ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

ПОТОКІ СІНТІЯ-ЕРЖЕЙБЕТ ЮЛІЇВНА

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**
ст. викладач

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**
к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-го курсу

Потокі Сінтія-Ержейбет Юліївна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**

ст. викладач

Рецензент: **Кудлотяк Чаба Анталович**

ст. викладач

Берегове
2021

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Pataki Cintia-Erzsébet

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Pallay Dezső

adjunktus

Recenzens: Kudlotyák Csaba

adjunktus

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban a háromszögek megoldásáról olvashatnak. Két fejezetből áll. Az első fejezetben a háromszögek megoldásának elméleti része található. A második fejezetben felmértem a kilencedik osztályos tanulók tudását a háromszögek megoldása témakörben.

Az első fejezetemet hasonlóan építettem fel, mint ahogyan a 9. osztályos mértan könyvben található. A háromszögek megoldását a 9. osztályos tanulók a tanév első félévében tanulják, első témakörben. Erre a témakörre összesen 12 óra van adva a tanmenet szerint. Az első fejezet öt külön alfejezetre osztottam. Amelyek a következők:

- A 0°-tól 180°-ig terjedő szögek szinusza, koszinusza és tangense.
- Koszinusztétel.
- Szinusztétel.
- A háromszög területének meghatározására szolgáló képletek.
- Feladatok a háromszögek megoldása témakörből.

A második fejezetben első sorban szeretném bemutatni a feladatlapot, amelyet 9. osztályos tanulók számára építettem fel, ebben a fejezetben megtalálható e feladatlap megoldása is.

A második fejezetem fő egységét alkotja a feladatlap elemzése. Ehhez a google űrlapot és excelt alkalmaztam. A feladatok egymásra épülnek, a könnyebb feladattól a nehezebb feladatik van felépítve.

Ezáltal a feladatsorral megvizsgáltam, hogy a környező iskolákban a 9. osztályos diákok mennyire sajátították el a háromszögek megoldása témakört.

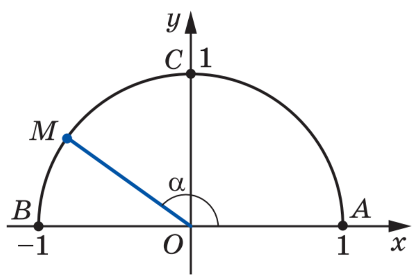
1. fejezet

Háromszögek megoldása

1.1. A 0°-tól 180°-ig terjedő szögek szinusza, koszinusza és tangense.

A hegyesszög szinuszának, koszinuszának és tangensének fogalmát kibővítjük bármilyen α szögre, ahol $0° \leq \alpha \leq 180°$.

Ehhez a koordinátasík felső félsíkjában megvizsgálunk egy félkört, melynek középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja (origó), sugara pedig 1 egység (1.1. ábra). Az ilyen félkört **egységsugarúnak** nevezzük. [2] Az α szögnek

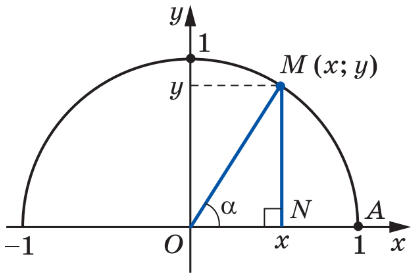


1.1. ábra. *Egységsugarú félkör* [1]

egységfélkörön az M pont felel meg, ha $MOA\angle = \alpha$, ahol az O és A pontok megfelelő koordinátái $(0;0)$ és $(1;0)$ (1.1. ábra). Például az 1.1. ábrán a 90°-kal egyenlő szögnek a C pont fog megfelelni, a 180°-kal egyenlő szögnek a B pont, a 0°-kal egyenlő szögnek pedig az A pont.

Tegyük fel, hogy α hegyesszög. Akkor az AC íven vesszünk egy $M(x;y)$ pontot. Az OMN derékszögű háromszögben:

$$cos\alpha = \frac{ON}{OM}, sin\alpha = \frac{MN}{OM}.[2] \tag{1.1.1}$$



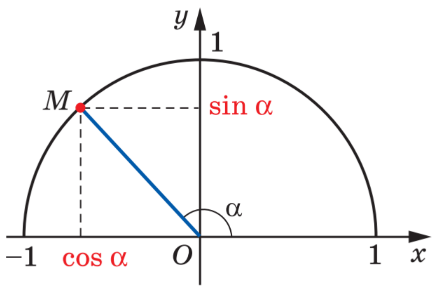
1.2. ábra. *Egységsugarú félkör, amikor α hegyesszög* [1]

Mivel tudjuk, hogy $OM = 1, ON = x, MN = y$, ezért

$$cos\alpha = x, sin\alpha = y. \tag{1.1.2}$$

Ezekből arra tudunk következtetni, hogy az α hegyesszög koszinuszának és szinuszának az α szögnek megfelelő egységfélkörön lévő M pont abszcisszáját és ordinátáját tekintjük. Ezekből megkapjuk, hogy hogyan lehet meghatározni egy tetszőleges α szög szinuszát és koszinuszát, amikor $0° \leq \alpha \leq 180°$.[2]

Definíció. *Az α ($0° \leq \alpha \leq 180°$) szög koszinuszának és szinuszának az egységfélkörön lévő, az α szögnek megfelelő M pont abszcisszáját és ordinátáját nevezzük. [2]*



1.3. ábra. *Az α ($0° \leq \alpha \leq 180°$) szög koszinusza és szinusza az egységfélkörön* [1]

E definícióból megállapíthatjuk, hogy $\sin 0° = 0, \cos 0° = 1, \sin 90° = 1, \cos 90° = 0, \sin 180° = 0, \cos 180° = -1$. [2]

Ha $M(x; y)$ az egységfélkör bármilyen pontja, akkor Tehát ha $0° \leq \alpha \leq 180°$, akkor bármilyen α szögre igaz:

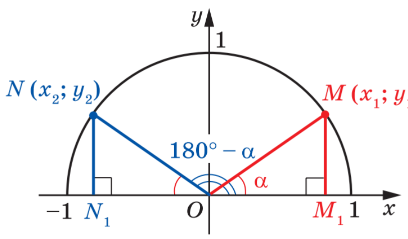
$$0 \leq \sin \alpha \leq 1, -1 \leq \cos \alpha \leq 1, [2] \tag{1.1.3}$$

Ha α tompaszög lesz, akkor ennek a szögnek az abszcisszája negatív. Tehát a tompaszög koszinusza negatív szám. Igaz a következő állítás is: ha $\cos \alpha < 0$, akkor az α tompa- vagy egyenesszög lesz.

Tudjuk, hogy bármilyen α hegyesszögre igazak a következő egyenlőségek:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90° - \alpha) = \sin \alpha[2] \tag{1.1.4}$$

Legyen α és $180° - \alpha$, ahol $\alpha \neq 0°, alpha \neq 90°, alpha \neq 180°$, melynek megfelelő pontja az $M(x_1, y_1$ és $N(x_2; y_2)$ pontok.



1.4. ábra. *Az α és $180° - \alpha$ szinusza és koszinusza az egységfélkörön*[1]

Az OMM_1 és ONN_1 derékszögű háromszögek egybevágók az átfogójuk és a hegyesszögük alapján ($OM = ON = 1, MOM_1\angle = NON_1\angle = \alpha$).Ebből megkapjuk, hogy $y_2 = y_1$ és $x_2 = -x_1$. Tehát ez képlet formájában a következő:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha, \cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha[2] \tag{1.1.5}$$

A következő azonosságot, ahol α hegyesszög, **trigonometriai alapazonosságnak** [2] nevezzük:

$$\sin^2 \alpha + cos^2\alpha = 1[2] \tag{1.1.6}$$

Vegyük azt az esetet, amikor az α tompaszög. Ekkor a $180° - \alpha$ hegyesszög lesz. Ebből kifolyólag a következőt kapjuk:

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 =$$
$$\sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1 \text{ [2]}$$

Definíció. *Az α szög **tangensének** a $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ arányt nevezzük, vagyis*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1.1.7}$$

Ezekben az esetekben, az $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, és $\alpha \neq 90^\circ$.[2]

Könnyen belátható, hogy az α mindegyik értékének az egységsugarú félkör egy-egy pontja felel meg. Vagyis ez az jelenti, hogy az α szögnek megfelel egyetlen olyan szám, amely az adott szög szinusza (koszinusza, tangense, ha $\alpha \neq 90^\circ$). Ezért a szinusz érték és a szög nagysága között függvénykapcsolat áll fenn.

Az $f(\alpha) = sin\alpha, g(\alpha) = cos\alpha, h(\alpha) = \tan\alpha$ függvények az α szög **trigonometrikus függvényeinek** nevezzük. [2]

1.2. Koszinusztétel

1. Tétel. *Bármely háromszög egyik oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal és az általuk bezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát. [2]*

Bizonyítás: A tétel bizonyításánál először megvizsgáljuk az ABC háromszöget. Miután megvizsgáltuk az ABC háromszöget, bebizonyítjuk, hogy

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot cosA$$

Három különböző esetet vizsgálunk meg:

1) Amikor az A szög hegyesszög;

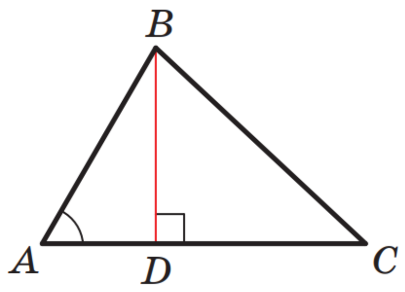
2) Amikor az A szög tompaszög;

3) Amikor az A szög derékszög;

Ezeket az eseteket megvizsgáljuk külön külön.

Első eset. Ebben az esetben az A szög hegyesszög. Ebből következik, hogy az egyik a szögek közül hegyesszög, vagyis a B vagy C szög hegyesszög lesz. [2]

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a $C\angle < 90^\circ$. Az ABC háromszögben meghúzzuk a BD magasságot. Az ABD derékszögű háromszögben, tudjuk, hogy



1.5. ábra. *Az ABC háromszög, amikor az A szög hegyesszög* [1]

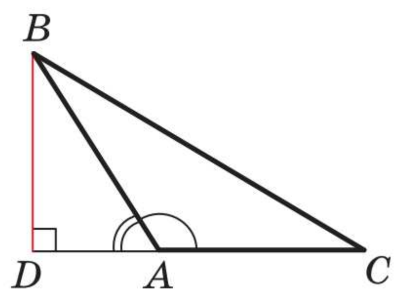
$$BD = AB \cdot sinA, AD = AB \cdot cosA.$$

A BDC derékszögű háromszögben:

$BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot sin^2A + (AC - AB \cdot cosA)^2 = AB^2 \cdot sin^2A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot cosA + AB^2 \cdot cos^2A = AB^2 \cdot (sin^2A + cos^2A)AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot cosA = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot cosA$. [1]

A következőkben vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $B\angle < 90°$. Az ABC háromszög C csúcsából meghúzzuk a magasságot. Az teljesen az ABC háromszögben lesz. Ennek az esetnek a bizonyítása hasonlóan végezhető el az előző bizonyításához.

Második eset. Legyen az A tompaszög. Meghúzzuk az ABC háromszögben meghúzzuk a BD magasságot.



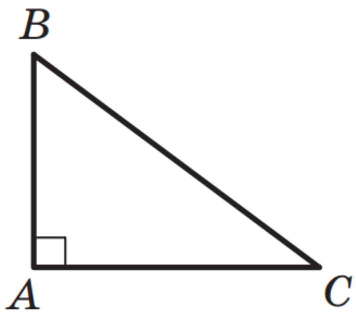
1.6. ábra. *Az ABC háromszög, amikor az A szög tompaszög* [1]

Az ABD derékszögű háromszögben:

$BD = AB \cdot \sin BAD\angle = AB \cdot \sin(180° - BAC\angle) = AB \cdot \sin BAC\angle$,

$AD = AB \cdot \cos BAD\angle = AB \cdot \cos(180° - BAC\angle) = -AB \cdot \cos BAC\angle$ [1].

A BDC derékszögű háromszögben:



1.7. ábra. *Az ABC derékháromszög* [1]

$BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 BAC\angle + (AC - AB \cdot \cos BAC\angle)^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC\angle$. [1]

Harmadik eset. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor A derékszög. Ekkor $cosA = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ez az egyenlőség az ABC háromszögre igaz lesz, Pitagorasz-tétele alapján. [2]

A tétel bebizonyítva!

A koszinusztétel bizonyítása megmutatta, **hogy a Pitagorasz-tétel az a koszinusztétel egy részesete, és a koszinusztétel a Pitagorasz-tétel általánosítása**. [2]

Abban az esetben, ha alkalmazzuk az ABC háromszög oldalainak és a szögeinek jelölését, akkor például az a oldal hosszára fel lehet írni:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos \alpha$ [2]

A koszinusztétel segítségével, ha ismert a háromszög három oldalának a hossza, meg lehet állapítani, hogy hegyesszögű, tompaszögű vagy derékszögű e az adott háromszög.

2. Tétel. *(A koszinusztétel következménye).Legyen a, b és c a háromszög oldalainak hossza. Ha $a^2 < b^2 + c^2$, akkor a háromszög hegyesszögű lesz, ha $a^2 > b^2 + c^2$, akkor tompaszögű, ha pedig $a^2 = b^2 + c^2$, akkor az adott háromszög derékszög lesz. [2]*

Bizonyítás: A koszinusztétel alapján
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$. Innen $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Legyen $a^2 < b^2+c^2$, ekkor $b^2+c^2-a^2 > 0$. Ebből azt kapjuk, hogy $2ab\cos\alpha > 0$, tehát $\cos\alpha > 0$. Ami azt jelenti, hogy az α hegyesszög lesz.

Mivel az a a háromszög legnagyobb oldala, ezért ezzel az oldallal szembe a háromszög legnagyobb szöge helyezkedik el, amelyről meggyőződtünk, hogy hegyes szög lesz. Tehát ebben az esetben a háromszög hegyesszögű lesz. [2]

Legyen $a^2 > b^2 + c^2$, ekkor $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Ebből azt kapjuk, hogy $2ab\cos\alpha < 0$, tehát $\cos\alpha < 0$. Ami azt jelenti, hogy az α tompaszög lesz. Ebben az esetben a háromszög tompaszögű. [2]

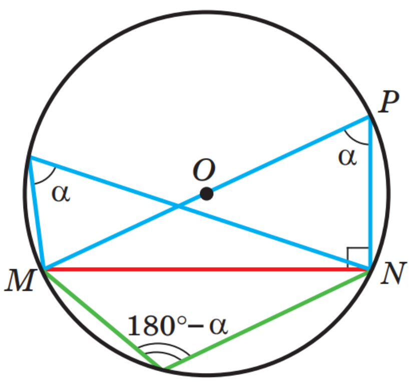
Legyen $a^2 = b^2 + c^2$ekkor $b^2 + c^2 - a^2 = 0$. Innen következik, hogy $\cos\alpha = 0$. Vagyis $\alpha = 90°$. Ebben az esetben a háromszög derékszögű lesz. [2]

A tétel bebizonyítva!

1.3. Szinusztétel

A szinusztétel bizonyításához és nagyon sok feladat megoldásához szükséges a következő lemma.

1. Lemma. *A körvonal húrja egyenlő az átmérőjének és a neki megfelelő kerületi szög szinuszának szorzatával. [2]*



1.8. ábra. *A körvonal húrja* [1]

Bizonyítás. A 1.8 ábrán az MN szakasz az O középpontú körvonal húrja. Következő lépésben meghúzzuk az MP átmérőt. Ekkor az $MNP\angle = 90°$, mint a az átmérőre támaszkodó kerületi szög. Legyen az MPN kerületi szög mértéke α. [2] Ekkor az MPN derékszögű háromszögben kapjuk, hogy:

$$MN = MP \cdot sin\alpha.[1] \tag{1.3.1}$$

Minden kerületi szögnek a mértéke, amely az MN húrra támaszkodik, α vagy $180° - \alpha$ lesz. Ezáltal a szinuszaik egyenlők. Ami alapján az (1.3.1) egyenlőség minden, MN húrra támaszkodó, kerületi szögre igaz lesz.

A lemma bebizonyítva!

A háromszögek egybevágóságának második ismertetőjeléből következik, hogy egy oldala és a rajta fekvő két szöge egyértelműen meghatározzák a háromszöget. Tehát, ezen elemei alapján meg lehet határozni a háromszögnek másik két oldalát.

Azt hogy, hogyan kell ezt megvalósítani, ebben a következő tétel lesz a segítségünkre.

3. Tétel (szinusztétel)**.** *A háromszöek oldalai arányosak a szemben lévõ szögek szinuszával.[2]*

Bizonyítás. Legyen az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}. \text{ [1]}$$

Legyen az ABC háromszög köré írt körének sugara R. Ekkor a az előző lemma alapján $a = 2R \cdot sinA$, $b = 2R \cdot sinB$, $c = 2R \cdot sinC$. [2] Kapjuk, hogy

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R \text{ [2]}$$

A tétel bebizonyítva!

1. Következmény. *A háromszög köré írt körének sugara a következő képlettel határozható meg*

$$R = \frac{a}{2sin\alpha},$$

ahol a - a háromszög oldalának hossza, α -ezzel az oldallal szemközti szög mértéke [2].

1.4. A háromszög területének meghatározására szolgáló képletek

Tudjuk, hogy az a, b és c oldalú valamint h_a, h_b és h_c magasságú háromszög S területét a következő képlettel tudjuk kiszámítani

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

A továbbiakban nézzük meg, hogy milyen képletekkel tudjuk meghatározni a háromszög területét.

4. Tétel. *A háromszög területe és két oldala és általuk bezárt szög szinuszának fél szorzatával egyenlő. [2]*

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melynek területe S-sel egyenlő, olyat melyben $BC = a$, $AC = b$ és $C\angle = \gamma$. A következőkben bebizonyítjuk, hogy

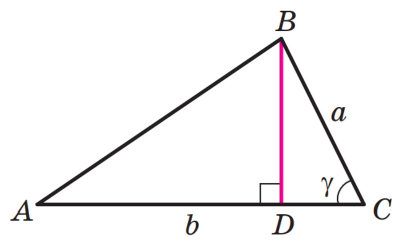
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot sin\gamma$$

Három esetet fogunk vizsgálni :

1) a γ szög hegyes (1.9 ábra);

2) a γ szög tompa (1.10 ábra);

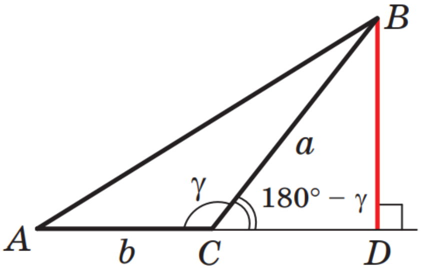
3) a γ szög derékszög.



1.9. ábra. *Az ABC háromszögben a γ szög hegyes*[1]

Az 1.9 és az 1.10 ábrákon megrajzoljuk az ABC háromszög BD magasságot. Ekkor

$$S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b. \text{ [1]}$$



1.10. ábra. *Az ABC háromszögben a γ szög tompa*[1]

Az első esetben BDC derékszögű háromszögben (1.9 ábra) ezt kapjuk: $BD = asin\gamma$, a második esetben (1.10 ábra): $BD = asin(180^\circ - \gamma) = asin\gamma$. Ebből arra a következtetésre jutunk, hogy az első két esetben: $S = \frac{1}{2}ab \cdot sin\gamma$. [2]

Ha a C szög derékszög, akkor $\gamma = 1$. Az ABC derékszögű háromszögben az a és b befogók:

$$S = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}ab \cdot sin90^\circ = \tfrac{1}{2}ab \cdot sin\gamma.\ [1]$$

A tétel bebizonyítva!

5. Tétel (Héron képlete)**.** *Az a, b és c oldalú háromszög területét a következő képlettel lehet meghatározni:*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ahol p a háromszög fél kerülete. [2]

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melynek területe S, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bebizonyítjuk, hogy

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ [2]$$

Először legyen $C\angle = \gamma$. Majd felírjuk a háromszög területének képletét:

$$S = \tfrac{1}{2}ab \cdot sin\gamma. \text{ Innen } S^2 = \tfrac{1}{4}a^2b^2sin^2\gamma.\ [1]$$

A koszinusztétel alapján $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$.
Innen a $cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.
A $sin^2\gamma = 1 - cos^2\gamma = (1 - cos\gamma)(1 + cos\gamma)$, ebből következik: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

A tétel bebizonyítva!

6. Tétel. *Az a, b és c oldalú háromszög S területe a következő képlettel is meghatározható.*

$$S = \frac{abc}{4R}$$

ahol, R a háromszög köré írt kör sugara. [2]

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melynek területe S, oldalai $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bebizonyítjuk, hogy $S = \frac{abc}{4R}$, ahol R – a köré írt körvonal sugara lesz.

Legyen $A\angle = \alpha$. Felírjuk a háromszög területképletét:

$$S = \frac{1}{2}b \cdot sin\alpha.$$

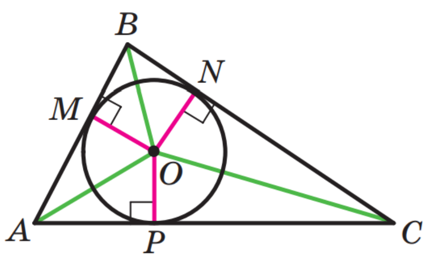
Az 1 lemma alapján következik, hogy $sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Ekkor $S = \frac{1}{2}b \cdot sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. [2]

A tétel bebizonyítva!

A tétel bizonyítása által meghatározhatjuk a háromszög köré írt köré sugarát:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

7. Tétel. *A háromszög területe egyenlő a fél kerületének és a beírt körvonal sugarának szorzatával. [2]*



1.11. ábra. *A fél kerület és a beírt körvonal sugara szorzata egyenlő* [1]

Bizonyítás: Az 1.11. ábrán az ABC háromszög látható, amelybe egy r sugarú körvonal van írva. Bebizonyítjuk, hogy

$$S = pr$$

ahol, S – az adott háromszög területe, p – a fél kerülete.

Legyen az O pont a beírt kör középpontja, ez a kör az M, N és P pontokban érinti az ABC háromszög oldalait. Az ABC háromszög területe egyenlő az AOB, BOC és COA területeinek az összegével:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}. \text{ [2]}$$

Meghúzzuk az érintési pontokhoz a sugarakat. Azt kapjuk, hogy: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Innen:

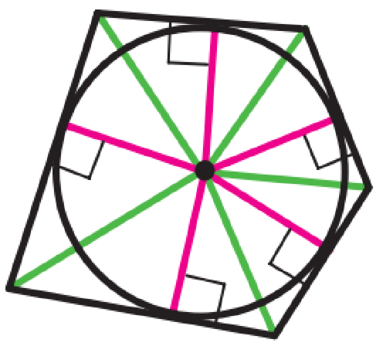
$$S_{AOB} = \tfrac{1}{2}OM \cdot AB = \tfrac{1}{2}r \cdot AB;$$
$$S_{AOB} = \tfrac{1}{2}ON \cdot BC = \tfrac{1}{2}r \cdot BC;$$
$$S_{AOB} = \tfrac{1}{2}OP \cdot AC = \tfrac{1}{2}r \cdot AC.$$

Tehát, $S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB+BC+AC}{2} = pr.$

A tétel bebizonyítva!

Az 7 tételt általánosítja a következő tétel.

8. Tétel. *A kör köré írt sokszög területe egyenlő a fél kerületének és a beírt körvonal sugarának szorzatával. [2]*



1.12. ábra. *A fél kerület és a beírt körvonal sugar szorzata*[1]

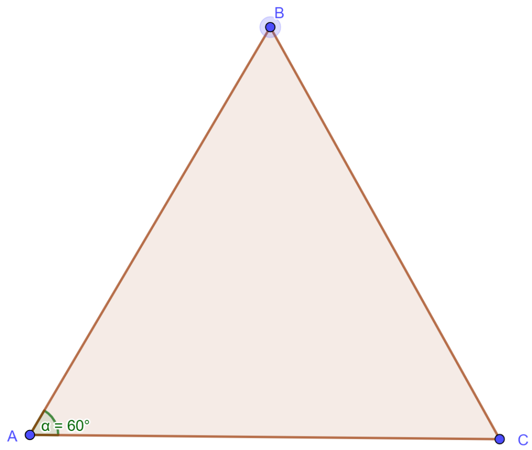
1. Megjegyzés. *Megjegyezendő, hogy az* 8. *tétel lehetőséget biztosít a sokszögbe írt körvonal sugarának meghatározására*

$$r = \frac{S}{p} \text{ [2]}$$

1.5. Feladatok a háromszögek megoldása témakörből

1. A háromszög két oldala 16 cm és 14 cm, a kisebbik ismert oldallal szemközti szöge pedig 60°. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalát!

Megoldás:



1.13. ábra. *1. feladat* [Forrás: saját szerkesztés]

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60°$

$14^2 = 16^2 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \cos 60°$

$196 = 256 + x^2 - 32 \cdot x \cdot \dfrac{1}{2}$

$196 = 256 + x^2 - 16x$

$x^2 + 16x + 60 = 0$

$x_1 = 6$

$x_2 = 10$

Felelet: $x_1 = 6cm$ vagy $x_2 = 10cm$

2. Az ABC háromszög AB oldalán jelöltek egy K pontot, a BC oldal C utáni meghosszabbításán pedig egy M pontot. Határozzátok meg az MK távolságot, ha $AB = 15cm$, $BC = 7cm$, $AC = 13cm$, $AK = 8cm$, $MC = 3cm$! [2]

Megoldás:

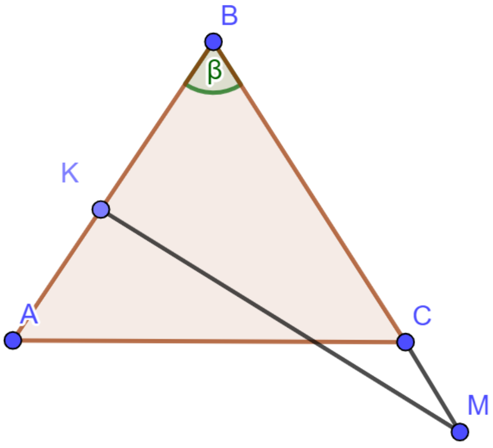
Az ABC háromszögben: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \beta$

$13^2 = 15^2 + 7^2 - 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \cos \beta$

$169 = 225 + 49 - 2 \cdot 15 \cdot 7$

$\cos \beta = \dfrac{225 + 49 - 169}{2 \cdot 15 \cdot 7}$

$\cos \beta = \dfrac{1}{2}$



1.14. ábra. *2. feladat*[Forrás: saját szerkesztés]

$\beta\angle = 60°$

Az BMK háromszögben: $MK^2 = BM^2 + BK^2 - 2 \cdot BM \cdot B \cdot \cos\beta$

$MK^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot \cos 60°$

$MK^2 = 100 + 49 - 140 \cdot \frac{1}{2}$

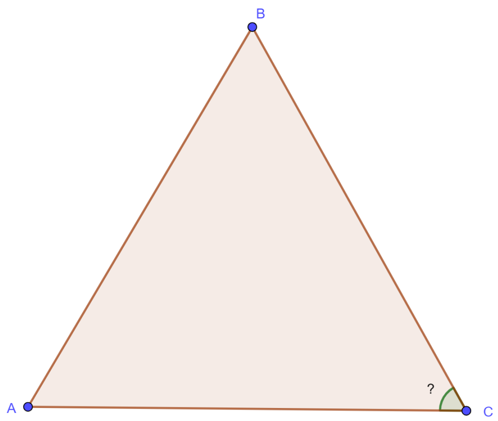
$MK^2 = 149 - 70$

$MK^2 = 79$

$MK = \sqrt{79}$ (cm)

Felelet: $MK = \sqrt{79}$ (cm) 3. A háromszög oldala 24 cm, a köré írt kör sugara $8\sqrt{3}$ cm. Mivel lesz egyenlő az adott oldallal szemközti szöge?

Megoldás: $AB = 24cm$



1.15. ábra. *3. feladat*[Forrás: saját szerkesztés]

$R = 8\sqrt{3}$

$AB = 2R \cdot \sin C$

$\sin C = \dfrac{AB}{2R} = \dfrac{24}{2 \cdot 8\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Felelet: $C\angle = 60°$ vagy $C\angle = 120°$

2. fejezet

Háromszögek megoldása a 9. osztályban

2.1. A feladatlap ismertetése

Első rész

Ebben a feladatrészben, csak egy helyes választ jelölj be.

1. Számítsd ki az ABC háromszög AC oldalának hosszát, ha $B\angle = 60°, AB = 5cm, BC = 3cm$! [3]

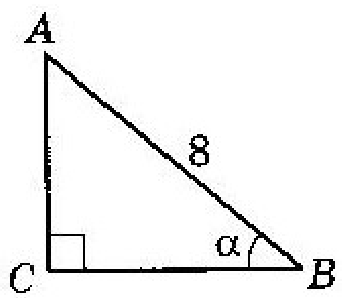
A) $19cm$; B) $49cm$; C) $7cm$; D) $\sqrt{19}cm$.

2. Az MNK háromszögben a $K\angle = 45$, $MK = 6, N\angle = 60°$. Határozd meg az MN oldal hosszát! [3]

A)$6\sqrt{2}$; B)$2\sqrt{6}$; C)$\sqrt{6}$; D) $3\sqrt{2}$.

3. Az ábra alapján határozd meg az ABC háromszög BC oldalát! [3]

A)$8\sin\alpha$; B)$\dfrac{8}{\sin\alpha}$; C)$\dfrac{8}{\cos\alpha}$; D)$8\cos\alpha$.



2.1. ábra. *3. feladathoz szükséges ábra*

4. Határozd meg az ABC háromszög köré írt körvonal sugarát, ha $AB = 3\sqrt{2}cm, C\angle = 45°$! [3]

A)$3cm$; B) $6cm$; C)$\sqrt{6}cm$; D)$3\sqrt{2}cm$.

Második rész

E*bben a feladatrészben írd le a feleletet!*

1. A háromszög két oldalának aránya 5 : 3, a köztük lévő szög 120°. Határozd meg a háromszög harmadik oldalát, ha kerülete $45cm$! [4]

Felelet:________________

2. Az ABC háromszögben $AC = 2\sqrt{2}, AB = 2\sqrt{3}, B\angle = 45°$. Határozd meg a C szöget! [4]

Felelet:________________

Harmadik rész

Ebben a feladatrészben írd le a teljes kidolgozását a feladatnak!

1. Egy háromszög oldalai 3 cm és 5 cm hosszúak, az általuk közbezárt szög 120°. Határozd meg a vele hasonló háromszög területét, amelynek a kerülete $30cm$! [5]

2.2. A feladatlap tartalma

A feladatlap három különböző részből áll, amelyben a háromszögek megoldását vizsgálom a Beregszászi járásban található iskolák 9. osztályaiban.

A feladatlap felépítéséhez a kilencedik osztály végén kötelező matematika vizsga feladatsorát vettem alapul. A feladatlap első részében négy teszt kérdésből állt, ahol egy helyes választ kellett megjelölniük. Ehhez a koszinusz és szinusz tétel, és azok következményeinek felhasználása volt szükséges. A tanulók, ezen feladatrész megoldásával *négy pontot* szerezhettek, ha minden tesztkérdésre helyesen válaszoltak. Minden helyes válasz *egy pontot* ért.

A második rész is hasonlóan a kötelező matematika vizsgához, olyan feladatból áll, amelynek a feleletét kell leírni. Ahhoz, hogy ezeket a feladatokat megtudják oldani, birtokolniuk kell a háromszögekről tanultakat, illetve a koszinusz és szinusz tétel, és azok következményeit. Ennél a feladatrésznél részpont nem írható jóvá. Összesen két feladatot kell megoldani, majd azoknak leírni a feleletét, melyre feladatonként *két pont* kapható. Abban az esetben, hogyha a felelet helytelen a tanuló *nulla pontot* kap.

A harmadik részben egy feladatnak kell leírni a teljes megoldását, lépésről lépésre. Ebben a feladatrészben is hasonló tudással kell rendelkezniük a tanulóknak, mint az előző feladatrészekben. Itt már eltérően az első és második résztől már részpontot is kaphatnak. A maximális pontszám az *négy pont*.

A feladatlapon összesen *12 pontot* lehetett szerezni, hasonlóan egy átlagos dolgozathoz. Ebből ahogy már korábban említettem, az első részben *4 pontot*, minden helyesen megjelölt tesztkérdés *1 pontot* ért. A második részben szintén *4 pontot* lehetett szerezni, ahol egy helyes válasz *2 pontot* ért, itt részpont nem volt szerezhető. És végezetül a harmadik részben a feladat teljes megoldásáért *4 pont* járt, itt már részpontot kaphattak.

2.3. A feladatlap megoldása

Első rész

1. Számítsd ki az ABC háromszög AC oldalának hosszát, ha $B\angle = 60°, AB = 5cm, BC = 3cm$! [3]

Megoldás:

A megoldáshoz a koszinusz tételt alkalmazzuk:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$

$AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60°$

$AC^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \dfrac{1}{2}$

$AC^2 = 25 + 9 - 15$

$AC^2 = 19$

$AC = \sqrt{19}$

Felelet: *D*

2. Az MNK háromszögben a $K\angle = 45$, $MK = 6, N\angle = 60°$. Határozd meg az MN oldal hosszát! [3]

Megoldás:

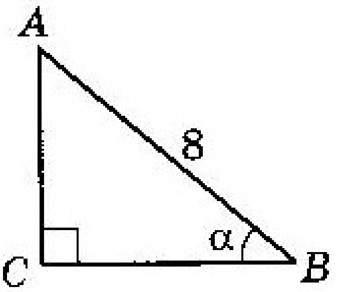
A megoldáshoz a szinusz tételt alkalmazzuk:

$\dfrac{MN}{\sin K} = \dfrac{MK}{\sin N} \Rightarrow MN = \dfrac{MK \cdot \sin K}{\sin N}$

$$MN = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6}$$

Felelet: B

3. Az ábra alapján határozd meg az ABC háromszög BC oldalát! [3]



2.2. ábra. *3. feladathoz szükséges ábra*

Megoldás:

A feladat megoldásához, tudjuk, hogy a befogó az α szomszédos szöge, ezért egyenlő a $\cos\alpha$ szorozva a befogóval. Vagyis a megoldás $8 \cdot \cos\alpha$

Felelet: D

4. Határozd meg az ABC háromszög köré írt körvonal sugarát, ha $AB = 3\sqrt{2}cm, C\angle = 45°$! [3]

Megoldás:

A megoldáshoz a szinusz tétel következményét alkalmazzuk:

$$R = \frac{AB}{2\sin C} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$$

Felelet: A

Második rész

E*Ebben a feladatrészben írd le a feleletet!*

1. A háromszög két oldalának aránya $5:3$, a köztük lévő szög $120°$. Határozd meg a háromszög harmadik oldalát, ha kerülete $45cm$! [4]

Megoldás:

$ABC\angle = 120°$ $AB = 5x, BC = 3x, x > 0$

A megoldáshoz a koszinusz tételt alkalmazzuk:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$

$AC^2 = 25x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot \cos 120°$

$AC^2 = 34x^2 + 15x^2$

$AC^2 = 49x^2$

$AC = 7x$

$P_{ABC} = 7x + 5x + 3x = 15x$

$15x = 45$

$x = \frac{45}{15}$

$x = 3$

$AC = 7 \cdot 3$

$AC = 21cm$

Felelet: *21 cm*

2. Az ABC háromszögben $AC = 2\sqrt{2}, AB = 2\sqrt{3}, B\angle = 45°$. Határozd meg a C szöget! [4]

Megoldás:

$ABC\angle = x$

A megoldáshoz a szinusz tételt alkalmazzuk:

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin x}$

$\sin x = \frac{\sin 45° \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 60°$

Felelet: $60°$

Harmadik rész

Ebben a feladatrészben írd le a teljes kidolgozását a feladatnak!

1. Egy háromszög oldalai 3 cm és 5 cm hosszúak, az általuk közbezárt szög 120°. Határozd meg a vele hasonló háromszög területét, amelynek a kerülete $30cm$! [5]

Megoldás:

Legyen $AB = 3cm, AC = 5cm, BAC\angle = \alpha = 120°$

A megoldáshoz a koszinusz tételt alkalmazzuk:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha\angle$

$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120°$

$BC^2 = 9 + 25 - 30 \cdot (-\frac{1}{2})$

$BC^2 = 49$

$BC = 7$

Megtudjuk határozni a háromszög kerületét:

$P_{ABC} = 3+5+7 = 15(cm)$ Tudjuk, hogy az ABC háromszöggel hasonló háromszög kerülete egyenlő - $P_{A_1B_1C_1} = 30cm$. Tehát feltudjuk írni a következőt:

$\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = \frac{30}{15} = 2$

Ebből arra tudunk következtetni, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai, úgy aránylanak az ABC háromszög oldalaihoz, mint $1:2-hoz$:

$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{2}{1}$

Tehát az $A_1B_1C_1$ oldalai a következőek:

$A_1C_1 = 10cm$

$A_1B_1 = 6cm$

$B_1C_1 = 14cm$

Így az $A_1B_1C_1$ háromszög területét megtudjuk határozni:

$S = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 \cdot A_1B_1 \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\ (cm^2)$

Felelet: $15\sqrt{3}\ (cm^2)$

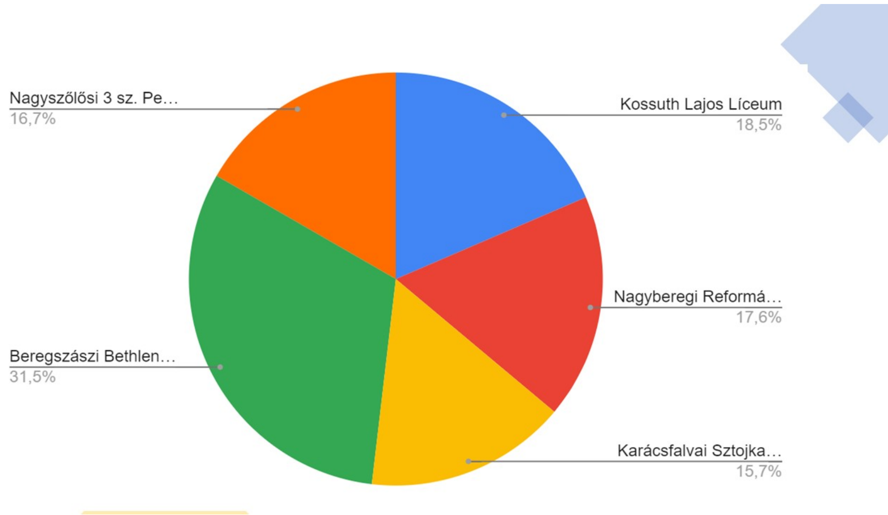
2.4. A feladatlap válaszainak elemzése

A feladatlapot összesen 108 tanuló töltötte ki. Az elemzésem első egységében ezt az összesített választömeget kívánom elemezni. Az adatokból kiderül, hogy mivel különböző iskolák, eltérő képességű diákjainak az összegzett, átlagolt értékeit láthatjuk, ebből kifolyólag egy heterogén sokaságot kapunk.

A 108 megoldást a következő iskolák hallgatói töltötték ki:

- Beregszászi Bethlen Gábor, 34 fő
- Nagyberegi Református Líceum, 19 fő;
- Nagyszőlősi 3 sz. Perényi Zsigmond Középiskola, 18 fő;
- Karácsfalvai Sztojka Sándor Görögkatolikus Líceum, 17 fő.

Látható az adatokból, hogy a beregszászi Bethlen Gábor Líceumot leszámítva a többi iskolából jövő adatok mennyisége közel azonos. Míg a többi iskola átlagosan 18,5 kitöltést biztosított, a BMG 34 fővel, 84 %-al nagyobb létszámot produkált az elemzésemben. Az alábbi diagram mutatja az iskolák megoszlását százalékosan.



2.3. ábra. *A feladatlap területi eloszlása* [Forrás: Saját szerkesztés]

A fentiekben már ismertettem, hogy a feladatlap 7 kérdést tartalmaz, ezzel összesen 12 pontot tudott egy tanuló elérni. A 108 diák együttes átlagos eredménye 4,78 pont lett, a leggyakoribb helyes válasz (modusz) csak 2 pont volt (24-en értek el ilyen alacsony eredményt), míg a medián 4 pont volt (tehát a diákok fele ettől kevesebbet, másik fele pedig ettől többet ért el).

2.4. ábra. *Összpontszám eloszlása* [Forrás: Saját szerkesztés]

A kutatás során és a feldolgozás közben tapasztaltam, hogy igen eltérő eredmények jöttek ki az egyes iskolákon belül is és az iskolák között is. Ezért érdemesnek tartottam megvizsgálni, hogy milyen szórása van a pontoknak. A google űrlap adatbázisát exportáltam excel függvénybe, melynek segítségével átlag és szórásszámítást végeztem. A szórás értéke 3,22 lett, amit elosztva a számtani átlaggal megkapjuk a relatív szórást. Ennek értéke 67,3 %-os változékonyságot mutat, ami szélsőséges ingadozást tükröz. Ez az eredmény arra enged következtetni, hogy a sokaság valóban heterogén és ezért érdemes tovább bontani iskolánként az adattömeget és megnézni, hogy az egyes intézmények tanulói milyen átlageredményeket értek el.

Az elemzés elvégzése érdekében leszürtem az adatbázisban az egyes iskolákat, majd pedig ezeknek megvizsgáltam az átlagát, szórását és a relatív szórását. Az alábbi táblázat szemlélteti a kapott eredményeket.

Oktatási intézmény megnevezése:	**Átlag**	**Szórás**	**Relatív szórás**
Beregszászi Bethlen Gábor Líceum	6,00	3,80	63,3 %
Karácsfalvai Sztojka Sándor Görögkatolikus Líceum	5,88	2,02	34,4 %
Nagyszőlősi 3 sz. Perényi Zsigmond Középiskola	4,77	3,33	69,9 %
Nagyberegi Református Líceum	4,62	2,02	43,6 %
Kossuth Lajos Líceum	4,61	2,00	43,4 %

2.5. ábra. *Az oktatási intézmények átlaga és szórása* [Forrás: Saját szerkesztés]

Az iskolák felsorolását aszerint rendeztem sorrendbe, hogy hol értek el legmagasabb átlagpontszámot. Látható, hogy a beregszászi Bethlen Gábor Líceum esetében a legmagasabb 6-os átlagpont, viszont ez is alatta marad a vártnak, ugyanis a maximum pontszám csupán 50 %-át érték el. A BMG esetében viszont az egyik legmagasabb a szóródás, ami azt jelenti, hogy a hallgatók egy része viszonylag jó eredményt ért el (a maximálisat 6 fő), de többeknek volt 2-4 helyes válasza. A karácsfalvai líceum diákjai érték el a második legmagasabb eredményt 5,88-as átlaggal és itt a legalacsonyabb a szóródás (relatív szórás 34,4 %), tehát viszonylag homogénnek mondható a diákok eredménye. A nagyszőlősi iskola végzett a dobogós helyen, viszont itt volt a legmagasabb a változékonyság (69,9 %-os relatív szórás), tehát a hallgatók igen eltérő pontértékekkel oldották meg a feladatokat.

Persze fontos, hogy mérjük az egyes diákközösségek átlagpontjai közötti eltéréseket, viszont a felmérés sajátosságai miatt nem lehet azt állítani, hogy maximálisan tükrözik az egyes iskolák 9. osztályának tudáskülömbségét, mivel online lettek kitöltve, vagy pedig a tanáraik bevonásával, s néhány esetben megfigyelhető volt a diákok együttműködése a kitöltés során. Ha nem is jelent 100 %-ban iránymutatást a felmérés, mégis néhány dologra felhívja a figyelmünket:

1. A legjobb átlag is épp elérte a teljes pontszám 50 %-át;
2. Jelentős a hallgatók tudásbeli eltérése összességében és az egyes intézményeken belül is;
3. Fejleszteni kell a diákok háromszögek megoldásával kapcsolatos ismereteket, tüzetesebben ismételni ezt a témakört.

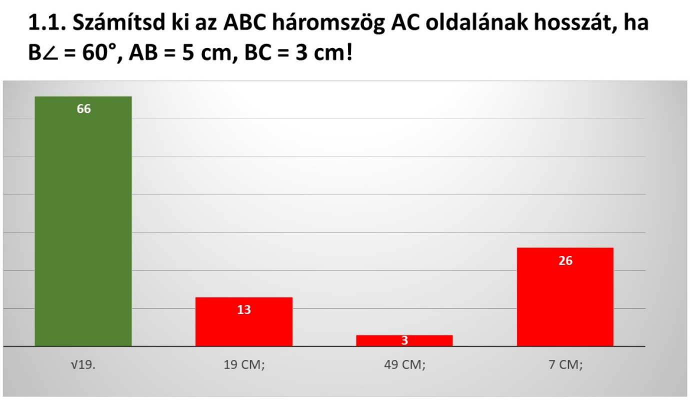
Az elemzésem második fő egysége a 7 feladat értékelése. Nézzük meg most ezt részletesebben. A feladatlap három egységre bontható:

1. tesztkérdések (kiválasztani a helyes megoldást);
2. rövid kifejtős (leírni a megoldást);
3. kidolgozós feladat (le kellett írni a feladat teljes megoldását).

A feladatok előrehaladásának sorrendjében növekedett a nehézség is. A három blokkban elérhető maximális 12 pont egyenlő arányban oszlott meg: 4-4-4 pontot szerezhettek a diákok.

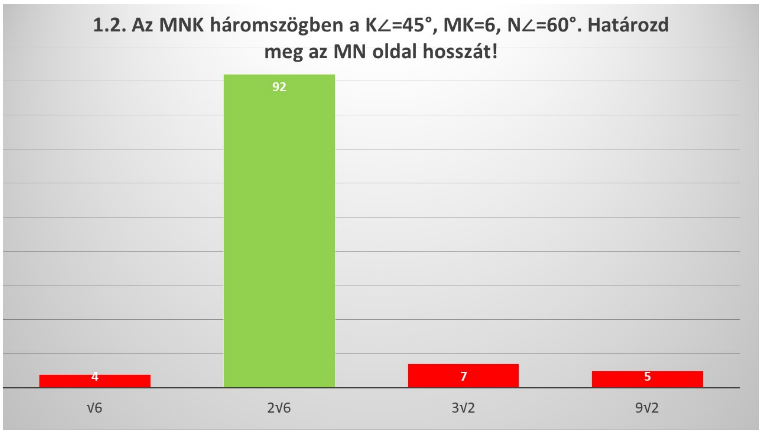
Az alábbiakban diagramok segítségével mutatom be, hogy mely feladatfajták esetében hogyan oszlottak meg a hallgatók válaszai.

Az első feladategység kérdései jelentették a legkisebb nehézséget. Az 1.1-es kérdésben, ahol a helyes $\sqrt{19}$-es választ 66-an találták el (az összes diák 61 %-a).



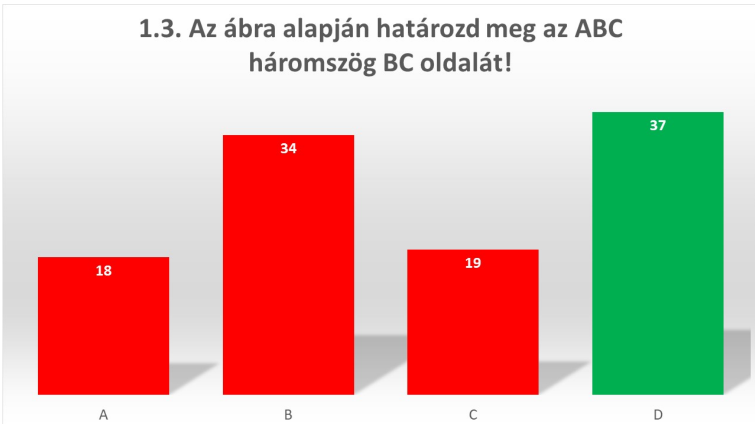
2.6. ábra. *Az 1. tesztfeladat megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

Az 1.2-es tesztfeladat esetében, ahol szintén a háromszög egyik oldalának a hosszát kellett megállapítani az összes közül a legtöbb helyes válasz született. A válaszadók 85 %-a találta el, azaz 92 diák jelölte meg helyes válaszként a $2\sqrt{6}$-t.



2.7. ábra. *Az 2. tesztfeladat megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

Az utolsó előtti tesztfeladatban az ABC háromszög BC oldalát kellett meghatározni. Itt már nem jelentkezett a helyes megoldás szignifikánsan, de még mindig a legtöbben *(37 diák)* a *„D"* helyes választ jelölte meg a kérdőívben. Külön érdekesnek tartom, hogy a hallgatók a helyes válaszon kívül nem az *„A"* választ jelölték meg, pedig az áll közelebb a helyes megoldáshoz.

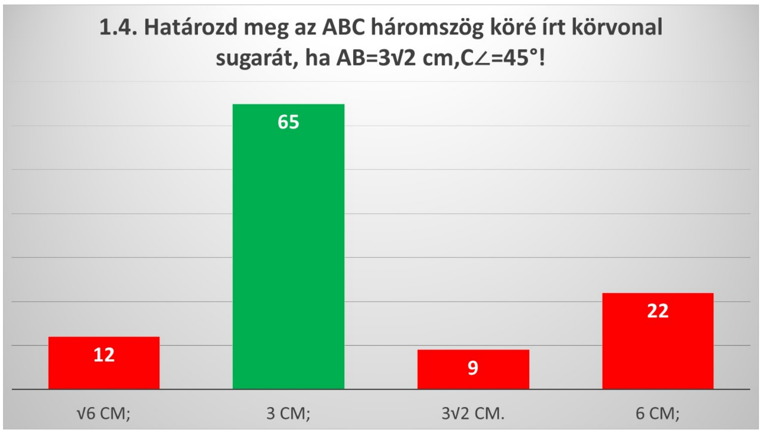


2.8. ábra. *Az 3. tesztfeladat megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

Az utolsó tesztkérdés az 1.4-es volt, aminek az eredményét az alábbi ábrán tekinthetjük meg.

Ennek a feladatnak az eredménye szintén szignifikánsan jó választ mutat, tehát 64 diák a 3 cm-es helyes választ jelölte meg.

Összességében látható, hogy a tesztkérdések nem jelentettek nagy nehézséget a hallgatóknak, bár ezek voltak azok a kérdések, amelyekben a hallgatók legegy-

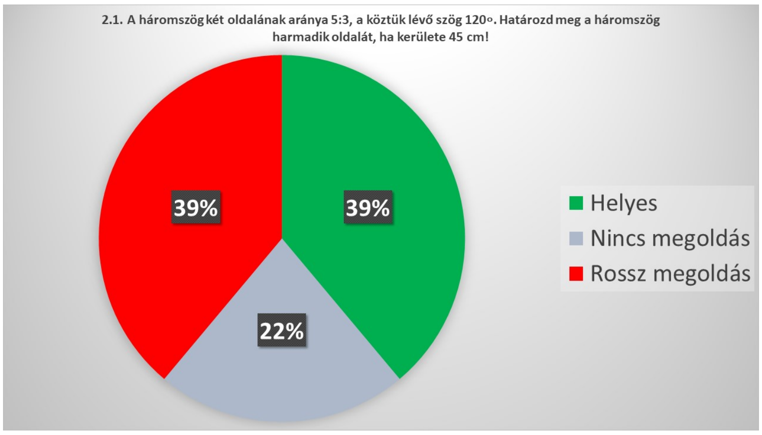


2.9. ábra. *Az 4. tesztfeladat megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

szerűbben tudták egymást informálni az adott osztályközösségen belül. Ezt leszámítva, azért az evidens, hogy a teszt szerű feladatok a többihez viszonyítva könnyebbnek számítanak, tehát érthető, hogy jobb eredményt értek el.

A feladatok második egységében ki kellett dolgozni a megoldást és rövid szöveges válaszként beírni a kérdőívbe.

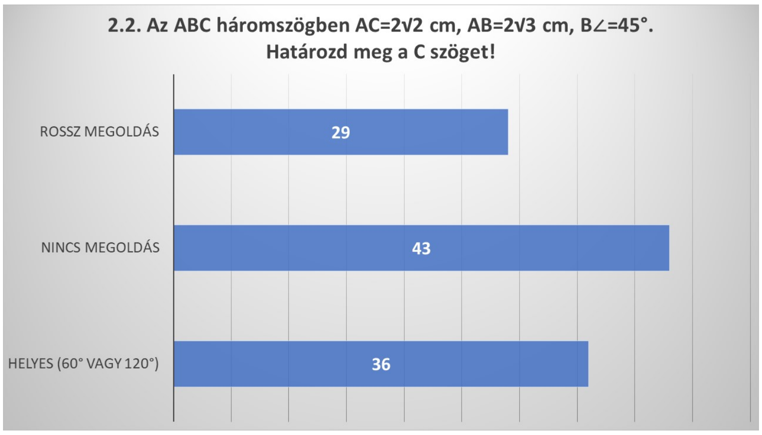
A 2.1-es feladatban, mivel önálló válaszokat írtak a diákok, igen sokfajta megoldás volt (jelentős számú helytelen és más-más megfogalmazásban helyes válaszok, amit önállóan kategorizáltam). A feladat helyes válasza a 21 cm volt. Nézzük meg az eredményeket.



2.10. ábra. *Az 2 rész első feladatának megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

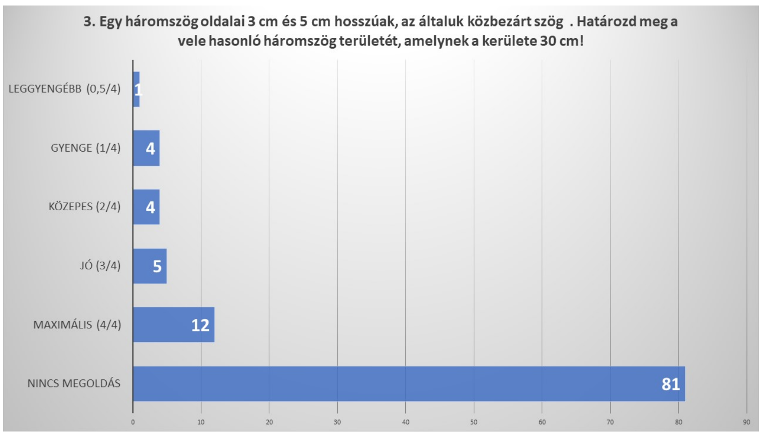
A diagram jól szemlélteti, hogy ez a feladat már jóval gyengébb eredményt mutat, mint a tesztjellegű előző négy kérdés. Csupán a hallgatók 39 %-a (42 diák) találta el a helyes választ, ugyanennyi hallgató bár adott választ, de az helytelen volt, valamint 22 %-ban egyáltalán nem is tudtak válaszolni erre a feladatra.

A következő kifejtős kérdés esetében még gyengébb eredmény született. Csupán 36 helyes válasz érkezett (a válaszadók $\frac{1}{3}$-a), míg a legtöbben egyáltalán nem is adtak semmilyen választ (43 fő), rossz megoldást pedig 27 %-uk (29 diák).



2.11. ábra. *Az 2 rész második feladatának megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

Az utolsó feladatlap egység a kidolgozásos jellegű volt. Itt egy 4 pontos nehezebb feladatot kellett megoldaniuk. Látható, hogy ez okozott a legtöbb nehézséget.



2.12. ábra. *Az 3 rész feladatának megoldásai* [Forrás: Saját szerkesztés]

A 108 diák közül 81-en úgy adták be a kérdőívet, hogy nem dolgozták ki ezt a feladatot. Akik kitöltötték 26-an voltak, akik közül a legnagyobb csoport maximális pontot kapott (4/4), 5-en jól (3/4), közepesen és gyengén további 4-4 diák teljesített, valamint volt egy fél pontos válasz is. Összegezve az összes diák eredményét feladatcsoportonként látható, hogy az átlagpontot a 3. feladategység rontotta le. Mert még a tesztnél mindig a többségben a helyes válaszokat jelölték be, addig már a rövid kifejtős, valamint a bonyolultabb kidolgozós feladat esetében sokan meg sem próbálkoztak a feladat megoldásával. Véleményem szerint egy éles helyzetben, amikor nagyobb tétje van a dolgozat megoldásának, javulhat a diákok hozzáállása a feladathoz és jobb eredményt tudnak magukból kihozni.

Az elemzés végső következtetéseként azt tudom elmondani, hogy a diákok mérése ilyen módszerrel fontos visszacsatolás lehet a pedagógusnak, ugyanis a statisztikákon keresztül jelzéseket kaphatunk egyes oktatási módszerek hatékonyságáról, a diákok maradék tudásának az arányáról, valamint a felmérő feladatok kidolgozásánál arról, hogy mely kategóriák jelentenek nagyobb nehézségeket a diákok számára.

Összegzés

Szakdolgozatomat a háromszögek megoldása témakörből állítottam össze. Szakdolgozatom első fejezete a háromszögek megoldása elméleti alapjait tartalmazza. Az elméleti segédletek által tudjuk meghatározni a háromszögünket.

Szakdolgozatom második fejezetében egy feladatlapot töltettem ki a Beregszászi járásban található iskolák 9. osztályos tanulóival. A kutatás elvégzésében nagy segítségemre volt a google űrlap által nyújtotta lehetőségek, valamint annak elemző eszközrendszere, amit pedig nem lehetett e formában értékelni, átalakítva excel adatbázissá ez utóbbi programban elemeztem tovább.

A kutatás során igen eltérő eredmények jöttek ki az egyes iskolákon belül is és az iskolák között is. Ezért érdemesnek tartottam megvizsgálni, hogy milyen szórása van a pontoknak. A google űrlap adatbázisát exportáltam excelbe, melynek segítségével átlag és szórásszámítást végeztem. A szórás értéke 3,22 lett, amit elosztva a számtani átlaggal megkapjuk a relatív szórást. Ennek értéke 67,3 %-os változékonyságot mutat, ami szélsőséges ingadozást tükröz.Ez az eredmény arra enged következtetni, hogy a sokaság valóban heterogén, tehát jelentős különbségek vannak az iskolák között és iskolán belül is a tanulók között. Ezekből a következtetésekből kiindulva, kutatásom során megvizsgáltam iskolánként az adattömeget és megnéztem, hogy az egyes intézmények tanulói milyen átlageredményeket értek el.

Ha nem is jelent 100 %-ban iránymutatást a felmérés, mégis néhány dologra felhívja a figyelmünket:

1. A legjobb átlag is épp elérte a teljes pontszám 50 %-át;

2. Jelentős a hallgatók tudásbeli eltérése összességében és az egyes intézményeken belül is;

3. Fejleszteni kell a diákok háromszögek megoldásával kapcsolatos ismereteket, tüzetesebben ismételni ezt a témakört.

Összegezve a fentieket a háromszögek megoldása témakör ilyen szinten történő elemzését azért tartom fontosnak, mert ezáltal én is sokkal több mindent megértettem az elméleti részből és annak gyakorlati hasznosíthatóságából, valamint a kutatási rész által mint pedagógus megtanultam értékelni a diákok tudásszintjét, s az elemzési módszerek segítségével azt, hogy milyen következtetést lehet levonni egy-egy felmérő dolgozat kiértékelése által. Bízom benne, hogy későbbiekben, mint matematikus oktató használni tudom a szakdolgozat készítés által elért tapasztalatokat.

Irodalomjegyzék

[1] А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. *Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів* — Х. : Гімназія, 2017. — 240 с. : іл.

[2] А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір пер. Д. Ф. Поллої. *Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою* - Львів Світ, 2017. - 240 с. : іл.

[3] Kárpátaljai Magyar Pedagógus Szövetség. *Matematika vizsgafeladatok 9. osztály számára 1-2 rész.* Beregszász, 2011 - 32 oldal https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxrYXJwYXRhbGphbWF0ZWt8Z3g6MmE1ZmEzOTQ0Y2Q2M2UwNg

[4] Kárpátaljai Magyar Pedagógus Szövetség. *Matematika vizsgafeladatok 9. osztály számára 1-2 rész.* Beregszász, 2012 - 32 oldal https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxrYXJwYXRhbGphbWF0ZWt8Z3g6NTYxOTJiY2MwMjIyZjhlNg

[5] Kárpátaljai Magyar Pedagógus Szövetség. *Matematika vizsgafeladatok 9. osztály számára 3-4 rész.* Beregszász, 2012 - 11 oldal https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxrYXJwYXRhbGphbWF0ZWt8Z3g6NTA5MzI4OWQzYWQzOGU2

Ábrák jegyzéke

Резюме

Дана кваліфікаційна робота розкриває сутність теми «Розв'язування трикутників». Робота складається з двох розділів. Перший розділ містить теоретичні основи розв'язування трикутників. За допомогою теоретичних посібників можна визначити і розв'язати трикутник.

У другому розділі роботи зроблено опитування між учнями 9 класу шкіл Берегівського району. Велику допомогу у проведенні дослідження надали Google Форми, і їх аналітичний набір інструментів, а дані, які неможливо було оцінити у такій формі, були додатково проаналізовані в електронних таблицях Excel.

Дослідження показало дуже різні результати як по школах, так і між ними. Тому варто було визначити середнє відхилення точок. Базу даних Google Форми було експортовано у Excel, яку використовано для обчислення середнього та стандартного відхилення. Значення стандартного відхилення становило 3,22, яке ділиться на середнє арифметичне для отримання відносного середнього квадратичного відхилення. Його значення показує мінливість 67,3%, що відображає екстремальні коливання. Цей результат свідчить про те, що населення справді неоднорідне, тож існують суттєві відмінності між школами та всередині них. Виходячи з цих висновків, у дослідженні розглянуто обсяг даних по школі та середні результати, досягнуті учнями в кожному закладі.

Навіть якщо опитування не є 100% настановою, воно все одно звертає увагу на декілька речей:

• Навіть найкращий середній бал ледь досяг 50% загального балу;

• Існують суттєві відмінності в знаннях учнів як в цілому, так і в межах окремих закладів;

• Учні повинні розвивати свої знання з розв'язування трикутників, повторювати цю тему інтенсивніше.

Підсумовуючи вищесказане, я вважаю аналіз теми розв'язування трикутників на цьому рівні важливим, оскільки набагато краще зрозуміла теоретичну частину та її практичну придатність. Щодо дослідницької частини, як педагог, я навчилася оцінювати рівень знань учнів, а за допомогою аналітичних методів – які висновки можна зробити, оцінюючи контрольні роботи учнів. Я впевнена, що згодом, будучи вчителем математики, зможу використати досвід, накопичений при написанні кваліфікаційної роботи.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1007785631

Дата перевірки:
09.05.2021 00:25:48 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2021 00:49:32 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Pataki_Cintia-Erzsebet_Haromszogek_megoldasa

Кількість сторінок: 31 **Кількість слів:** 4964 **Кількість символів:** 33525 **Розмір файлу:** 1.45 MB **ID файлу:** 1007884566

4.69% Схожість

Найбільша схожість: 3.65% з Інтернет-джерелом (https://cdn.gdz4you.com/files/books/12/dabfcaefecb819053c0607cd5cd.

4.69% Джерела з Інтернету | 61 .... Сторінка 33

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 68

Nyilatkozat

Alulírott, Pataki Cintia-Erzsébet 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.