ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3" від „27" квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

МОДЕЛЮВАННЯ ОРЛІЧЕВИХ ПРОЦЕСІВ У СВІТЛІ ПРАЦЬ ЗАКАРПАТСЬКИХ МАТЕМАТИКІВ

Полінскі Олександра Степанівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н, завідувач кафедри математики та інформатики

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

МОДЕЛЮВАННЯ ОРЛІЧЕВИХ ПРОЦЕСІВ У СВІТЛІ ПРАЦЬ ЗАКАРПАТСЬКИХ МАТЕМАТИКІВ

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-гокурсу

Полінскі Олександра Степанівна

Освітня програма 014 «Середня освіта(Математика)»

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н, завідувач кафедри математики та інформатики

Рецензент: **Жигуц Юрій Юрійович**

док. техн. наук, професор, завідувач кафедри технології машинобудування, УжНУ

Берегове
2021

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

ORLICZ FOLYAMATOK MODELLEZÉSE KÁRPÁTALJAI MATEMATIKUSOK MUNKÁINAK TÜKRÉBEN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Palinszky Alexandra

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014. Középiskolai oktatás (Matematika)

Témavezető: dr. Kucsinka Katalin

fiz.-mat. tud. kandidátusa, PhD, tanszékvezető

Recenzens: Zsiguc György

techn. tud. doktora, prof., tanszékvezető építőgépészeti technológiák tanszék, UNE

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Kutatási területként választottam a sztochasztikus valószínűségi változók modellezését. Munkám során olyan folyamatok kutatásával és modellezésével foglalkozok, melyek az Orlicz-féle sztochasztikus folyamatokhoz tartoznak.

A sztochasztikus folyamatok, vagy más néven véletlenszerű folyamatok, olyan folyamatok, amelyeket részben, vagy egészében valószínűségi változók jellemeznek. Ezek a véletlenszerű folyamatok a szochasztikus modellezés területén nagyon fontos eszközök, ugyanis ezen folyamatok segítségével leírjuk, illetve közelíteni tudjuk a véletlen jelenségeket. Az említett eszköz számos tudományban van jelen, többek között az informatikában, a gazdaságtanban, a természettudományokban és más tudományokban is.

A sztochasztikus sorokkal, azok kutatásával és modellezésével számos matematikus foglalkozott. A kutatásom során kiemelem azokat a matematikusokat, akik sztochasztikus folyamatok elméletével, illetve modellezésével foglalkoztak, valamint Kárpátalján tevékenykednek.

A sztochasztikus modellek segítségével különféle véletlen eseményeket tudunk leírni. Különösen fontos a sztochasztikus sorok tanulmányozása különböző funkcionális tereken. Az utóbbi években több munka is megjelent, amelyekben sorba fejthető sztochasztikus sorokat tanulmányoztak.

A Gauss-folyamatok - olyan folyamatok, amelyek standard normális eloszlásúak - fontos szerepet játszanak a sztochasztikus folyamatok között. Az Orlicz-féle sztochasztikus függvénytérre a Gauss-folyamatok függvényterének kiterjesztéseként tekinthetünk.

A szakdolgozatom célja, hogy tanulmányozzam az exponenciális Orlicz tereket és az ismereteim felhsználásával készítsek egy modellt.

1. fejezet

Kárpátaljai matematikusok tevékenysége a sztochasztikus folyamatok elméletében

A következő fejezetben néhány kárpátaljai kötődésű matematikus munkásságát fogom bemutatni, akik sztochasztikus folyamatok modellezésével foglalkoznak. Ezen matematikusok mindegyikének a kutatási területe a sztochasztikus folyamatok kutatása és modellezése, de nem feltétlenül Orlicz folyamatokat kutatnak.
A sztochasztikus folyamatok modellezésével foglalkozó kárpátaljai kötődésű matematikusként, a következő kutatók munkájával foglalkoztam: Szlivka-Tiliscsak Hanna, Troski Viktor, Troski Natália, Tegza Antónia, Mlavec Jurij és Hudivok Tatjana. Az általam felkutatott matematikusokban az a közös, hogy mindegyikük, kivétel nélkül, Kozacsenko Jurij Vasziljevics tanítványai. Tehát elsőként nézzük meg, mivel is foglalkozott Kozacsenko Jurij Vasziljevics. A későbbiekben pedig bemutatom az említett matematikusok kutatási területeit.
Végül, de nem utolsó sorban meg kell említenem, hogy sztochasztikus folyamatok modellezésével foglalkozik a tutorom, Dr. Kucsinka Katalin, illetve én. A 2020-as évben sikerült bebizonyítanunk egy tételt és ezáltal modelleznünk egy Orlicz folyamatot. A modellt ábrázoltuk is a MatLab programcsomag segítségével.

1.1. Kozacsenko Jurij Vasziljevics

Kozacsenko Jurij Vasziljevics ismert és meghatározó szakember, aki a sztochasztikus folyamatok elméletével és modellezésével foglalkozott. Ő a Gauss tereken és az Orlicz tereken értelmezett véletlenszerű folyamatok egyik megalkotója. Létrehozott egy új tudományos szakirányt, amely a véletlenszerű folyamatok modellezésével foglalkozik különböző funkcionális tereken és megadja ezeket a modelleket előre meghatározott pontossággal és megbízhatósággal. A professzor rengeteg tudományos eredménnyel és kutatással büszkélkedhetett. Kutatásaiban a sztochasztikus folyamatok tulajdonságának analizálásával, a matematikai-fizika egyenleteivel sztochasztikus feltételek mellett, véletlenszerű folyamatok statisztikájával és hullámelemzéssel foglalkoztak. [13]

Kozacsenko Jurij Vasziljevics 1940-ben született Kijevben. Tanulmányait a Tarasz Sevcsenko Kijevi Állami Egyetemen végezte, valószínűségszámítás és matematikai statisztika szakosodást választva, amelyet 1963-ban fejezett be. Az Ukrán Nemzeti Tudományos Akadémián 1968-ban megvédte doktori disszertációját, amelyet 'A sztochasztikus integrálok egységes konvergenciájáról, a folytonos véletlenszerű mezők sorozatai és tulajdonságairól' írt.[13]

1967-től élete végéig a Tarasz Sevcsenko Kijevi Állami Egyetem valószínűségszámítás és matematikai statisztika karán dolgozott. 1974 – 1975 között a Olaj- és Gázipari Intézet (Algéria, Bumerdes) munkatársa. [13]

1985-ben megvédte doktori disszertációját a következő témában: 'Véletlenszerű folyamatok az Orlicz-térben. A pályák tulajdonságai, a sorok és az integrálok konvergenciája'.[13]

Kozacsenko Jurij Vasziljevics munkásságának fő irányai a következők voltak:

- véletlenszerű folyamatok analitikai tulajdonságai. A funkcionális eloszlások becslése véletlenszerű folyamatokból;
- véletlenszerű folyamatok az Orlicz-térben;
- pre-Gauss és Sub-Gauss véletlenszerű folyamatok;
- matematikai fizika hiperbolikus és parabolikus típusú egyenletei véletlenszerű tényezőkkel;

- véletlenszerű folyamatok modellezése;
- véletlenszerű folyamatok hullámeloszlása. [4]

Kozacsenko Jurij Vasziljevics dolgozott az Ungvári Állami Egyetem valószínűségszámítás és matematikai analízis karának professzoraként a $2000 - 2015$ közötti időszakban. Ezen időszakban készítette fel a korábban említett kutatókat a doktori disszertációik sikeres megvédésére. [13]
A professzor neve alatt szerepel közel 300 tudományos munka, 13 monográfia. Munkái közül néhányat más nyelvre is lefordítottak. Kozacsenko Jurik Vasziljevics nem egyszer lett kitüntetve különböző díjakkal:

- Ukrajna Állami Díja kitüntetettje a tudomány és a technológia területén, 2003;
- Az Ungvári Egyetem tiszteletbeli doktora, 2005;
- Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériumának oklevele, 2007;
- A Tarasz Sevcsenko Kijevi Nemzeti Egyetem kitüntetett professzora, 2009;
- Ukrajna kitüntetett tudományos és technológiai munkatársa, 2010;
- Az Ukrajnai Nemzeti Tudományos Akadémia 2012. évi Krilov-díjának díjazottja a "Fraktál- és közelítési sémák a véletlenszerű folyamatok elméletében és alkalmazásában" című munkasorozatért (társszerző);
- "Érdemekért" III. Fokozat, 2018. [13]

1.2. Szlivka-Tiliscsak Hanna

Szlivka-Tiliscsak Hanna megvédte doktori disszertációját 2004. június 14-én a következő témában: 'A matematikai fizika határérték-problémái véletlenszerű kezdeti feltételekkel'. Ezen a területen folytatta kutatását és később, 2015 június 2-án megvédte nagydoktori disszertációját a következő témában: 'Matematikai fizika feladatai véletlenszerű tényezőkkel'. [13]
Figyelemre méltó Szlivka-Tiliscsak Hanna kutatása a hiperbolikus és parabolikus típusú matematikai fizika egyenleteiről véletlenszerű tényezőkkel. A kutatás célja

a hiperbolikus és parabolikus típusú feladatok véletlenszerű tényezőkkel való megoldásai alaptulajdonságainak meghatározása és általánosítása, azok modellezése meghatározott pontossággal és megbízhatósággal és a sztochasztikus terek néhány osztálya szuprémum-eloszlásának értékelése. [4]
A kutatás fő tudományos eredményei az alábbiak:

- a hiperbolikus típusú matematikai fizika határérték-problémáit véletlenszerű kezdeti feltételekkel vizsgáljuk. Az ilyen problémák esetén elegendő megtalálni a kétszer folytosan differenciált megoldás létezi feltételeit, az általánosított megoldás és a kapott becslés az adott feladat szuprémum-eloszlására, amikor a kezdeti feltételek sztochasztikus folyamatok az Orlicz tér felett. A létezési feltételek elsőként a korrelációs függvények klasszikus megoldásában találhatóak meg;

- bemutatott egy új módszert a sztochasztikus kezdeti feltételekkel megadott hiperbolikus matematikai fizika feladatai megoldásainak modellezésére. Az egyenletek megoldásaira felépített modellek kizárólag sub-gauss-féle sztochasztikus kezdeti feltételekkel megadott hiperbolikus matematikai fizika egyenleteire lettek felépítve;

- becsléseket talált a $Sub_{\varphi}(\Omega)$ térből, a végtelen tartománnyal rendelkező Orlicz térből, valamint az $L_P(\Omega)$ sztochasztikus térből származó véletlenszerű mezők szupremumának eloszlására. A végtelen tartományban a sztochasztikus terek növekedésének gyorsaságát korábban még nem kutatták. Példát hozott fel a kapott becslés hiperbolikus típusú matematikai fizika egyenletek megoldásánál való felhasználására;

- a Cauchy-feladat klasszikus megoldásának valószínűségi egységével elsőként talált elégséges feltételeket a hővezetés egyenletre, amikor a jobb oldalon sztochasztikus tér van és ez a tér a $Sub_{\varphi}(\Omega)$ térből és az Orlicz térből van;

- kutatta a Cauchy-feladat megoldása szuprémum-eloszlásának becslését a hővezetés egyenletére, amikor a jobb oldalon sztochasztikus tér van és ez a tér a $Sub_{\varphi}(\Omega)$ térből (kompakt és végtelen tartományban) és amikor a sztochasztikus tér az Orlicz térből van. [11]

1.3. Troski Viktor

Troski Viktor kutatásainak fő eredményei, amelyek hozzásegítették a doktori címhez, a következők voltak: [3]

- kutatni a véletlenszerű változók teljes osztályának alapvető tulajdonságait, nevezetesen a kvadratikusan φ-szubgaussi véletlen változók osztályát;
- elegendő feltételt találni arra, hogy a véletlen változó a kvadratikusan φ-szubgauss véletlen változók osztályába tartozik; becsléseket kapni a másodfokú φ-szubgauss véletlen változók exponenciális momentumaira;
- új becsléseket kapni az $L_P(T), p \geq 1$ tér normáinak eloszlásáról a véletlenszerű folyamatokhoz a kvadratikusan Gauss-féle véletlen változók teréből;
- a kidolgozott elmélet felhasználásával új mátrixok felépítése, és megállapítani, hogy ezek a mátrixok kielégítik a korlátozott izoterm tulajdonságát;
- a kapott új becslések alapján felépíteni a Gauss-féle "könnyebb" ("nehezebb") eloszlások "farok" zajának szűrési sémáját;
- új kritériumokat javasolni a Gauss-stacionárius, nem stacionárius folyamatok, valamint a homogén és izotróp véletlen mezők kovariancia-függvényeinek formájával kapcsolatos hipotézisek tesztelésére. [3]

A kutatás eredményeit nem csak az elméletben, hanem a gyakorlatban is felhasználják számos természettudományban, társadalomtudományban és közgazdaságban is. Troski Viktor kutatásai fellelhetők a pénzügyi matematikában, az informatikában, a geofizikában, geológiában, rádiótechnikában, asztronómiai kutatásokban és az információ kódolás elméletében is. [2]

1.4. Troski Natália

Troski (Fedorjanics) Natália kutatásának célja és feladata a véletlenszerű folyamatok és mezők modellezési módszereinek elméleti alapjai, modellek felépítése, amelyek a véletlenszerű folyamatokat és mezőket adott pontossággal és megbízhatósággal közelítik meg a $C(T)$ és az $L_P(\Omega)$ térben. További feladatai közé tartozik a következő feladatok megoldása: [2]

- a Gauss-féle nem stacionárius véletlenszerű folyamatok és mezők modelljeinek felépítése a spektrum felosztásának és randomizálásának módszerével, valamint a homogén és izotróp véletlen mező modelljével adott pontossággal és megbízhatósággal a $C(T)$ térben;
- megkapja néhány frakcionális véletlenszerű folyamat modelljének konvergencia-feltételeit a $C(T)$ térben lévő valószínűséggel;
- a Gauss-nemstacionárius folyamatok és mezők felépített modelljeinek pontosságát és megbízhatóságát vizsgálni az $L_P(T)$ térben;
- homogén és izotróp mezők modelljeinek felépítése, adott megbízhatósággal és pontossággal az $L_P(T)$ térben. [13]

1.5. Hudivok Tatjana

Fedorjanics (Hudivok) Tatjana a Gauss-féle véletlenszerű folyamatok és mezők korrelációs függvényének típusára vonatkozó hipotézisek tesztelésének kritériumait tanulmányozta.[2]

Hudivok Tatjana, Troski Viktor és Troski Natália, Kozacsenko Jurij Vasziljevics irányításával a következő eredményeket érték el:

1. Tétel. *[2] Legyen adott a $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ a sub-Gauss térben egy véletlenszerű folyamat, $E\xi(t) = 0, r^2(t) = r^2(\xi(t)) = E(\xi(t))^2$. Tegyük fel, hogy létezik a következő integrál: $\int_T (E(\xi(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt < \infty, p \geq 1$. Akkor az integrál $\int_T |\xi(t)|^p dt < \infty$, 1 valószínűséggel létezik, és minden ε esetében, $\varepsilon > c_p^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}}$, ahol $c_p = \int_T (E(\xi(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt$ igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$P\{||\xi(t)||_{L_P} > \varepsilon\} \leq 2exp\bigg\{ -\frac{\varepsilon^2}{2c_p^{\frac{1}{p}}} \bigg\}.$$

2. Tétel. *[2] Tegyük fel, hogy a Λ partíció a $\xi_\Lambda(t)$ modellben olyan, hogy*

$$\int_T (\tau(\xi(t) - \xi_\Lambda(t)))^p dt \leq \frac{\varepsilon^p}{max(p^{\frac{1}{p}}, (2ln\frac{2}{\delta})^{\frac{p}{2}}}.$$

Akkor ez a modell közelíti a $\xi(t)$ Gausss folyamatot ε pontossággal és $1-\delta$ megbízhatósággal, $0 < \delta < 1$ az $L_P(T), p \geq 1$ térben.

1.6. Tegza Antónia

Az utóbbi időkben a sztochasztikus folyamatok elméletének alkalmazása számos tudományban elterjedt, többek között a természettudományokban, az elektronikában, az optikában. A matematikai modellek felépítése fontos szerepet játszik a feladatok megoldásában, a modellek tulajdonságainak tanulmányozása, illetve a modell megfelelő pontossággal és megbízhatósággal való megadása. [10]
Tegza Antónia, mint Kozacsenko tanítványa tanulmányozta a stacionárius gauss-féle sztochasztikus folyamatok modelljei pontosságának és megbízhatóságának értékelését. Munkáiban kutatta a különböző funkcionális tereken felépített Gauss-féle sztochasztikus folyamatok pontosságát és megbízhatóságát, közöttük $C([0,T]), L_P([0,T]), p > 1$, illetve néhány sztochasztikus folyamatot az Orlicz terek felett. [13]

1.7. Mlavec Jurij

Mlavec Jurij tanulmányozta a véletlenszerű változók terét, pillanatnyi normákkal $F_\psi(\Omega)$ és véletlenszerű folyamatokkal ezekből a terekből. Kutatásainak fő tudományos eredményei az alábbiak: [7]

- kutatta az $F_\psi(\Omega)$ terek alaptulajdonságait és megkapta azokat a feltételeket, amelyeknél a centrált, független valószínűségi változókra ebből a térből teljesül a H feltétel;
- megkapta a kompakt tartományban lévő $F_\psi(\Omega)$ térből származó sztochasztikus folyamatok szuprémum-eloszlásának becslését;
- a folyamatok szelektív folytonosságának feltételei egy valószínűségtől;
- megkapta a becslést az $F_\psi(\Omega)$ térből vett R sztochasztikus folyamatok szuprémum eloszlására és az $F_\psi(\Omega)$ térből vett folyamatok hullám-eloszlása egyenletes konvergenciájának feltételeit;
- megállapította a kapcsolatot az exponenciális Orlicz terek és az $F_\psi(\Omega)$ terek között, illetve azokat a feltételeket, amelyek mellett az exponenciális Orlicz terek H terek lesznek;

- megkapta az $F_\psi(\Omega)$ térből vett sztochasztikus folyamatok normális eloszlásának becslését az $L_P(T)$ térben. [7]

Felhasználva az Orlicz terek és az $F_\psi(\Omega)$ terek elméletét, megállapította az integrálok Monte Carlo módszerrel történő kiszámításának megbízhatóságát és pontosságát, a paraméterektől függő integrálok kiszámításának megbízhatóságát és pontosságát $C(T)$ és $L_P(T)$ térben a Monte Carlo módszerrel. [7]

2. fejezet

Az Orlicz-féle sztochasztikus folyamatok

A munkám ezen fejezetében bemutatom azon alapvető fogalmakat, melyek ismerete nélkül a kutatást és modellezést nem lehetne elkezdeni. Minden sztochasztikus folyamatban szerepelnek valószínűségi változók, amelyeket a következőképp lehet megfogalmazni:

Definíció. *Legyen (Ω, F, P) egy valószínűségi mező. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezést valószínűségi változónak nevezzük, ha bármely rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F.$$

Definíció. *Az $f(x)$ függvényt konvexnek nevezzük az I intervallumon, ha $\forall x_1; x_2 \in I$ és $\forall p; q \in [0; 1]; p + q = 1$ esetén teljesül: $f(p \cdot x_1 + q \cdot x_2) \leq f(x_1) + q \cdot f(x_2)$*

Definíció. *A páros, konvex $U(x)$ függvényt C-függvénynek nevezzük, ha: $U(0) = 0$; $U(x)$ növekvő, ha $x > 0$.*

Példa. *[6] A következő függvények C-függvények*
1. $U(x) = a|x|^\alpha, x \in \mathbb{R}, a > 0, \alpha \geq 1$;
2. $U(x) = b(exp\{a \cdot |x|^\alpha\} - 1), x \in \mathbb{R}, b > 0, a > 0, \alpha \geq 1$;
3. $U(x) = b(exp\{\varphi(x)\} - 1), x \in \mathbb{R}, c > 0, \varphi(x), x \in \mathbb{R}$ tetszőleges C-függvény;

Definíció. *Az $U(x)$ C-függvény által generált sztochasztikus $L_U(\Omega)$ Orlicz térnek nevezzük a $\xi(\omega) = \xi$ sztochasztikus események olyan terét, melyben minden*

$\xi \in L_U(\Omega)$ *esetére létezik* r_ξ*, melyre teljesül*

$$EU(\frac{\xi}{r_\xi}) < \infty.$$

Definíció. *Az* $X(t) = \{X(t), t \in T\}$*, sztochasztikus folyamat az* $L_U(\Omega)$ *Orlicz tér fölött, ha minden* $t \in T$ *esetére* $X(t)$ *véletlen esemény* $L_U(\Omega)$ *fölött.*

Definíció. *Az* $L_U(\Omega)$ *Orlicz teret* H*-térnek nevezzük, ha létezik* $D > 0$*, ahol a* $\xi_k, k = \overline{1, \infty}$ *centrált valószínűségi változók Orlicz családja és teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{N} \xi_k\right|\right|_{L_U}^2 \leq D \sum_{k=1}^{N} ||\xi_k||_{L_U}^2.$$

1. Tétel. *[6] Legyen* $L_U(\Omega)$ H*-tér,* ξ_k*-független valószínűségi változók,* $E\xi_k = 0$*,* $\xi_k \in L_U(\Omega)$ *olyanok, hogy létezik* R *szám, melyre teljesül az egyenlőtlenség:* $||\xi_k||_{L_U}^2 \leq R \cdot E\xi_k^2$*. Ha* $X(t)$*-véletlen folyamat, akkor felírható a következő alakban:*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$$

ahol ez az összeg négyzetes középben konvergál $t \in T, X(t)$ *szigorúan Orlicz folyamat,* $\sqrt{DR}$ *meghatározott állandó.*

1. Megjegyzés. *[9] A* H*-tér tulajdonsága:*

$$L_p(\Omega), p \geq 2 \quad (u(x) = |x|^p), \quad D = 2\sqrt{2}\left(\Gamma\left(\frac{p+1}{2\sqrt{\pi}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahol a $\Gamma = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$

Orlicz család - olyan valószínűségi változók tartoznak az Orlicz családba, melyekre teljesülnek az Orlicz tér definíciójában megadott feltételek.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \varphi_k(t)$ *az* $X(t)$ *folyamat modellje* ϵ *pontossággal és* $1 - \delta$ *megbízhatósággal közelíti az* $X(t)$*-t, ha teljesül a következő:*

$$P\{||X(t) - X_N(t)|| > \epsilon\} < \delta.$$

2. Tétel. *[8] Ha találunk egy* $W_M(\delta)$ *függvényt, melyre*

$$P\{||\xi(t) - \xi_M(t)|| > \delta\} < W_M(\delta),$$

ahol $W_M(\delta) < \alpha$*, akkor megvan a keresett modell felső összeg határa.*

Definíció. *Az $u(x) = x^p$ - C - függvény által generált Orlicz teret $L_p(\Omega)$ Orlicz térnek nevezzük.*
A norma jelölése: $||\cdot||_{L_p}$.

2. Megjegyzés. *[6] Az $L_p(\Omega), p \geq 1$ az $u(x) = |x|^p$ C-függvény által generált Orlicz tér, $||\xi||_U = ||\xi||_p = \big(E|\xi|^p\big)^{\frac{1}{p}}$.*

Lemma. *[1] Legyen $\xi \in L_U(\Omega)$. Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetére teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$P\{|\xi| > \varepsilon \leq \left(u\left(\frac{\xi}{||\xi||_U}\right)\right)^{-1},$$

ahol $||\xi||_U > 0$.

Nevezzük az $X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k f_k(t)$ modellt az $X(t)$ folyamat modelljének.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $X_N(t)$ megközelíti az $X(t)$ folyamatot megadott megbízhatósággal és pontossággal az $L_p(0;T)$ térben, ha megadott $\varepsilon > 0$ (pontosság) és $\delta > 0$ ($1-\delta$ - megbízhatóság) teljesül a következő egyenlőtlenség*

$$P\left\{\left(\int_0^T |X(t) - X_N(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon\right\} \leq \delta.$$

3. Tétel. *[8] Legyen (T, φ, μ) - mérhető tér, $\xi_k(k = \overline{1, 2, \infty})$ - centrált, független valószínűségi változók az olyan $L_U(\Omega)$ Orlicz térrel, hogy $L_{U_p}(\Omega)$ H-tér a D állandóval. Ha a sor:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\xi_i||_{U_p}^2 \left(\int_T |f_k(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{2}{p}}$$

konvergens, akkor az $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot f_k(t), t \in T$ sor sztochasztikusan konvergens. Ebben az esetben tetszőleges $\varepsilon > 0$ és tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$P\left\{\left(\int_T \left|\sum_{k=m}^{\infty} \xi_k f_k(t)\right|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon\right\} \leq \left(u\left(\frac{\varepsilon^p}{D \cdot \sum_{k=m}^{\infty} ||\xi_k||^2 \cdot u_p\left(\int_T |f_k(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{2}{p}}}\right)\right)^{-1}.$$

3. fejezet

Exponenciális Orlicz-terek

Ebben a fejezetben bemutatom azokat a definíciókat és tételeket, amelyek ismerete elengedhetetlen ahhoz, hogy vizsgáljam az exponenciális Orlicz tereket. Elsőként bemutatom, hogy mi is az az exponenciális Orlicz tér:

Definíció. *Legyen $\psi(x)$ egy olyan C-függvény, amelyre teljesül*

$$lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 0$$

$$lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x} = \infty$$

Ekkor az $U(x) = exp\{\Psi(x)\} - 1$, ahol $\forall x \in \mathbb{R}$ függvény által generált teret exponenciális Orlicz térnek nevezzük.

Az exponenciális Orlicz tér jelölése: $Exp_\varphi(\Omega)$ és a tér normája $|| \bullet ||_{E_\varphi}$.

Az exponenciális típusú Orlicz terekhez tartozó sztochasztikus változók kezdőértékei tetszőlegesek, ezért a következőt kapjuk:

$$Exp_\varphi(\Omega) \subset L_P(\Omega)$$

bármilyen $\xi \in Exp_\varphi(\Omega)$ esetén.

Jelölje

$$Exp_\varphi^{(0)}(\Omega) = \{\xi \in Exp_\varphi(\Omega) : E\xi = 0\}.$$

Megköveteljük, hogy az $Exp_\varphi^{(0)}(\Omega)$ Banach altér legyen az $Exp_\varphi(\Omega)$ térben a $|| \bullet ||_U$ normával. Ha csak a centrált valószínűségi változókat vesszük figyelembe, akkor könnyen meghatározhatunk olyan normákat, amelyek egyenértékűek lesznek a luxemburgi normákkal.

Legyen a γ egy Gauss eloszlású valószínűségi változó a $(0, \delta^2)$ paraméterekkel. Ez a véletlenszerű változó hozzátartozik az $L_U(\Omega)$ Orlicz térhez, ahol $U(x) = exp\{x^2\} - 1$ és ennek a véletlenszerű változónak a normája egyenlő $C|| \bullet ||_{L_2}$. [2]

Megvizsgálom egy már ismert folyamat modelljét, a Karhunen-Loeve modellt. Legyen $X = \{x(t), t \in [0, T]\}$ - véletlen folyamat, olyan, hogy $EX(t) = 0$, $EX^2(t) < \infty$, $t \in [0, T]$, $EX(t)X(S) = R(t, s)$ - kovariációs függvénye ennek a modellnek. Tekintsük az egyenlet integrálját: [13]

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^T R(t, s)\varphi(s)ds.$$

Legyen $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$ - saját értékek, a $\varphi_k(t)$ - normált saját függvényei az adott egyenletnek, tehát $\int_0^T \varphi_k^2(t)dt = 1$. Ismert, hogy $\lambda_k > 0$ minden $k \in \mathbb{N}$, akkor az $X(t)$ véletlen folyamatot a következő alakban ábárzoljuk:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(t), \qquad (1)$$

ahol ξ_k - centrált valószínűségi változók, olyanok, hogy $E\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, ahol a δ_{kl} - A Kronecker szimbólum. Az (1) sor négyzetes középben konvergál. Tegyük fel, hogy az (1) példában a ξ_k valószínűségi változók függetlenek az Orlicz tértől $L_U(\Omega)$ és az $L_U(\Omega)$ tér rendelkezik H - tulajdonsággal és D állandóval. [8]

4. fejezet

Saját eredmények

1. Tétel. *Legyen* (T, φ, μ) *mérhető tér,* ξ_k *centrált, független valószínűségi változók,* $\xi_k \in Exp_\psi(\Omega), \psi()$ *- Orlicz függvény.*

Vizsgáljuk az $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$ *sztochasztikus folyamatot, melyre teljesülnek a 3. Tétel feltételei. Az* $X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k f_k(t)$ ε *pontossággal és* $1 - \delta$ *megbízhatósággal közelíti az* $X(t)$ *folyamatot, (az* L_P *tér normája szerint), ha teljesül:*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^2 (\int_T |f_k(t)|^P d\mu(t))^{\frac{2}{P}} \leq \frac{\varepsilon^P}{D \cdot \psi^{(-1)}(ln(\frac{1}{\delta} + 1))}$$

Bizonyítás. Mivel $\xi_k \in Exp_{\psi(x)}(\Omega)$ ezért tudjuk, hogy $u(x) = exp(\psi(x)) - 1$, ahol $\psi(x)$ - C függvény.

Mivel teljesülnek a 3. Tétel feltételei, ezért igaz a tétel állítása is. Jelöljük:

$$\frac{\varepsilon^P}{D \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^2_{L_P} \cdot (\int_T |f_k(t)|^P d\mu(t))^{\frac{2}{P}}} = A$$

A modell definíciója és a 3. Tétel állítása miatt

$$(e^{\psi(A)} - 1)^{-1} \leq \delta$$

$$\frac{1}{\delta} \leq e^{\psi(A)} - 1$$

$$e^{\psi(A)} \geq \frac{1}{\delta} + 1$$

$$\psi(A) \geq ln(\frac{1}{\delta} + 1)$$

$$A \geq \psi^{(-1)}(ln(\frac{1}{\delta} + 1))$$

$$\frac{\varepsilon^P}{D \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||_{L_P}^2 \cdot (\int_T |f_k(t)|^P d\mu(t))^{\frac{2}{P}}} \geq \psi^{-1}(ln(\frac{1}{\delta}+1))$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||_{L_P}^2 \cdot (\int_T |f_k(t)|^P d\mu(t))^{\frac{2}{P}} \leq \frac{\varepsilon^P}{D \cdot \psi^{-1}(ln(\frac{1}{\delta}+1))}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Következmény. *Legyen (T, φ, μ) mérhető tér, $\xi_k \in Exp_{x^2}^{(0)}(\Omega)$. Vizsgáljuk az $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$ sztochasztikus folyamatot, melyre teljesülnek az 1. tétel feltételei. Az $X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k f_k(t)$ ε pontossággal és $1-\delta$ megbízhatósággal közelíti az $X(t)$ folyamatot, ha teljesül:*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^2 (\int_T |f_k(t)|^P d\mu(t))^{\frac{2}{P}} \leq \frac{\varepsilon^P}{D \cdot \sqrt{(ln(\frac{1}{\delta}+1))}} (*)$$

Bizonyítás. A tétel bizonyítása az előző tétel állításából következik, ugyanis ez egy részesete, amikor $\psi(x) = x^2$, ugyanis ekkor $\psi^{(-1)} = \sqrt{x}$. Ezt visszahelyettesítve az előző tétel állításába, kapjuk a $(*)$ egyenlőséget. □

Következmény. *Legyen adott a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{||\xi_k||_{u_2}^2}{\lambda_k} < \infty$ - konvergens sor. Ha teljesül a következő feltétel:*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^2 (\int_T |f_k(t)|^P d\mu(t))^{\frac{2}{P}} \leq \frac{\varepsilon^P}{D \cdot \psi^{(-1)}(ln(\frac{1}{\delta}+1))}$$

akkor az $X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(t)$ modell közelíti az $X(t)$ véletlen folyamatot az $L_2(0, T)$ térben, megadott ε pontossággal és $1-\delta$ megbízhatósággal.

Példa. *Legyen $X = \{x(t), t \in [0; \pi]\}$ sztochasztikus folyamat az $Exp_{x^2}^{(0)}(\Omega)$ Orlicz tér fölött, ξ_k egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1; 1]$ intervallumon. Ekkor vizsgáljuk a $P = 2$ esetet. Ekkor a $(*)$ egyenlőség az alábbi módon néz ki:*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ||\xi_k||^2 \cdot 1 \leq \frac{\varepsilon^2}{D \cdot \sqrt{(ln(\frac{1}{\delta}+1))}}$$

Az $X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k}{\lambda_k} \cdot f_k(t)$ *modell az* $X(t)$ *sztochasztikus folyamatot* ε *pontossággal és* $1-\delta$ *megbízhatósággal közelíti, ha teljesül a következő feltétel:*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{||\xi_k||^2}{\lambda_k} \leq \frac{\varepsilon^2}{D \cdot \sqrt{(ln(\frac{1}{\delta}+1))}}$$

ahol $\xi_k \in Exp_{x^2}^{(0)}\Omega$.

Mivel $u(x) = exp\{x^2\}-1$, *ezért a norma:* $||\xi_k||^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sigma(t)$, *ahol a* $\sigma(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$||\xi_k||^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

.

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{\varepsilon^2 \cdot \sqrt{\delta}}{D}$$

Ha $X(t) \in Exp_{x^2}^{(0)}(\Omega)$, $0 \leq t \leq 1$, *akkor igaz, hogy:*

$$EX(t) = 0,$$

$$EX(t)X(S) = \begin{cases} t \cdot (1-s), & ha \quad t < s \\ s \cdot (1-t), & ha \quad t \geq s. \end{cases}$$

Ekkor a Karhunen-Loeve folyamat a következő: $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \frac{1}{\pi k} \cdot \sqrt{2} \cdot sin\pi kt$, vagyis akkor $\lambda_k = \pi^2 k^2$.

Ebben az esetben felírható, hogy

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k}{\pi k} \sqrt{2} \sin \pi kt$$

modell az

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\pi k} \sqrt{2} \sin \pi kt$$

sztochasztikus folyamatot ε pontossággal és $1-\delta$ megbízhatósággal közelíti, ha

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = \frac{1}{\pi^2 \cdot N}.$$

Tehát

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} \frac{1}{\pi^2 \cdot N} \leq \frac{\varepsilon^2 \cdot \sqrt{\delta}}{D}$$

Ebből következik, hogy

$$N \geq \frac{D2\sqrt{6}}{9\pi^2\varepsilon^2\sqrt{\delta}}$$

Tehát, ha $\varepsilon = 0,01, \delta = 0,01$, akkor a

$$\sum_{k=1}^{16546} \frac{\xi_k}{\pi k}\sqrt{2}(\sin \pi k t)$$

közelítést alkalmazhatjuk.

A Matlab programcsomag segítségével létrehozom a fenti modellt. Ahhoz, hogy a modellt elkészítsem, a következő programkódot kell alkalmazni:

$L = pi;$

$t = [0 : 0.1/L : pi];$

$x = zeros(1, numel(t));$

$kszi = unifrnd(-1, 1, [16546, 1])$

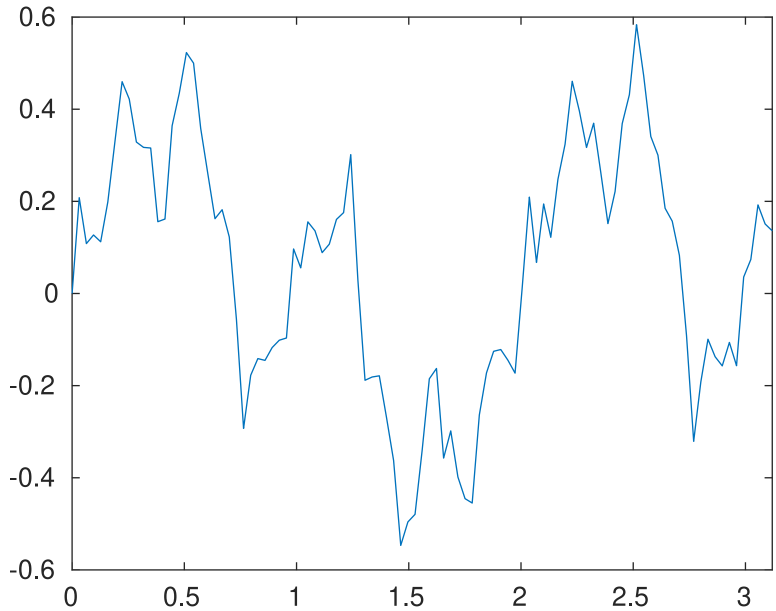
$fork = 1 : 16546$

$x = x + kszi(k) * (2^{(0.5)}) * sin(pi * k * t)/(pi * k)$

$end;$

$plot(t, x)$

A folyamat modellje az alábbi ábrán látható:



4.1. ábra. A folyamat modellje

Összegzés

Munkám első fejezetében foglalkoztam azon Kárpátaljáról származó matematikusokkal, akik kutatási területe a sztochasztikus folyamatok és azok modellezése különböző funkcionális tereken. Megismerkedtem és kiemeltem a munkában ezen matematikusok közül elsősorban a következőket: Szlivka-Tiliscsak Hanna, Troski Viktor, Troski Natália, Tegza Antónia, Mlavec Jurij és Hudivok Tatjana. Ezen matematikusok mindegyike sztochasztikus folyamatokkal és azok modellezésével foglalkozik és az a közös bennük, hogy mindannyian Kozacsenko Jurij Vasziljevics tanítványai voltak.
A sztochasztikus folyamatok modellezése fontos szerepet játszik a véletlen folyamatok elméletében. Ezek a véletlenszerű folyamatok fontos eszközök a sztochasztikus modellezésben, ezek teszik lehetővé, hogy leírjunk és modellezzünk véletlen jelenségeket. A véletlen jelenségek elsősorban a természettudományos alkalmazásokban terjedtek el, de manapság egyre népszerűbb más tudományokban is, mint például az informatikában, a gazdaságtanban.
A munkám második fejezetében az alapvető fogalmakkal foglalkoztam, amelyek a kutatás folytatásához voltak szükségesek. Mindenek előtt megismerkedtem a sztochasztikus Orlicz tér, majd az exponenciális Orlicz tér definíciójával. Miután az alapvető fogalmakat megismertem, kitűztem a kutatásom célját.
A kutatásom célja az volt, hogy ismereteket szerezzek a sztochasztikus folyamatok modellezésével az exponenciális terek fölött. Az alapvető ismeretek elsajátítása után elég ismerettel rendelkeztem ahhoz, hogy bebizonyítsak egy tételt, levonjam annak következményét és megalkossak egy modellt. Az általam létrehozott modell megadott feltételeknek megfelelve közelít egy véletlen folyamatot az $Exp_{x^2}^{(0)}(\Omega)$ Orlicz tér fölött. A modellt a Karhumen-Loeve modell alapján hoztam létre a Matlab programcsomag segítségével.

Irodalomjegyzék

[1] Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. *Metric characterization of random variables and random processes.* American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

[2] Kozachenko Yu. V., Hudyvok T. V., Troshki V.B., Troshki N. V. *Estimation of covariance functions of Gaussian stochastic fields and their-simulation.* Monograph // Uzhorod: 'AUDOR-Shark', 2017.

[3] Kozachenko Yu. V., Troshki V.B. *Construction of criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean.* Communication in Statistics. Theory and Methods. 2008. Vol. 47, Iss. 18. P. 4556-4567.

[4] Довгай Б. В., Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. *Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами*, Монографія// К.: Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет', 2008.- 173 с.

[5] Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю., Моклячук О. М. *Квазібанахові простори випадкових величин*, Монографія// Ужгород.: Вид-во 'Карпати', 2015. - 212 с.

[6] Козаченко Ю. В., Кучінка К. Й., Сливка-Тилищак Г. І. *Випадкові процеси в задачах математичної фізики*, Монографія// КНУ, ДВЗ 'УжНУ', ДНУ ім. В. Стуса, ЗУІ ім. Ф. Ракоці ІІ, Ужгород: Вид-во ТОВ 'РІК-У', 2017.-256с.

[7] Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю., Моклячук О. М. *Квазібанахові простори випадкових величин*, Монографія// Ужгород.: Вид-во 'Карпати', 2015. - 212 с.

[8] Козаченко О. В., Пашко А. О. *Моделювання випадкових процесів*, Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету// Київ: Видавничий центр 'Київський університет', 1999.

[9] Мацак И. К., Пличко А. Н. *Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах*// Теория вероятн. и матем. статист.-1988.-Вып.38.-С.81-88.

[10] Козаченко Ю. В., Погоріляк О. О., Тегза А. М. *Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса*, Монографія// Ужгород.: ВПЦ 'Ужгородський університет', 2011.

[11] Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. *Про моделювання розв'язку гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами*, Теорія ймов. та матем. статист.// 2006. Вип. 74. С. 52-67.

[12] Млавець Ю. Ю. *Умова 'H' для просторів Орліча експоненціального типу*, Науковий вісник Ужгородського університету// Ужгород, 2014.

[13] Сливка.Тилищак Г. І., Кучінка К. Й. *Напрямки наукових досліджень Ю. В. Козаченка: дослідження розв'язків задач математичної фізики з випадковими факторами*, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія 'Математика та інформатика'/ридкол.: М. М. Маляр (гол. ред) та інші.// Ужгород.: Вид-во 'Говерла', 2020, Вип. №2(37) сс. 26-35.

Ábrák jegyzéke

Висновок

У першому розділі роботи я ознайомилася з діяльністю математиків закарпатського погодження, областю діяльності яких було дослідження стохастичних процесів та їх моделювання в різних функціональних просторах. В першу чергу я ознайомилась та виділила в своїй роботі наступних математиків: Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, Трошкі Віктор Бейлович, Трошкі Наталія Василівна, Тегза Антоніна Михайлівна, Млавець Юрій Юрійович та Гудивок Тетяна Василівна. Всі ці математики займаються стохастичними процесами та їх моделюванням, а спільне в них те, що вони всі були учнями Козаченко Юрія Васильовича. Моделювання стохастичних процесів відіграє важливу роль у теорії випадкових процесів. Ці випадкові процеси є важливими інструментами в стохастичних моделюваннях, завдяки цим процесам в нас є можливість описати й моделювати випадкові явища. Випадкові явиша є найбільш поширеними в природничих науках, але в сьогоденні все більш популярні в інформатиці, економіці.
В другому розділі роботи я ознайомлювалась із основними поняттями, які потрібні для подальшого дослідження. Першочергово я ознайомилась із основними поняттями з випадкових просторів Орліча та експоненціальних просторів Орліча.
Метою моєї роботи було здобути знання про моделюванням стохастичних процесів визначені в експоненціальних. Після освоєння основних понять, я довела теорему, зробила неї висновки і побудувала модель. Побудована мною модель відповідно до заданих умов наближено описує процес над простором Орліча. Цю модель я створила на основі моделі Карунена-Лоева, за допомогою програмного пакету Матлаб.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1007785647

Дата перевірки:
09.05.2021 00:29:27 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2021 01:06:40 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Palinszky_Alexandra_Orlicz-folyamatok-modellezése-kárpátaljai-matematikusok-munkáinak-tükrében

Кількість сторінок: 22 **Кількість слів:** 5661 **Кількість символів:** 29398 **Розмір файлу:** 330.66 KB **ID файлу:** 1007884561

0.51% Схожість

Найбільша схожість: 0.37% з Інтернет-джерелом (https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/27057/1/%D0%9A%D0.

0.51% Джерела з Інтернету | 2 .... Сторінка 24

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 118

Nyilatkozat

Alulírott, Palinszky Alexandra 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.