i \in S_i$ *stratégiára fennáll [1].*

A játékelmélet alapfeladata az egyensúlypont, más szóval az egyensúlyi, biztonsági stratégiák együttesének meghatározása.

Ha létezik olyan c állandó, hogy minden $s_i \in S_i$ esetén $\sum_{i=1}^{n} K_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = = c$, akkor a játékot **konstansösszegűnek** nevezzük. A $c = 0$ speciális esetben a játék **zérusösszegű** [1].

Az egyensúlyi stratégiákhoz tartozó kifizetőfüggvény-értékek összességét, azaz a

$$K_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)(i = 1, 2, \ldots, n)$$

értékeket a **játék értékének** nevezzük és $v_1, v_2, \ldots, v_n - el$ jelöljük [1].

A gyakorlatban nagyon sok konfliktushelyzet kétszemélyes játékként modellezhető. A kétszemélyes, véges sok stratégiahalmazzal rendelkező játék táblázattal megadható, tehát a játékosok kifizetőfüggvénye egy-egy mátrixszal jellemezhető. Mivel a játék két mátrixszal megadható ezért a véges, kétszemélyes játékokat **bimátrix játékoknak** szokás nevezni. Ha egy bimátrixjáték zérusösszegű **A + B = 0**, azaz **B = -A**, akkor a játékot **mátrixjátéknak** nevezzük [1].

A mátrixjátékok a játékelmélet egy része.

Mátrixjátékok alatt olyan **kétszemélyes, zérusösszegű** játékokat értünk, amelyekben a játékosoknak **véges sok** stratégiájuk van. Legyen a P_1 játékosnak m, a P_2 játékosnak pedig n stratégiája. A játékosok kifizetőfüggvény-értékeit, nyereségeit egy A mátrixszal jellemezzük és **kifizetőmátrixnak** vagy **kifizetési mátrixnak** nevezzük. A P_1 játékos stratégiáit az **A** mátrix **soraival**, a P_2 játékos stratégiáit pedig az **A** mátrix **oszlopaival** jellemezzük. Az **A** mátrix elemei a P_1 **játékos nyereségét** jelentik. Mivel a játék zérusösszegű, így a P_2 játékos nyereségét az **A** mátrix elemeinek (-1)-szerese jelenti. Tehát az a_{ij} mátrixelem a P_1 játékos nyeresége, illetve a P_2 játékos vesztesége, ha a P_1 játékos az i-edik, a P_2 játékos pedig a j-edik stratégiáját játssza. Az $a_{ij} < 0$ természetesen a P_1 számára veszteséget, a P_2 számára pedig nyereséget jelent [1].

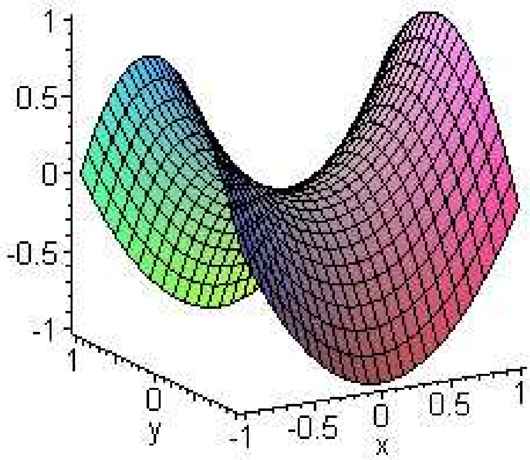
1.1. A mátrixjáték egyensúlyi pontja vagy nyeregpontja

1.2. Definíció. *Egy mátrixjáték egyensúlypontján olyan (i^*, j^*) stratégiapárt értünk, amelyre az alábbi úgynevezett egyensúlyi összefüggés minden (i, j) stratégiapárra fennáll:*

$$a_{ij^*} \leqq a_{i^*j^*} \leqq a_{i^*j}$$

Ezen definíció szerint mátrixjáték esetén az (i^*, j^*) stratégiapár meghatározása azt jelenti, hogy meg kell keresni a kifizetőmátrix azon pontját, amely egyúttal a **sorának legkisebb** és az **oszlopának legnagyobb** eleme. Ez a pont egy nyeregfelület azon pontjaként fogható fel, amely az egyik irányban a legmélyebben, a másik irányban a legmagasabban helyezkedik el. Ezen geometriai analógia alapján szokás az egyensúlypontot **nyeregpontnak**, az egyensúlyi stratégiákat pedig **nyeregponti stratégiáknak** is nevezni [1].

A nyeregpontot a következő ábrán szemléltethetjük:



1.1. ábra.

1.2. Maximin és minimax stratégiák

Mivel a játék zérusösszegű, így az ellenfelek csak egymástól nyerhetnek, ezért mindegyik számíthat a másik legjobb ellenlépésére. A játékosok nem vállalnak kockázatot a nagyobb nyereség reményében és az ellenfél hibáira sem spekulálnak, tehát biztonságra törekszenek.Képzeljük magunkat a P_1 játékos helyébe és próbáljuk meghatározni a számunkra legkedvezőbb stratégiát. Minden sor választása esetén meg tudja mondani, hogy legalább mennyi nyeresége lesz (ez a sor minimuma). Végül azt az i^0 stratégiát fogja választani, amelynél a sorminimumok értéke a legnagyobb. Általánosan felírva ez azt jelenti, hogy a P_1 játékos keresi a

$$\max_i \quad \min_j \quad a_{ij}$$

értéket, vagyis a sorminimumok közül a legnagyobbat. Ha ezt az i^0 stratégia választása esetén találja meg, akkor ezt játszva legalább

$$\max_i \quad \min_j \quad a_{ij}$$

nyereséget tud magának biztosítani, akárhogyan is játszik a P_2 játékos. Ezt az i^0 stratégiát a P_1 játékos **maximin stratégiájának** nevezzük [1].

Hasonlóan, ha a P_2 játékos a j-edik stratégiát (oszlopot) választja, akkor az oszlopmaximumnál többet nem veszíthet és azt a j^0 stratégiát keresi, amelynél az oszlopmaximumok értéke a legkisebb. Ha ezt a j^0 stratégiánál éri el, akkor ezt játszva vesztesége nem lehet nagyobb, mint

$$\min_j \quad \max_i \quad a_{ij}$$

akárhogyan is játszik a P_1 játékos. Ezt a j^0 stratégiát a P_2 játékos **minimax stratégiájának** nevezzük [1].

1.3. A nyeregpont és a minimax, maximin stratégiák kapcsolata

1.1. Tétel. ***(maximin, minimax egyenlőtlenség)***

Minden mátrixjáték esetén fennáll, hogy

$$\max_i \quad \min_j \quad a_{ij} \leqq \min_j \quad \max_i \quad a_{ij}$$

A következő tétel választ ad arra, hogy az előbb meghatározott maximin és minimax stratégiák mikor tekinthetők egyensúlyi stratégiáknak, vagy más szóval nyeregpontnak.

1.2. Tétel. ***(egyensúlyi stratégia és a maximin, minimax stratégiák kapcsolata)***

Egy mátrixjátéknak akkor és csak akkor van nyeregpontja, ha

$$\max_i \quad \min_j \quad a_{ij} = \min_j \quad \max_i \quad a_{ij}$$

a játék értéke a közös érték, azaz

$$v = \max_i \quad \min_j \quad a_{ij} = \min_j \quad \max_i \quad a_{ij}$$

Az utóbbi tétel szerint tehát a maximin és a minimax stratégiák akkor tekinthetők egyensúlyi stratégiáknak (nyeregpontnak), ha a **sorminimumok maximuma** megegyezik az **oszlopmaximumok minimumával** [1].

A tételeket egyszerűen beláthatjuk. Jelölje

$$\alpha = \max_i \quad \min_j \quad a_{ij}$$

a **sorminimumok** maximumát és ez legyen valahol az i^0 sorban, hasonlóan jelölje

$$\beta = \min_j \quad \max_i \quad a_{ij}$$

az **oszlopmaximumok** minimumát és ez legyen valahol a j^0 oszlopban. Az i^0 sorbeli és j^0 oszlopbeli elem $a_{i^0j^0}$.

Az α érték az i^0 sorban a **legkisebb** elem, így írható, hogy

$$\alpha \leqq a_{i^0j^0},$$

a β érték a j^0 oszlopban a **legnagyobb** elem, így írható, hogy

$$\beta \geqq a_{i^0j^0}.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenséget egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\alpha \leqq a_{i^0j^0} \leqq \beta,$$

amiből $\alpha \leqq \beta$ adódik, ez pedig az első tétel állításával azonos.

Ha $\alpha = \beta = a_{i^0j^0}$, akkor az $a_{i^0j^0}$ érték az i^0 sor legkisebb eleme, tehát

$$a_{i^0j^0} \leqq a_{i^0j} \qquad \text{minden j indexre,}$$

ugyanakkor az $a_{i^0j^0}$ értéke a j^0 oszlop legnagyobb eleme, tehát

$$a_{i^0j^0} \geqq a_{ij^0} \qquad \text{minden i indexre.}$$

Összevetve a két utóbbi egyenlőtlenséget, az alábbi adódik

$$a_{ij^0} \leqq a_{i^0j^0} \leqq a_{i^0j} \qquad \text{minden i, j indexre.}$$

Ez pedig a nyeregpont definíciójának felel meg. Az is látható, hogy $\alpha = \beta$ esetén a maximin és minimax stratégiák az egyensúlyponti (nyeregponti) stratégiáknak felelnek meg és a játék értéke az $v = \alpha = \beta = a_{i^0j^0}$ közös érték [1].

1.4. Tiszta és kevert stratégiák

Ha a játékot sokszor lejátsszák, akkor mindegyik játékosnak érdekében áll a viszonylag jó stratégiákat játékról játékra változtatni, hogy ezáltal a többieknek nyújtott információt csökkentse. Ha valamilyen determinisztikus szabály szerint választja meg a játékos a stratégiáit, akkor hamar kiismerik. Célszerű tehát a stratégiahalmazán egy **eloszlást** definiálni és e szerint az eloszlás szerint **véletlenül** megválasztani a játék konkrét realizálásakor választandó stratégiáit. Ebben az esetben a játékosokat nem az egyes játékokban adódó kifizetéseik (nyereségeik) érdeklik elsősorban, hanem a nyereségeik átlaga, várható értéke. Ezzel egy új játékot definiáltunk, amelyben a játékosok stratégiahalmazai az eredeti stratégiákon értelmezett eloszlások halmaza lesz, a játékosok kifizetőfüggvényei pedig az eredeti kifizetőfüggvényeknek a játékosok által választott eloszlásokra vonatkozó várható értéke. Az így definiált stratégiákat **kevert stratégiáknak** nevezzük [1].

1.3. Definíció. ***Kevert stratégiáról*** *vagy* ***súlyozott stratégiáról*** *beszélünk, ha a játék során változtatják a játékosok a stratégiát [2].*

A kevert stratégiák fogalmát Neumann János vezette be először. A játékosok eredeti stratégiáit **tiszta stratégiának** nevezzük [1].

1.4. Definíció. ***Tiszta stratégiának*** *nevezzük a játékos stratégiáját, ha a játékban egy oszlopot vagy egy sort választ a játékos és végig ezzel a stratégiával játszik [2].*

Optimális tiszta stratégia, ha van a játéknak nyeregpontja. Ha egyensúlypont nem létezik, akkor a játékosok a stratégiájuk váltogatásával próbálják növelni a nyereségüket [2].

Jelölje a P_1 játékos kevert stratégiáját $y_1, y_2, \ldots, y_m$; a P_2 játékos kevert stratégiáját pedig $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ahol

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqq 0, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geqq 0, \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1$$

A kevert stratégiákat tehát egy vektorral lehet leírni. Az y_i például azt jelenti, hogy a P_1 játékos a játéksorozatban az i-edik tiszta stratégiáját y_i valószínűséggel játssza.

Ezekután már csak az új kifizetőfüggvényeket kell meghatározni és már alkalmazhatjuk is az új játékra a megadott egyensúlyi stratégia definícióját [1].

A P_1 játékos **várható nyereségét** (kifizetőfüggvény-értékét) a várható érték definíciója alapján az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = yAx.$$

A P_2 játékos **várható vesztesége** nyilvánvalóan ugyanennyi [1].

1.5. Definíció. ***(kevert egyensúlyi stratégia)***

*A játékosok **kevert egyensúlyi stratégiái** alatt azt az x^*, y^* kevert stratégiákat értjük, amelyekre az alábbi egyensúlyi vagy nyeregponti összefüggés minden x, y kevert stratégiára fennáll:*

$$yAx^* \leqq y^*Ax^* \leqq y^*Ax.$$

Az y^*Ax^* várható értéket a **játék értékének** nevezzük és v-vel jelöljük. A v érték a P_1 játékos várható nyereségét, illetve a P_2 játékos várható veszteségét jelenti, ha mindegyik játékos a kevert egyensúlyi stratégiát játssza.

A kevert stratégiás esetben a tiszta stratégiás esethez hasonló összefüggéseket írhatunk fel, hisz az egyik a másiknak speciális esete. Itt is definiálhatók a maximin és minimax stratégiák. Az egyensúlyhelyzet keresésében akkor jár el ésszerűen a P_1 játékos, ha igyekszik a maga számára a legnagyobb átlagos nyereséget biztosítani az ellenfél legjobb játéka esetére is. Ha a P_1 játékos valamely **y** stratégiáját alkalmazza, akkor nyereményének várható értéke legalább az **yAx** értékek P_2 játékos stratégiáinál vett minimuma lesz. A P_1 játékos azt az y^0 stratégiát fogja játszani, amelyre ez a minimum érték a legnagyobb lesz. A P_1 játékos y^0 stratégiáját **maximin stratégiának** nevezzük és ezt játszva legalább

$$\max_y \quad \min_x \quad yAx$$

várható nyereséget tud magának biztosítani. Hasonlóan, ha a P_2 játékos az x^0 **minimax stratégiáját** játssza, akkor legfeljebb

$$\min_x \quad \max_y \quad yAx$$

várható vesztesége lesz [1].

1.3. Tétel. ***(maximin, minimax egyenlőtlenség)***

Minden mátrixjáték esetén fennáll, hogy

$$\max_y \quad \min_x \quad yAx \leqq \min_x \quad \max_y \quad yAx$$

1.4. Tétel. ***(egyensúlyi stratégia és a maximin, minimax stratégiák kapcsolata)***

Egy mátrixjátéknak akkor és csak akkor van nyeregpontja, ha

$$\max_y \quad \min_x \quad yAx = \min_x \quad \max_y \quad yAx$$

a játék értéke a közös érték, azaz

$$v = \max_y \quad \min_x \quad a_{ij} = \min_x \quad \max_y \quad yAx[1]$$

2. fejezet

Mátrixjátékok megoldása

1. Egy varrócég tömeges gyártáshoz egy új ruházati modellt tervez. A modell iránti igényt nem lehet pontosan meghatározni. Azonban feltételezhető, hogy az értéket három lehetséges állapot jellemzi: (I, II, III). Ezeket az állapotokat figyelembevéve ennek a modellnek három lehetséges gyártását elemezzük: (A, B, C). Mindegyik változat saját költséggel rendelkezik és végül eltérő hatást nyújt. A nyereséget (ezer rubel), amelyet a vállalkozás kap a modell gyártási mennyiségére és a kereslet megfelelő állapotára a következő mártix határozza meg:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} I & II & II \\ 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}$$

Keressük meg a ruházati modell gyártásának mennyiségét, biztosítva az átlagos nyereséget, figyelembe véve a keresleti állapotot [7]!

Megoldás:

Először is ellenőrizzük, hogy az eredeti mátrixnak van-e nyeregpontja. Ehhez megkeressük minden sor legkisebb elemét (22, 21, 20) és minden oszlop legnagyobb elemét (22, 23, 24). A sorban a legkisebb elemek közül a legnagyobb: $\alpha = 22$, az oszlopok legnagyobb elemei közül a legkisebb: $\beta = 22$. Így $\alpha = \beta = 22$, vagyis a játék értéke - 22. A játéknak van nyeregpontja, a ruházati modell gyártásának első változata lesz a megfelelő. A modell gyártásának állapota, amely megfelelő az adott változatban, 22 ezer rubel nyereséget biztosít a kereslet bármely feltétele mellett [7].

2. Keressük meg az adott mátrixban az A és B játékos stratégiáját és a játék értékét! (képlet segítségével és grafikusan) [11]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

Megkeressük az első játékos legjobb stratégiáját. Minden sor legkisebb eleme: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1$. Ezek közül a legnagyobb: $\alpha = 0$. Ez lesz a játék alsó értéke.

Hasonlóan járunk el a második játékosnál is. Az oszlopok legnagyobb elemei: $\beta_1 = 6, \beta_2 = 5, \beta_3 = 3, \beta_4 = 5$. Ezek közül a legkisebb: $\beta = 3$. Ez lesz a játék felső értéke.

Mivel a játék alsó és felső értéke eltérő, a játéknak nincs megoldása tiszta stratégiák esetén, a játék értéke 0 és 3 között van.

A mátrixból kitöröljük a hátrányos stratégiákat. Mivel a B_1 oszlop minden eleme nagyobb a B_3 oszlop elemeitől, ezért a B_1 oszlopot kitöröljük. Így a következő mátrixot kapjuk:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Most keresünk megoldást a játékra kevert stratégiákkal.

Kiszámoljuk az első játékos átlagos nyereményét, ami attól függ, hogy hogyan alkalmazza a saját kevert stratégiáját, a második játékos pedig a saját tiszta j-edik stratégiáját.

$M_j(x_1) = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}$.

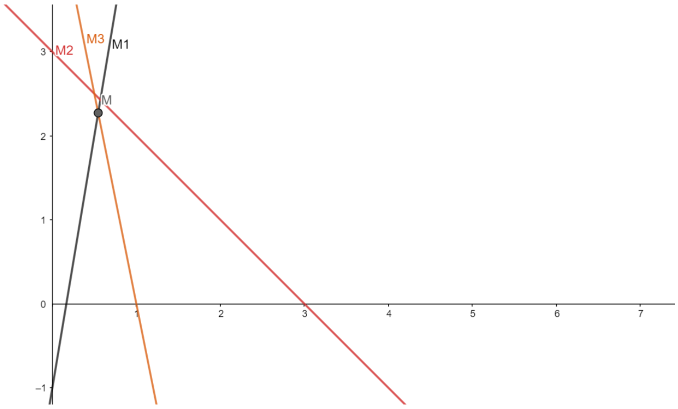
Kapjuk:

$M_1(x_1) = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = 6x_1 - 1,$

$M_2(x_1) = (a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} = -x_1 + 3,$

$M_3(x_1) = (a_{13} - a_{23})x_1 + a_{23} = -5x_1 + 5.$

Az egyeneseket derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk:



2.1. ábra.

Mivel a második játékos célja az első játékos nyereményének minimalizálása a stratégiák kiválasztásával, így a legalsó szakaszokat vesszük.

Az első játékos célja, hogy maximálizálja a nyereményét kiválasztva x_1-et, ezért a legmagasabb pontot választjuk ki, az M pontot.

A stratégiák azon vonalai, amelyek metszéspontja az M pontot képezi, a B játékos aktív stratégiája, ebben az esetben B_1 és B_3. Ily módon a játék egy 2x2 játék, melynek mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Megkeressük az optimális stratégiát:

$6x_1 - 1 = -5x_1 + 5 = v,$

$x_1 + x_2 = 1.$

$x_1 = \frac{6}{11}; \quad x_2 = \frac{5}{11}; \quad v = \frac{25}{11};$

Megkeressük a második játékos stratégiáját:

$5q_1 + 0q_2 = v = \frac{25}{11} \Rightarrow \quad q_1 = \frac{5}{11}, \quad q_2 = \frac{6}{11}.$

Felelet: $P^* = (\frac{6}{11}; \frac{5}{11}); \quad Q^* = (0; \frac{5}{11}; 0; \frac{6}{11}).$ A játék értéke: $v = \frac{25}{11}$ [11].

3. Négy féle készlet létezik, amelyet a befektető beszerezhet: A_1, A_2, A_3, A_4. A készlet hozama függ a gazdaság állapotától. Három lehetőséget mérlegelnek a jövőbeli gazdasági állapotról: válságos (C_3), közepesen virágzó (C_2), gyorsan növekvő (C_1). A készlet jövedelmét a gazdasági állapottól függően a következő táblázat mutatja:

Készlet	C_1	C_2	C_3
A_1	10	7	0
A_2	20	0	-3
A_3	30	-5	-10
A_4	25	0	-20

2.1. táblázat.

Feladat : Válassza ki az optimális stratégiát, azaz döntsön arról, hogy melyik készletet kell megvásárolnia a befektetőknek [8].

A feladatot egy online-kalkulátor segítségével fogjuk megoldani. A következő online kalkulátort használjuk : **http ://www.math-pr.com/game_theory_2.php**. A kalkulátor segítségével meg tudjuk határozni a játék alsó és felső értékét, és megkeressük mindkét játékos optimális stratégiáját. Szükség esetén az alkalmazás grafikus módszerrel oldja meg a feladatot.

Megoldás :

A mátrixjáték a következő kifizetési mátrixszal van megadva :

$$\begin{array}{c} \textbf{"A" stratégia} \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} & \textbf{"B" stratégia} & \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ 10 & 7 & 0 \\ 20 & 0 & -3 \\ 30 & -5 & -10 \\ 25 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Keressük meg :

- a játék felső értékét ;
- a játék alsó értékét ;
- a játék értékét ;
- a játékosok optimális stratégiáját.

1. lépés

Meghatározzuk a játék alsó értékét - α

A játék alsó értéke α - ez a maximális nyereség, amelyet garantálni tudunk magunknak, egy ésszerű ellenféllel szemben, ha a játék során egy és csak egy stratégiát alkalmazunk (ezt a stratégiát "tisztának" nevezzük).

A kifizetési mátrix minden sorában megkeressük a minimális (legkisebb) elemet, majd megkeressük ezek közül a maximális (legnagyobb) elemet (jelöljük *-al).

	"B" stratégia			
"A" stratégia	B_1	B_2	B_3	Sor minimumai
A_1	10	7	0	0^*
A_2	20	0	-3	-3
A_3	30	-5	-10	-10
A_4	25	0	-20	-20

2.2. táblázat.

A játék alsó értéke: $\alpha = 0$, és azért, hogy a nyereményünk ne legyen kisebb, mint 0, az A_1 stratégiát kell alkalmaznunk.

2. lépés

Meghatározzuk a játék felső értékét - β

A játék felső értéke β - ez a minimális veszteség, amit garantálni tud magának a "B" játékos, egy ésszerű ellenféllel szemben, ha a játék során egy és csak egy stratégiát alkalmaz.

A kifizetési mátrix minden oszlopában megkeressük a maximális (legnagyobb) elemet, és megkeressük ezek közül a minimális (legkisebb) elemet.

	"B" stratégia			
"A" stratégia	B_1	B_2	B_3	Sor minimumai
A_1	10	7	0	0^*
A_2	20	0	-3	-3
A_3	30	-5	-10	-10
A_4	25	0	-20	-20
Oszlop maximumai	30	7	0^+	

2.3. táblázat.

A játék felső értéle: $\beta = 0$, és ahhoz, hogy vesztesége ne legyen roszabb, mint 0, a B_3 stratégiát kell alkalmaznia.

3. lépés

Hasonlítsuk össze a játék alsó és felső értékét. A mi esetünkben ezek egybeesnek, $\alpha = \beta = 0$. Ez azt jelenti, hogy a játéknak tiszta stratégiákban van megoldása. Az "A" játékos optimális stratégiája az A_1 lesz, a "B" játékos optimális stratégiája a B_3. Nem nehéz belátni, hogy a kifizetési mátrixban a tiszta optimális stratégiák metszéspontjában található elem az egyszerre lesz a sor minimuma és az oszlopok maximuma. Az ilyen elemet nevezzük nyeregpontnak, és megléte adja meg, hogy a játéknak a megoldása tiszta stratégiákban van, és az értéke egybeesik a játék értékével.

Felelet: a játék alsó értéke, felső értéke és értéke: $\alpha = \beta = v = 0$. Az optimális stratégiapár: $A_1 B_3$.

3. fejezet

Lineáris programozási feladat. A szimplex módszer.

A *lineáris programozás* - korlátozottan rendelkezésre álló gazdasági erőforrások lehető legjobb (optimális) elosztása egymással versenyző tevékenységek között a minél nagyobb gazdasági haszon elérése érdekében [2].

A lineáris szó arra utal, hogy a modellben szereplő függvények mindegyike lineáris. A programozás szó itt nem a számítógépes programozásra utal, hanem inkább a tervezés szinonimájaként szerepel [2].

Két alapvető módszer van a lineáris programozási feladatok megoldására: az első a geometriai módszer, a második az algoritmikus módszer, amely a lineáris algebrát használja fel [4]. Ha a feladat kétváltozós, akkor meg tudjuk oldani grafikus módszerrel. A feladatok megoldását az jelenti, hogy kiválasztjuk a lehetséges megoldások halmazából az optimális programot [2].

A gyakorlatban nemcsak két, hanem jóval több változót is tartalmazhatnak a feladatok és a feltételek száma is jóval nagyobb lehet. Ilyen esetben a grafikus módszer nem alkalmas a feladatok megoldására, más módszert kell alkalmaznunk. Ha a változók és a feltételek száma igen nagy, akkor csak számítógéppel érhetünk el eredményt [2].

A szimplex módszer a lineáris programozási feladat legismertebb és legfontosabb megoldó algoritmusa [3]. Ez az algoritmus megadja a kritériumokat, amelyek lehetővé teszik annak könnyű megállapítását, hogy az adott megoldás optimális-e, valamint lehetővé teszik a fokozatos előrehaladást vakon, de mindig a rosszabb megoldásoktól a jobb, azaz az optimumhoz közelebb levő megoldások irányában. Ily módon a "próbák" száma jelentősen lecsökken és gyorsabban eljutunk az optimális megoldáshoz [4].

Mind kézi, mind a számítógépi megoldáshoz az szükséges, hogy a feladatot megfelelő matematikai formába öntsük. A gazdasági feladattól függően különböző matematikai modelleket fogalmazhatunk meg [2].

3.1. Lineáris programozási feladat általános megfogalmazása

3.1. Definíció. *Olyan matematikai programozási feladatot nevezünk lineáris programozási feladatnak, amelyekben az L halmazt meghatározó feltételek első fokú egyenletek és egyenlőtlenségek, a célfüggvényük lineáris, és a bennük szereplő változók valós számértéket vehetnek fel [2].*

Jelölje n egy gazdasági szervezet tevékenységeinek, m az erőforrásainak számát,

$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ a tevékenységek terjedelmét, (melyek értelemszerűen csak nemnegatívak lehetnek),

$b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m$ az erőforrások kapacitását,

a_{ij} a j-edik tevékenység fajlagos szükségletét az i-edik erőforrásból,

$c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ a tevékenységek fajlagos gazdasági eredményét,

akkor a gazdasági szervezet tevékenysége a következő modellel határozható meg:

Az

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1j}x_j + \ldots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered}$$

feltételrendszer mellett keressük az

$$f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$$

lineáris függvény, az ún. célfüggvény maximumát [2].

Vektor- és mátrixszimbólumokkal feladatunk sokkal tömörebben írható fel. Így megoldandó az

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0} \\
\text{b)} & A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \text{ (vagy } =, \geq) \\
\text{c)} & z = \underline{c}^T \cdot \rightarrow \text{extrém} \\
 & \underline{x}
\end{array}
$$

feladat [2].

3.2. Lineáris programozás matematikai modelljei

3.2.1. Maximumfeladat

3.2. Definíció. *Maximumfeladatról akkor beszélünk, ha egyenlőtlenségei $\leq$ értelműek és a célfüggvény maximuma jelenti az optimumot.*

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}$	$x \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}$
b)	$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$	$A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow$ max.	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow$ max.

A kanonikus alak abban különbözik az alapfeladatokban megadott formákétól, hogy bevezeti az $\underline{u}$ ún. hiányváltozókat, melyeket duál változóknak is szokás nevezni [2].

3.2.2. Minimumfeladat

3.3. Definíció. *Egy modellt akkor nevezünk minimumfeladatnak, ha egyenlőtlenségei $\geq$ értelműek és a célfüggvény minimuma jelenti az optimumot.*

	alapforma	kanonikus alak
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$
b)	$A \cdot \underline{x} \geq \underline{b}$	$A \cdot \underline{x} - \underline{v} = \underline{b}$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow$ min.	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow$ min.

A $\underline{v}$ változót *többletváltozónak* nevezzük [2].

3.2.3. Normálfeladat

3.4. Definíció. *Egy maximumfeladatot normálfeladatnak nevezzük akkor, ha $\underline{b} \geq \underline{0}$ feltétel is teljesül [2].*

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{b} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{b} \geq \underline{0}$
b)	$A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$	$A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$
c)	$\underline{c}^T \cdot \underline{x} \to$ max.	$\underline{c}^T \cdot \underline{x} \to$ max.

3.2.4. Módosított normálfeladat

3.5. Definíció. *Egy modellt módosított normálfeladatnak nevezzük, ha egyenlőtlenségei $\leq$ értelműek, tartalmaz egyenleteket és célfüggvény maximumát keressük, továbbá a $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ vektorok minden koordinátája nemnegatív [2].*

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \underline{b}_2 \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \underline{b}_2 \geq \underline{0}$
b)	$A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1$	$A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}_1$
	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to$ max.	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to$ max.

3.2.5. Általános feladat

3.6. Definíció. *Egy lineáris modellt általános feladatnak nevezünk, ha feltételei között a kapacitások ($\underline{b}$) nemnegativitása mellett $\geq$ relációk is szerepelnek és maximum a cél [2].*

	alapforma	kanonikus forma
a)	$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}, \underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0},$
b)	$A_1 \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_1, \underline{b}_1 \geq \underline{0}$	$A_1 \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}_1, \underline{b}_1 \geq \underline{0}$
	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2, \underline{b}_2 \geq \underline{0}$	$A_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2, \underline{b}_2 \geq \underline{0}$
	$A_3 \cdot \underline{x} \geq \underline{b}_3, \underline{b}_3 \geq \underline{0}$	$A_3 \cdot \underline{x} - \underline{v} = \underline{b}_3, \underline{b}_3 \geq \underline{0}$
c)	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to$ max.	$z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \to$ max. [2]

3.3. Lineáris modellek megoldásának numerikus módszerei

3.3.1. Normálfeladat megoldása

Foglaljuk össze a vektor-, mátrixszimbólumokkal megadott

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{b} \geq \underline{0} \\ \text{b)} & A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \\ \text{c)} & z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} \rightarrow \text{max.} \end{array}$$

normálfeladatról mondottakat [2].

3.7. Definíció. *A feladat lehetséges megoldásainak nevezzük azokat az $\underline{x}$ vektorokat, amelyekre $A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$ és $\underline{x} \geq \underline{0}$ feltételek teljesülnek. Ezt a következőképpen írhatjuk le a halmazelmélet jeleivel:*

$$L = \{\underline{x}/A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}; \quad \underline{x} \geq \underline{0}\} \text{ [2]}$$

3.8. Definíció. *A feladat optimális megoldásának nevezzük az L-nek azon $\underline{x}_0$ vektorait, amelyekre $\underline{c}^T \cdot \underline{x}_0 \geq \underline{c}^T \cdot \underline{x}, \forall \underline{x} \in L$ teljesül, azaz*

$$L_0 = \{\underline{x}_0/\underline{x}_0 \in L \text{ és } \underline{c}^T \underline{x}_0 \geq \underline{c}^T \underline{x}, \forall x \in L\} \text{ [2]}$$

3.9. Definíció. *Bázismegoldásnak nevezünk minden olyan $\underline{x}_\beta$ vektort, amely eleme az L halmaznak és az A mátrixnak az $\underline{x}_\beta$ pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak [2].*

Keresünk numerikus módszert az L_0 meghatározására.

A többváltozós lineáris programozási feladatok numerikus megoldásánál következőkre támaszkodhatunk, figyelembe véve a lineáris algebrában tanultakat:

1. *Az L lehetséges megoldások halmaza konvex. Ezért: ha a $z = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$ célfüggvény az L halmaz valamely $\underline{x}_0$ pontjában felveszi szélső értékét, akkor biztosan felveszi egy csúcspontjában is.*

2. *Az L halmaz csúcspontjait az $A \cdot \underline{x} + \underline{u} = \underline{b}$ egyenletrendszer bázismegoldásaiból határozhatjuk meg az $\underline{x} \geq \underline{0}$; $\underline{u} \geq \underline{0}$ feltételek figyelembevételével* [2].

   Ennek megfelelően nézzük a következő maximumfeladatot:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ \text{b)} & 2x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & 2x_1 \qquad \leq 60 \\ \text{c)} & z = 60x_1 + 80x_2 \rightarrow \text{maximum} \end{array}$$

Alakítsuk át a feladatot:

$$2x_1 + 4x_2 + u_1 \qquad = 160$$

$$3x_1 + 2x_2 + \quad u_2 \quad = 120$$

$$2x_1 + 0x_2 + \qquad u_3 = 60$$

Oldjuk meg a lineáris algebrában tanult szimplex táblázat segítségével [2].

B_0	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b
$\underline{e}_1$	2	4	1	0	0	160
$\underline{e}_2$	3	2	0	1	0	120
$\underline{e}_3$	2	0	0	0	1	60

3.1. táblázat.

Ha u_1, u_2 vagy u_3 oszlopában választunk generáló elemet, akkor u_1, u_2, u_3-hoz tartozó vektorok úgy kerülnek a bázisba, hogy a táblázat más elemei nem változnak meg, azaz

	x_1	x_2	b
u_1	2	4	160
u_2	3	2	120
u_3	2	0	60

3.2. táblázat.

lesz. Ezért a normálfeladatok tárgyalásánál ezt tekintjük indulótáblázatnak.[2].

Így kimondhatjuk:

3. *A normálfeladat indulótáblázatában, a B_0 bázisban az $\underline{u}$ duál változók szerepelnek. Így a normálfeladat induló* ***szimplex táblázata*** *a következő:*

B_0	$\underline{x}^T$	
$\underline{u}$	A	$\underline{b}$
z	$\underline{c}^T$	$\underline{0}$

3.3. táblázat.

ahol:

$\underline{x}^T$ a primális változók sorvektora,

A az egyenlőtlenségrendszer együtthatóinak mátrixa,

$\underline{c}^T$ a célfüggvény együtthatóinak sorvektora,

$\underline{u}$ duális változók vektora,

$\underline{b}$ kapacitások vektora [2].

4. *A szimplex táblázatból a következők olvashatók ki:*

   a.) *A bázisban lévő változók értékei mindig az utolsó oszlopban olvashatók le.*

   b.) *A bázisban nem lévő változók értékei nullák.*

   c.) *A jobb alsó sarokban mindig a program célértékének -1-szerese olvasható le.*

5. *A feladat bázismegoldásait oszlopvektor transzformációval állíthatjuk elő* [2].

Ezen ismeretek birtokában oldjuk meg a már említett feladatot.

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \underline{x}_1, \quad x_2 \geq 0 \\
\text{b)} & 2x_1 + 4x_2 \leq 160 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\
 & 2x_1 \qquad \leq 60 \\
\text{c)} & z = 60x_1 + 80x_2 \rightarrow \text{max.}
\end{array}
$$

Az induló szimplex táblázat:

B_0	x_1	x_2	$\underline{b}$
u_1	2	4	160
u_2	3	2	120
u_3	2	0	60
$-z$	60	80	0

3.4. táblázat.

Az indulótáblázatból egy lehetséges megoldás olvasható le:

$x_1 = 0$ $\quad u_1 = 160$

$x_2 = 0$ $\quad u_2 = 120$ $\quad z = 0.$

$u_3 = 60$

Az új bázisvektor az L lehetséges megoldási halmaz egy új csúcspontját jelenti. Ezt a báziscserével határozhatjuk meg. De nekünk az kell, hogy biztosan tudjuk, melyik csúcspont adja az optimális megoldást, ha van [2].

Ezt a következő módon érhetjük el:

1. Pozitív célelem felett választunk generáló elemet. (Ezzel biztosítjuk, hogy a célfüggvény értéke növekszik).

2. Pozitív számot választunk generáló elemnek ($a_{ij} \geq 0$).

3. Szűk keresztmetszetnél választunk generáló elemet.

$$(min \tfrac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} \geq 0)$$

4. Végrehajtjuk az elemcserét a következőképpen:

   a.) *A generáló elem helyébe annak reciprokát írjuk.*

   b.) *A generáló elem új sorát úgy kapjuk meg, hogy a régi sorát szorozzuk a generáló elem reciprokával.*

   c.) *A generáló elem új oszlopát úgy kapjuk meg, hogy a régi oszlop elemeit szorozzuk a generáló elem reciprokának -1-szeresével.*

   d.) *A táblázat többi elemét az ismert **bázistranszformációval** határozzuk meg [2].*

5. Optimális megoldást kapunk, ha

a.) *az utolsó sor elemei* $(c_j - k)$ *nem pozitívak.*

(a célfüggvény értéke tovább már nem növekszik) és

b.) *az utolsó oszlop elemei nem negatívak*

(a megoldások sem negatívak) [2].

Az elmondottakat kövessük végig a kijelölt feladaton:

Jelöljük B_0-val az induló szimplex táblázatot, B_1, B_2 stb. a javított táblázatokat.

B_0	x_1	x_2	$\underline{b}$
u_1	2	**4**	160
u_2	3	2	120
u_3	2	0	60
z	60	80	0

3.5. táblázat.

A B_0 táblázatban leolvasható egy lehetséges megoldás: $\begin{matrix} x_1 = 0 & u_1 = 160 \\ x_2 = 0 & u_2 = 120 \\ z = 0 & u_3 = 60 \end{matrix}$

Generáló elemet az x_2 oszlopban választunk, mert a z sorában itt van a legnagyobb pozitív szám. Megállapíthatjuk a szűk keresztmetszetet. Az utolsó oszlop elemeit osszuk el az x_2 oszlop megfelelő elemével. A legkisebb hányadost adó elem lesz a generáló elem. Tehát 4 lesz a generáló elem [2].

Új bázisra térünk rá, x_2 és u_1 helyet cserél:

B_1	x_1	u_1
x_2		
u_2		
u_3		
$-z$		

3.6. táblázat.

B_1 **táblázat kitöltése:**

- A generáló elem helyébe annak reciproka kerül.

- A generáló elem új sora: a generáló elem régi sorának elemeit szorozzuk meg a generáló elem reciprokával.

- A generáló elem új oszlopa: a régi oszlop elemeit szorozzuk meg a generáló elem reciprokának -1-szeresével.

- A többi elemet a bázistranszformációnál megismertek szerint számítjuk [2].

Tehát a B_1 táblázat a következőképpen néz ki:

B_1	x_1	u_1	
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	40
u_2	**2**	$-\frac{1}{2}$	40
u_3	2	0	60
$-z$	20	-20	-3200

3.7. táblázat.

Egy lehetséges megoldás:
$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & u_1 = 0 \\ x_2 = 40 & u_2 = 40 \\ & u_3 = 60 \end{array}$$

$z = 3200$

A programot még javíthatjuk, mert az utolsó sorban van pozitív elem és van felette pozitív szám, amelyet generáló elemnek tudunk választani [2].

Tehét a generáló elem a 2 lesz. Az előbbi számítást megismételve kapjuk a B_2 táblázatot:

B_2	u_2	u_1	$\underline{b}$
x_2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	30
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	20
u_3	-1	$\frac{1}{2}$	20
$-z$	-10	-15	-3600

3.8. táblázat.

Egy másik lehetséges megoldás:
$$\begin{array}{ll} x_1 = 20 & u_1 = 0 \\ x_2 = 30 & u_2 = 0 \\ & u_3 = 20 \end{array}$$

z = 3600

A B_2 program tovább nem javítható, mert a tábla utolsó sorában nincs pozitív elem. Tehát az optimális megoldás:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}, z_0 = 3600, \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$ [2]

4. fejezet

Mátrixjátékok megoldása szimplex módszerrel

4.1. A mátrixjáték és a lineáris programozás kapcsolata

Minden mátrix megoldható-e? A következőkben erre a kérdésre az igenlő választ megadó tételt, a játékelmélet alaptételét ismertetjük. A tételt NEUMANN JÁNOS (1928) bizonyította be először, így szokás NEUMANN-tételnek is nevezni. A tételre konstruktív bizonyítást adunk, amellyel megadjuk a mátrixjáték lineáris programozással való megoldásának módját [1].

4.1. Tétel. ***A JÁTÉKELMÉLET ALAPTÉTELE (NEUMANN-tétel)***

Tetszőleges ***A*** *kifizetési mátrixszal rendelkező mátrixjátéknak létezik nyeregpontja, az-az létezik olyan (x^*, y^*) stratégiapár, hogy*

$$yAx^* \leqq y^*Ax^* \leqq y^*Ax$$

minden (x, y) stratégiapárra teljesül [1].

Bizonyítás:

A P_1 játékos a következőképpen okoskodik. Ha a P_1 játékosnak sikerülne olyan **y** stratégiát választania, amelyre

$$y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} \geqq \alpha$$

akkor legalább αx_1 várható nyereségre tesz szert. Ha ugyanis a P_1 játékos stratégiája **y**, a P_2 játékosnak pedig az 1. stratégiája x_1, akkor a P_1 játékos várható nyeresége:

$$y_1a_{11}x_1 + y_2a_{21}x_1 + \ldots + y_ma_{m1}x_1$$

amelyből az előbbi állítás kiolvasható. [1] Hasonlóan, ha a P_2 játékos 2. stratégiája x_2, akkor legalább αx_2 várható nyereséget akkor tud elérni a P_1 játékos, ha

$$y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} \geqq \alpha$$

A fentieket a P_2 játékos minden x_j stratégiájára felírhatjuk. Így a játék során a P_1 játékos nyereménye legalább $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_n = \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \alpha$ lesz. Nyilvánvaló, hogy P_1 célja a nyereményének maximalizálása, tehát olyan **y** stratégiát próbál választani, amelynél minden j indexre legalább αx_j nyereségeket tud elérni és az α össznyeresége minél nagyobb legyen, azaz

$$\begin{gathered} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} \geqq \alpha \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} \geqq \alpha \\ \vdots \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} \geqq \alpha \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1 \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \geqq 0 \\ \alpha \to max! \text{ [1]} \end{gathered}$$

Mint látható a P_1 játékos **y** stratégiájának meghatározására egy lineáris programozási feladat adódott, amelyet a mátrix-vektor jelölésekkel egyszerűbben is írhatunk (az **1** vektor a lineáris algebrában megismert **1** = (1, 1, …, 1) csupa 1-esekből álló úgynevezett összegzővektort jelöli):

$$\begin{gathered} yA - \alpha 1 \geqq 0 \\ y1 = 1 \\ y \geqq 0 \\ \alpha \to max! \text{ [1]} \end{gathered}$$

Most nézzük meg a P_2 játékos hasonló okoskodását. Ha a P_2 játékosnak sikerülne olyan **x** stratégiát választania, amelyre

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqq \beta$$

akkor legfeljebb βy_1 várható vesztesége lenne, amikor a P_1 játékos a 1. stratégiája y_1. Ezt a P_1 játékos minden y_i stratégiájára felírhatjuk. Ekkor a játék során a P_2 játékosnak legfeljebb β vesztesége lesz és a P_2 játékos célja, hogy ezt a veszteségét minimalizálja. A P_2 játékos **x** stratégiájának meghatározására tehát az alábbi lineáris programozási feladat szolgál:

$$Ax - \beta 1 \leqq 0$$

$$x1 = 1$$

$$x \geqq 0$$

$$\beta \to min! \text{ [1]}$$

A két játékos stratégiáinak meghatározására szolgáló lineáris programozási feladatok egymásnak duálisai [1].

5. fejezet

Szimplex módszer online megoldó alkalmazása

Már tudjuk azt, hogy a mátrixjátékokat megoldhatjuk szimplex módszer segítségével. Napjainkban már ismerünk olyan online megoldó kalkulátorokat, amelyek segítségével könnyen megtudunk oldani egy mátrixjátékot.

Szakdolgozatomban a következő online megoldó alkalmazást használom és szeretném ismertetni : **https ://math.semestr.ru/games/index.php**.

A kalkulátor segítségével meg tudjuk határozni a mátrixjáték értékét (alsó és felső értékét), tudjuk ellenőrizni, hogy van-e a mátrixjátéknak nyeregpontja, megoldást keres a kevert stratégiák esetén.

Az online megoldó kalkulátor a mátrixjátékot lineáris programozási feladattá redukálja, majd a szimplex módszert felhasználva adja meg a megoldást. Alkalmazása nagyon egyszerű, első lépésként meg kell adnunk a kifizetési mátrix méretét, majd tovább lépve be kell írnunk a kifizetési mátrixot. És végül a megoldási módszert kell kiválasztanunk a következő négy lehetőség közül : minimax (analitikus) módszer, lineáris programozás (szimplex módszer), grafikus módszer és Braun módszere.

A következő két feladatot a már említett online kalkulátorral fogom megoldani, megoldási módszerként a lineáris programozást (szimplex módszert) választom.

1. Hozzon létre egy mátrixjátékot az alábbi feladathoz :

   A vállalat háromféle terméket állít elő : (A_1, A_2, A_3), a nyereség függ a kereslettől, amely négy állapotban lehet : (B_1, B_2, B_3, B_4). Adott egy mátrix, melynek az a_{ij} elemei jellemzi a nyereséget, ahol az i-edik termék kibocsátásakor a vállalkozás megkapja a j-edik keresletet [10].

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

5.1. táblázat.

Megoldás:

A feladat bevezethető mátrixjátékba, amelyben a vállalat A játszik a B kereslet ellen.

A probléma megoldása előtt egyszerűsíthetjük a játékot, a fizetési mátrix elemzése és a nyilvánvalóan hátrányos, vagy ismétlődő stratégiák elvetése után. A második stratégia (a mátrix második oszlopa) egyértelműen hátrányos a B játékos számára az elsőhöz képest (a második oszlop elemei nagyobbak, mint az első oszlop elemei), mivel a B játékos célja az A játékos nyereségének a csökkentése. Ezért a második oszlop eldobható. A következő mátrixot kapjuk:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

A feladat tovább lineáris programozás segítségével megoldható [10].

A következő lépésben a szimplex módszer online megoldó alkalmazását használjuk.

Nézzünk meg egy kétszemélyes játékot, ahol az érdekek ellentétesek. Az ilyen játékot két személy antagonista játékának nevezzük. Ebben az esetben az egyik játékos nyeresége megegyezik a másik játékos veszteségével.

Ha minden játékos kiválasztotta a saját stratégiáját, akkor ezt a stratégiapárt játékszituációnak nevezzük. Meg kell jegyeznünk, hogy minden játékos tudja, hogy milyen stratégiát választott az ellenfele.

Az első játékos tiszta stratégiája az A kifizetési mátrix n sora egyikének kiválasztása, a második játékos tiszta stratégiája pedig ugyan az a mátrix egyik oszlopának a kiválasztása.

1. Ellenőrizzük, hogy van-e a kifizetési mátrixnak nyeregpontja. Ha van, akkor a játék megoldását tiszta stratégiákkal írjuk ki.

Játékosok	B_1	B_2	B_3	$a = min(A_i)$
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
$b = max(B_j)$	9	6	8	

5.2. táblázat.

A játék alsó értéke: $a = max(a_i) = 4$.

A játék felső értéke: $b = min(b_j) = 6$.

Ez a játék nyeregpont hiányzását jelzi, mivel $a \neq b$, így a játék értéke a $4 \leq y \leq 6$ korlátok közé esik. Megkeressük a játék megoldását kevert stratégiákkal.

2. Ellenőrizzük a kifizetési mátrixot a sorok és az oszlopok dominálásával.

Mondjuk, hogy az első játékos i-edik stratégiája dominálja a k-adik stratégiáját, ha $a_{ij} \geq a_{kj}$, minden $j \in N$, és legalább egy j-re teljesül, hogy $a_{ij} > a_{kj}$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az i-edik stratégia (vagy sor) - **domináló**, a k-adik pedig a **dominált**.

Azt mondjuk, hogy a második játékos j-edik stratégiája dominálja az i-edik stratégiáját, ha minden $j \in M$ $a_{ij} \leq a_{il}$ és legalább egy i-re teljesül, hogy $a_{ij} < a_{il}$. Ebben az esetben a j-edik stratégiát (oszlopot) **domináló**nak nevezzük, az l-ediket **dominált**nak.

A kifizetési mátrix nem tartalmaz domináló sorokat és oszlopokat.

3. Megkeressük a játék megoldását kevert stratégiákkal.

A lineáris programozási duális feladatok matematikai modelljét a következőképpen írhatjuk le:

Megkeressük az F(x) függvény minimumát korlátozásokkal (a második játékos számára):

$3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1$

$6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1$

$8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1$

$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow$min

Korlátozásokkal megkeressük a Z(y) függvény maximumát (az első játékos számára):

$3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1$

$9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1$

$7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1$

$Z(y) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow$ max

Megoldjuk a lineáris programozási feladatot szimplex módszer segítségével, felhasználva a szimplex táblázatot.

Meghatározzuk a $Z(Y) = y_1 + y_2 + y_3$ célfüggvény maximális értékét az alábbi feltételek és korlátozások mellett:

$3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1$

$9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1$

$7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1$

Az első lépésben az egyenlőtlenségrendszert új változók bevezetésével egyenletrendszerré redukáljuk (áttérünk kanonikus alakra):

$3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1$

$9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1$

$7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_6 = 1$

Feltételezzük, hogy a szabad változók nullával egyenlők, megkapjuk az első alaptervet: $Y0 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	1	3	6	8	1	0	0
y_5	1	9	4	2	0	1	0
y_6	1	7	5	4	0	0	1
$Z(Y0)$	0	-1	-1	-1	0	0	0

5.3. táblázat.

Áttérünk a szimplex módszer fő algoritmusára.

0. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális, mivel az indexsor negatív együtthatókat tartalmaz.

Generáló elem meghatározására az y_3 oszlopot választjuk. Kiszámoljuk a D_i értékét soronként, mint az osztás hányadosa: b_i/a_{i3}, és kiválasztjuk belőle a legkisebbet: $min(1:8, 1:2, 1:4) = 1/8$.

Tehát a generáló elem a 8.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_4	1	3	6	8	1	0	0	$\frac{1}{8}$
y_5	1	9	4	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$
y_6	1	7	5	4	0	0	1	$\frac{1}{4}$
$Z(Y1)$	0	-1	-1	-1	0	0	0	

5.4. táblázat.

Az y_4 változó helyére az y_3 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{8}$	0	0
y_5	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0
y_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
$Z(Y1)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0

5.5. táblázat.

1. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális, mivel az indexsor negatív együtthatókat tartalmaz.

Generáló elem meghatározására az y_1 oszlopot választjuk. Kiszámoljuk a D_i értékét soronként, mint az osztás hányadosa: b_i/a_{i1}, és kiválasztjuk belőle a legkisebbet: $min(\frac{1}{8} : \frac{3}{8}, \frac{3}{4} : 8\frac{1}{4}, \frac{1}{2} : 5\frac{1}{2}) = \frac{1}{11}$.

Tehát a generáló elem a $8\frac{1}{4}$.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{3}$
y_5	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{11}$
y_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{11}$
$Z(Y2)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0	

5.6. táblázat.

Mivel az utolsó oszlopban több minimális elem található, $\frac{1}{11}$, akkor a sorszámot a Kreko szabálya szerint választjuk meg.

Kreko szabálya a következő:

A sor elemei, amelyek tartalmazzák a legkisebb értéket, $min = \frac{1}{11}$, feltételezett megengedett elemekre osztódik, az eredményeket pedig további sorokba rögzítjük. Generáló sornak azt választjuk, amelyben hamarabb találkozunk a legkisebb hányadossal akkor, amikor oszloponként a táblázatot balról jobbra olvassuk.

Az y_5 változó helyére az y_1 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_3	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{7}{11}$	1	$\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{22}$	0
y_1	$\frac{1}{11}$	1	$\frac{10}{33}$	0	$-\frac{1}{33}$	$\frac{4}{33}$	0
y_6	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
$Z(Y2)$	$\frac{2}{11}$	0	$-\frac{2}{33}$	0	$\frac{7}{66}$	$\frac{5}{66}$	0

5.7. táblázat.

2. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális, mivel az indexsor negatív együtthatókat tartalmaz.

Generáló elem meghatározására az y_2 oszlopot választjuk. Kiszámoljuk a D_i értékét soronként, mint az osztás hányadosa: b_i/a_{i2}, és kiválasztjuk belőle a legkisebbet: $min(\frac{1}{11} : \frac{7}{11}, \frac{1}{11} : \frac{10}{33}, 0 : \frac{1}{3}) = 0$.

Tehát a generáló elem az $\frac{1}{3}$.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_3	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{7}{11}$	1	$\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{22}$	0	$\frac{1}{7}$
y_1	$\frac{1}{11}$	1	$\frac{10}{33}$	0	$-\frac{1}{33}$	$\frac{4}{33}$	0	$\frac{3}{10}$
y_6	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
$Z(Y3)$	$\frac{2}{11}$	0	$-\frac{2}{33}$	0	$\frac{7}{66}$	$\frac{5}{66}$	0	

5.8. táblázat.

Az y_6 változó helyére az y_2 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_3	$\frac{1}{11}$	0	0	1	$\frac{17}{22}$	$\frac{27}{22}$	$-\frac{21}{11}$
y_1	$\frac{1}{11}$	1	0	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$-\frac{10}{11}$
y_2	0	0	1	0	-1	-2	3
$Z(Y3)$	$\frac{2}{11}$	0	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{2}{11}$

5.9. táblázat.

3. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális, mivel az indexsor negatív együtthatókat tartalmaz.

Generáló elem meghatározására az y_5 oszlopot választjuk. Kiszámoljuk a D_i értékét soronként, mint az osztás hányadosa: b_i/a_{i5}, és kiválasztjuk belőle a legkisebbet: $min(\frac{1}{11} : 1\frac{5}{22}, \frac{1}{11} : \frac{8}{11}, -) = \frac{2}{27}$.

Tehát a generáló elem a $1\frac{5}{22}$.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_3	$\frac{1}{11}$	0	0	1	$\frac{17}{22}$	$\frac{27}{22}$	$-\frac{21}{11}$	$\frac{2}{27}$
y_1	$\frac{1}{11}$	1	0	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{1}{8}$
y_2	0	0	1	0	-1	-2	3	-
$Z(Y4)$	$\frac{2}{11}$	0	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{2}{11}$	

5.10. táblázat.

Az y_3 változó helyére az y_5 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_5	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{22}{27}$	$\frac{17}{27}$	1	$-\frac{14}{9}$
y_1	$\frac{1}{27}$	1	0	$-\frac{16}{27}$	$-\frac{5}{27}$	0	$\frac{2}{9}$
y_2	$\frac{4}{27}$	0	1	$\frac{44}{27}$	$\frac{7}{27}$	0	$-\frac{1}{9}$
$Z(Y4)$	$\frac{5}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	$\frac{1}{9}$

5.11. táblázat.

Az iterációnak vége, mivel az indexsor nem tartalmaz negatív elemet - az optimális tervet megtaláltuk.

A szimplex táblázat utolsó változata:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_5	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{22}{27}$	$\frac{17}{27}$	1	$-\frac{14}{9}$
y_1	$\frac{1}{27}$	1	0	$-\frac{16}{27}$	$-\frac{5}{27}$	0	$\frac{2}{9}$
y_2	$\frac{4}{27}$	0	1	$\frac{44}{27}$	$\frac{7}{27}$	0	$-\frac{1}{9}$
$Z(Y5)$	$\frac{5}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	$\frac{1}{9}$

5.12. táblázat.

Az optimális tervet a következő formában írhatjuk fel:

$y_1 = \frac{1}{27}, y_2 = \frac{4}{27}, y_3 = 0$

$Z(Y) = 1 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{4}{27} + 1 \cdot 0 = \frac{5}{27}$

Az utolsó iteráció felhasználásával megkapjuk a duális feladat optimális tervét:

$x_1 = \frac{2}{27}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{9}$

Ugyan ezt a megoldást kapjuk a dualitástételek alkalmazásával.

A dualitástételből következik, hogy $X = C \cdot A^{-1}$.

Az **A** mátrixot létrehozzuk vektorok komponenseiből, amelyeket az optimális bázis tartalmazza.

$$A = (A_5, A_1, A_2) = \begin{matrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \end{matrix}$$

Algebrai átalakításokkal meghatározzuk az inverz mátrixot: $D = A^{-1}$, és kapjuk:

$$D = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{27} & 1 & -\frac{14}{9} \\ -\frac{5}{27} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Ezután $X = C \cdot A^{-1} =$

$$(0,1,1)\cdot \begin{pmatrix} \frac{17}{27} & 1 & -\frac{14}{9} \\ -\frac{5}{27} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{27} & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = (\tfrac{2}{27}; 0; \tfrac{1}{9})$$

A duális feladat optimális megoldása a következő:

$x_1 = \frac{2}{27}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{9}$

$F(X) = 1 \cdot \frac{2}{27} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{27}$

A játék értéke: $g = \frac{1}{F(x)}$ és a játékosok a stratégiáikat a következő valószínűségekkel alkalmazzák:

$q_i = g \cdot y_i; \quad p_i = g \cdot x_i.$

A játék értéke: $g = 1 : \frac{5}{27} = \frac{27}{5}$

$p_1 = \frac{27}{5} \cdot \frac{2}{27} = \frac{2}{5}$

$p_2 = \frac{27}{5} \cdot 0 = 0$

$p_3 = \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{5}$

Az első játékos optimális kevert stratégiája: $P = (\frac{2}{5}; 0; \frac{3}{5})$

$q_1 = \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{5}$

$q_2 = \frac{27}{5} \cdot \frac{4}{27} = \frac{4}{5}$

$q_3 = \frac{27}{5} \cdot 0 = 0$

A második játékos optimális kevert stratégiája: $Q = (\frac{1}{5}; \frac{4}{5}; 0)$

A játék értéke: $v = \frac{27}{5}$.

4. A játék megoldásának helyességét ellenőrizzük az optimális stratégiák kritériumának a segítségével:

$\sum a_{ij} q_j \leq v$

$\sum a_{ij} p_i \geq v$

$M(P_1; Q) = (3 \cdot \frac{1}{5}) + (6 \cdot \frac{4}{5}) + (8 \cdot 0) = 5.4 = v$

$M(P_2; Q) = (9 \cdot \frac{1}{5}) + (4 \cdot \frac{4}{5}) + (2 \cdot 0) = 5 \leq v$

$M(P_3;Q) = (7 \cdot \frac{1}{5}) + (5 \cdot \frac{4}{5}) + (4 \cdot 0) = 5.4 = v$

$M(P;Q_1) = (3 \cdot \frac{2}{5}) + (9 \cdot 0) + (7 \cdot \frac{3}{5}) = 5.4 = v$

$M(P;Q_2) = (6 \cdot \frac{2}{5}) + (4 \cdot 0) + (5 \cdot \frac{3}{5}) = 5.4 = v$

$M(P;Q_3) = (8 \cdot \frac{2}{5}) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot \frac{3}{5}) = 5.6 \geq v$

Minden egyenlőtlenség teljesül, mint egyenlőség vagy szigorú egyenlőtlenség, következtetésképpen, a játék megoldása helyes.

2. Adott a mátrixjáték kifizetési mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Keressük meg a játék értékét V, és az optimális kevert stratégiákat [10]!

Megoldás:

Ismét alkalmazzuk a szimplex módszer online megoldó alkalmazását.

1. Ellenőrizzük, hogy van-e a kifizetési mátrixnak nyeregpontja. Ha van, akkor a játék megoldását tiszta stratégiákkal írjuk ki.

Játékosok	B_1	B_2	B_3	$a = min(A_i)$
A_1	4	2	2	2
A_2	2	5	0	0
A_3	0	2	5	0
$b = max(B_j)$	4	5	5	

5.13. táblázat.

A játék alsó értéke: $a = max(a_i) = 2$.

A játék felső értéke: $b = min(b_j) = 4$

Ez a játék nyeregpont hiányzását jelzi, mivel $a \neq b$, így a játék értéke a $2 \leq y \leq 4$ korlátok közé esik. Megkeressük a játék megoldását kevert stratégiákkal.

2. Ellenőrizzük a kifizetési mátrixot a sorok és az oszlopok dominálásával.

Az előző feladathoz hasonló gondolatmenet szerint arra a következtetésre jutunk, hogy a kifizetési mátrix nem tartalmaz domináló sorokat és oszlopokat.

3. Megkeressük a játék megoldását kevert stratégiákkal.

A lineáris programozási duális feladatok matematikai modelljét a következőképpen írhatjuk le:

Megkeressük az F(x) függvény minimumát korlátozásokkal (a második játékos számára):

$4x_1 + 2x_2 \geq 1$

$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 1$

$2x_1 + 5x_3 \geq 1$

$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$

Korlátozásokkal megkeressük a Z(y) függvény maximumát (az első játékos számára):

$4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$

$2y_1 + 5y_2 \leq 1$

$2y_2 + 5y_3 \leq 1$

$Z(y) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$

Megoldjuk a lineáris programozási feladatot szimplex módszer segítségével.

Meghatározzuk a $Z(y) = y_1 + y_2 + y_3$ célfüggvény maximális értékét az alábbi feltételek és korlátozások mellet:

$4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$

$2y_1 + 5y_2 \leq 1$

$2y_2 + 5y_3 \leq 1$

Áttérünk kanonikus alakra:

$4y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 = 1$

$2y_1 + 5y_2 + y_5 = 1$

$2y_2 + 5y_3 + y_6 = 1$

Megkapjuk az első alaptervet: $Y0 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	1	4	2	2	1	0	0
y_5	1	2	5	0	0	1	0
y_6	1	0	2	5	0	0	1
$Z(Y0)$	0	-1	-1	-1	0	0	0

5.14. táblázat.

Áttérünk a szimplex módszer fő algoritmusára.

0. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális. Generáló elem meghatározására az y_3 oszlopot választjuk. A generáló elem: 5.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_4	1	4	2	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$
y_5	1	2	5	0	0	1	0	-
y_6	1	0	2	5	0	0	1	$\frac{1}{5}$
$Z(Y1)$	0	-1	-1	-1	0	0	0	

5.15. táblázat.

Az y_6 változó helyére az y_3 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	$\frac{3}{5}$	4	$\frac{6}{5}$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$
y_5	1	2	5	0	0	1	0
y_3	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$
$Z(Y1)$	$\frac{1}{5}$	-1	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$

5.16. táblázat.

1. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális. Generáló elem meghatározására az y_1 oszlopot választjuk. A generáló elem: 4.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_4	$\frac{3}{5}$	4	$\frac{6}{5}$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{20}$
y_5	1	2	5	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$
y_3	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	-
$Z(Y2)$	$\frac{1}{5}$	-1	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	

5.17. táblázat.

Az y_4 változó helyére az y_1 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	$\frac{3}{20}$	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$
y_5	$\frac{7}{10}$	0	$\frac{22}{5}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{5}$
y_3	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$
$Z(Y2)$	$\frac{7}{20}$	0	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{10}$

5.18. táblázat.

2. Iteráció

A jelenlegi kiinduló alapterv nem optimális. Generáló elem meghatározására az y_2 oszlopot választjuk. A generáló elem: $4\frac{2}{5}$.

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	min
y_1	$\frac{3}{20}$	1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
y_5	$\frac{7}{10}$	0	$\frac{22}{5}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{44}$
y_3	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$Z(Y3)$	$\frac{7}{20}$	0	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{10}$	

5.19. táblázat.

Az y_5 változó helyére az y_2 változó kerül. Kapunk egy új szimplex táblázatot:

Bázis	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	$\frac{9}{88}$	1	0	0	$\frac{25}{88}$	$-\frac{3}{44}$	$-\frac{5}{44}$
y_2	$\frac{7}{44}$	0	1	0	$-\frac{5}{44}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{22}$
y_3	$\frac{3}{22}$	0	0	1	$\frac{1}{22}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$
$Z(Y3)$	$\frac{35}{88}$	0	0	0	$\frac{19}{88}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{5}{44}$

5.20. táblázat.

Az iterációnak vége - az optimális tervet megtaláltuk.

Az optimális tervet a következő formában írhatjuk fel:

$y_1 = \frac{9}{88}, y_2 = \frac{7}{44}, y_3 = \frac{3}{22}$

$Z(Y) = 1 \cdot \frac{9}{88} + 1 \cdot \frac{7}{44} + 1 \cdot \frac{3}{22} = \frac{35}{88}$

A duális feladat optimális terve:

$x_1 = \frac{19}{88}, x_2 = \frac{3}{44}, x_3 = \frac{5}{44}$

Ugyan ezt a megoldást kapjuk a dualitástételek alkalmazásával.

A dualitástételből következik, hogy $X = C \cdot A^{-1}$.

Az **A** mátrixot létrehozzuk vektorok komponenseiből.

$$A = (A_1, A_2, A_3) = \begin{matrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Meghatározzuk az inverz mátrixot: $D = A^{-1}$, és kapjuk:

$$D = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{88} & -\frac{3}{44} & -\frac{5}{44} \\ -\frac{5}{44} & \frac{5}{22} & \frac{1}{22} \\ \frac{1}{22} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Ezután $X = C \cdot A^{-1} =$

$$(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{25}{88} & -\frac{3}{44} & -\frac{5}{44} \\ -\frac{5}{44} & \frac{5}{22} & \frac{1}{22} \\ \frac{1}{22} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = (\frac{19}{88}; \frac{3}{44}; \frac{5}{44})$$

A duális feladat optimális megoldása a következő:

$x_1 = \frac{19}{88}, x_2 = \frac{3}{44}, x_3 = \frac{5}{44}$

$F(X) = 1 \cdot \frac{19}{88} + 1 \cdot \frac{3}{44} + 1 \cdot \frac{5}{44} = \frac{35}{88}$

A játék értéke: $g = \frac{1}{F(x)}$ és a játékosok a stratégiáikat a következő valószínűségekkel alkalmazzák:

$q_i = g \cdot y_i; \quad p_i = g \cdot x_i.$

A játék értéke: $g = 1 : \frac{35}{88} = \frac{88}{35}$

$p_1 = \frac{88}{35} \cdot \frac{19}{88} = \frac{19}{35}$

$p_2 = \frac{88}{35} \cdot \frac{3}{44} = \frac{6}{35}$

$p_3 = \frac{88}{35} \cdot \frac{5}{44} = \frac{2}{7}$

Az első játékos optimális kevert stratégiája: $P = (\frac{19}{35}; \frac{6}{35}; \frac{2}{7})$

$q_1 = \frac{88}{35} \cdot \frac{9}{88} = \frac{9}{35}$

$q_2 = \frac{88}{35} \cdot \frac{7}{44} = \frac{2}{5}$

$q_3 = \frac{88}{35} \cdot \frac{3}{22} = \frac{12}{35}$

A második játékos optimális kevert stratégiája: $Q = (\frac{9}{35}; \frac{2}{5}; \frac{12}{35})$

A játék értéke: $v = \frac{88}{35}$.

4. A játék megoldásának helyességét ellenőrizzük az optimális stratégiák kritériumának a segítségével:

$\sum a_{ij} q_j \leq v$

$\sum a_{ij} p_i \geq v$

$M(P_1; Q) = (4 \cdot \frac{9}{35}) + (2 \cdot \frac{2}{5}) + (2 \cdot \frac{12}{35}) = 2.514 = v$

$M(P_2; Q) = (2 \cdot \frac{9}{35}) + (5 \cdot \frac{2}{5}) + (0 \cdot \frac{12}{35}) = 2.514 = v$

$M(P_3; Q) = (0 \cdot \frac{9}{35}) + (2 \cdot \frac{2}{5}) + (5 \cdot \frac{12}{35}) = 2.514 = v$

$M(P; Q_1) = (4 \cdot \frac{19}{35}) + (2 \cdot \frac{6}{35}) + (0 \cdot \frac{2}{7}) = 2.514 = v$

$M(P; Q_2) = (2 \cdot \frac{19}{35}) + (5 \cdot \frac{6}{35}) + (2 \cdot \frac{2}{7}) = 2.514 = v$

$M(P; Q_3) = (2 \cdot \frac{19}{35}) + (0 \cot \frac{6}{35}) + (5 \cdot \frac{2}{7}) = 2.514 = v$

Minden egyenlőtlenség teljesül, mint egyenlőség vagy szigorú egyenlőtlenség, következtetésképpen, a játék megoldása helyes.

Összefoglalás

Diplomamunkámban a mátrixjátékok szimplex módszerrel történő megoldásával foglalkoztam.

Áttekintettem a témához kapcsolódó fontosabb szakirodalmakat. Az egyszerűbb megoldás érdekében egy online megoldó kalkulátor segítségével ismertettem egy mátrixjáték megoldási lehetőségét szimplex módszerrel. A dolgozat célját sikerült elérnem.

Egy mátrixjáték során a fő feladatunk az, hogy megtaláljuk a játékosok optimális, legjobb stratégiáit úgy, hogy a stratégiákat egymástól függetlenül választják ki a stratégiahalmazukból. A játékosok ismerik egymás választási lehetőségeit, viszont nem tudják előre, hogy a többi játékos melyik stratégiát fogja választani. Az optimális stratégiát lineáris programozás segítségével meg tudjuk határozni, tiszta és kevert stratégiák esetén is. Hogy egy lineáris programozási feladat optimumát meg tudjuk találni, erre alkalmazzuk a szimplex módszert, amely egy algoritmusos módszer. A szimplex módszer iterációkat hajt végre és báziscserék segítségével keresi meg az optimális megoldást.

A lineáris programozás megoldásának tanulmányozása nagyon fontos, mivel alkalmazási területe nagyon széleskörű. Számos közgazdászati feladat bevezethető mátrixjátékba, amelynek megoldása során eljuthatunk a legkedvezőbb, optimális megoldáshoz.

Irodalomjegyzék

[1] Dr. Nagy Tamás: Játékelmélet. Miskolci Egyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék, 2013.

https://www.uni-miskolc.hu/~matente/oktatasi%20tananyagok/JATEKELMELET.pdf

(letöltés dátuma: 2020.04.30.)

[2] Ferenczi Zoltán: Operációkutatás. Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával, 2006.

http://www.sze.hu/~kundi/opkut_jegyzetek/Oper%e1ci%f3kutat%e1s.pdf

(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[3] Maros István: Operációkutatás informatikusoknak. Egyetemi tananyag. Typotex Kiadó, 2011.

(letöltés dátuma: 2021.03.26.)

[4] Oskar Lange: Optimális döntések. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966.

[5] Simonovits András: Bevezetés a játékelméletbe: vázlat. BME, Matematikai Intézet, 2007. május 6.

https://math.bme.hu/diffe/staff/simonovits_jatek.pdf

(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[6] Végh László, Király Tamás, Pap Júlia: Játékelmélet jegyzet, 2020. április 14.

http://tkiraly.web.elte.hu/students/jatekelmelet_jegyzet.pdf

(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[7] Акулич И.Л. : Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1986. — 319 с.

[8] Л. Я. Бухарбаева, Ю. В. Егорова, М. В. Франц: Экономические приложения теории игр, Уфа 2017.
http://bcugatu.ru/wp-content/uploads/2017/07/teorya-igr-b-p-lr.pdf
(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[9] http://epa.oszk.hu/00600/00691/00065/pdf/2009-05.pdf
(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[10] https://function-x.ru/games_matrix_games.html
(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[11] https://www.matburo.ru/Examples/Files/Games2.pdf
(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

Melléklet

A melléklet tartalmaz egy PascalABC.Net-ben készített programot, amellyel modellezhetjük a mátrixjátékot. Mivel a játékosok kevert stratégiájuk valószínűségeket tartalmaznak, ezért a program alkalmazása során lehetőség van kiválasztani, hogy hányszor akarjuk végrehajtani a játékot. Ennek az értékét **lepes** változó tartalmazza. Ajánlatos minél nagyobb értéket megadni a **lepes** változónak, és nem egyszer, hanem többször modellezni a játékot.

A program:

```
program matrixjatekok;
var
  ip, jq: integer;
  a: array [1..20, 1..20] of real;    // a - kifizetesi matrix
  // p - az elso jatekos strategiaja (valoszinusegek)
  // q - a masodik jatekos strategiaja (valoszinusegek)
  p, q: array [1..20] of real;
  r1, r2: real;
begin
  writeln('Matrixjatek modellezese (kiserlet a megoldas ellenorzesere.)');
  // n - az elso jatekos strategiainak szama
  var n:= ReadInteger('1. jatekos strategiainak szama, n=');
  // m - a masodik jatekos strategiainak szama
  var m:= ReadInteger('2. jatekos strategiainak szama, m=');
  writeln('A kifizetesi matrix bevitele: ');
  for var i:= 1 to n do
    for var j:= 1 to m do
      begin   write ('a[', i, ',', j, '] = ');   Read(a[i, j]);   end;
  // p - az elso jatekos strategiainak bevitele
```

```
writeln('1. jatekos strategiaja:');
for var i := 1 to n do
begin write ('p[', i, ']= ');    Read(p[i]);    end;
// q - a masodik jatekos strategiainak bevitele
writeln('2. jatekos strategiaja:');
for var j := 1 to m do
begin write ('q[', j, ']= ');    Read(q[j]);    end;
//lepes - hanyszor fogjak a jatekosok jatszani a jatekot
//befejezes: lepes=0, (0 - a kilepes kodja)
randomize;
while true do
begin
  var lepes := ReadInteger('Lépések száma= ');
if lepes = 0 then break;
Writeln('utan a matrixjatek: ');
for var i :=1 to n do
begin
  for var j :=1 to m do
  write (' ', a[i, j], ' ');    writeln;
end;
var s := 0.0;
for var k := 1 to lepes do
begin
  //az elso jatekos strategiainak kivalasztasa (veletlen)
  r1 := random();    // r1 - veletlen szam a (0..1) intervallumon
  var pp := 0.0;
  for var i := 1 to n do
  begin
    pp := pp + p[i];
    if r1 < pp then begin ip := i; break; end;
  end;
  //a masodik jatekos strategiainak kivalasztasa (veletlen)
  r2 := random();    // r2 - veletlen szam a (0..1) intervallumon
```

```
    var qq := 0.0;
    for var j := 1 to m do
    begin
      qq := qq + q[j];
      if r2 < qq then begin jq := j; break; end;
  end;
  s := s + a[ip, jq]; // a[ip, jq] - a matrix kivalasztott eleme    end;
  s := s / lepes;
  Writeln(' megoldasa=', s:6:4);    end;
end.
```

Előzetesen megoldottam a következő mátrixjátékot:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldása: 2.5, és az 1. játékos optimális stratégiája p = (0.75, 0.25), a 2. játékos optimális stratégiája q = (0.5, 0.5). A programmal modelleztem a játékot. A program által kiadott eredmény:

Mátrixjáték modellezése (kíséreletel a megoldás ellenőrzésére.)

1. játékos stratégiáinak száma, n = 2

2. játékos stratégiáinak száma, m = 2

A kifizetési márix bevitele:

a[1, 1] = 2   a[1, 2] = 3

a[2, 1] = 4   a[2, 2] = 1

1. játékos stratégiája: p[1] = 0.75   p[2] = 0.25

2. játékos stratégiája: q[1] = 0.50   q[2] = 0.50

Lépések száma: 1000

után a mátrixjáték: $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix}$

megoldása = 2.4770

Lépések száma: 50000

után a mátrixjáték: $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix}$

megoldása = 2.5040

Láthatjuk, hogy a program által kiadott eredmény közel van a pontos, elméleti értékhez: 2.5.

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Резюме

У дипломній роботі я займалася вирішенням матричних ігор симплексним методом.

На початку роботи я переглянула основну літературу, що стосується даної теми. Для більш простого рішення, за допомогою онлайн-калькулятора я описала розв’язування матричної гри на основі симплекс-методу.

У матричній грі нашим основним завданням є пошук оптимальних, (найкращих) стратегій для гравців, при умові, що гравці обирають стратегії із наборів стратегій незалежно один від одного. Гравці знають можливі вибори один одного, але наперед не знають, яку стратегію вибере інший гравець. Оптимальну стратегію можна визначити за допомогою методів лінійного програмування, як для чистих, так і змішаних стратегій. Щоб знайти оптимум задачі лінійного програмування, ми використовуємо симплексний метод, який є алгоритмічним методом. Симплексний метод виконує ітерації та використовує базові обміни для пошуку оптимального рішення.

Вивчення методів лінійного програмування є дуже важливим, оскільки сфера його застосування дуже широка. Багато завдань з економіки можна звести до матричних ігор, розв’язавши які, можна прийти до найбільш оптимального рішення.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1007586113

Дата перевірки:
28.04.2021 21:04:39 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
28.04.2021 21:19:06 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Zsinkin Noémi. Mátrixjátékok megoldása szimplex módszerrel

Кількість сторінок: 62 **Кількість слів:** 10087 **Кількість символів:** 60620 **Розмір файлу:** 753.63 KB **ID файлу:** 1007701994

19.8% Схожість

Найбільша схожість: 13.4% з Інтернет-джерелом (https://www.uni-miskolc.hu/~matente/oktatasi%20tananyagok/JATEK..

19.8% Джерела з Інтернету | 194 .... Сторінка 64

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0.93% Цитат

Цитати | 4 .... Сторінка 65

Не знайдено жодних посилань

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 19

Nyilatkozat

Alulírott, Zsinkin Noémi 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.