ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Дипломна робота

Розв’язання та загальний аналіз завдань Закарпатських угорських математичних олімпіад за період з 2016 р. по 2019 рік

Якоб Фружіна Штефанія Бейлівна

Студентка IV-го курсу

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

Освітній рівень: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол №3 / 2019

Науковий керівник: **Кудлотяк Чаба Анталович**

ст. викладач

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 2020 року

Протокол № ______ / 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3" від „20" квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Дипломна робота

Розв'язання та загальний аналіз завдань Закарпатських угорських математичних олімпіад за період з 2016 р. по 2019 рік

Освітній рівень: бакалавр

Виконала: студентка IV-го курсу

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Якоб Фружіна Штефанія Бейлівна

Науковий керівник: **Кудлотяк Ч. А.**

ст. викладач

Рецензент: **Поллої Д. Ф.**

ст. викладач

Берегове
2020

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

Kárpátaljai matematika versenyek feladatainak megoldása és elemzése 2016-2019 között

Szakdolgozat

Készítette: Jakab Fruzsina Stefánia

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Kudlotyák Csaba

adjunktus

Recenzens: Pallay Dezső

adjunktus

Beregszász – 2020

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Kárpátalján mindig magas volt a matematika-oktatás színvonala. Több neves matematikus született vagy dolgozott a megye oktatási intézményeiben, s többségük nevét versenyek őrzik. Ezek a tanulmányi versenyek jelentős szerepet foglalnak el a hazai oktatás eszközrendszerében.

Szakdolgozatom témája a kárpátaljai magyar matematikai versenyek feladatainak elemzése. A dolgozat célja, hogy bemutassa a kárpátaljai matematika versenyeket, ismertesse azok történetét és összegyűjtse az elmúlt évek feladatsorait, valamint diagrammok segítségével ábrázolja a feladatok típusainak megoszlását évekre, illetve évfolyamokra bontva. Mivel a már említett versenyekről nagyon kevés írott anyag található, így igen aktuális az adott témával foglalkozó munka megírása.

Választásom azért esett erre a témára, mert matematika tanárjelöltként fontosnak tartom, hogy megismerjem a kárpátaljai magyar matematika versenyeket, hiszen ezek a versenyek lehetőséget adnak a diákok ismereteinek és feladatmegoldó képességének felmérésére.

1. Kárpátaljai matematika versenyek

Kárpátalján a helyi pedagógusszövetség szervezésében öt különböző matematikai verseny kerül megrendézésre: a Zrinyi Ilona és Gordiusz matematika tesztverseny, a Terebesi Viktor és Geőcze Zoárd matematika emlékverseny, illetve a Szedlák Ferenc matemetika emlékverseny. Ezenkívül vannak más szervezetek által megrendezett matematika vetélkedők, mint például a Kenguru, Bólyai-matematikaverseny, illetve az államilag szervezett összukrajnai matematika verseny, amely négy etapos (iskolai-, járási-, illetve megyei és országos forduló). Az összukrajnai matematika verseny járási fordulója novemberben kerül megrendezésre, melynek helyszíne mindig a járásközpontok egyik középiskolája. A megyei fordulót januárban szervezik meg, ennek résztvevői az előző forduló helyezettjei. A fordulónak a helyszíne Ungvár egyik középiskolája. A megyei forduló helyezettjei, pedig meghívást kapnak egy öt napos válogató versenyre. Az itt elért teljesítmény alapján a zsűri kijelöli Kárpátalja csapatát, amely képviseli a megyét az országos versenyen.

2. Zrinyi Ilona és Gordiusz matematikaverseny

A Zrinyi Ilona és Gordiusz matematika versenyek 1990 óta megrendezett országos matematika versenyek. Résztvevői a magyarországi és a határon túli magyarul beszélő diákok. Az első versenyt a MATEGYE (Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány) szervezte.

Kárpátalján első alkalommal 1995-ban rendezik meg a versenyt a MATEGYE kezdeményezésére Balázsi Borbála, a Bethlen Gábor Magyar Gimnázium matematika tanárának segítségével. [1] A későbbiekben a versenyt a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség szervezi a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány támogatásával. [2]

A verseny két fordulós (megyei/ országos fordulók), az egyéni versenyben legeredményesebben szereplő tanulók meghívást kapnak az országos döntőre. [3] Äz általános iskolai kategóriában minden területről évfolyamonként 200 indulóig 1 versenyző, 400 indulóig 2 versenyző, 400 feletti induló esetén 3 versenyző jut be. A gimnáziumi és szakközépiskolai kategóriában minden területről évfolyamonként, kategóriánként 50 indulóig 0 versenyző, 150 indulóig 1 versenyző, 150 feletti induló esetén 2 versenyző jut be.̈[3] Rajtuk kívül az országos eredmények összehasonlítása alapján is meghívást kaphatnak versenyzők. Az országos döntőre Magyarországon kerül sor 2018-ban Kecskeméten, de volt már Veszprémben (2007, 2013), Székesfehérváron (2010), Pécsett (2015) és Debrecenben (2017) is.[4]

Ä feladatok kidolgozására, és megoldására rendelkezésre álló idő a 2-4. osztályos tanulóknak 60 perc (25 feladat), az 5-6. osztályos tanulóknak 75 perc (25 feladat), a 7-11. osztályos tanulóknak 90 perc (30 feladat).[5] A tesztverseny során öt megadott feleletből választhatnak a tanulók (A, B, C, D és E), amelyek között csak egy a helyes válasz van. A kódlapon a feladatok sorszáma melletti öt négyzet közül a helyes válasz betűjelének megfelelő négyzetbe $\times$ jelet kell tenni, sötétkék vagy fekete tollal, jól láthatóan, a többi négy négyzetet pedig üresen kell hagyni. Ha a többi négy négyzet nem teljesen üres (valamelyikben tollal vagy ceruzával írt betű, szám vagy tolvonás szerepel) a válasz rossznak tekintik. Radír, javító festék vagy hibajavító toll használata esetén a feladatra adott válasz szintén rossz válasznak minősül. Ha valaki egy feladatra nem ad választ, az nem számít rossz megoldásnak. Ebben az esetben a kódlapon a feladat sorszáma melletti négyzeteket üresen kell hagyni. A versenyen íróeszközön kívül semmilyen más segédeszköz nem használható. Számolni a feladatlap mellé kiadott üres lapokon lehet. A verseny végén csak a megoldásokat tartalmazó kódlapot kell beadni.[5] A pontozás a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes, R a rossz válaszok, F a kitűzött feladatok számát jelenti.

A versenyen íróeszközön és papíron kívül más segédeszköz (például: vonalzó, számológép, körző, szögmérő, mobiltelefon) használata nem megengedett.

A megoldásokat évfolyamonként és kategóriánként értékelik. Egyenlő pontszám esetén az ér el jobb helyezést, akinek kevesebb a hibás megoldása. Ha ez is egyenlő, akkor a prioritás dönt. (A számítógép a feladatokat sorrendbe rakja. Amelyik feladatot a legtöbben oldották meg jól, az lesz az első, amelyiket a legkevesebben, az lesz az utolsó sorszámú. Akinél az így összeállított sorrend alapján a jól megoldott feladatok sorszámainak összege (a prioritás) nagyobb, az ér el jobb helyezést.) Ha ez is megegyezik, akkor azonos helyezést érnek el a versenyzők.̈[5]

A vetélkedőn 2017-től már a 2. osztályos diákok is részt vehetnek. A kárpátaljai verseny helyszínét három iskola bíztosítja, a diákok a versenyen évfolyamonként vannak szétosztva. Az iskolák a következőek: 4. számú Kossuth Lajos Középiskola, Bethlen Gábor Magyar Gimnázium és a beregszászi 10. számú Mikes Kelemen Középiskola.

3. Terebesi Viktor matematika emlékverseny

Terebesi Viktor 1933. március 7-én Tiszaújlakon született, ahol elvégezte az elemi iskola négy osztályát, majd a Beregszászi Állami Főgimnázium tanulója lett. Nem sokáig lehetett tanítványa a gimnáziumnak: 1944 decemberében, mivel nem ismerte az ukrán vagy az orosz nyelvet, őt és még sok osztálytársát ez okból eltanácsolták. Nagyszőlősön fejezte be végül a középiskolai tanulmányait. Mivel mindig is oda volt a matematikáért, szerette az érdekes számtani feladatok, ezért már fiatalabb korában elhatározta, hogy matematikatanár lesz.

Az Ungvári Állami Egyetem matematika karára iratkozott be. 1956-ban kitűnő eredménnyel fejezte be tanulmányait ezen az egyetemen. Tanárai időben felfedezték csodás tehetségét, és ösztönözték, bíztatták, hogy a Moszkvai Lomonoszov Egyetem aspiránsaként folytassa tanulmányait. A híres Bermann professzor tanítványaként és az ő irányítása alatt kezdte el kanditátusi értekezése anyagának gyűjtését és feldolgozását, viszont nem volt érkezése befejeznie munkáját.

Kárpátalja egyik elismert matematikusa később a Beregszászi 4. számú Kossuth Lajos Középiskola pedagógusként kamatoztatta tudását, tehetségét. Diákjai a mai napig rajongva emlékeznek vissza rá, illetve felejthetetlen, érdekes matematika óráira. Nem az volt a célja, hogy diákjai mindent bemagoljanak, hanem logikus gondolkodásra tanította őket. Tanítványaival igyekezett megszerettetni a tantárgyat és annak szépségeit, valamint ösztönözte és bíztatta őket. Az oktatási folyamatban a siker élményére épített, amelyet a legfontosabb ösztönző erőnek tartott a matematika elsajátításában. Számos tanítványa választotta hivatásául e pályát, és közülük sokan megszerezték a kandidátusi, doktori címet is. [6]

A verseny 1996-tól került megrendezésre a beregszászi 4. számú Kossuth Lajos Középiskolában, emléket állítva az iskola egykori pedagógusának. A verseny napját mindig Terebesi Viktor születésnapjához legközelebb eső szombathoz kötik. A verseny lebonyolítását a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség (KMPSZ), valamint a Terebesi Viktor Emlékalapítvány vállalta fel.

A verseny célja:

Lehetőséget biztosítani Kárpátalja magyar nyelvű iskoláiban tanuló elemi és általános iskolás tanulók, diákok számára, hogy összemérhessék a matematikai tudásukat, logikus gondolkodásukat évfolyamtársaikkal. [7]

A verseny lebonyolítása:

Az megmérettetés egy feladatmegoldó verseny a 3-6. osztályos tanulók számára. A 2014-es évben a KMPSZ egységesítette a kritériumrendszert, amely szerint minden feladat helyes megoldásával 20 pontot szerezhet a tanuló. A tanulóknak az öt feladat megoldására másfél óra áll a rendelkezésére. A verseny írásbeli. A 3-4. osztályos tanulóknak 90 perc áll rendelkezésükre megoldani a megkapott feladatokat, míg az 5-6. osztályosoknak 120 perc. A feladat összeállításánál az Ukrajnában elfogadott állami tanterv alapján a megnevezett szerzők által írt tankönyvet és a tanmenetnek megfelelő fejezeteket és témákat veszik alapul. Egy feladat a GENIUS-tehetségpontok tematikájához kapcsolódik. [7]

4. Szedlák Ferenc matemetika emlékverseny

A versenyt első alkalommal 2002-ben rendezték meg az aknaszlatinai Bólyai János Középiskolában, az intézmény egykori matematika tanárának emlékére. A verseny minden évben decemberben kerül megrendezésre, szervezője a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség.

Az emlékverseny célja, hogy a Máramaros (Felső-Tisza-vidék) magyar iskoláinak a diákjait megismertessék Szedlák Ferenc kiváló aknaszlatinai matematika tanár példaértékű életével, munkásságával. Egyben lehetőséget biztosítva arra, hogy összemérhessék tudásukat évfolyamtársaikkal.

A verseny résztvevői a Técsői Hollósy Simon Középiskola, a Técsői Református Líceum, a Viski Kölcsey Ferenc Középiskola, valamint a házigazda Aknaszlatinai középiskola 7-11. osztályos diákjai.

A verseny során a résztvevőknek 5 feladatot kell megoldaniuk 120 perc alatt. A verseny feladatainak összeállításánál az államilag elfogadott tanterv alapján készített tankönyveket veszik alapul. A feladatok közül egy a GENIUS tehetségpontok tematikai anyagából, egy pedig a tankönyvekben szereplő "csillagos" nehezebb feladtatokból kerül kiválasztásra.[10]

Az államilag elfogadott tanterv alapjás összeállított tankönyvek a következők:

- 7. osztály Algebra, Mértan / H. P. Bevz, V. H. Bevz, N. H. Vladimirova.[10]
- 8. osztály: Algebra, Mértan / A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, M. I.Burda, N. A. Taraszenkova.[10]
- 9. osztály: Algebra, Mértan / H. P. Bevz, M. I. Burda, N. A. Taraszenkova.[10]
- 10. osztály: Algebra, Mértan / J. P. Nelin, M. I. Burda, N. A. Taraszenkova.[10]
- 11. osztály Matematika / H. P. Bevz, V. H. Bev.[10]

A versenyen elérhető maximális pontszám, amit a diákok helyes feladatmegoldásért kaphatnak, 100 pont. Az emlékverseny helyszíne az Aknaszlatinai Bólyai János Középiskola.

5. Geőcze Zoárd matematikaverseny

Geőcze Zoárd matematikus, 1873. augusztus 23-án született Budapesten. Egyetemi tanulmányait a Budapesti Tudományegyetemen végezte. 1899-től az ungvári reáliskolában tanított, ahol első eredménye is született, aminek köszönhetően Párizsban folytathatta tovább tanulmányait állami ösztöndíjjal. A Sorbonne-on doktorált, majd a budapesti V. kerületi fő reáliskolához helyezték. Később 1913-ban egyetemi magántanárrá képesítették a sokaságelmélet és a valós változós függvénytan tárgyköréből. Felszínszámítás terén úttörő munkát hajtott végre. A háború kitörésekor katonai szolgálatot kellett teljesítenie, viszont eközben is dolgozott, cikkeit tábori postával küldte haza. [8]

A Geőcze Zoárd matematikaversenyt a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség kezdeményezte. A verseny névadójának olyan személyt kerestek, aki nemzetközileg is elismert és Kárpátaljához is kötődik.

A verseny célja:

Lehetőséget biztosítani Kárpátalja magyar nyelvű iskoláiban tanuló elemi és általános iskolás tanulók, diákok számára, hogy összemérhessék a matematikai tudásukat, logikus gondolkodásukat évfolyamtársaikkal. [9]

A verseny lebonyolítása:

Az emlékverseny klasszikus feladatmegoldó verseny. A résztvevőknek osztályonként 5 (4 algebra, 1 mértan) feladatot kell megoldaniuk. A versenyzőknek, a feladatok megoldására 3 óra áll rendelkezésére. A feladatok helyes megoldásáért 20-20 pont kapható. A verseny résztvevői a kárpátaljai magyar általános és középiskolák 7–11. évfolyamos diákjai iskolatípustól függetlenül. A versenyt egy napon tartják a Terebesi Viktor emlékversennyel, mivel annak kiegészítésére szolgál. Hiszen a Terebesi Viktor matematika emlékversenyen a 3-6. osztályosok vehetnek részt, a Geőcze Zoárd matematika versenyen pedig a felsőbb évesek.

A feladatok összeállításánál az Ukrajnában elfogadott állami tanterv alapján írt tankönyveket veszik alapul.

A vetélkedőn egy feladat a GENIUS tehetségpontok tematikájához kapcsolódik.[9]

- 7. osztály: Algebra, Mértan / H. P. Bevz, V. H. Bevz, N. H. Vladimirova[9]

- 8. osztály: Algebra, Mértan /A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, M.I. Burda, N. A. Taraszenkova [9]

- 9. osztály: Algebra, Mértan / H. P. Bevz, M. I. Burda, N. A. Taraszenkova [9]

- 10. osztály: Algebra, Mértan / J. P. Nelin, M. I. Burda, N. A. Taraszenkova [9]
- 11. osztály: Matematika / H. P. Bevz, V. H. Bevz [9]

A verseny során a maximális pontszám, amelyet a résztvevő a feladatok megoldása során elérhet, 100 pont. A verseny helyszíne a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola.

6. Bólyai János matematika emlékverseny

Bólyai János, az egyik leghíresebb magyar matematikus, a "geometria Kopernikusza", a "modern matematika atyja".

1802. december 15-én született Kolozsváron. Nevét számos tanintézmény, illetve matematikai emlékverseny viseli a Kárpát-medencében. Kárpátalján a Munkácsi 3. számú II. Rákóczi Ferenc Középiskola minden évben, Bólyai János születésnapjához igazítva szervez nemzetközi matematikai vetélkedőt.

A résztvevők 8–11. osztályos tanulók. A versenyen a kárpátaljai magyar oktatási intézmények mellett a munkácsi ukrán és orosz tanintézmények, valamint öt magyarországi gimnázium – a Sárospataki Árpád Vezér Gimnázium, a Budapesti II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, a Mátészalkai Esze Tamás Gimnázium, a Dabasi Kossuth Zsuzsanna, illetve Táncsics Mihály Gimnázium – tanulói is részt vesznek.

Az emlékverseny feladatmegoldásos, ahol versenyzőknek az 5 feladat kidolgozására három óra, azaz 180 perc áll a rendelkezésére. A feladatok összeállításánál többek között Balázsi Borbála, a Beregszászi Magyar Gimnázium (BMG) pedagógusa, Kicska György, valamint Karabeles Katalin, a Munkácsi II. Rákóczi Ferenc Középiskola matematikatanárai működtek közre. A feladatok a 8–11. osztályos tananyaghoz illeszkednek, de mégsem a tankönyvekből gyűjtik ki őket, mivel a verseny szervezői fontosnak tartják, hogy tanítványaik megtanuljanak önállóan és logikusan gondolkodni. Ezért minden korosztály számára logikai feladatokból állítanak össze a kérdéssort.

Magyar és szláv anyanyelvű diákoknak magyar és ukrán nyelvű feladatlapokat készítenek. A verseny orosz nemzetiségű résztvevőinek a szervezők – igény szerint – szóban ukránról oroszra lefordítják a kérdéseket. [11]

7. Kárpátaljai matematika versenyek feladatsorai

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

7. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy két egymást követő páratlan természetes szám összege osztható 4-gyel!

2. Oldd meg a $-\frac{7}{10}\left(0.6x+\frac{2}{5}\right)+0.3\left(\frac{3}{5}x+0.4\right)=0$ egyenletet!

3. Anna egy 3×3-as táblán néhány bábut helyezett el, úgy hogy minden egyes mezőbe egy vagy több, esetleg egyetlen egy bábút sem tett. Ezután megszámolta minden sorban és oszlopban a bábúkat és észrevette, hogy így hat különböző számot kapott. Legkevesebb hány bábút használhatott fel Anna és hogyan helyezte el azokat a táblán?

4. A turista az A és B települések közötti távolság felét 4 km/h, míg a B-ig hátralévő utat 6 km/h sebességgel tette meg. Visszafelé úton a B és A közötti távolság $\frac{2}{3}$-át az odafele út átlagsebességével, míg a fennmaradó távolságot 5 km/h sebességgel tette meg. Hány km a két település közötti távolság, ha ismert, hogy a visszafelé út 2 perccel rövidebb, mint az odafele út.

5. Az AB szakaszt a P és a Q pontok harmadolják. A PQ szakasz fölé megrajzoltuk a OPQ szabályos háromszöget, majd az O pont körül az $OA=OB$ sugárral kört rajzoltunk. A PO félegyenes a kört a C pontban metszi. Mekkora az $ABC\angle$?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

8. osztály

1. Egy híres matematikus 2016 január 1-én így szólt " Két év múlva éppen annyi idős leszek, mint születési évem számjegyei négyzetének összege". Mikor született az illető?

2. Van három zacskónk, mindegyikben két szaloncukorral. Az egyikben két zöld, a másikban két kék, a harmadikban pedig egy zöld és egy kék csomagolású. A zacskókon feliratok is vannak: „2 zöld", „2 kék", „1 zöld, 1 kék"; de egyik zacskóban sem az van, amit a rajta lévő felirat mond. Az egyik zacskóból kivehetsz egy szaloncukrot, és megnézheted, milyen színű. Ebből kell kitalálnod, melyik zacskóban milyen szaloncukrok vannak. Hogyan oldod meg a feladatot?

3. Az a, b nem nulla számokra érvényes a következő összefüggés: $6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25$. Mivel egyenlő az $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ kifejezés értéke?

4. Az ABC háromszögben meghúzták az AF súlyvonalat. Az AB oldal B pontnál lévő meghosszabbításán pedig felvették a D pontot úgy, hogy $AB = BD = AF$. Az AC oldal és a DF egyenes metszéspontját E-vel jelölték. Bizonyítsd be, hogy $CE = EF$.

5. Biri néni vett egy tyúkot a piacon. Miután a tyúk tojt két tojást, a tyúkot megették vacsorára. A tojásokból tyúk vagy kakas kelt ki. Minden kakast megettek, a tyúkokat viszont csak akkor, ha tojtak két tojást. Ez így ment éveken keresztül, míg egyszer csak kakasok maradtak, és ezeket is megették. Kiderült, hogy összesen 2004 kakast ettek meg. Meg tudjuk-e mondani, hogy hány tyúkot ettek meg?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

9.osztály

1. Számítsd ki a $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n-2}+\sqrt{2n}}$ kifejezés értékét!

2. Oldd meg az $(x-1)\left|x^2+1\right| + |x-1|\left(x^2+1\right) = 0$ egyenletet![12]

3. A trapéz alapjánál lévő tompaszögek szögfelezői, a másik alapján lévő pontban metszik egymást. Határozzuk meg a trapéz oldalait, ha a magassága 12 cm, szögfelezőinek a hossza pedig 15 és 13 cm![12]

4. Egy matematika órán a tanár felírt egy pozitív egész számot a táblára. Az egyik diák így szólt: a szám osztható 31-gyel. A második diák azt mondta, hogy a szám osztható 30-cal, a harmadik pedig azt, hogy a szám osztható 29-cel. Ezt a felsorolást addig folytatták a diákok, amíg a harmincadik is megszólalt: a szám osztható 2-vel. A tanár ezek után közölte, hogy a fenti harminc állítás közül csak kettő hamis és a két hamis állítás közvetlenül egymás után hangzott el. Melyik volt a két hamis állítás?[12]

5. Jelöljük az n természetes szám számjegyeinek összegét $S(n)$ -nel. Bizonyítsd be, hogy $S(n^2) - (S(n))^2$ osztható 9-cel.

[12]

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

10. osztály

1. Számítsd ki az a paraméter összes olyan értékét, melyeknél az adott egyenletrendszernek egy megoldása lesz: $\begin{cases} (x-a)^2+y^2=4 \\ |y|=1-|x-12| \end{cases}$![13]

2. Oldd meg az $\frac{x^2-11x+3}{x^2-12x+3}-\frac{x^2-9x+3}{x^2-10x+3}=\frac{1}{4}$ egyenletet![13]

3. Az R sugarú körbe, négyzetet írtak, ebbe a négyzetbe egy körvonalat, amelybe újra négyzetet, és ezt a folyamatot így folytatták tovább. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett körlapok és négyzetek területeinek sorozatai mértani sorozatok lesznek. Határozd meg a keletkezett négyzetek és a keletkezett körlapok területeinek összegét![13]

4. Húzzunk egy b oldalú négyzet egyik csúcsából két félegyenest úgy, hogy ezek a négyzetet három olyan síkidomra bontsák, melyeknek a kerülete megegyezik. Mekkora ezeknek a síkidomoknak a területe?[13]

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, mely éleinek hossza 4 egység. Legyen P a DD_1 élnek az a belső pontja, amelyre $D_1P=1$, és jelöljük a D_1DCC_1 lap középpontját K-val. Határozd meg az A, P és K pontokon áthaladó sík, valamint a kocka közös részét alkotó síkidom kerületét![13]

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

11. osztály feladatsor

1. Oldd meg a valós számok halmazán az $(m-1)10^x+m10^{-x}=2m$ egyenletet, amelyben az m adott valós számot jelent!

2. Oldd meg az egyenletet: $\sqrt{3x^2+4x+9}+\sqrt{3x^2-4x+9}=4x$!

3. Oldd meg a $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1$ egyenlőtlenséget!

4. Az egységsugarú kör köré írható $ABCD$ trapézról tudjuk, hogy az AB, BC, CD oldalak hossza és az AD oldal hosszának a kétszerese ebben a sorrendben egy számtani sorozat négy szomszédos eleme. Mekkorák a trapéz oldalai?

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, a B_1C_1 él felezőpontja P, a C_1D_1 él felezőpontja Q. Számítsa ki az A, P és Q pontokon áthaladó síkból a kocka által kimetszett síkidom területét!

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

7. osztály

1. Oldd meg az egyenletet $(x-3)(|x|-2)(x^2+4)=0$!

2. András Londonban élő unokatestvére a következő üzenetben kért pénzt rokonától: SEND+MORE=MONEY. Az üzenetben az egyenlő betűk egyenlő, különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek 0-tól 9-ig. Mennyi a kért összeg?

3. El lehet-e szállítani 7 teherautóval 50 kőtömböt, melyek súlya $250, 251, 252...299$ kg? (A kövek nem darabolhatók, a teherautók csak egyszer vehetők igénybe, és mindegyikre legfeljebb 2 tonna teher rakható.)

4. Az AOB és BOC egymás melletti szögek. Az AOB szög fokmértéke háromszorosa a BOC szög fokmértékének. Számítsd ki az AOB és BOC szögek mértékét, ha ismert, hogy a két szög szögfelezője egymással $60°$ –os szöget zár közre!

5. A 2017-nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható? Válaszodat indokold meg!

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

8. osztály

1. Hányféle két vagy háromgombócos fagyit vehetünk, ha a csokoládé, vanília, eper, citrom ízek közül választhatunk, nem veszünk két egyforma ízű gombócot és tölcsérbe kérjük?

2. Az $A=\overline{3a72b}$ szám osztható 45-tel, a $B=\overline{3c72d}$ szám osztható 36-tal. Lehetséges-e, hogy $A=B$? Válaszodat indokold meg!

3. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges páratlan n természetes szám esetén az n^3+3n^2-n-3 kifejezés osztódik 48-cal!

4. Az ABC derékszögű háromszögben az A szög derékszög, BD és CE pedig szögfelezők. A DK és EM szakaszok merőlegesek a BC oldalra. Határozd meg a KAM szög fokmértékét!

5. Hasonlítsd össze a két számot 79^{26} és 244^{21}!

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

9. osztály

1. Kiválasztottunk 21 szomszédos természetes számot és összeadtuk őket, de egyet kifelejtettünk az összeadásból, így az összeg 2017 lett. Melyik számot felejtettük ki?

2. Az a paraméter mely értékeinél lesz az $|x^2 - 4|x| + 3| = a$ egyenletnek hat megoldása?

3. Két munkás együtt dolgozva az adott területet 2 óra 6 perc alatt kaszálja le. Mennyi idő szükséges egy-egy ilyen munkásnak ugyanilyen mező lekaszálására, ha egyedül végeznék el ezt a munkát, és a második 4 órával tovább kaszálna.

4. Oldd meg a következő függvényegyenletet: $2f(x) + f(1-x) = 3 - xf(1)$ $(x \in R)$!

5. Az ABC háromszög AC befogójának a felezőpontja K. $BAC\angle = 60°$. A K ponton keresztül egy egyenest fektettünk, amely a BC befogót az N pontban metszi úgy, hogy $CNK\angle = 30°$. Az AB átfogón egy M pontot jelöltünk úgy, hogy $AM = KN$. A $KMBN$ négyszög kerülete $60+30\sqrt{3}cm$. Bizonyítsa be, hogy $KMBN$ négyszög paralelogramma, és határozza meg ennek a paralelogrammának a területét.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

10. osztály

1. Egy nem állandó számtani sorozat első, harmadik és tizenegyedik tagja egy mértani sorozat egymást követő elemei. A számtani sorozat valamely három egymást követő tagját összeadtuk, így az első három tag összegének a 7-szeresét kaptuk. Hányadik elemeit adtuk össze a sorozatnak?

2. Határozd meg az $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x^2-x-6}$ függvény minimális és maximális értékét a $[4; 7]$ intervallumban!

3. Oldd meg a következő függvényegyenletet: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x, (x \in R\{-1; 2\})$!

4. Az $ABCD$ trapéz alapjainak hossza $AD = 12$ cm, $BC = 8$ cm. A BC félegyenesen úgy vettünk fel egy M pontot, hogy az AM félegyenes a trapézt két egyenlő területű részre osztja és $BM > BC$. Határozd meg a CM szakasz hosszát.

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasáb alapja az $ABCD$ paralelogramma. Adott, hogy $AA_1 = 8\sqrt{3}cm$, $AB_1 = 2AD$. Az AB, CD és CC_1 élek felezőpontjai megfelelően a K, M és N pontok lesznek. A K, M és N pontokra illeszkedő metszet területe $80\sqrt{3}cm^2$, kerülete pedig $40\sqrt{3}cm$. Bizonyítsa be, hogy a metszet rombusz lesz, és határozza meg a metszet síkja és a hasáb alapja hajlásszögét.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

11. osztály

1. Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat. Jelölje A azt az eseményt, hogy

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb. Számítsd ki az A esemény valószínűségét!

2. A $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(-x^2 + 2x + 3)$ egyenlőtlenség az $x = \frac{9}{4}$ értékre teljesül. Oldd meg az egyenlőtlenséget!

3. Oldd meg a következő függvényegyenletet: $f(x+y) + f(x) = 2f(y) + 2f(x-y) + y - 4$, $(f; R \to R, x, y \in R)$!

4. Határozd meg az egyenlőszárú derékszögű háromszög befogóihoz húzott súlyvonalak hajlásszögét!

5. Az $ABCDS$ gúla alapja $ABCD$ rombusz $(AB||CD)$. A gúla magassága az AB él felezőpontján halad át. A CS és DS oldalélek pedig az alaplap síkjához α és β szög alatt hajlanak. Határozzuk meg a rombusz hegyes szögének cosinusát, ha $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

7. osztály

1. Négy tanuló – A, B, C és D – a verseny után a következőket állította:

- A: B nyerte a versenyt.

- B: C nyerte a versenyt.
- C: Nem én nyertem a versenyt.
- D: Nem én nyertem a versenyt.

A négy állítás közül, mint utóbb kiderült, csak 1 volt igaz, a többi pedig hamis volt. Ki nyerte a versenyt? Válaszodat indokold!

2. Ismert, hogy a és b valós számokra fennáll az $a^3 + (3a^2 + 1)b + (3b^2 + 1)a + b^3 = 0$ összefüggés. Határozd meg az $\frac{a}{b}$ és $a + b$ kifejezések értékeit!

3. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevők csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszandó játszmák 24%-ára kerülne csak sor. Hány versenyző indult eredetileg a versenyen?

4. Kati, Peti és Lali kártyáznak. A játék elején a gyerekek leírt sorrendben a náluk lévő zsetonok $11 : 10 : 9$ arányban oszlottak el. A játék végére ez az arány $11 : 7 : 3$-ra módosult. Mennyi zseton volt a gyerekeknek a játék végén, ha tudjuk, hogy valaki 363 zsetont vesztett?

5. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján felvettek egy M és K pontokat úgy, hogy AM = AC és BK = BC.

   (a) Határozd meg a $KCM\angle$ nagyságát!

   (b) Ha ugyanezen háromszögben az $ABC\angle = 30°$ az M pont milyen arányban ossza az AB átfogót?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

8. osztály

1. Egyszerűsítse a következő kifejezést: $\sqrt{10 + 8\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$!

2. Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti!

3. Határozd meg az összes olyan a kétjegyű számot, amely a számjegyei kettővel nagyobb értékeinek a szorzatával lesz egyenlő!

4. Szerkeszd meg az $y = \frac{|x|}{x} + \frac{|x+2|}{x+2} + |x+2|$ függvény grafikonját.

5. Adott két különböző sugarú körvonal, melyek az E és F pontokban metszik egymást. Ezeken a pontokon keresztül két párhuzamos egyenest fektetünk, melyek a körvonalakat az A, B, C és D pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma lesz.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

9. osztály

1. Határozd meg az a, b, és c számjegyeket úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség: $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{abc}$!

2. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 25 és 4 cm, a nem párhuzamosoké pedig 20 és 13 cm. Határozzátok meg a trapéz magasságát és területét!

3. Szerkessze meg az $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$ függvény grafikonját. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát!

4. Oldd meg az egyenletet: $2x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$!

5. Az a paraméter mely értékeinél lesznek a $2x^2 - ax - a - 3 = 0$ egyenlet gyökei a $(-2; 1]$ intervallum elemei?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

10. osztály

1. Legyen x, y, z három páronként különböző nem nulla valós szám! Határozzuk meg az $x * y * z$szorzat értékét, ha tudjuk, hogy $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$.

2. Oldd meg a következő egyenletet $cos\pi * x = \left[\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] - \frac{1}{2}\right]$, ahol [a] az a szám egész részét jelöli!

3. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola áthalad az $A(-2, 1)$ és $B(2, 9)$ pontokon és az abszcissza tengelyt nem metszi. Határozza meg, hogy a parabola csúcsának abszcissza koordinátája milyen értékeket vehet fel.

4. Az ABC háromszögben $AC = \frac{1}{2} * (AB + BC)$. BL az ABC szög szögfelezője, K és M megfelelően az AB és BC oldalak felezőpontjai. Határozd meg a KLM szög nagyságát, ha $ABC\angle = \beta$!

5. Egy 12×12-es pontrács mind a 144 rácspontját kékre vagy pirosra színeztük úgy, hogy a négy sarokban lévő pont piros színű lett. (Egy rácspont sarokban van, ha szélső sorra és szélső oszlopra illeszkedik.) A színezés után a pontok között 50 volt kék színű, ezek közül 20 a pontrács valamelyik szélső sorában vagy szélső oszlopában helyezkedett el. Először egy-egy szakasszal összekötöttük az azonos sorban lévő szomszédos pontokat, majd az azonos oszlopban lévő szomszédos pontokat úgy, hogy az azonos színű pontokat velük egyező színű, a különböző színű pontokat fekete színű szakasszal kötöttük össze. Hány fekete színű szakaszt rajzoltunk, ha a piros színű szakaszok száma 130 lett?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

11. osztály

1. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$!

2. Legyen $a_1 > 0$ és $a_{(n+1)} = a_n + \frac{n}{a_n}$ minden természetes n-re. Bizonyítsd be, hogy $a_n \geq 0$ tetszőleges $n \geq 2$ esetén!

3. Az a paraméter mely értékeinél lesz az $\frac{x^2-4ax+3a^2-2a-1}{x-4} = 0$ egyenletnek egyetlen gyöke?

4. Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, és $BC = 10$ cm. A B-ből induló szögfelező talppontját az AB oldal felezőpontjával összekötő egyenes a B-től milyen távolságra metszi a BC egyenest?

5. Egy 10×10-es táblázatba egész számokat írtunk be úgy, hogy bármely két szomszédos cellában található szám között a különbség nem nagyobb ötnél. Bizonyítsd be, hogy a táblázatban található legalább két azonos szám!

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

7. osztály

1. Egyszerűsítsd az $1 - \frac{a-b}{\frac{a^2}{a+b}+\frac{ab(b-1)}{(a+b)(a-\frac{a}{b})}}$ kifejezést!

2. Matematika szakkörre 6 lány és 7 fiú jár, a padok egy sorban egymás mellé vannak elhelyezve.

- Hányféleképpen ülhetnek le?

- Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha az első hat székre lányok ülnek le, a többire a fiúk?

- Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha lány lány mellé, és fiú fiú mellé nem ülhet?

3. Egy négyjegyű pozitív egész számról a következőket tudjuk:

   (a) Minden számjegye különböző.

   (b) Számjegyeinek összege megegyezik 2019 számjegyeinek összegével.

   (c) Számjegyeinek szorzata megegyezik 2019 számjegyeinek szorzatával.

   Melyik a

   - legkisebb

   - legnagyobb

   ilyen szám?

4. Az anya 7 év múlva kétszer olyan idős lesz, mint a lánya. Ám 8 évvel ezelőtt az anya életkora a lányáénak ötszöröse volt. Hány éves most az anya és a lánya?

5. Egy háromszög oldalainak hossza: 5 cm, 8 cm ill. 12 cm. Egy hozzá hasonló háromszögben a legnagyobb és a legkisebb oldal különbsége 10,5 cm. Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai?

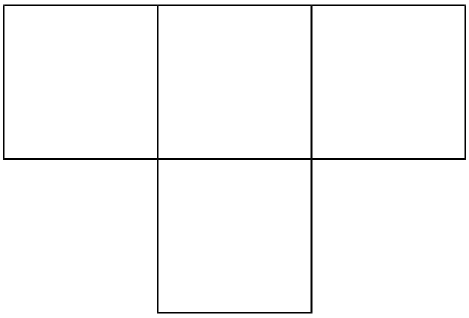
Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

8. osztály

1. Egyszerűsítsd a kifejezést: $\left(\frac{2x}{4x^2-y^2}+\frac{1}{y-2x}\right)\div\left(\frac{2x}{2x+y}+\frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right)$!

2. Ági és Bea egyszerre töltötték fel a mobiltelefonjuk akkumulátorát (mindkét lány telefonja egyenletes sebességgel merül le). Ági mobilja 42 óra, Beáé 21 óra alatt merül le teljesen. Mikor volt az egyik akkumulátor töltöttsége éppen kétszerese a másikénak?

3. Burkolható-e hézagmentesen, vágás és átfedés nélkül egy $8m \times 8m$, illetve egy $6m \times 6m$ szoba az alábbi típusú járólappal (minden járólap négy $1m \times 1m$ nagyságú négyzetből áll)?



4. Bizonyítsd be, hogy $n^{2019} - 5n^{2017} + 4n^{2015}$ osztható 120-szal, bármely $n \geq 2$ természetes szám esetére!

5. Az $ABCD$ négyzet minden oldalát 6-6 egyenlő részre osztottuk fel, majd az osztópontokon keresztül az átlókkal párhuzamos egyeneseket húztunk és megrajzoltuk az átlókat is. Az egyenesek metszés pontjai által meghatározott kis négyzet területe $2\ cm^2$.

   - Határozd meg az $ABCD$ négyzet területét!
   - Legyen $ABCD$ négyzet AB oldalának a A csúcshoz közelebbi hatodoló pont E, a BC oldalon az B csúcshoz közelebbi harmadoló pont F, a CD oldal felezőpontja G és az AD oldalának a D csúcshoz közelebbi hatodoló pont H. Hány cm^2 az $EFGH$ négyszög területe?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

9. osztály

1. Egy kétjegyű szám számjegyeinek különbsége 3. Ha a számot megszorozzuk a számjegyeinek összegével 814-et kapunk. Mely kétjegyű számok esetében lehetséges ez?

2. $(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1) + (x-1)^2 = 4x - x^2$.

3. Két munkás a rájuk bízott feladatot a következőképpen teljesítették: az első munkás egyedül kezdett el dolgozni $\frac{2}{3}$ annyi ideig, amennyi alatt a másik munkás a teljes munkát elvégezné. Ezt követően a másik munkás felváltotta, majd befejezte a munkát. Együttesen az első munkás feleannyi munkát végezne, mint ténylegesen B-re

hagyott, valamint 2 órával hamarabb is fejeznének. Mennyi idő alatt végzik el a munkát külön-külön?

4. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk? Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz?

5. Az egyenlőszárú ABC háromszög AB alapján felvettünk egy D belső pontot úgy, hogy az $ACD\angle = 30°$. A CD sugarú C középpontú körvonal a BC szárat az E pontban metszi. Mekkora a BDE szög?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

10. osztály

1. Három diák: Ádám, Béla és Cecil két vizsgát tett le. Ádám azt mondta, hogy két négyesre, Béla azt, hogy ötösre és hármasra, Cecil pedig, hogy hármasra és négyesre vizsgázott. Kiderült, hogy egyikük sem a saját jegyeit, hanem valamelyik társának jegyeit mondta el. Emellett az egyik diák elárulja egy vizsgajegyét. Melyik diáknak kell elárulnia egyik tetszőleges vizsgájának jegyét, hogy egyértelműen meghatározhatóak legyenek mindnyájuk vizsgajegyei?

2. Bontsa fel polinomok szorzatára az $x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020$ polinomot!

3. Pozitív x, y-ra bizonyítsa az alábbi egyenlőtlenséget $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$!

4. Határozza meg a derékszögű háromszög szögeit, ha az átfogóhoz húzott súlyvonala mértani középértéke a háromszög befogóinak!

5. Milyen a értékre az $\begin{cases} (a+4)x + 3y = a+1 \\ ax + (a-1)y = a-1. \end{cases}$; egyenletrendszernek végtelen sok megoldása lesz?

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

11. osztály

1. Minimum hány színnel lehet kiszínezni a szabályos testek lapjait, illetve csúcsit úgy, hogy ne legyen két szomszédos lap, illetve szomszédos csúcs azonos színű?

2. Dani sportlövész edzésre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

   - Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszod három tizedesjegyre kerekítve add meg!

   - Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

   - A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már $0,72$ volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el. Számítsd ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

3. Határozd meg a $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$ egyenletnek a $[0,75; 1]$ intervallumba eső megoldásait!

4. Az ABC háromszögben K, L és M rendre az AB, BC és CA oldalak A, B és C csúcsaihoz közelebbi harmadoló pontok. Határozd meg a háromszög szögeit, ha $K(1; -2)$, $L(6; 1)$, $M(2; 1)$ és $A(-2; -3)$!

5. A szabályos négyoldalú gúla alaplapja középpontjának távolsága a gúla oldallapjaitól és az oldaléleitől megfelelően a és b. Határozd meg a gúla oldallapja és magassága közötti szöget!

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

3. osztály

1. 9 és 8 összegének ötszöröséhez add hozzá 78 és 6 hányadosát![14]
2. Írd le azokat a háromjegyű számokat, amelyekben a számjegyek összege 4![14]
3. Anna és Zsuzsi – a két barátnő – húsvétkor $30 - 30$ tojást festett a locsolkodó fiúknak. Minden fiú egy-egy hímes tojást kapott. A két lánynál összesen 53 locsoló járt. Zsuzsinál öttel többen voltak, mint Annánál. Mennyi hímes tojása maradt Zsuzsinak, illetve Annának?[14]
4. Nagyapa kabátjának a bal és a jobb zsebébe ugyanannyi mogyorót tett. A jobb zsebéből Zsóka nevű unokája hetet kapott. Így a jobb zsebében feleannyi mogyoró maradt, mint a balban. Hány mogyorót tett nagyapa kabátjának a két zsebébe összesen?[14]
5. Vegyél fel 4 pontot! Kösd össze ezeket a pontokat szakaszokkal. Összesen hány szakaszt kaphatunk így? Vizsgáld meg az összes lehetőséget![14]

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

4. osztály

1. Hányszor kevesebb 2016 és 2009 különbsége 2912 negyedénél?
2. Melyek azok a háromjegyű számok, melyek különböző számjegyekből állnak és a számjegyeik összege 5?
3. Ha 3 szöcskeugrás 2 macskaugrással egyenlő, és 6 szöcskeugrás 1 bolhaugrásnak felel meg, akkor 20 macskaugrás hány bolhaugrás?
4. Egy személygépkocsi kilométer-számlálója 12921 km-t mutatott. 2 óra múlva a kijelzőn újra egy palindrom szám jelent meg. (Palindrom szám, olyan szám, amely odafelé és visszafelé olvasva is ugyanaz). Hány kilométert tett meg a gépkocsi egy óra alatt?
5. Vegyél fel 4 pontot! Bármelyik két ponton keresztül húzz egy egyenest! Hány egyenest kaphatunk így? Vizsgáld meg az összes lehetőséget!

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

5. osztály

1. 4613-ból a $46 + 4 + 6 = 56$ és a $13 + 1 + 3 = 17$ műveletek alapján az 5617 számot kaptuk. Mennyi annak a számnak a számjegyeinek az összege, amit 3216-ból kapunk?[15]

2. Egy ládából Bence egyik nap kiveszi az almák egyharmadát. Másnap újra kiveszi a még ládában maradt almák egyharmadát. Harmadik nap újra kiveszi a megmaradt almák egyharmadát. Így végül 8 alma maradt a ládában. Hány alma volt eredetileg benne?[15]

3. Hány olyan 2016 jegyű szám van, amelyben a számjegyek összege 2?[15]

4. Egy iskolai versenysorozaton úszásban10, atlétikában 9, tornában 10, úszásban és atlétikában 2, úszásban és tornában 2, torna és atlétika versenyen 4 tanuló vett részt. Egy olyan tanuló volt, aki mindhárom versenyen elindult. Hányan vettek részt összesen?[15]

5. Egy háromszög minden oldala 30 dm. A háromszög kerületét olyan zsinórral vonták körül melynek minden cm-re 1 másodperc alatt égne el. Hány perc alatt égne el a háromszög kerületét díszítő zsinór, ha azt az egyik csúcsnál meggyújtanánk?[15]

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

6. osztály

1. A szobában 4 lábú és 3 lábú székek állnak. Mikor minden széket elfoglalták, a lábak száma a szobában 39 lett. Hány 4 lábú szék és hány 3 lábú szék volt a szobában?

2. Egy osztály 40 tanulójának 30 százaléka kék szemű és $\frac{2}{5}$ része szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű tanulók $\frac{3}{4}$- e szőke. Hány olyan tanulója van az osztálynak, aki se nem szőke, se nem kék szemű?

3. Hány darab 45-tel osztható $\overline{abcba}$ alakú ötjegyű szám van, ahol a, b, c különböző számjegyeket jelölnek?

4. Az $ABCD$ négyzet oldala 5 egység. Az AB oldalon a P pont az A ponttól 1 egységre van, a BC oldalon Q pont a B-től 1 és a CD oldalon az R pont a C-től 2 egységre van. Mekkora a PQR háromszög területe?

5. A táblára öt számot írtak fel. Páronként összeadták őket.

   Tíz számot kaptak: $0; 2; 4; 4; 6; 8; 9; 11; 13; 15$. Melyik öt szám volt a táblára felírva?

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

3. osztály

1. Mennyivel több a legnagyobb háromjegyű és legkisebb háromjegyű szám összege az egyjegyű számok összegénél?[16]

2. Két fán varjak ültek. Miután az egyik fáról felrepült 9 varjú, a másodikról pedig 5 átrepült az elsőre, a két fa mindegyikén 8-8 varjú maradt. Hány varjú volt egy-egy fán?[16]

3. Három testvér: Gáspár, Mátyás, Barna a nyáron egy-egy könyvet is elolvasott. A könyvek borítói piros vagy zöld, vagy kék színűek. Tudjuk azt, hogy Gáspár nem kék, Mátyás zöld vagy kék, míg Barna nem piros és nem zöld könyvet olvasott. Melyik gyerek, milyen színű könyvet olvasott?[16]

4. Három nyúlnak egy hónapra 80 kilogramm eleségre van szüksége. Hány kilogramm eleségre van szüksége két hónap alatt 12 nyúlnak?[16]

5. Egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet alapú kartonlap egyik sarkából levágtak egy 3 cm oldalhosszúságú négyzetet. Mekkora az így kapott alakzat kerülete?[16]

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

4. osztály

1. Mennyivel több a legnagyobb ötjegyű és legnagyobb páros négyjegyű szám összege 5600 és 100 hányadosánál?[16]

2. Az iskola részére a cirkusz előadására 240 jegyet, a színházi előadásra pedig 420 jegyet vásároltak. A cirkuszba szóló jegyek negyedrészét és a színházjegyek hatodrészét az alsó osztályos tanulók kapták. Hány jegyet kaptak összesen az alsó osztályos tanulók?[16]

3. Az agárverseny döntőjében öt kutya állt rajthoz: Bodri, Cézár, Kormos, Foltos és Tappancs. Kormos nem nyert, de gyorsabb volt Tappancsnál és Bodrinál. Bodri nem lett utolsó. Tappancs közvetlenül Foltos előtt ért célba. Milyen sorrendben érkeztek be a kutyák a célba, ha nem volt holtverseny? Válaszodat indokold![16]

4. Egy kirándulásra 18 gyerek utazott és mindegyiket elkísérte az édesanyja is. Hány édesanya utazott a gyerekekkel, ha tudjuk, hogy 4 gyereknek nincs testvére, 6 olyan gyerek volt, aki két testvérével utazott, 4 gyerek három testvérével és 4 gyerek 1-1 testvérével utazott.[16]

5. Egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet alapú kartonlapot két téglalappá vágták szét. A kapott téglalapok egyikének a területe a másik téglalap területének a kétszerese. Mekkora a nagyobbik téglalap kerülete?[16]

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

5. osztály

1. András, Béla és József feleségei Márta, Enikő és Fanni, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Mindegyik házaspárnak van egy-egy gyermeke, őket Gábornak, Máriának és Istvánnak hívják. Állapítsa meg a következő információk alapján, hogy kik tartoznak egy családba!

    - József és Enikő gyerekei az iskolai fiú focicsapat erősségei. (Ebben a focicsapatban csak fiúk játszanak)
    - András fiát nem Istvánnak hívják.
    - Béla feleségét nem Fanninak hívják.[16]

2. Egy zacskóban 48 db cukor van: 12 piros, 12 fekete, 12 zöld, 12 sárga. Egy bekötött szemű gyereknek legalább hány cukrot kell kiemelnie ahhoz, hogy legyen benne biztosan:

    - valamelyik színből 2 db?
    - két különböző színű?
    - három különböző színű?[16]

3. Az 5. osztályba 28 tanuló jár. Mindenki jár az alábbi szakkörök közül valamelyikre: matematika, angol, történelem. Matematikával 12-en foglalkoznak, 20-an angol szakkörre járnak és 14 tanuló történelmet tanul. 8 diák matematika és angol, 5 tanuló matematika és történelem, 10 tanuló angol és történelem szakkörre jár. Hány tanuló jár mindhárom szakkörre?[16]

4. A rozmár, a víziló, a pelikán és a bálna összesen 57 halat evett meg. A bálna 5-ször annyi halat evett meg, mint a pelikán, a pelikán pedig 3-szor többet, mint a rozmár. Mennyi halat ettek meg külön-külön?[16]

5. Tudorka három egyenest húzott. Mindegyik egyenesen felvett 3 pontot. Összesen hat pontot jelölt meg. Hogyan lehetséges ez. Rajzold le![16]

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

6. osztály

1. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek számjegyei különböző prímszámok? Hány páros közülük?[16]

2. Az 145 380 számba valahová beírtak 3 azonos számjegyet. Lehet-e az így kapott szám prímszám?[16]

3. Bizonyítsd be, hogy 6 különböző természetes szám közül mindig kilehet választani két számot úgy, hogy azok különbsége 5 többszöröse lesz![16]

4. Az $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}$ számok közé tegyünk $+$ vagy $-$ jeleket úgy, hogy a kifejezés értéke nulla legyen![16]

5. Rajzold le a 12 cm kerületű téglalapok közül azt, amelyik területe a legnagyobb! Hány négyzetmilliméter a területe?[16]

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

3. osztály

1. Folytasd a sorozatokat 5-5 számmal a felismert szabály szerint!

   (a) $94, 88, 82....$

   (b) $13, 26, 39....$

2. A nyírfa 150 évig él, az erdei fenyő 220 évvel tovább, mint a nyírfa, a hársfa pedig 20 évvel tovább, mint az erdei fenyő. Hány évig él a hársfa?

3. Egy kocka lapjaira az 1, 3, 5, 7, 9 és 11 számokat írtuk úgy, hogy a szemközti lapokon levő számok összege mindig ugyanannyi. A kockát háromféle nézetből megmutatjuk, de néhány lapot letakarunk fehér papírral. Írd rá az üres lapokra a hiányzó számokat!

4. Láng és AJ szeretné kihúzni a szakadék mélyéből Zúzót, de nem tudják milyen mélyre esett. Hogy kiszámolják a szakadék széléről a mélybe ejtenek egy követ. A kő az első másodpercben 4 m 7 dm távolságot tesz meg, majd minden következő másodpercben 8 m 7 dm-rel többet, mint az előzőben, majd pontosan 3 másodperc múlva földet ér. Milyen mélyre esett Zúzó?

5. Anett kivágott 7 négyzetet: egy olyan négyzetet, amelynek 1cm hosszú az oldala, három olyan négyzetet, amelyeknek 2 cm, egy négyzetet, amelynek 3 cm, egy négyzetet, amelynek 4 cm és egy négyzetet, amelynek 5 cm egység hosszú az oldala. Ezekből a négyzetekből összerakott egy téglalapot átfedés és hézag nélkül. Rajzolj egy olyan téglalapot, amilyet Anett kirakott, és rajzold bele a téglalapot alkotó négyzeteket is a méreteknek megfelelően!

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

4. osztály

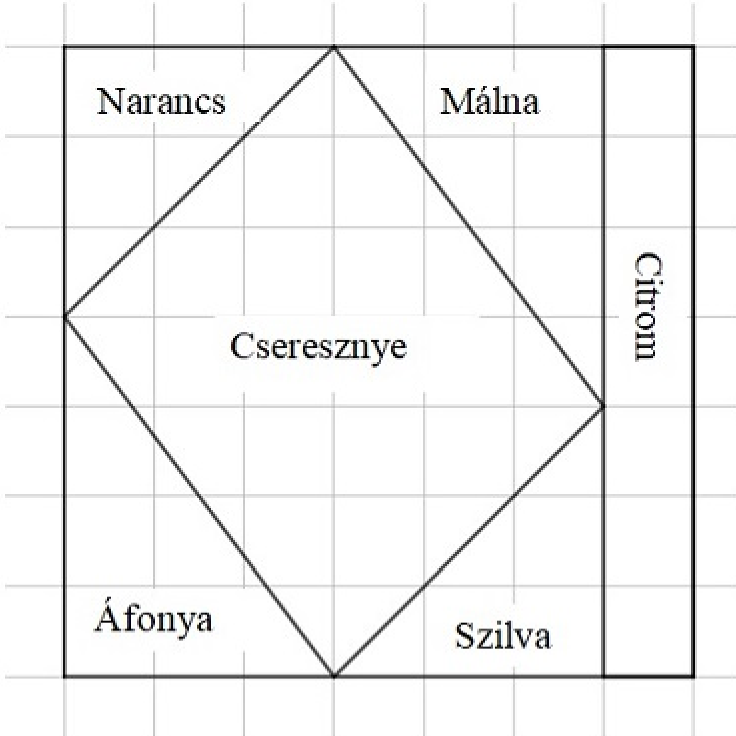
1. Egy tehén naponta 50 kg füvet legel, hogy egészséges maradjon. Hány kilogramm füvet legel 3 tehén 1 hét alatt?

2. A $9{*}{*}{*}{*}15$ számban a csillagok helyére helyettesíts számjegyeket, úgy hogy a kapott számban minden számjegy különböző legyen. Írd fel az így kapott legnagyobb és legkisebb szám különbségét!

3. Egy 20 fős társaság kirándulni ment. 14 gyereken kék pulóver volt, 15 gyereken kék nadrág. Legkevesebb hány olyan gyerek lehetett, akinek a pulóvere, a nadrágja is kék volt?

4. 200 kg mézet kannákba töltöttek szét. A nagyobbik kannába 32 kg-ot, a többit pedig egyenlően 6 kannába osztották szét. Hány kilogramm méz van egy ilyen kannában?

5. Eperke barátság napja alkalmából egy 70 cm oldalú négyzet alakú tortát süt barátnőinek. Mivel mindenkinek más a kedvence, ezért 6 féle ízesítésűre készíti a tortáját: citrom, narancs, málna, áfonya, szilva és cseresznyés. A citromos 10 cm-es sávot foglal el a tortából, narancsos, málnás, áfonyás és szilvás rész háromszög alakú, a közepe cseresznyés, ahogy az ábrán is látható. Mekkora területű a torta cseresznyés része ?



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

5. osztály

1. Határozd meg az $\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + ... + \frac{100}{101}$ összeget!

2. Hány nullával végződik a 45-től nem nagyobb, de 13-tól nem kisebb összes természetes szám szorzata?

3. A gumimacik családjában 8 éven keresztül gyerekek születtek. Minden évben pontosan egy gyermek született. Először kisfiúk aztán kislányok születtek meg. Hány éves lehet a legkisebb lánytestvér, amikor a fiútestvérek koruk éveinek összege egyenlő lett a lánytestvérek éveinek összegével?

4. Nangija (Astrid Lindgren, Oroszlánszívű testvérek) világában a városok egy egyenesen fekszenek. Az A és B városok között 80 km távolság van, a B és C között 300 km távolság, C és D között 120 km távolság, a D és az A között pedig 100 km távolság. Milyen messze vannak egymástól az A és a C városok?

5. Adott egy 100×100-as, négyzet. Ennek minden mezőjébe beírjuk az $1, 2, 3$ számok valamelyikét. Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók összegei között van két egyenlő!

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

6. osztály

1. A következő ábrán egy vitorlaverseny térképe látható.

   A verseny résztvevői a térképen jelölt $(4; 2)$ koordinátájú Start feliratú ponttól indultak, délnyugati irányban hajóztak 42 km-t, majd déli irányban további 20 km megtétele után érkeztek a célba. Add meg a cél koordinátáit a koordinátarendszer segítségével!

2. Egy elektromos óra kijelzőjén pontos órát láthatunk $00.00.00$-tól $23.59.59$-ig. Milyen ideig lehet pontosan négy hármast látni az óra kijelzőjén?

3. Magyarországon a dátumokat a következőképen írják: hónap, nap és év. Például, az 1848-as forradalom kezdetét így írják: 3.15.1848. Ukrajnában először a napot, aztán a hónapot és az évet írják. Hány olyan nap van az évben, melyet nem lehet egyértelműen meghatározni anélkül, hogy ne tudnánk milyen módon van felírva?

4. 20 kilogramm friss gombából 4 kilogramm szárított gombát kaptak, melyben még 15% víz volt. Hány százalék vizet tartalmazz a friss gomba?

5. Keress olyan pozitív egész számot, amely osztható 3-mal is és 4-gyel is, és 6 különböző pozitív osztója van. Van-e olyan 3-mal is és 4-gyel is osztható pozitív egész szám, aminek 7 különböző osztója van?

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

3. osztály

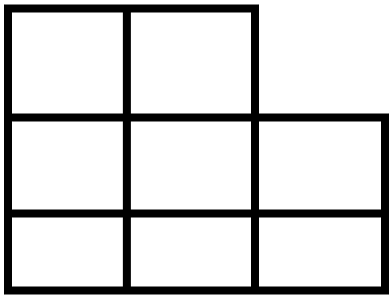
1. A 7 és 5 számok szorzatát csökkentették a 96 és 4 számok hányadosával. A kapott eredményt növelték a legkisebb kétjegyű páratlan számmal, az így kapott számot elosztották a legnagyobb egyjegyű számmal. Melyik számot kapták eredményül?

2. Csaba és András együtt járnak futni. Minden héten vasárnap futják le a leghosszabb távot. Szombaton a vasárnapi felét, pénteken pedig 200 m-rel kevesebbet, mint szombaton. Pénteken 300 m-t futnak. Hány métert futnak vasárnap?

3. Anna, Panna és Blanka egy zacskó egyforma csomagolású, de 3-féle ízű cukorkát vásárolt. Anna kedvence az eper, Pannáé a meggy, Blankáé pedig a málna ízű. Annának legalább 26 cukorkát kell kivennie a zacskóból, hogy biztosan közte legyen

a kedvence, Pannának legalább 28-at, Blankának pedig legalább 22-t. Hány darab eper, meggy és málna ízű cukorkát vásároltak?

4. Helyezd el a táblázatban 1-től 9-ig a számokat úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban az összegük 14 legyen!



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

4. osztály

1. A 2019 számjegyeit kártyákra írták. Az így keletkezett négy számkártya felhasználásával Bori kirakta az összes lehetséges kétjegyű számot. Mennyivel nagyobb a legnagyobb felírt szám a legkisebbtől?

2. Egy 72 méter hosszú kötéllel Peti 4 méter oldalhosszúságú négyzeteket kerített be. Hány méter kötele maradt Petinek, ha lehető legtöbb négyzetet kerít be?

3. Két könyvespolcon összesen 130 könyv van. Az egyik polcon 4-el több könyv van, mint a másik polcon található könyvek fele. Hány könyv van mindkét polcon külön-külön?

4. A személygépkocsi $8:00$-kor indult el Kukutyinból és $13:00$-kor ért Piripócs városába. Az utazás első két órájában 54 km/h sebességgel haladt. A fennmaradó idő harmadában 12 km/h-val gyorsabban haladt. Mekkora volt a sebessége az utazás végső szakaszában, ha a két helyiség közötti távolság 280 km?

5. A Föld napja alkalmából futóversenyt rendeztek. A futók harmada gyerek, a többi pedig felnőtt volt. A felnőttek hatoda nyugdíjas korú. Hány felnőtt futott, ha a nyugdíjas korúak 108-an voltak. Hányan futottak összesen?

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

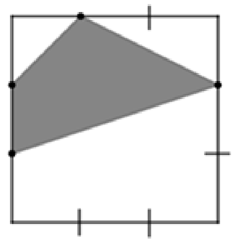
5. osztály

1. Mária az iskolából hazafelé menet úgy döntött, hogy benéz egy boltba és vesz néhány gyümölcsöt. Már kiválasztott 5 db almát, melynek darabja 2 hrn 25 kop, mikor észrevette, hogy a boltban narancsot is árulnak. Hány narancsot tud venni az alma mellé, ha összesen 23 hrn 15 kop-ja van, és egy narancs 2 hrn 75 kop-be kerül. Mennyi pénze marad a vásárlás után?

2. Jánoska hétfő reggel biciklivel indult iskolába, 10 km/h sebességgel haladt. Az út negyedénél észrevette, hogy otthon hagyta a tízóraiját, ezért ugyanilyen sebességgel haladva visszament érte. Hazaérve észrevette, hogy késésben van, így már 20 km/h sebességgel hajtott vissza az iskoláig. Hány km-re van az otthona az iskolától, ha az első kiindulástól számítva az iskolába érkezésig összesen 30 perc telt el.

3. Nyolc darab kis dobókockát összerakva egy nagy kockát kapunk (a dobókocka szemben lévő lapjain lévő pontok számának összege 7). Hány pont helyezkedhet el a kapott kocka felületén, ha az a lehető legtöbb. Válaszodat indokold!

4. Az ábrán egy 3 cm oldalhosszúságú négyzet látható. Határozd meg a befestett rész területét, ha a négyszög csúcsai a négyzet oldalainak harmadolópontjai.



5. Matematika szakkörre 6 lány és 7 fiú jár, a padok egy sorban egymás mellé vannak elhelyezve.

    - Hányféleképpen ülhetnek le?
    - Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha az első hat székre lányok ülnek le, a többire a fiúk?
    - Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha lány lány mellé, és fiú fiú mellé nem ülhet?

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

6. osztály

1. Az iskolai étteremben ma paradicsomleves volt. A gyerekek 40%-a nem szereti a paradicsomlevest, ezért ők egyáltalán nem is ettek belőle. A gyerekek negyede imádja a paradicsomlevest, ezért ők kétszeres adagot ettek belőle. A többi gyerek mind megette a saját adagját és a fazékban még maradt 21 gyerek adagja. Hány gyerek számára főztek ebédet az iskolai étteremben?

2. Volt 216 cédulánk, amelyek közül kiválasztottunk néhányat, és ezeket 10-10 darabra vágtuk, majd az összesből ismét kiválasztottunk néhányat, és ezeket megint 10-10 darabra vágtuk, ezt az eljárást néhányszor megismételtük. Ezután összeszámláltuk a cédulákat és 2017- et kaptunk. Helyes volt-e a számlálás?

3. Egy földönkívüli a földi barátjának meséli, hogy az ő naptárában a hónap napjait nem számok, hanem betűsorok jelölik. Elsejét A, másodikát AY, harmadikát pedig $AYYA$ jelöli. Ezután minden napot olyan betűsor jelöl, amelyben először leírjuk az előző napot jelölő betűsort, majd utána írjuk az előző napot jelölő betűsort azzal a változtatással, hogy minden A betű helyett Y betűt és minden Y betű helyett A betűt írunk.

   - Melyik betűsor jelöli a hónap negyedik napját?
   - Hány A betű szerepel a hónap hatodik napját jelölő betűsorban?
   - A hónap hányadik napját jelölő betűsorban szerepel 64 darab Y betű?

4. Egy négyzet egy belső pontja a négyzet egyik oldalától 6 cm, a másiktól 7 cm, a harmadiktól 8 cm és a negyediktől 9 cm távolságra van. Mekkora a négyzet oldala? Határozd meg a négyzet kerületét, valamint a négyzetbe írt körlap területét!

5. Egy férfi elvitte 3 gyerekét a vidámparkba. A jegy felnőtteknek kétszer annyiba került, mint gyerekeknek. Az apa négy személyre összesen 50 zedet fizetett. Mennyibe került egy gyerekjegy? Írd le a számításaidat! Hány gyerek esetén megoldható a feladat? Mi történik ha a rendelkezésre álló összeget duplázzuk, másfélszerezzük?

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

8. osztály

1. Az egyik általános iskola 8. osztálya nagyobb kerékpártúrára indult. Egy idő múlva az osztály megtett útja úgy aránylik a hátralévő úthoz, mint $2:3$. Ezután az osztály tagjai további 60 km-es utat tettek meg, s ekkor az összes megtett út úgy aránylik a hátralévő úthoz, mint $6:5$. Mekkora utat tett meg az osztály, amíg a kiindulási pontjától elért a túra végpontjáig?

2. Oldd meg az egyenletet: $|2|x-1|-3|=5$!

3. Egy derékszögű háromszög kerülete 140 cm, befogóinak arány $20:21$. Számítsd ki a háromszög területét.

4. Az $ABCD$ négyzet belsejében úgy vettünk fel egy P pontot, hogy a BPC háromszög szabályos legyen. Az AP egyenes a DC-t Q pontban metszi. Hány fokos a $PQC\angle$?

5. Nagyapó nem eszik meg akármit: a főtt tojást például csak akkor, ha se több, se kevesebb, pontosan 15 percig főtt. Egy nap téged kér meg, hogy készíts neki reggelit, és te csak két időmérő eszközt találsz az egész házban: két homokórát. A nagyobbikban 11 perc alatt pereg le a homok, a kisebbikben 7 perc alatt. Mit teszel?

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

9. osztály

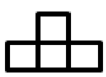
1. Oldjuk meg az $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=16$ egyenletet!

2. Határozzunk meg két háromjegyű számot, ha tudjuk, hogy összegük a 498 többszöröse, hányadosuk pedig az 5 többszöröse!

3. Bizonyítsuk be, hogy a $2014\cdot2015\cdot2016\cdot2017+1$ szám-négyzetszám.

4. A háromszög beírt és körülírt körvonalainak középpontjai szimmetrikusak a háromszög egyik oldalához viszonyítva. Számítsátok ki a háromszög szögeit!

5. Lefedhető-e a 10×10-es sakktábla



alakú alakzatokkal átfedés, hézag és túlnyúlás nélkül?

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

10. osztály

1. Egy jacht és egy hajó egyenes vonalban változatlan sebességgel úszik ugyanahhoz a kikötőhöz. A kezdeti időpontban a jacht, a hajó és a kikötő egy szabályos háromszöget alkotnak. Miután a jacht megtett 48 km, a hajó, a jacht és a kikötő már egy derékszögű háromszöget alkotnak, és amikor a jacht beér a kikötőbe, a hajónak még 60 km marad a kikötőig. Milyen távolságban volt a jacht a hajótól a kezdeti időpontban?

2. Az $y = f(x)$ függvény-páros, értelmezési tartománya-a valós számok halmaza. Ismeretes, hogy a $20f(x) - 17 = 0$ egyenletnek 2017 különböző gyöke van. Találd meg az $f(0)$ értékét. Magyarázd meg a feleletet!

3. Az egyenlőszárú ABC háromszögben $AB = BC$. Az ABC háromszög köré írt körvonalban meghúzták a CC'-átmérőt. A C' pontra illeszkedő BC-vel párhuzamos egyenes az AB és AC szakaszokat rendre M és P pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy M a PC' szakasz középpontja!

4. Oldd meg az $\sqrt{(x+2)|x+1| + |x|} \geq x + 2$, egyenlőtlenséget!

5. Találd meg az a paraméter olyan értékeit, melyeknél az $x + |x| = 2\sqrt{3 + 2ax - 4a}$ egyenletnek két különböző gyöke van. Mutasd meg a gyököket a kiszámitott a értékekre!

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

11. osztály

1. Oldd meg az egyenlőtlenséget, ha x valós szám. Hány egész megoldása van? $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$.

2. Határozd meg az $xy + yz + xz$ értékét, ha adott a következő egyenletrendszer:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ y^2 + yz + z^2 = 11 \\ x^2 + xz + z^2 = 9. \end{cases};$$

3. Egy iskolai bajnokságon hatan vesznek részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig az András egyet, Pál és Nóra kettőt-kettőt, Tímea és Zoltán négyet-négyet játszott. Mekkora a valószínűsége annak, hogy véletlenszerűen kiválasztott két játékos még nem játszott egymással?

4. Egy derékszögű háromszög átfogóján található a P pont. A P pontból a befogókra merőlegesen vetítve kapjuk a K és L vetületeket. Határozd meg a P pont helyét ha KL távolság a lehető legkisebb!

5. A szabályos négyoldalú gúla alaplapjának középpontjának távolsága a gúla oldallapjaitól és az oldaléleitől megfelelően a és b. Határozd meg a gúla alaplapja és oldallapja közötti szöget!

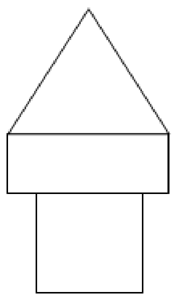
Bólyai János matematika emlékverseny-2017

8. osztály

1. A hétfejű és tízen háromfejű sárkányfejedelmek királyválasztásra gyűltek össze. Összesen 76 lábon 175 fej ment el a választásra. Hány hétfejű és hány tízen háromfejű sárkány volt ott, ha minden sárkánynak 4 lába van?

2. Bizonyítsd be, hogy $9^{2015} + 9^{2016}$ kifejezés osztható 10-zel!

3. Az ábrán egy kémény látható, amely egy négyzetből, egy téglalapból és egy egyenlő oldalú háromszögből áll. Ismert, hogy a három alakzat kerülete megegyezik. A négyzet oldala 9 cm. Találd meg a téglalap szélességét!



4. Az ABC egyenlő oldalú háromszög AC oldalán felvettek egy M pontot és a BC oldal meghosszabbításán egy N pontot úgy, hogy $BM = MN$. Bizonyítsd be, hogy $AM = CN$!

5. Találj három olyan természetes számot, melynek összege 9999, az első kettő összege mínusz a harmadik szám egyenlő 2009, az első szám mínusz a második és harmadik szám összege az adott feltételek figyelembe vételével a lehető legkisebb négyjegyű természetes számmal egyenlő.

Bólyai János matematika emlékverseny-2017

9. osztály

1. Ha 1-gyel kezdve egymás mellé leírjuk az egymást követő természetes számokat, akkor milyen számjegy áll az 1234-ik helyen?

2. Oldd meg az egyenlőtlenséget: $\frac{(x+4)^2(x-3)^3(x+2)}{(1-2x)^6(x+3)^4x^7} \geq 0$!

3. Határozd meg az a paraméter azon értékét (értékeit), mely esetében a $3x^2-4x+a=0$ egyenlet gyökei kielégítik az alábbi feltételt: $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 5$!

4. A paralelogramma hegyesszöge $60°$, átlója a tompaszöget $1 : 3$ arányban osztja. Határozd meg a paralelogramma kerületét és hosszabb átlójának a hosszát, ha a rövidebb átlója $10\sqrt{3}$ cm!

5. A derékszögű háromszögbe írt körvonal középpontjának távolsága a hegyesszögeitől $\sqrt{5}$ és $\sqrt{10}$ cm. Határozd meg a derékszögű háromszög befogóinak hosszát!

Bólyai János matematika emlékverseny-2017

10. osztály

1. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek legalább egy számjegye páros?

2. Határozzátok meg az $x+y+xy=7$ és $x^2+y^2+xy=13$ egyenletek grafikonjainak metszéspontjait, és e pontok közötti távolságot.

3. Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű trapézba írt körvonal r sugara az $r = \frac{ab}{a+b}$ képlettel adható meg, ahol a és b a trapéz alapjainak hossza.

4. Határozzátok meg a $\left|1 - \sqrt{|x+3|}\right| = a$ egyenlet gyökeinek számát az a paraméterértékeitől függően.

5. Milyen természetes n értékekkel osztható maradék nélkül $x-5$-tel a $P(x) = (1-2x^2)^n + (3x-8)^{2n}$ polinom?

Bólyai János matematika emlékverseny-2017

11. osztály

1. Keresse meg az egyenletrendszer természetes megoldásait: $\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2 \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$

2. Az ABC háromszögben $AC = \frac{1}{2}(AB+BC)$, BL az ABC háromszög szögfelezője, a K pont az AB oldal felezőpontja, míg M pont a BC oldal felezőpontja. Keresse meg a $KLM\angle$ értékét, ha $ABC\angle = \beta$.

3. Néhány tó felett átrepült egy csoport liba. Minden következő tóra a csoport fele szállt le, azok közül akik még repültek, meg egy fél liba, a többiek folytatták a repülést. A libák 7 tóra szálltak le. Hány liba volt a csoportba?

4. Oldd meg az egyenletet: $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x!$

5. Oldd meg az egyenletet: $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 - 16x^2 - \pi^2 + 8\pi x!$

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

8. osztály

1. Ahhoz, hogy megszámozzuk egy könyv oldalait 1392 számra van szükség. Hány oldalas a könyv?

2. $ABCD$– négyzet, $AD = BE = CE$. Találd meg az AED szöget!

3. Találd meg a kifejezés értékét: $(1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{2014*2015}) * 2015!$

4. Egy 90 m hosszú és $28,5$ m széles, téglalap alakú telken nyulakat és tyúkokat tenyészt egy magánvállalkozó. Egy alkalommal látogató jött és megkérdezte, hány nyúl és tyúk van a telepen. A tréfás kedvű gazda így válaszolt: „Az állatoknak összesen 2652 lábuk és annyi fejük van, amennyi a telek m^2-ben kifejezett terület mérőszámának $\frac{2}{5}$ része.” A látogató nem ismerte a terület nagyságát, így nem tudta a feladatot megoldani. Segíts neki!

5. Egy asszony eladta a piacra hozott tojások felét, és egy fél tojást, meg az így maradt tojások felét és egy fél tojást. Ezután megmaradt 13 tojása. Hány tojást hozott a piacra? (A tojásokat nem szabad feltörni)

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

9. osztály

1. Egy $ABCD$ téglalapban M pont a BC oldal középpontja, N pont a CD oldal középpontja. P pont a DM és BN metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy MAN szög és BPM szög egyformák!

2. Oldd meg $x; y; z$ prímszámok halmazán! Magyarázd meg $x^y + 1 = z$!

3. Bizonyítsd be, hogy $[x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = [3x]$ minden valós x-re.(Felidézzük, hogy $[x]$ – a valós számok egész része.)

4. Legyen x és y pozitív számok ahol teljesül $x + y = 1$. Bizonyítsd be: $(\frac{1}{x^2} - 1)(\frac{1}{y^2} - 1) \geq 9$.

5. Az idősebb testvér, azt mondta az öccsének:"Amikor én annyi idős voltam, mint most te, akkor én háromszor idősebb voltam nálad. De amikor annyi idős leszel, mint én most, akkor együttes korunk 60 év lesz." Hány évesek a testvérek?

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

10. osztály

1. Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c valós számok, akkor $(a + b)(a + b - 2c) + (b + c)(b + c - 2a) + (a + c)(a + c - 2b) \geq 0$. Mikor áll fenn az egyenlőség?

2. Legyen a egy 0-tól és 1-től különböző valós szám és definiáljuk az x_n sorozatot az alábbi módon: $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$, $x_n = 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$. Határozzátok meg az a paraméter értékét úgy, hogy $x_{2017} + x_{2018} = 1$ teljesüljön!

3. Az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjének talppontja D. Az ABD háromszög köré írt kör AC-t N-ben, az ACD háromszög köré írt kör AB-t M-ben metszi. Bizonyítsa be, hogy $MD + ND = BC$!

4. Határozza meg az alábbi kifejezés előjelét: $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$

5. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 3..., 2017, 2018$ számokat. Ezek közül két tetszőleges számot letörültünk és helyettük különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg egyetlen szám marad. Lehet-e ez a szám nulla?

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

11. osztály

1. A és B között a távolság 60 km. A-ból B-be elindult egy gépkocsi, ugyanakkor ugyanabba az irányba B-ből is elindult egy gépkocsi. Ha az első gépkocsi sebességét 10 km/h-val a másikét 8 km/h-val növeljük, akkor az első gépkocsi ugyan azon a helyen éri utol a másik kocsit, de egy órával hamarabb. Találd meg a gépkocsik sebességét!

2. Találd meg a $2018 \times 111 \times ... \times 1$ szorzat számjegyeinek összegét!

3. O-pont az $ABCD$ egységoldalú $(AB = 1)$ négyzet olyan belső pontja, melyre teljesül az $AO^2+BO^2+CO^2+DO^2 = 2$. Bizonyítsd be, hogy O a négyzet középpontja!

4. Legyen a egy 0-tól és 1-től különböző valós szám és definiáljuk az x_n sorozatot az alábbi módon: $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$, $x_n = 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$. Határozzátok meg az a paraméter értékét úgy, hogy $x_{2017} + x_{2018} = 1$ teljesüljön!

5. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 3..., 2017, 2018$ számokat. Ezek közül két tetszőleges számot letörültünk és helyettük különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg egyetlen szám marad. Lehet-e ez a szám nulla?

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

8. osztály

1. Adott öt szakasz: 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm, 9 cm. Összesen hány darab sokszöget lehet alkotni az adott szakaszokból?

2. Hogyan változik a téglalap területe és kerülete, ha az oldalai hosszát megnöveljük 30%-kal?

3. Apa és fia körbe-körbe korcsolyáznak állandó sebességekkel. Az apa időnként utoléri a fiát. Miután a fiú ellenkező irányba kezdett korcsolyázni, 5-ször gyakrabban kezdtek találkozni. Találd meg az apa és a fiú sebességeinek arányát!

4. Határozd meg az x^3-y^3 kifejezés értékét, ha ismeretes, hogy $x-y = 8$, $x^2+y^2 = 46$!

5. Számítsd ki a kifejezés értékét! $\frac{(2009*2029+100)*(1999*2039+400)}{2019^4}$

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

9. osztály

1. Határozzuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyekre $n^2 - 10n + 23$, $n^2 - 9n + 31$ és $n^2 - 12n + 46$ prímszámok!

2. Határozzuk meg a $\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right| - \left|40\sqrt{2} + 57\right|}$ különbségét, amely egész szám lesz!

3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x} > 0$.

4. Az A pontból a B pont felé elindult egy gyalogos, vele egy időben a B pontból az A pont felé egy kerékpáros. Indulás után 50 perccel a B pontból induló kerékpáros találkozott a gyalogossal. Mennyi időre van szüksége a gyalogosnak, hogy eljusson az A pontból a B-be, ha tudjuk, hogy a kerékpáros ezt a távolságot 4 órával hamarabb tenné meg mint a gyalogos?

5. A trapézba írt körvonal középpontja a kissebbik alap végpontjaitól 65 cm és 75 cm távolságra van. A trapéz kissebbik alapja 70 cm. Határozzuk meg a trapéz területét!

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

10. osztály

1. Igazoljuk, hogy a, b, c egy számtani sorozat három egymást követő eleme, akkor $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ is számtani szorozat három egymást követő eleme!

2. Egy alagútfúrásnak 60 nap alatt kell elkészülnie. A leendő alagút két oldalán két különböző teljesítményű fúrógép dolgozik. Ha az egyik gép teljes előirányzott feladatának 30%-át, a másik gép pedig $26\frac{2}{3}\%$-át végzik el, akkor összesen 60 *m*-t haladnak előre. Az első gépnek ahhoz, hogy elvégezze a második gép $\frac{2}{3}$ részét, 6 nappal több időre van szüksége, mint a másodiknak ahhoz, hogy elvégezze az első gép feladatának 30%-át. Milyen hosszú lesz az alagút?

3. Az ABC háromszögben meghúzták az AM súlyvonalat, amelyre a K pont úgy illeszkedik, hogy $AK : AM = 1 : 3$. A háromszög B csúcsán és K ponton át egyenest fektettek. Ez az egyenes AC oldalt az L pontban metszi. Számítsd ki az AKL háromszög területét, ha az ABC háromszög területe S.

4. Egy másodfokú függvény két zérus helye $\check{}2$ és 6. A függvény képe az *y* tengelyt 24-nél metszi. Adja meg a függvény hozzárendelési szabályát *képletét*!

5. Egy baromfiudvarban a kislibák száma 100 és 200 között van. Ha a libákat négyesével engednék ki a ólból, akkor 3, ha ötösével, akkor 4, és ha 7-ével, akkor 6 liba maradna végül az ólban. Hány kisliba van ebben a baromfiudvarban?

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

11. osztály

1. Az *ABC* háromszögben *A* szög egyenlő a másik kettő fél összegével. A *BC* oldalon felvettek egy olyan *M* pontot, hogy $AMB\angle = 60°$és *BM=2MC*. Találd meg az $ABC\angle$ fokmértékét!

2. Találd meg az összes olyan természetes *n* számot, melyekre teljesül az $n + S(n) = 2019$ egyenlőség, ahol *S(n)* – az *n* szám számjegyeinek összege!

3. Apa és fia körbe-körbe korcsolyáznak állandó sebességekkel. Az apa időnként utoléri a fiát. Miután a fiú ellenkező irányba kezdet korcsolyázni, 5-ször gyakrabban kezdtek találkozni. Találd meg az apa és a fiú sebességeinek arányát!

4. Egy edényből, melyben 10%-os szesz oldat van kiöntötték tartalmának $\frac{1}{3}$ részét és annyi vizet öntöttek bele, hogy az eredeti térfogat $\frac{5}{6}$ része lett benne. Hány százalékos lett a szesz oldat?

5. Igazoljuk, hogy ha *a,b,c* egy számtani sorozat három egymást követő eleme, akkor $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ is számtani sorozat három egymást követő eleme!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2016

7. osztály

1. El lehet-e szállítani 7 kéttonnás teherautóval 50 kőtömböt, melyek súlya $250, 251, 252, ..., 299$ kg? (A kövek nem darabolhatók, a teherautók csak egyszer vehetők igénybe, és mindegyikre legfeljebb 2 tonna teher rakható.)

2. Egy taxis cég könnyen megjegyezhető telefonszámot szeretne, ezért úgy döntenek, hogy legfeljebb kétféle számjegyet fognak használni. Az kötelező érvényű, hogy a taxitársaság telefonszáma csak 3-assal kezdődhet, és csakis 6-jegyű lehet. Hány különböző lehetőségből választhatnak?

3. Van egy 8×8-as csokitáblánk, melynek bal felső kockája mérgezett. Két játékos felváltva tör a táblából úgy, hogy valamelyik mezőt kiválasztja, s az összes tőle jobbra és lefelé eső kockát letöri. Az veszít, aki kénytelen a mérgezett kockát elvenni. Mutassuk meg, hogy a kezdő megnyerheti a játékot!

4. Oldd meg a $||6 + 2x| + 3| = 7$ egyenletet!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2016

8. osztály

1. Az ABC háromszögben az AH magasság egyenlő a BM súlyvonallal. Határozd meg az MBC szög fokmértékét.

2. Bizonyítsd be, hogy az a szám amely 243 egyesből áll(más számjegy nincs benne), osztódik 243-mal!

3. 15 fiú és 15 lány ül egy kerek asztalnál. Bizonyítsd be, hogy valamelyiküknek mindkét szomszédja fiú!

4. Melyik nagyobb: $2^{2^{800}}$ vagy $3^{3^{500}}$?

5. Határozd meg az összeget: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2016

9. osztály

1. Az ABC háromszögben az AC oldal kétszerese a BC oldalnak, $C\angle = 2 \cdot A\angle$. Határozd meg a háromszög szögeit.

2. Bizonyítsd be, hogy bármely n természetes számra $4^n + 15n - 1$ osztódik 9-cel!

3. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan természetes szám, amely 1972-re végződik és osztódik 1971-gyel!

4. Bontsd fel tényezőkre: $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$!

5. Bizonyítsd be, hogy: $\frac{ab}{c+ab} + \frac{bc}{a+bc} + \frac{ca}{b+ca} \geq \frac{3}{4}$, ha $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2016

10. osztály

1. Egy n házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha k-féle festékünk van, és a szomszédos házak nem lehetnek egyforma színűek? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni, $k \geq n$)

2. Az egyenlőszárú háromszög szára 40 cm. A szögfelező a szárát $2 : 3$ arányban osztja, a csúcstól számítva. Határozd meg, milyen részekre osztja a csúcsból húzott magasság ezt a szögfelezőt?

3. Oldd meg az alábbi függvényegyenletet: $5f(x) + f(2 - x) = 3x + 4$, $(f; R \to R)$;

4. Oldd meg a $2004 \cdot [x - 2] = \{x + 2\}$ egyenletet!

5. 32 lapos magyar kártya. Hány lapot kell húzni, hogy biztosan legyen közöttük:

   (a) három egyforma színű;

   (b) valamelyik színből 2 darab;

   (c) két piros.

Szedlák Ferenc matematika verseny-2016

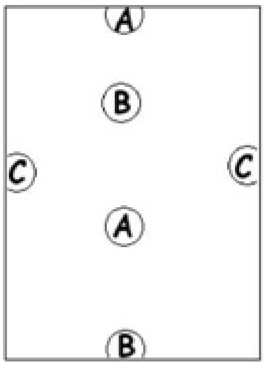
11. osztály

1. A derékszögű háromszög derékszögének szögfelezője $24\sqrt{2}$ cm hosszú és az átlót $3:4$ arányban osztja. Határozd meg a háromszög kerületét!

2. Oldd meg az $x^2 - 3x - 4 = [\sin x]$ egyenletet!

3. Oldd meg az alábbi függvényegyenletet: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$;

4. Rajzold le az alábbi ábrát egy papírra, majd próbáld meg összekötni A-t A-val, B-t B-vel, C-t C-vel három folytonos vonallal úgy, hogy a vonalak ne keresztezzék egymást, és ne menjenek le a papírról!



5. Adott a síkon egy konvex nyolcszög. Rajzold be (gondolatban) az összes átlóját. Bizonyítsd be, hogy a csúcsoknál keletkező szögek között van legalább egy, amely legfeljebb $23°$.

Szedlák Ferenc matematika verseny-2017

7. osztály

1. Kaphatunk-e két kétjegyű szám szorzásának eredményeként olyan négyjegyű számot, melynek minden számjegye egyenlő?

2. Az A és B pontok közötti távolság 80 km, B és C között - 300 km, C és D között 120 km, a D és A között - 100 km. Mennyi a távolság az A és C pontok között?

3. Melyik nagyobb: $2^{2^{800}}$ vagy $3^{3^{500}}$?

4. Az iskolában 740 diák van, bizonyítsd be, hogy legaláb b három közülük egy napon született!

5. Határozd meg az összes a és b természetes számpárt, hogy az $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ szintén természetes szám legyen!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2017

8. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ ha $a+b=1$!
2. Az óra mindkét mutatója észak felé mutat. Hányszor és mikor fog a két mutató állása egybeesni a legközelebbi éjfélig?
3. Bizonyítsd be, hogy: $3^{2n+2}-8n-9$ osztható 64-gyel, ha n természetes szám!
4. Határozd meg annak az egyenlőszárú trapéznak a területét, melynek magassága h, átlói pedig merőlegesek egymásra!
5. Oldd meg az egyenletet: $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2017

9. osztály

1. A sporttáborban a gyerekek 65%-a tud focizni, 70%-a kézilabdázni, 75%-a pedig kosárlabdázni. A gyerekek legkevesebb hány $\%$-a tud focizni is, kézilabdázni is és kosarazni is?
2. Bizonyítsd be: $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$!
3. Oldd meg az egyenletet: $(1+x)^4=4(1+x^4)$!
4. Egyszerűsítsd a kifejezést: $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$!
5. Bizonyítsd be az egyenlőtlenséget: $a^2+b^2+c^2+2abc<2$, a, b, c egy olyan háromszög oldalai, amelynek kerülete 2!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2017

10. osztály

1. Határozd meg a számtani sorozat első tagját és különbségét, ha $a_1-a_2-a_3=0$ s $a_1^2+a_2^2+a_3^2=56$!

2. Határozd meg az összeget: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$!

3. Bizonyítsd be, hogy 2^9+2^{99} osztható 100-zal!

4. Oldd meg az egyenletet: $x^2-x-x^{-1}+x^{-2}=\frac{52}{9}$!

5. Határozd meg a trapéz területét, ha alapjai a és b, szárai pedig c és d hosszúságúak!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2017

11. osztály

1. Bizonyítsd be: $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$, $n\in N$, $a>-1$!

2. Oldd meg az egyenletet: $x^2-2x\cos(xy)+1=0$!

3. Egyszerűsítsd a kifejezést: $\frac{x+2\sqrt{xy}+9y}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}-2\sqrt[4]{xy}}-2\sqrt{y}$!

4. Határozd meg azoknak a pontoknak az összességet a síkon, amelyekre igaz $2|x|+|y|>5$!

5. Határozd meg annak az egységvektornak a koordinátáit, amely merőleges az $\overline{a}(1;1;2)$, $\overline{b}(2;1;1)$ vektorokra!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2018

7. osztály

1. Keresd meg mindazon tízes számrendszerben felírt természetes számokat, amelyek számjegyeik összegének *13*-szorosával egyenlők!

2. Egy falu határában gabonaföldet, gyümölcsöst, zöldségkertészetet, halastavat és legelőt alakítottak ki az évek során. A földterületek nagyságáról csak annyit tudunk, hogy hektárban mérve mindegyik egész szám volt. Az első négy terület nagysága a falu határának $\frac{15}{81}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{24}{80}$ része volt. A többi területet meghagyták legelőnek. Legkevesebb hány hektár lehetett a legelő területe?

3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek a térfogata *2013* cm^2 és oldalai egész számok?

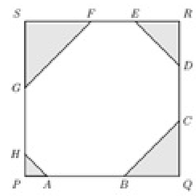
4. A *13, 17, 37, 79* prímszámokból szintén prímszámokat kapunk, ha számjegyeiket felcseréljük. Létezik-e olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű prímszám, amelynek számjegyeit tetszőlegesen felcserélve szintén prímszámokat kapunk?

5. Mindegyik háromjegyű természetes számot elosztottuk a saját számjegyei összegével. Mekkora volt a legnagyobb maradék?

Szedlák Ferenc matematika verseny-2018

8. osztály feladatsor

1. A *PQRS* négyzetből a sarkainál levágtuk a *PAH, QCB, RED, SGF* egyenlő szárú háromszögeket az ábra szerint, így egy nyolcszöget kaptunk. Bizonyítsd be, hogy az *ACEG* és a *BDFH* négyszög területe egyenlő.



2. Tamást megkérdezték, hogy hányadik helyen végzett a városi mezei futóversenyen. Ő így válaszolt: *„Ha az előttem végzett tanulók negyedrésze utánam következne, akkor hattal többen lennének utánam, mint előttem"*. Hányadik lett Tamás a versenyen, ha összesen 97-en indultak?

3. Számíts ki: $\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}$, ha $a=7,4$ és $b=\frac{5}{37}$!

4. Az apa, az anya és a három lányuk együtt 118 évesek. Az anya 10 évvel idősebb, mint a három lány együtt. A szülők életkora közötti különbség éppen a legkisebb lány életkorával egyenlő. Az egyik lány 2 évvel fiatalabb, mint a másik és ugyanannyival idősebb a harmadiknál. Hány évesek a szülők?

5. Egy kör kerületére kilenc egész számot írunk, amelyek összege 90. Bizonyítsuk be, hogy van négy egymás melletti szám, amelyek összege legalább 40.

Szedlák Ferenc matematika verseny-2018

9. osztály

1. Számítsd ki: $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$!

2. Jelöljük a 999^{999} számjegyei összegét *A*-val. Legyen *A* számjegyei összege *B*, a *B* számjegyei összege pedig legyen *C*. Mivel egyenlő *C*?

3. Hány olyan háromszög van, amelynek *(x,y)* csúcsai a derékszögű koordináta rendszerben az $1 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 4$ feltételnek eleget tevő egész koordinátájú pontok?

4. Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 2579 emelkedő számok.) Hány olyan háromjegyű emelkedő szám van, amelynek az ötszöröse nem emelkedő szám?

5. Tamás elfelejtette a vidéki barátja vezetékes telefonszámát. A következőkre emlékszik: balról számítva az első számjegye 5, a szám *hatjegyű*, *páros*, továbbá 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a nullától különböző maradékot adja. Mi volt az elfelejtett telefonszám?

Szedlák Ferenc matematika verseny-2018

10. osztály

1. Egyszerűsítsd a kifejezést: $\frac{m^3+m^2-2m}{m|m+2|-m^2+4}$!

2. Igazoljátok, hogy egy olyan négyjegyű természetes szám, amelynek két-két számjegye azonos, nem lehet prímszám (törzsszám)!

3. Hány olyan konvex négyszög, hatszög van, amelynek három egymás után következő csúcsa *A(0; 4)*, *B(4; 4)* és *C(4; 0)* koordinátájú pont, és többi csúcsának koordinátái is nem negatív egész számok? (A konvex sokszög minden belső szöge $180°$-nál kisebb.)

4. Négy különböző pozitív számjegy felhasználásával elkészítettük az összes olyan négyjegyű számot, amelyben a számjegyek különbözők. Ezeknek a négyjegyű számoknak 186648 az összegük. Melyek lehettek a kiinduló számjegyek?

5. Bizonyítsátok be, hogy bármely háromszög súlyvonalainak összege nagyobb, mint a háromszög kerületének $\frac{3}{4}$-ed része!

Szedlák Ferenc matematika verseny-2018

11. osztály

1. Egy horgász a napi zsákmánya össztömegének 35%-át kitevő három legnagyobb halat a mélyhűtőbe tette. A három legkisebb halat, amelyek együttesen a megmaradt rész össztömegének $\frac{5}{13}$-át tették ki, elvitte a macska, a többit pedig megfőzték ebédre. Hány halat fogott a horgász?

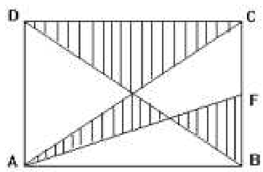
2. Egy 8×8-as táblázat mezőit kitöltjük az 1-től 64-ig terjedő pozitív egész számokkal úgy, hogy minden szám pontosan egy mezőben szerepel. Ezután a táblázat bal felső sarkából indulva sétálunk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

   - mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
   - egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
   - a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie

   A séta során érintett mezőkön (beleértve a kiinduló- és az utolsó mezőt is) lévő számokat összeadjuk. Az összes lehetséges kitöltést és azokon az összes lehetséges sétát tekintve mennyi ennek az összegnek a legnagyobb lehetséges értéke?

3. Ha x_1, $x_2 - a$, $3x^2 - 2x - 6 = 0$ egyenlet gyökei, mivel egyenlő az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

4. Az *ABCD* téglalap *BC* oldalának felezőpontja *F*. Hányadrésze a satírozott területek összege a téglalap területének?



5. Egyszer két juhász így beszélgetett:

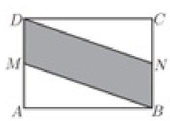
   - Adj nekem 8 bárányt, akkor nekem is annyi lesz, mint neked!
   - Inkább te add nekem a bárányaid felét, s akkor nekem 7-szer annyi lesz, mint neked.

   Hány báránya volt egyik-egyik juhásznak?

Szedlák Ferenc matematika verseny-2019

7. osztály

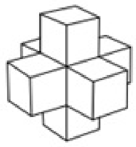
1. Az *ABCD* téglalap területe 10 egység. Az *M* és az *N* pontok az *AD* és a *BC* oldalak felezőpontjai. Mekkora az *MBND* négyszög területe?



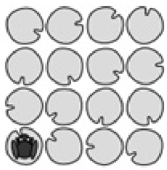
2. Két szám szorzata 36, összege pedig 37. Mennyi a különbségük?

3. Egy vödör félig volt vízzel. A takarító még 2 *liter* vizet öntött hozzá. Ezután a vödör a háromnegyedéig volt vízzel. Hány literes a vödör?

4. Gabi hét egységkockából az ábrán látható építményt rakta össze. Hány ugyanilyen kockát kell hozzátennie, hogy egy 3 egység élű kockát kapjon?



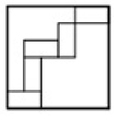
5. Egy halastavon 16 tavirózsalevél van, amelyek egy 4×4-es négyzetben helyezkednek el (lásd az ábrát). Egy béka az egyik sarokban levő levélen ül. A béka csak vízszintesen vagy függőlegesen ugorhat másik levélre. Minden ugrásnál legalább egy levelet átugrik és soha nem ugrik kétszer ugyanarra a levélre. Legfeljebb hány levélre tud ugrani, beleszámítva azt is amelyiken ül?



Szedlák Ferenc matematika verseny-2019

8. osztály

1. Egy 24 *cm* oldalú négyzetbe öt egymással egybevágó téglalapot helyeztünk el. Lásd az ábrát. Mekkora egy téglalap területe?



2. Egyszerre két szabályos dobókockával dobunk. Az egyik piros színű, a másik sárga. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a dobott számok szorzatértékének a fele prímszám legyen?

3. Sziporka az állatkerti kirándulás során megállt az egyik ketrec előtt, melyre az volt kiírva, hogy itt zebrák és struccok láthatók. Három gondozó éppen bent volt az állatok között, és etették őket. Hány strucc lehetett a ketrecben, ha Sziporka összesen százharminckettő lábat számolt meg, és mindenkit megszámolt, aki a ketrecben volt?

4. Rakd ki a 2-es, 0-ás, 1-es és 9-es számkártyákból először a legnagyobb négyjegyű néggyel maradék nélkül osztható számot, majd a számkártyák újbóli felhasználásával rakd ki a legkisebb háromjegyű hattal maradék nélkül osztható számot. Mindegyik számkártyából pontosan egy darab van. Mennyi a két szám különbségének a kétharmad része?

5. Egy téglalap kerülete 30 *cm*. Az oldalait 3-3 cm-rel megnöveljük. Mekkorák eredetileg a téglalap oldalai, ha az újonnan keletkezett téglalap oldalainak mérőszámai különbségének abszolút-értéke prímszám? Mennyivel változik a téglalap területe?

Szedlák Ferenc matematika verseny-2019

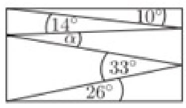
9. osztály

1. Melyik két tag összegének a négyzete az alábbi kifejezés? $\frac{\frac{1+\frac{1}{x}}{x}}{\frac{1-\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}} =?$

2. Hány jegyű az a szám, amelyet úgy kapunk, hogy 1-től 2016-ig egymás mellé írjuk a pozitív egész számokat?

3. Egy téglalapot az egyik oldalával párhuzamos nyolc egyenessel egybevágó négyzetekre lehet felosztani. Mennyi a téglalap kerülete és területe, ha a négyzetek kerületeinek összege 144 *cm*?

4. Zselyke az ábrán látható téglalapba rajzolt egy törött vonalat, és beírta az így kapott szögek mértékét: $10°$, $14°$, α, $33°$ és $26°$. Hány fokos az α szög?



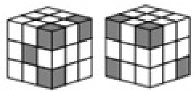
5. Melyek azok az *x, y* és *z* prímszámok, amelyekre teljesül a $2x + 3y + 6z = 78$ egyenlet?

Szedlák Ferenc matematika verseny-2019

10. osztály

1. Legyenek *p, q, r* természetes számok és $p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}=\frac{25}{19}$. Mennyi a *pqr* értéke?

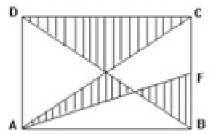
2. Az ábrán ugyanazt a kockát láthatjuk két különböző oldalról. A kocka 27 kisebb kockából lett összerakva, amelyek közül valamennyi szürke és valamennyi fehér. Legfeljebb hány szürke kockát használtak fel?

[

3. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet: $\frac{|x^2+x|}{2}+\frac{2}{|x^2+x|}=2$!

4. Számítsd ki: $\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}$, ha $a=0,4$, $b=\frac{5}{17}$!

5. Az *ABCD* téglalap *BC* oldalának felezőpontja *F*. Hányadrésze a satírozott területek összege a téglalap területének?



Szedlák Ferenc matematika verseny-2019

11. osztály

1. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet: $\frac{1}{\sin x}+\frac{4}{\frac{1}{\sin x}+2}=3$!

2. Hány olyan háromszög van, amelynek *(x; y)* csúcsai a derékszögű koordináta rendszerben az $1\leq x\leq 4$, $1\leq y\leq 4$ feltételnek eleget tevő egész koordinátájú pontok?

3. Az egyenlő szárú háromszög egyik szöge $120°$, az alap felezőpontjából merőlegest húztak a háromszög szárára. Milyen arányban osztja a merőleges talppontja a szárat?

4. Ismeretes, hogy $x^2+y^2+\frac{1}{2}\leq x+y$. Bizonyítsd be, hogy $x+y=1$!

5. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

8. Megoldások

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

7. osztály feladatsor megoldása

1. Legyen x és $x+2$ páratlan számok.

   $x+x+2=2x+2=2(x+1) \Rightarrow x+1$ páros szám és osztódik 2-vel, így az előző alakból, $2(x+1)$ következik, hogy osztódik 4-el is. Ezzel bizonyítottuk.

2. Első módszer: $-\frac{7}{10}\left(0.6x+\frac{2}{5}\right)+0.3\left(\frac{3}{5}x+0.4\right)=0$

   $-\frac{7}{10}*\frac{6}{10}x-\frac{2}{5}*\frac{7}{10}+\frac{3}{10}*\frac{3}{5}x+\frac{4}{10}*\frac{3}{10}=0$

   $-\frac{7}{5}*\frac{3}{10}x-\frac{1}{5}*\frac{7}{5}+\frac{3}{10}*\frac{3}{5}x+\frac{2}{10}*\frac{3}{5}=0$

   $-\frac{21}{50}x-\frac{14}{50}+\frac{9}{50}x+\frac{6}{50}=0$

   $-\frac{12}{50}x-\frac{8}{50}=0$

   $-12x-8=0$ az egyenletet $/:4$

   $3x-2=0$

   $3x=-2$

   $x=-\frac{2}{3}$

   Második módszer: $(0.6x+0.4)(-0.7+0.3)=0$

   $(0.6x+0.4)*(-0.4)=0$

   $-0.24x-0.16=0$

   $0.24x=-0.16$

   $x=-\frac{16}{24}=-\frac{2}{3}$

   Felelet: $-\frac{2}{3}$.

3. Vegyük n - t a felhasznált bábuk számának. Az oszlopokban, valamint a sorokban a bábuk összege megfelően legyen O_1, O_2, O_3, illetve S_1, S_2, S_3. Ezekből kapjuk a következőt: $O_1+O_2+O_3=n$ és $S_1+S_2+S_3=n$. Tehát $O_1+O_2+O_3+S_1+S_2+S_3=2n$.

   A hat legkisebb nem negatív egész szám összege $0+1+2+3+4+5=15$, tehát $2n \geq 15$, $n \geq 8$.

A feladat feltételeinek megfelelően 8 bábut a következőképpen lehet elhelyezni a táblán:

0	0	0
0	1	1
1	2	3

4. A két település közötti távolság legyen $2x$. Ekkor az odaútra fordított idő $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=\frac{5x}{12}$, az átlagsebesség pedig $\frac{2x}{\frac{5x}{12}}=\frac{24}{5}=4.8$.

$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-\frac{4x}{3*4.8}-\frac{2x}{15}=\frac{1}{30}$

$\frac{5x}{12}-\frac{5x}{18}-\frac{2x}{15}=\frac{1}{30}$

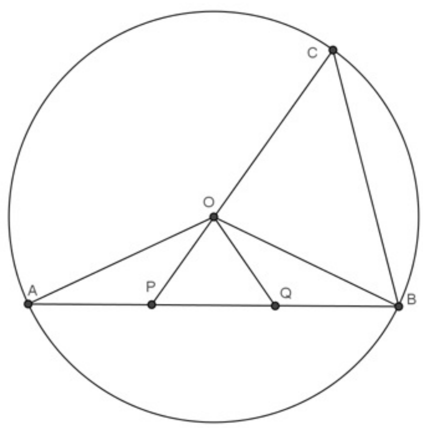
$\frac{5x}{4}-\frac{5x}{6}-\frac{2x}{5}=\frac{1}{10}$

$\frac{75x-50x-24x}{60}-\frac{6}{60}=0$

Tehát $x=6$.

Felelet: $x=6$.

5. Mivel $PQ=BQ=\frac{1}{3}AB$ és ***OPQ*** szabályos háromszög, ezért ***BQ=QO***.



Tehát a ***BQO*** háromszög egyenlő szárú. Mivel $BQO\angle=120^{(\circ)}$ (mint mellékszög), ezért $BOQ\angle=QBO\angle=30^{(\circ)}$.

$BOP\angle=BOQ\angle+QOP\angle=30^{(\circ)}+60^{(\circ)}=90^{(\circ)}$ ebből következik, hogy $BOC\angle=90^{(\circ)}$, mint mellékszög.

Mivel $BO=OC$, mint a kör sugara, így ***BOC*** egyenlő szárú háromszög.

Ebből következik, hogy $OBC\angle=OCB\angle=45^{(\circ)}$.

$ABC\angle = QBO\angle + OBC\angle = 30^{(\circ)} + 45^{(\circ)} = 75^{(\circ)}$.

Felelet: Az $ABC\angle = 75^{(\circ)}$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

8. osztály feladatsor megoldása

1. A feladat feltétele szerint $2018 - \overline{19ab} = 1 + 81 + a^2 + b^2$. Így $10a + a^2 + b + b^2 = 36$.

   Innen csak $a = 0$, $a = 1$, vagy $a = 2$ lehet helyes eset.

   Az $a = 0$ és $a = 1$ esetekben b nem lesz egész szám, így $a = 2$ és $b = 3$ marad helyes megoldásnak.

   Felelet: 1923-ben született.

2. A 8 elemet jelöljük az ABC első 8 betűjével.

   A próbáknál a berakott két elem betűjét írjuk: *AB,BC,CA,DE,EF,FD*.

   Így vagy világított valamikor a lámpánk, vagy pedig mind az $A - B - C$, mind a $D - E - F$ hármasban csak egy jó elem volt. De ekkor a maradék két elem már biztosan jó.

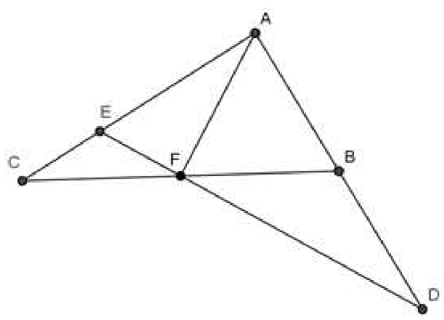
3. A feladat feltételéből kapjuk, hogy $6(a + b) = \frac{25(a+b)}{ab} = 25$.

   Innen $a + b = \frac{25}{6}$, és $ab = \frac{25}{6}$

   Az előzőből következik, hogy $a + b = ab$.

   $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = (a + b) - 2 = \frac{25}{6} - 2 = \frac{13}{6}$.

4. Mivel $AF = AB$ ezért $AFB\angle = ABF\angle$.

   Az előzőből következik, hogy a szögek mellékszögei is egyenlők, tehát $FBD\angle = AFC\angle$.

   Mivel *AF* súlyvonal, így $FB = FC$.

A feladat feltétele szerint $BD = AF$, ezért az FBD háromszög egybevágó a CFA háromszöggel (két oldal és közbezárt szög alapján).

Ebből következik, hogy $BFD\angle = FCA\angle$, másrészt $BFD\angle = EFC\angle$, tehát $FCA\angle = EFC\angle$, ami azt jelenti, hogy $CE = EF$.

5. A feladatban szereplő tojások száma: $2T$.

A csirkék száma egyrészt $2T + 1$, mert egy tyúkkal kezdődött, azután minden tojásból kikelt egy csirke.

Másrészt $T + K$, mert egy csirke vagy tyúk, vagy kakas.

Ebből $2T + 1 = T + K$, amiből $K = T + 1$, tehát a kakasok száma 1 -gyel nagyobb a tyúkok számánál.

Felelet: Biri néniék 2003 tyúkot ettek meg.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

9. osztály feladatsor megoldása

1. Az összeg egy általános tagjának alakját véve gyöktelenítünk:

$\frac{1}{\sqrt{2k-2}+\sqrt{2k}} * \frac{\sqrt{2k-2}-\sqrt{2k}}{\sqrt{2k-2}-\sqrt{2k}} = \frac{\sqrt{2k-2}-\sqrt{2k}}{2k-2-2k} = \frac{\sqrt{2k-2}-\sqrt{2k}}{-2}$.

Az előző alakba minden tagot át tudunk írni, így kapjuk a következőt:

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}}{-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{6}}{-2} + ... + \frac{\sqrt{2n-2}-\sqrt{2n}}{-2} =$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{4}-\sqrt{6}+...+\sqrt{2n-2}-\sqrt{2n}}{-2} =$

Teleszkópikus összeget látunk a számlálóban, tehát az eredmény:

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2n}}{-2} = \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{2}}{2}$.

2. $(x-1)\left|x^2+1\right| + |x-1|\left(x^2+1\right) = 0$

Mivel a valós számok halmazán minden x esetén $x^2 + 1 > 0$, ezért elegrndő megoldani a következő egyenletet:

$(x-1)(x^2+1) + |x-1|\left(x^2+1\right) = 0$

Az abszolút értékek tulajdonsága alapján: $\begin{cases} |x-1| = -(x-1), \texttt{ha} x < 1 \\ |x-1| = x-1, \texttt{ha} x \geq 1. \end{cases}$

Az első esetben: $(x-1)(x^2+1) - (x-1)(x^2+1) = 0$

$0 = 0$ igaz egyenlőséget kapunk, tehát a megoldás $x \in (-\infty; 1)$.

Második esetben: $(x-1)(x^2+1)+(x-1)(x^2+1)=0$;

$2(x-1)(x^2+1)=0$;

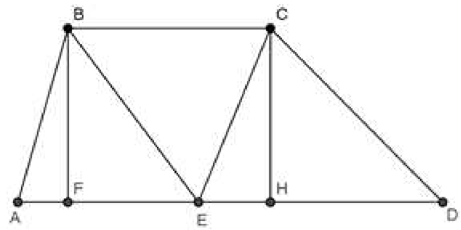
Az egyenlet alapján két megoldás esetet kapunk.

Az első esetben a megoldás: $x=1$, ez jó megoldás.

Második esetben a megolás: $x^2+1=0$, ennek az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása.

Tehát a végeredmény: $x \in (-\infty;1]$, vagy más alakban is megadhatjuk $x \leq 1$.

3. Legyen $BE=15$ és $CE=13$ a trapéz két tompaszögének szögfelezője, illetve $BF=CH=12$, a trapéz magassága.



Az *EFB* derékszögű háromszögben $FE=\sqrt{225-144}=9$, a *EHC* derékszögű háromszögben $EH=\sqrt{169-144}=5$.

A $CBE\angle=EBA\angle$, mivel *BE* szögfelező, $BEA\angle=CBE\angle$ mint váltószögek. Tehát $BEA\angle=EBA\angle$ és $AB=AE$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $CD=DE$.

Legyen A$F=x$, ekkor $AB=x+9$. Így $x^2+144=(x+9)^2$.

Megoldva $x=3,5$.

Legyen $HD=y$, ekkor $CD=y+5$. Így $y^2+144=(y+5)^2$.

Megoldva $y=11,9$.

Felelet: $AB=12,5$, $BC=14$, $CD=16,9$, $AD=29,4$.

4. Legyen a két szám közül, amellyel a felírt szám nem osztható a kisebbik $n(2\leq n\leq 30)$. Ekkor a felírt szám nem lehet $(2n)$-nel osztható.

Mivel $n\geq 2$ esetén n és $2n$ nem lehetnek szomszédosak, $2n$ nem lehet a felsorolt osztók között, ezért $2n>31$, vagyis $n>15$. Ezért a felírt szám osztható minden 16-nál kisebb számmal. Tehát osztható a 16-nál kisebb páratlan számok 2-szeresével, 4-szeresével és 8-szorosával is.

Így n nem lehet 16-nál nagyobb páros szám.

Ugyanezért nem lehet páratlan sem, mert ekkor a felírt szám az $n+1$ páros számmal nem lenne osztható.

Tehát a szám 16-tal és 17-tel nem osztható.

5. Könnyen észrevehető, hogy bármely n természetes számra $n - S(n)$ osztódik 9-cel.

   Tehát $S(n) = 9a + n$ alakban felírható $a \in Z^+$.

   Hasonlóan kapjuk, hogy $n^2 - S(n^2)$ osztódik 9-cel, tehát $S(n^2) = 9b + n^2$, $b \in Z^+$.

   Tehát $S(n^2) - (S(n))^2 = 9b + n^2 - (9a + n)^2 = 9b + n^2 - 81a^2 - 18an - n^2 = 9(b - 9a^2 - 2an)$.

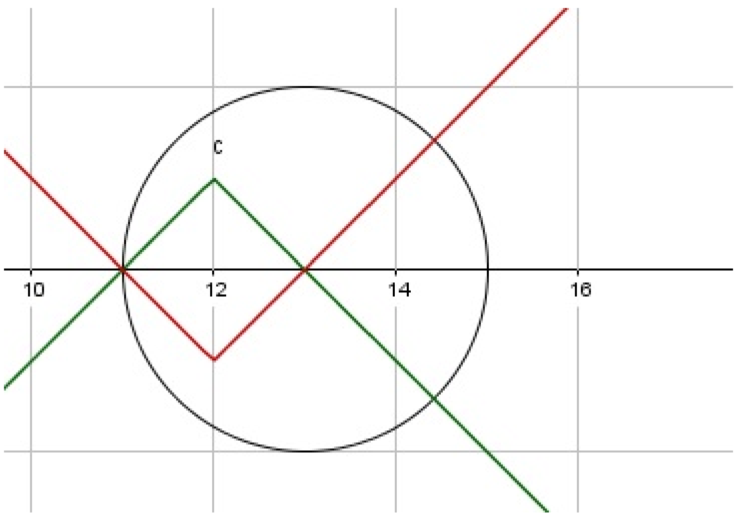
   Mivel a kapott eredmény osztódik 9-cel bármely a, b, n esetén, ezzel bebizonyítottuk.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

10. osztály feladatsor megoldása

1. $\begin{cases} (x+a)^2 + y^2 = 4 \\ |y| = 1 - |x - 12|. \end{cases}$;

   Az első egyenlet grafikonja egy körvonal, melynek középpontjának koordinátája az $(a, 0)$ koordinátájú pont, sugara pedig 2. A második egyenlet grafikonja egy négyzet, melynek középpontja $(12; 0)$ koordinátájú pont, csúcsai pedig $(11; 0)$, $(13; 0)$, $(12; 1)$ és $(12; -1)$. A körvonal akkor fogja egy pontban metszeni a négyzetet, ha az x tengelyen lévő csúcsaiban metszi. Ez négy esetben fordulhat elő, ha $a = 9$, $4a = 11$, $a = 13$, $a = 15$.



   Felelet: $a \in 9; 11; 13; 15$

2. $\frac{x^2-11x+3}{x^2-12x+3} - \frac{x^2-9x+3}{x^2-10x+3} = \frac{1}{4}$;

Mivel az $x = 0$ érték nem gyöke az egyenletnek, ezért a törtek számlálóit és nevezőit is eloszthatjuk x-szel, ekkor a következő egyenletet kapjuk: $\frac{x-11+\frac{3}{x}}{x-12+\frac{3}{x}} - \frac{x-9+\frac{3}{x}}{x-10+\frac{3}{x}} = \frac{1}{4}$;

Megjelöljük az $x + \frac{3}{x} = t$, amit behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$\frac{t-11}{t-12} - \frac{t-9}{t-10} = \frac{1}{4}$;

$\frac{(t-11)(t-10)-(t-9)(t-12)}{(t-12)(t-10)} = \frac{1}{4}$;

$t^2 - 22t + 112 = 0$;

$t_1 = 8$;

$t_2 = 14$.

Visszahelyettesítve az $x + \frac{3}{x} = 8$, valamint $x + \frac{3}{x} = 14$ egyenleteket kapjuk, melyeknek a megoldásai:

$x = 4 \pm \sqrt{13}$;

$x = 7 \pm \sqrt{46}$.

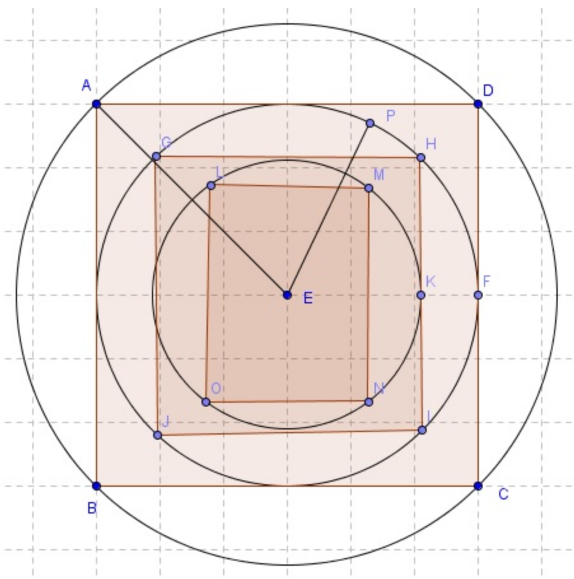
Mind a négy gyök megoldása lesz az eredeti egyenletnek.

Felelet: $x = 4 \pm \sqrt{13}$; $x = 7 \pm \sqrt{46}$.

3. Legyen a körvonal sugara $EA = R$.

Területe $S_{kl} = \pi R^2$.

A körbe írt négyzet $ABCD$, melynek oldala: AB.



$AB^2 + BC^2 = AC^2$;

$2AB^2 = (2R)^2$;

$AB^2 = 2R^2$;

$S_{nl} = 2R^2$;

$AB = R\sqrt{2}$;

$EP = \frac{\sqrt{2}}{2}R$;

$S_{k_2} = \pi EP^2 = 2\frac{\pi}{R^2}$;

$JH^2 = HL^2 + JL^2$;

$(2EP)^2 = 2 \cdot JL^2$;

$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 = 2 \cdot JL^2$;

$JL^2 = R^2$;

$JL = R$;

$S_{n2} = R^2$;

$EK = \frac{1}{2}JL = \frac{R}{2}$;

$S_{k3} = \pi\frac{R^2}{4}$;

$OM = 2EK = R$;

$2ON^2 = OM^2 = R^2$;

$S_{n3} = ON^2 = \frac{R^2}{2}$.

Az eljárást tovább folytatva a következő megállapításra jutunk:

-A körlapok területei S_{k1}, S_{k2}, S_{k3}... sorozat lesz, melynek értékei:

$\pi R^2, \frac{\pi}{2}R^2, \frac{\pi}{4}R^2, ...$.

-A négyzetek területei S_{n1}, S_{n2}, S_{n3}... sorozat lesz, melynek értékei:

$2R^2, R^2, \frac{R^2}{2}, ...$.

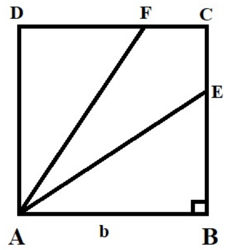
Mindkét sorozat végtelenül csökkenő mértani sorozat lesz, melyekben $q = \frac{1}{2}$.

Területeiknek összege: $S_n = \frac{2R^2}{1-\frac{1}{2}} = 4R^2$;

$S_k = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi R^2$.

Felelet: A négyzetek területeinek összege $4R^2$, a körlapok területeinek összege $2\pi R^2$.

4. Legyen $AB = b$ és $DF = BE = x$, tehát $CE = CF = b - x$.



A feladat alapján az alakzatok kerületei egyenlőek, tehát:

$b + x + \sqrt{b^2 + x^2} = 2\sqrt{b^2 + x^2} + 2(b - x);$

A tagokat rendezve és négyzetre emelve kapjuk a következőt:

$4x^2 - 3bx = 0$, azaz $x(4x - 3b) = 0;$

Az előzőből, $x(4x - 3b) = 0$ alapján két esetet különböztetehetünk meg, tehát első esetben, ha $x = 0$ ellentmondásba ütköznénk, mert $x > 0$.

Második esetben pedig, ha $4x - 3b = 0$, akkor $x = \frac{3}{4}b$.

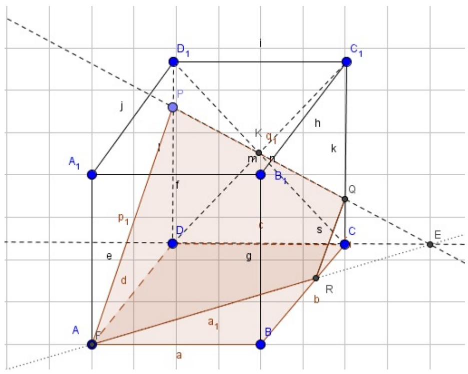
Így a síkidomok kerülete $3b$.

A területek:

$T_{ADP} = T_{ABE} = \frac{3}{8}b^2$.

$T_{AFCE} = T_{ABC} - (T_{ADF} + T_{ABE}) = b^2 - 2 * \frac{3}{8}b^2 = \frac{1}{4}b^2$.

5. Ábrázolva:



Mivel a D_1P szakasz hossza 1 egység, ezért a $DP = 4 - 1 = 3$ egység.

Az ADP derékszögű háromszögben meghatározzuk az AP átfogót.

$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ egység.

Mivel a DCC_1D_1 négyzetben a K pont az átlók metszéspontja, ezért $KC = KD_1$. A K pontnál lévő csúcsszögek egyenlők, valamint a $KCQ\angle = KD_1P\angle$. Ebből következik, hogy a $KCQ\Delta = KD_1P\Delta$.

Tehát a $D_1P = CQ = 1$ egység. A PDE háromszög hasonló QCE háromszöggel.

Legyen $CE = x$, ekkor a $DE = x + 4$.

$\frac{PD}{QC} = \frac{DE}{CE}$;

$\frac{3}{1} = \frac{x+4}{x}$;

$3x = x + 4$;

$x = 2$;

$CE = 2$. Hasonlóan az ADE háromszög hasonló az RCE háromszöggel, innen:

$\frac{AD}{RC} = \frac{DE}{CE}$;

$\frac{4}{RC} = \frac{6}{2}$;

$RC = \frac{4}{3}$;

$RQ = \sqrt{QC^2 + RC^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$;

$BR = BC - RC$;

$BR = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$;

$AR = \sqrt{AB^2 + BR^2} = \sqrt{16 + \frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{144+64}}{3} = \frac{\sqrt{208}}{3} = \frac{2\sqrt{52}}{3} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$;

$PK = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

$PQ = 2\sqrt{5}$;

$K = AR + RQ + QP + AP = \frac{4\sqrt{13}}{3} + \frac{5}{3} + 2\sqrt{5} + 5$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2016

11. osztály feladatsor megoldása

1. Az $(m-1)\cdot 10^x + m \cdot 10^{-x} = 2 \cdot m$ egyenletben végrehajtsuk a $t = 10^x$ helyettesítést.

   Ekkor feladatunk az $(m-1)t^2 - 2mt + m = 0$ egyenlet pozitív gyökeinek meghatározása, mivel $t = 10^x > 0$.

   Ha $m = 1$, akkor az egyenletünk elsőfokú, melynek gyöke a $t = \frac{1}{2}$, és így az eredeti egyenlet gyöke: $x = \lg\left(\frac{1}{2}\right)$.

   Ha $m \neq 1$, akkor az egyenlet másodfokú és diszkriminánsa $D = 4m^2 - 4m(m-1) = 4m$.

   Valós gyöke akkor van az egyenletnek, ha $m \geq 0$.

   Ha $m = 0$, akkor $t = 0$. Ez a megoldás nem felel meg, mivel a $t > 0$.

Két valós gyöke van a másodfokú egyenletnek, ha $m > 0$. Ezek a következők lesznek:

$t_1 = \frac{m+\sqrt{m}}{m-1} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$;

$t_2 = \frac{m-\sqrt{m}}{m-1} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$.

Ha $0 < m < 1$, akkor $t_1 < 0$ és $t_2 > 0$, ezért az eredeti egyenletnek csak egy valós gyöke van, mégpedig:

$x = \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$.

Ha $m > 1$, akkor $t_1 > 0$, $t_2 >$, ezért az eredeti egyenletnek két valós gyöke van:

$x_1 = \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$;

$x_2 = \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$.

Felelet: Ha $m < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, ha az $m = 0$, akkor a $t = 0$, de ez nem felel meg a feladat feltételének.

Ha $m = 1$, akkor $x = \lg\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ha $0 < m < 1$, akkor egy megoldása van: $x = \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$.

Ha $m > 1$, akkor $x_1 = \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$,

$x_2 = \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1}$.

2. $\sqrt{3x^2+4x+9} + \sqrt{3x^2-4x+9} = 4x$;

Mivel az egyenlet mindkét oldalát meg lehet szorozni a $g(x) = \sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}$ függvénnyel.

Ekkor kapjuk a következőt:

$\left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right)\left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right) = 4x\left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right)$;

$(3x^2+4x+9) - (3x^2-4x+9) = 4x\left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right)$;

$8x = 4x\left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right)$;

$8x - 4x\left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right) = 0$;

$4x\left(2 - \left(\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9}\right)\right) = 0$;

$x = 0$ vagy $\sqrt{3x^2+4x+9} - \sqrt{3x^2-4x+9} = 2$;

Az eredeti egyenletet és a kapott második egyenletet tagonként összeadva, kapjuk:

$2\sqrt{3x^2+4x+9} = 4x + 2$;

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva 2-vel, kapjuk, hogy $\sqrt{3x^2+4x+9}=2x+1$.

Melyet négyzetre emelve: $3x^2+4x+9=4x^2+4x+1$ egyenletet kapjuk, melynek megoldása: $x^2=8$;

$x=\pm 2\sqrt{2}$.

Az egyenletnek három gyökét kaptuk: $\begin{cases} x=0 \\ x=2\sqrt{2} \\ x=-2\sqrt{2}. \end{cases}$

Ellenőrzés: Az $x=0$ nem lesz megoldása az eredeti egyenletnek, mert $3+3\neq 0$.

Az $x=-2\sqrt{2}$ nem lesz megoldása az eredeti egyenletnek, mivel az egyenlet bal oldala mindig pozitív, a jobb oldal nem lehet negatív.

Az $x=2\sqrt{2}$ megoldása az eredeti egyenletnek.

Felelet: $x=2\sqrt{2}$.

3. $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1$;

   Két esetet vizsgálunk meg:

   (a) $0<\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}<1$;

   (b) $\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}>1$.

   Ekkor:

   (a) $\begin{cases} 0<\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}<1 \\ \sqrt{1+2\cos 2x}>\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \frac{2\cos x}{\sqrt{3}}>1 \\ 0<\sqrt{1+2\cos 2x}<\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

   Ezután kapjuk, hogy:

   (a) A $0<\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}<1$ egyenértékű a $0<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséggel.

   Mivel a $\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}>0$, ezért a második egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelhetjük, és a következőt kapjuk: $1+2\cos 2x>\left(\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}\right)^2$;

   $1+2(2\cos^2 x-1)>\frac{4\cos^2 x}{3}$;

   $4\cos^2 x-1>\frac{4\cos^2 x}{3}$;

   $8\cos^2 x>3$;

   $|\cos x|>\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Mivel $\cos x > 0$, ezért $|\cos x| = \cos x$, $\cos x > \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ezért az a rendszer egyenértékű a következővel: $\frac{\sqrt{6}}{4} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, melynek a megoldása az: $\left[\begin{array}{l} -\arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$

A b egyenlőtlenségrendszer második egyenlőtlenségének mindkét oldalát négyzetre emelhetjük, ha figyelembe vesszük az első egyenlőtlenségét is.

(b) $0 < 1{+}2\cos 2x < \left(\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}\right)^2 < \begin{cases} 1 + 2\cos 2x > 0 \\ 1 + 2\cos 2x < \frac{4cos^2x}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| > \frac{1}{2} \\ |\cos x| < \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < |\cos x| < \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Mivel $|\cos x| = \cos x$, ha $cosx > 0$, innen kapjuk, hogy $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{6}}{4}$. Ezekből következik, hogy a b egyenlőtlenségrendszer átírható a következő képen:

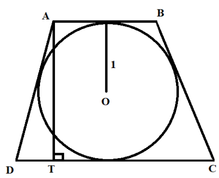
$\begin{cases} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$

Tehát a b egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása.

Felelet: $\left(-\arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + +2\pi n\right) \cup$

$\cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi < x < \arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n\right); n \in Z.$

4. Az $AT \perp DC$.



Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, tehát a szemben fekvő oldalainak az összege egyenlő: $AB + CD = AD + BC$.

A feladat alapján: $AB, BC, CD, 2AD$ számtani sorozat.

A számtani sorozat tulajdonsága alapján:

$2BC = AB + CD$

$2CD = BC + 2AD$

A fentiekből következik az, hogy: $AD = BC$, tehát $ABCD$ négyszög egyenlőszárú trapéz (két szemközti oldala egyenlő).

Mivel $2CD = BC + 2AD$ és $AD = BC$, innen $3AD = 2CD$.

Legyen $CD = 3a$, akkor $AD = 2a$, innen az következik, hogy $AB = a$.

Mivel a beírt körvonal egységsugarú, így $AT = 2$.

$DT = \frac{CD-AB}{2} = \frac{3a-a}{2} = a.$

Pitagorasz-tételét alkalmazva ATD -re.

$AD^2 = DT^2 + AT^2$

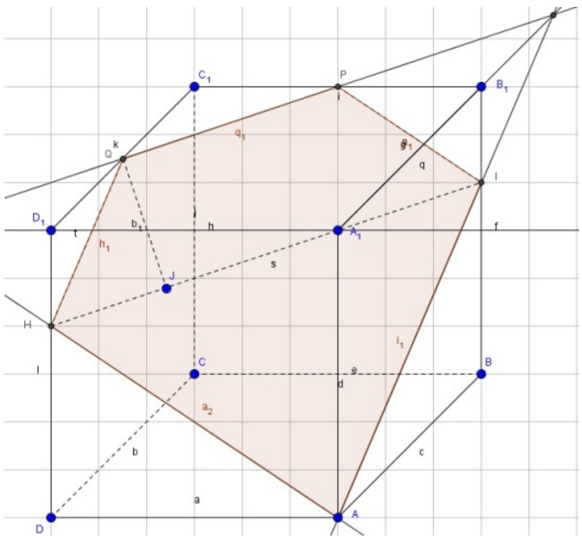
$4a^2 = a^2 + 4$

$3a^2 = 4$

$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tehát $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $BC = AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $CD = 2\sqrt{3}$ egység.

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egységélű kocka minden éle 1 hosszegység.



A keletkezett metszet egy ötszög, amely felbontható egy $HIPQ$ egyenlőszárú trapézra és egy HIA egyenlőszárú háromszögre.

Az ADH háromszög egybevágó az ABI háromszöggel, tehát $DH = BI$, vagyis a $BDHI$ négyszög téglalap, tehát $HI = \sqrt{2}$.

A $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A QC_1P egyenlőszárú derékszögű háromszög, egybevágó az QD_1E derékszögű egyenlőszárú háromszöggel.

Tehát $ED_1 = D_1Q = \frac{1}{2}$. Vagyis az $EA_1 = \frac{3}{2}$.

Az $EA_1A\Delta$ $ED_1H\Delta$.

$\frac{EA_1}{ED_1} = \frac{AA_1}{HD_1}$;

$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{HD_1}$;

$HD_1 = \frac{1}{3}$;

$HQ = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$;

$HJ = \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

A trapéz magassága $QJ = \sqrt{QH^2 - HJ^2} = \sqrt{\frac{13}{36} - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{52-18}}{12} = \frac{\sqrt{34}}{12}$;

$S_{tr} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{34}}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{34}}{12} = \frac{\sqrt{68}}{16} = \frac{\sqrt{17}}{8}$.

Az AHI háromszög egyenlő szárú, tehát a magassága $h = \sqrt{AH^2 - \left(\frac{HI}{2}\right)^2}$.

$AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$;

$h = \sqrt{\frac{13}{9} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{9} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26-9}{18}} = \sqrt{\frac{17}{18}}$;

$S_{AHI} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{17}{18}} = \frac{\sqrt{17}}{6}$;

$S = \frac{\sqrt{17}}{8} + \frac{\sqrt{17}}{6} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$ (négyzetegység).

Felelet: $\frac{7\sqrt{17}}{24}$ (négyzetegység).

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

7. osztály feladatsor megoldása

1. $(x-3)(|x|-2)(x^2+4) = 0$, ebből következik, hogy: $x - 3 = 0$, vagy $|x| = 2$, vagy $x^2 + 4 = 0$.

   Az első egyenletből $x = 3$, a másodikból $x = \pm 2$, a harmadiknak nincs megoldása.

2. A leírásból jól látszik, hogy az ezresek helyén álló szám csak 1 lehet, mivel $17 \geq S+M$, így $M = 1$. Ez pedig azt jelenti,hogy $O = 0$, amiből következik,hogy $S = 9$.

   Felhasználva, hogy $o = 0$ kapjuk, hogy $N = E + 1$. A tízesek és a százasok összeadásából következik, hogy $R = 8$. Ha $N = 7$,akkor $E = 6$ és D legfeljebb 5 lehetne, ami ellentmondás, mert $Y = 1$ lenne.

   Így $N = 6$, akkor $E = 5$, $D = 7$ és $Y = 2$ lenne. Más megoldás nincs.

   Tehát: $9567 + 1085 = 10652$.

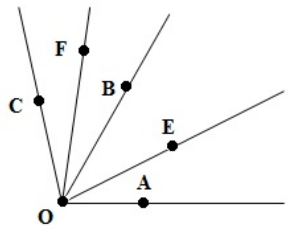
3. A 7 teherautó összesen 14 tonna követ bír el, s az 50 darab kő súlya pedig:

   $250 + 251 + 252 + ... + 299 = 250 + (250 + 1) + (250 + 2) + ... + (250 + 49) = \frac{50 \cdot (2 \cdot 250 + 49)}{2} = 13725$kg, ami 13t 725kg-nak felel meg.

   Mivel a kövek nem darabolhatók, így legalább egy teherautón 8 darab kőtömb lesz, $8 * 274.5 = 2196\ kg$, azaz $2\ t\ 196\ kg$ és ez több, mint ami egy teherautóra rakható.

Tehát a 7 teherautó nem tudja elszállítani az 50 darab kötömböt.

4. Legyenek OE és OF megfelelően az $AOB\angle$ és a $BOC\angle$ szögfelezői. Legyen $EOB\angle = \alpha$ és $BOF\angle = \beta$.



Ekkor $\begin{cases} \alpha + \beta = 60^\circ \\ \alpha = 3 \cdot \beta. \end{cases}$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

Tehát: $AOB\angle = 90^\circ$, $BOC\angle = 30^\circ$.

5. 2017-ből kivonjuk, az 5-el, a 3-al és a 2-vel osztható számok számát, majd hozzáadjuk a 15-el, 6-al, 10-el osztható számok számát, mert ezeket kétszer vontuk ki, majd kivonjuk a 30-al osztható számok számát:

$2017 - 403 - 672 - 1008 + 134 + 336 + 201 - 67 = 538.$

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

8. osztály feladatsor megoldása

1. A két gombócos fagyinál először 4 féle ízből választhatunk, másodszor már csak 3-ból, így összesen $4 \cdot 3 = 12$ lehetőségünk. A háromgombócos fagyinál az előző gondolatmenetet követve $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Így összesen $24 + 12 = 36$ lehetőség van.

2. 45-el osztható, ha osztható 5-tel és 9-el. Tehát $b = 0$, vagy $b = 5$.

   (a) Ha $b = 0$, akkor $a = 6$;

   (b) Ha $b = 5$, akkor $a = 1$.

   36-al osztható, ha osztható 4-el és 9-el. Tehát $d = 0$, vagy $d = 4$, vagy $d = 8$.

   (a) Ha $d = 0$, akkor $c = 6$;

   (b) Ha $d = 4$, akkor $c = 2$;

(c) Ha $d = 8$, akkor $c = 7$, vagy $c = 4$.

Lehetséges, 36720 esetében.

3. $n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n+3) - (n+3) = (n+3)(n^2-1) = (n-1)(n+1)(n+3)$;

   Mivel $n = 2k + 1$, így kapjuk, hogy $n^3 + 3n^2 - n - 3 = (n-1)(n+1)(n+3) = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$.

   Mivel három egymást követő természetes szám szorzata mindig osztódik 6-al, így az állítás bizonyított.

4. A $CEA\Delta = CEM\Delta$, mivel derékszögűek, CE közös és $ECA\angle = ECM\angle$, mert CE szögfelező.

   Így $EA = EM$, ami azt jelenti, hogy $AEM\Delta$ egyenlőszárú, ezért $EAM\angle = EMA\angle$.

   A $BEM\angle = 90 - B\angle$ külső szöge a háromszögnek, így $EAM\angle = \frac{90-B\angle}{2}$.

   Hasonlóan kapjuk, hogy $BDA\Delta = BDK\Delta$. Így $AD = DK$, ami azt jelenti, hogy $ADK\Delta$ egyenlőszárú, ezért $DAK\angle = DKA\angle$.

   A $CDK\angle = 90 - C\angle$ külső szöge a háromszögnek, így $DAK\angle = \frac{90-C\angle}{2}$.

   $KAM\angle = 90 - \frac{90-B\angle}{2} - \frac{90-C\angle}{2} = \frac{B\angle+C\angle}{2} = 45°$.

5. $244^{21} > 243^{21} = (3^5)^{21} = 3^{105} > 3^{104} = (3^4)^{26} = 81^{26} > 79^{26}$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

9. osztály feladatsor megoldása

1. Csoportosítjuk a zárójeleket: $(x+2)(x+12) = x^2 + 14x + 24$;

   $(x+3)(x+8) = x^2 + 11x + 24$;

   $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$;

   Megjelöljük az első zárójelet t-vel, ekkor a következő egyenletet kapjuk:

   $t(t - 3x) = 4x^2$;

   $t^2 - 3xt - 4x^2 = 0$;

   A t-re nézve ez egy másodfokú egyenlet, melynek diszkriminánsa:

   $D = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2$.

$t_{1,2} = \frac{3x \pm 5x}{2}$;

$t_1 = -x$;

$t_2 = x$;

A feladat feltétele alapján:

$x^2 + 14x + 24 = -x$;

$x^2 + 15x + 24 = 0$;

$D = 225 - 4 \cdot 24 = 225 - 96 = 129$;

$x_1 = \frac{-15 - \sqrt{129}}{2}$;

$x_2 = \frac{-15 + \sqrt{129}}{2}$;

$x^2 + 14x + 24 = 4x$;

$x^2 + 10x + 24 = 0$;

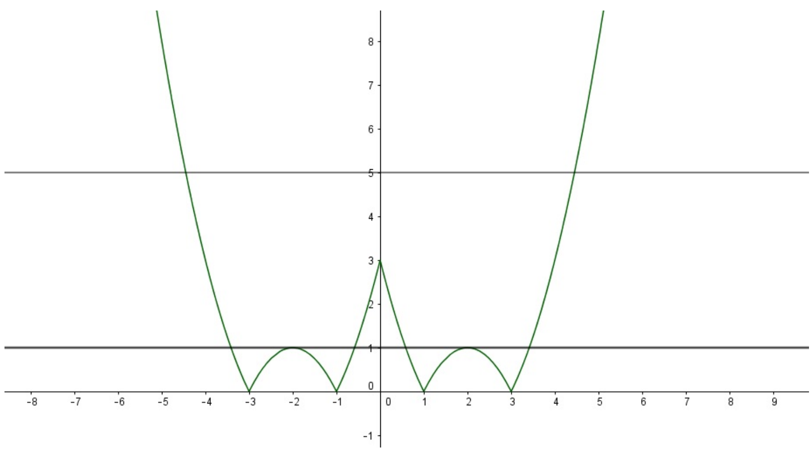
$D = 100 - 4 \cdot 24 = 100 - 96 = 4$;

$x_3 = \frac{-10-2}{2} = -6$;

$x_4 = \frac{-10+2}{2} = -4$;

Felelet: $x_1 = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; $x_3 = \frac{-10-2}{2} = -6$; $x_4 = \frac{-10+2}{2} = -4$.

2. Megszerkesztve a függvény grafikonját, és az $y = a$ egyenes grafikonját, kapjuk:



Ezekből látható, hogy az $a = 1$ lesz az az érték, melyre teljesül a feladat feltétele.

3. Ha a második x óra alatt végzi el a kaszálást, akkor az első munkás $(x - 4)$ óra alatt fogja elvégezni.

Legyen a mező területe S ár, akkor az első munkás $\frac{S}{x-4}$ árt kaszál le egy óra alatt, a második pedig $\frac{S}{x}$ árt. A feladat feltétele szerint $\left(\frac{S}{x-4} + \frac{S}{x}\right) * 2\frac{6}{60} = S$.

$\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x}\right)*2\frac{1}{10}=1;$

$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{21}{10}};$

$\frac{x+x-4}{x(x-4)}=\frac{10}{21};$

$\frac{2x-4}{x^2-4x}=\frac{10}{21};$

$$\begin{cases} x^2-4x\neq 0 \\ 42x-84=10x^2-40x. \end{cases}$$

$10x^2-82x+84=0$

$$\begin{cases} 5x^2-41x+42=0 \\ x\neq 0 \\ x\neq 4. \end{cases}$$

A másodfokú egyenletnek a gyökei: $x_1=\frac{6}{5}=1.2$, $x_2=7$. A feladat feltételének az $x=1.2$ nem felel meg, mert $x-4<0$.

Tehát csak a 7 lesz a megoldása. Vagyis a második munkás 7 óra alatt kaszálná le a mezőt az első munkás pedig $7-4=3$ óra alatt.

Felelet: 3 óra, 7 óra.

4. $2f(x)+f(1-x)=3-xf(1)$ és $(x\in R)$

Az egyenletbe, ha elvégezzük az $x\to 1-x$ helyettesítést a következő egyenletet kapjuk:

$2f(1-x)+f(x)=3-(1-x)f(1)$

$2f(1-x)+f(x)=3-f(1)-xf(1)$

Ha az eredeti egyenletbe helyettesítjük az $x=0$, akkor $2f(0)+f(1)=3$.

Ha $x=1$-et helyettesítünk, akkor $2f(1)+f(0)=3-f(1)$.

Ezt a két egyenletet rendszerbe foglaljuk és megoldjuk:

$$\begin{cases} 2f(0)+f(1)=3 \\ f(0)+3f(1)=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1)=3-2f(0) \\ f(0)+3(3-2f(0))=3. \end{cases}$$

$-5f(0)=-6$

$f(0)=\frac{6}{5}$

$f(1)=3-\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$

Behelyettesítve az eredeti és az $x \to 1 - x$ helyettesítés után kapott egyenletekbe a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3 - \frac{3}{5}x \\ 2f(1-x) + f(x) = 3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x. \end{cases}$$

$f(1-x) = 3 - \frac{3}{5}x - 2f(x)$

Ezt behelyettesítve a 2. egyenletbe:

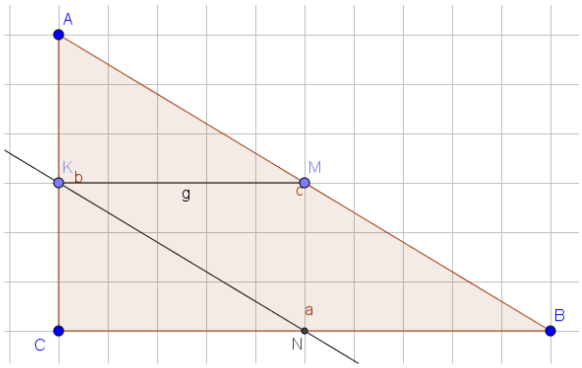
$6 - \frac{6}{5}x - 4f(x) + f(x) = \frac{12}{5} + \frac{3}{5}x$

$6 - \frac{12}{5} - \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}x = 3f(x)$

$3f(x) = \frac{18-9x}{5}$

Tehát a függvényegyenlet megoldása az $f(x) = \frac{6-3x}{5}$ függvény lesz.

5. Ábrázolva a feladatot:



Az $ABC\angle = 90° - BAC\angle = 90° - 60° = 30°$.

Az ABC és CNK szögek a KN és AB egyeneseket a BC egyenessel való metszésekor keletkezett megfelelő szögei lesznek, mivel $ABC\angle = CNK\angle$, ezért $KN||AB$. Mivel az $AK = KC$, ezért Thalész tétele alapján $CN = NB$.

Vagyis a KN a háromszög középvonala lesz, ezért $KN = \frac{1}{2}AB$.

Mivel $AM = MB$, ezért $KN = MB$. Tehát a $KN||AB$ és $KN = MB$, ezért a $KMBN$ négyszög paralelogramma lesz.

A CNK derékszögű háromszögben $\cos N\angle = \frac{CN}{KN}$; $CN = KN \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}KN$.

A feladat feltétele alapján $2(NB + KN) = 60 + 30\sqrt{3}$

$NB + KN = 30 + 15\sqrt{3}$. Mivel $CN = NB$, ezért $\frac{\sqrt{3}}{2}KN + KN = 30 + 15\sqrt{3}$. $KN = 30$ cm,

$NB = \frac{\sqrt{3}}{2} * 30 = 15\sqrt{3}$ cm. Tehát $S_{KMBN} = MB * BN \sin B = 30 * 15\sqrt{3} * \frac{1}{2} = 225\sqrt{3}\, cm^2$.

Felelet: $S = 225\sqrt{3}\, cm^2$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

10. osztály feladatsor megoldása

1. A $d \neq 0$.

   a_1, a_3, a_{11} - mértani sorozat lesz. Tehát:

   $a_3^2 = a_1 * a_{11}$

   $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$

   $a_1^2 + 4a_1d + 4d^2 = a_1^2 + 10a_1d$

   $4d^2 - 6a_1d = 0$

   $2d(2d - 6a_1) = 0$

   Itt két esetre oszlik, vagy $d = 0$, de ez nem lehetséges, vagy $d = 3a_1$. Tehát a $d = 3a_1$ esetén:

   $a_1 \neq 0$

   $a_{k-1} + a_k + a_{k+1} = (a_1 + a_2 + a_3) * 7$; $a_{k-1} = a_k - d$, és $a_{k+1} = a_k + d$

   $3a_k = 12a_1 * 7 = 84a_1$

   $a_k = 28a_1 = a_1 + (k-1)d = a_1(1 + 3k - 3) = 28a_1$

   Az $a_1 \neq 0$-ból következik:

   $3k - 2 = 28$

   $3k = 30$

   $k = 10$.

2. $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x^2-x-6} = \frac{3(x^2-x-6)+8x+16}{x^2-x-6} = 3 + \frac{8(x+2)}{x^2-x-6} =$

   $= 3 + \frac{8(x+2)}{(x-3)(x+2)} = 3 + \frac{8}{x-3}$

   Vagy $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x2)$

   $3x^2 + 5x - 2 = 3(x - \frac{1}{3})(x + 2)$

   $x_1 = -2$, és $x_2 = \frac{1}{3}$;

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

$\frac{3x^2+5x-2}{x^2-x-6} = \frac{3(x-\frac{1}{3})(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3(x-\frac{1}{3})}{x-3} = \frac{3(x-3)+8}{x-3} = 3 + \frac{8}{x-3}$

Tehát a max $x = 4$, $f(4) = 11$. A min $x = 7$, $f(7) = 5$.

3. $f(\frac{x+1}{x-2}) + 2f(\frac{x-2}{x+1}) = x.$

   Legyen $\frac{x+1}{x-2} = t \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{t}$ és $x + 1 = t(x-2)$;

   $x + 1 = tx - 2t$

   $x - tx = -1 - 2t$

   $x(1-t) = -1 - 2t$

   $x = \frac{-1-2t}{1-t} = \frac{1+2t}{t-1}$, így tehát:

   $f(t) + 2f(\frac{1}{t}) = \frac{1+2t}{t-1}$, ezt jelöljük A-val.

   Legyen $t := \frac{1}{t}$

   $f\left(\frac{1}{t} + 2f(t)\right) = \frac{1+2\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1} =$

   $\frac{\frac{t+2}{t}}{\frac{1-t}{t}} = \frac{t+2}{1-t}$, ezt pedig jelüljük B-vel

   $A - 2B \Rightarrow -3f(t) = \frac{1+2t}{t-1} - 2\frac{t+2}{1-t} = \frac{1+2t}{t-1} + \frac{2t+4}{t-1} = \frac{4t+5}{t-1}.$

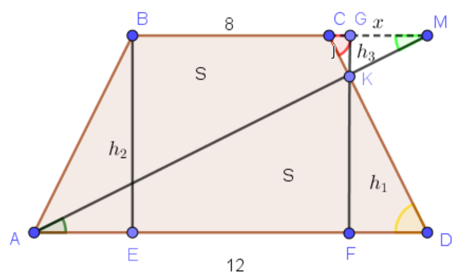
   $f(t) = \frac{4t+5}{-3t+3}$

   Legyen a $t := \frac{x+1}{x-2}$, így:

   $f(\frac{x+1}{x-2}) = \frac{4\frac{x+1}{x-2}+5}{-3\frac{x+1}{x-2}-3} = \frac{\frac{4x+4}{x-2}+5}{\frac{-3x-3}{x-2}+3} = \frac{\frac{4x+4+5x-10}{x-2}}{\frac{-3x-3+3x-6}{x-2}} = \frac{9x-6}{x-2} * \frac{x-2}{-9} = \frac{9x-6}{-9} =$

   $\frac{3x-2}{-3} = -x + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - x.$

4. A $CKM\Delta$ hasoló a $DKA\Delta$.



   Az $S_{ABCK} = S_{AKD} \Rightarrow S_AKD\Delta = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

   $\frac{1}{2} * 12h_1 = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}(12+8) * h_2$

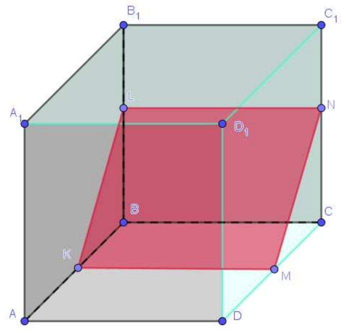
   $12h_1 = 10h_2$

$6h_1 = 5h_2 \Rightarrow h_3 = h_2 - h_1 = \frac{6}{5}h_1 - h_1 = \frac{1}{5}h_1$

$\frac{x}{12} = \frac{h_3}{h_1} = \frac{\frac{1}{5}h_1}{h_1} = \frac{1}{5}$

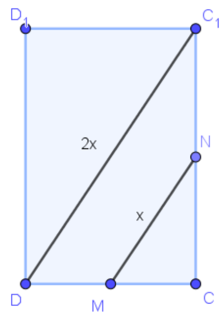
$x = \frac{12}{5} = 2.4$

5. $S_{KMNL} = 80\sqrt{3}\,cm^2$



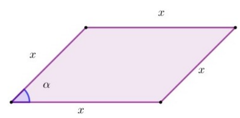
$P_{KMNL} = 40\sqrt{3}\,cm^2$

$A_1B_1 = \sqrt{4x^2 - 192} = 2\sqrt{x^2 - 48}$



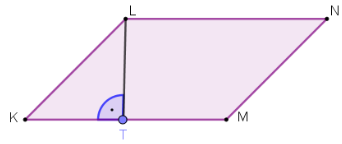
$MN = x$, hisz középvonala $DC_1C\Delta$-nek. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egy egyenes hasáb, tehát így az AA_1B_1B sík "$||DD_1C_1C$ síkkal.Ebből következik az, hogy $MN||KL$, hiszen párhuzamos síkban helyezkednek el és két metszősík egyenesei.

A $KLNM$ paralelogramma, de $KM = MN = x$, így ebből azt következik, hogy a $KLNM$ rombusz.



$4x = 40\sqrt{3} \Rightarrow x = 10\sqrt{3}$

$KLNM$ sík és $ABCD$ sík közötti szög $BB_1 \perp ABCD$.

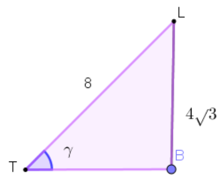


Meghúzzuk az LT magasságot, az $LT \perp KM$, a 3$\perp$ tételekből, így $BT \perp KM$, tehát keresztszög $LTB\angle$.

$S_{KLNM} = 80\sqrt{3} = x * h = 10\sqrt{3} * h$

$h = 8$

$LB = 4\sqrt{3}$;



Tehát $\sin\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\gamma = 60°$

Geőcze Zoárd matematika verseny-2017

11. osztály feladatsor megoldása

1. Összesen $n = 13$ kedvező. 20-nál fiatalabb, tehát $k = 4$. Nem fiatalabb 20-nál, akkor 9.

   Legyen A, ha egy játékos 20-nál fiatalabb.

   Legyen B, ha senki sem fiatalabb.

   Legyen C, egy fiatalabb.

   $A = B + C$

   B esetében: $\frac{C_9^7}{C_{13}^7}$

   Egy fiatalabb $\frac{C_4^1 * C_9^6}{C_{13}^7}$

   $P(A) = \frac{C_9^7}{C_{13}^7} + \frac{C_9^6 * C_4^1}{C_{13}^7}$

2. $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(-x^2 + 2x + 3)$

   Tudjuk, hogy $x = \frac{9}{4}$ megfelel.

$(x^2) - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$(\frac{9}{4} - 2)(\frac{9}{4} + 1) = \frac{1}{4} * \frac{13}{4}$

$-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-3)(x+1)$

$-(\frac{9}{4} - 3)(\frac{9}{4} + 1) = \frac{3}{4} * \frac{13}{4}$

$\log_a \frac{13}{16} > \log_a \frac{39}{16}$

ha $a > 1$;

ha $0 < a < 1$;

Tehát $0 < a < 1$, ezért:

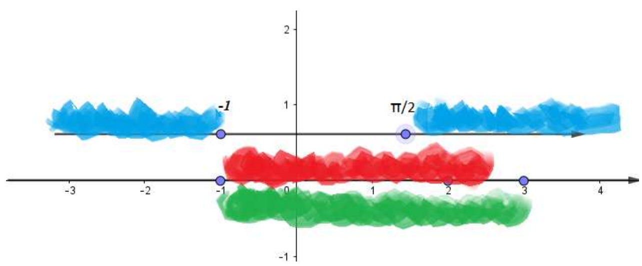
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < -x^2 + 2x + 3; (A) \\ x^2 - x - 2 > 0; (B) \\ -x^2 + 2x + 3 > 0. (C) \end{cases}$$

A esetben: $2x^2 - 3x - 5 < 0$ $x_1 = \frac{5}{2}$ $x_2 = -1$

B esetben:

C esetben:

Összesítve:



Felelet: $x \in (\frac{\Pi}{2};\ \frac{5}{2})$

3. $f(x+y) + f(x) = 2f(y) + 2f(x-y) + y - 4$

   $y = 0$

   $f(x) + f(x) = 2f(0) + 2f(x) - 4$

   $f(0) = 2$

$x = 0$

$f(y) + f(0) = 2f(y) + 2f(-y) + y - 4$

$f(y) + 2f(-y) = -y + 6$; (A)

Legyen $y := -y$

$f(-y) + 2f(y) = y + 6$; (B)

$A - 2B \Rightarrow -3f(y) = -y + 6 - 2y - 12 = -3y - 6$

$f(y) = y + 2$

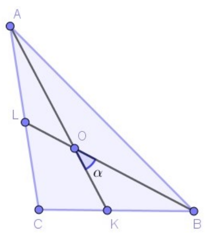
$f(x) = x + 2$

4. Legyenek: $A(0; 2a)$;

   $B(2a; 0)$;

   $K(a; 0)$;

   $L(0; a)$.



$\overline{AK}(a; -2a)$

$\overline{OK} = \frac{1}{3}\overline{AK} = \overline{(\frac{a}{3}; \frac{-2a}{3})}$

$\overline{LB} = \overline{(2a; -a)}$

$\overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{LB} = (\frac{4a}{3}; \frac{-2a}{3})$

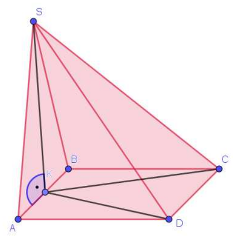
$\widehat{\overline{OK}, \overline{OB}}$-?

$\cos\alpha = \frac{\overline{OK} * \overline{OB}}{|\overline{OK}| * |\overline{OB}|} =$

$= \frac{\frac{a}{3} * \frac{4a}{3} + \frac{2a}{3} * \frac{2a}{3}}{\sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} * \sqrt{\frac{16a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}}} = \frac{\frac{8a^2}{9}}{\frac{\sqrt{5}a * \sqrt{20}a}{9}} = \frac{8}{10} = 0.8$

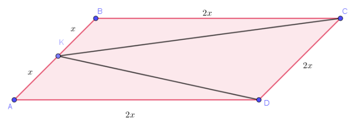
$\alpha = \arccos 0.8$

5. $SCK\angle = \alpha$

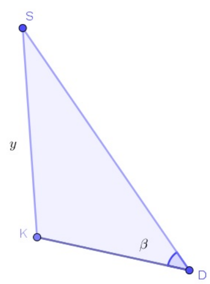


$SDK\angle = \beta$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$



Legyen $AB = 2x$ $AK = x$; $SK = y$



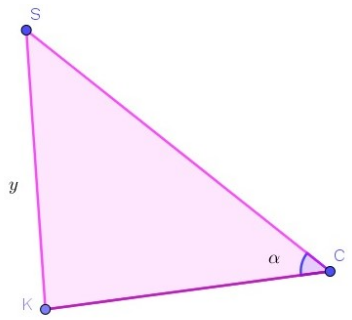
$KD = \frac{y}{\tan\beta}$

$1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = 5 - 1 = 4$

$\beta < 90°$

$\tan\beta = 2$

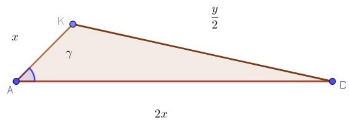


$KC = \frac{y}{\tan\alpha}$

$\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 3 - 1 = 2$

$\alpha < 90°;$

$\tan\alpha = \sqrt{2}$



$KD = \frac{y}{2};$

$KC = \frac{y}{\sqrt{2}}$

$\cos(180 - \gamma) = -\cos\gamma$

$\frac{y^2}{4} = x^2 + 4x^2 - 4x^2\cos\gamma$

$y^2 = 20x^2 - 16x^2\cos\gamma$

$\frac{y^2}{2} = x^2 + 4x^2 + 4x^2\cos\gamma$

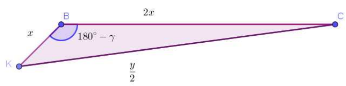
$y^2 = 10x^2 + 8x^2\cos\gamma$

$20x^2 - 16x^2\cos\gamma = 10x^2 + 8x^2\cos\gamma \ / : x^2$

$10 = 24\cos\gamma$

$\cos\gamma = \frac{5}{12}$

$\gamma = \arccos\frac{5}{12}$



Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

7. osztály feladatsor megoldása

1. Feltételezzük, hogy A mond igazat és a többiek nem, azaz B nyerte a versenyt.

   Ekkor: A-igaz, B-hamis, C-igaz–Ellentmondás!

   Feltételezzük, hogy B mond igazat és a többiek nem, azaz C nyerte a versenyt. Ekkor: A-hamis, B-igaz, C-hamis, D-igaz—Ellentmondás!

   Feltételezzük, hogy C mond igazat és a többiek nem, azaz D nyerte a versenyt. Ekkor: A-hamis, B-hamis, C-igaz, D-hamis. Tehát a versenyt D nyerte.

2. A feladatban szereplő összefüggést ekvivalensen alakítom az alábbi módon:

   $a^3 + (3a^2 + 1)b + (3b^2 + 1)a + b^3 = 0;$

   $a^3 + 3a^2b + b + 3b^2a + a + b^3 = 0;$

   $(a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3) + (a + b) = 0;$

   $(a + b)^3 + (a + b) = 0;$

   $(a + b)\left((a + b)^2 + 1\right) = 0;$

   Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha egyik vagy másik tényezője nulla, így $a + b = 0$, azaz $a = -b$ eset állhat fenn, mivel könnyen észrevehető, hogy a második zárójelben szereplő kifejezés mindig pozitív.

   Az $a = -b$-t behelyettesítve a másik keresett kifejezés értékére kapjuk, hogy: $\frac{a}{b} = -1$.

   Válasz a keresett kifejezések értéke 0 és -1.

3. Legyen a sakkverseny eredeti létszáma $2n$, akkor az eredetileg lejátszott játszmák száma:

   $\frac{2n(2n-1)}{2}$. Ha csak feleannyian volnának, akkor a verseny létszáma n lenne és az így lejátszott játszmák száma

   $\frac{n(n-1)}{2}$ lenne.

   A feladat feltétele alapján felírható az alábbi egyenlet:

   $\frac{24}{100} \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, ahol n pozitív egész biztosan.

   Az egyenlet bal oldalán egyszerűsítés után kapjuk, hogy $\frac{6}{25}n(2n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, beszorozva az egyenlet jobb és bal oldalát 50-vel, majd n-nel leosztva (amit megtehetünk, mert n pozitív egész) és rendezve az egyenletet kapjuk, hogy $n = 13$.

   Válasz: a sakkversenyen eredetileg 26 játékos indult.

4. Az arányszámok és a zsetonok száma pozitív egész, és az utóbbiak száma a játék elején ugyanannyi, mint a játék végén. Az arányszámokból adódik, hogy Peti zsetonjainak száma nem változott, hiszen az összes zseton $\frac{10}{30}$-a ugyanannyi, mint $\frac{7}{21}$-e. A 363 zsetont tehát Lali kártyázta el. A játék kezdetén a zsetonok $\frac{9}{30}$ része volt a birtokában, míg a játék végére már csak $\frac{3}{21}$ részt birtokolt.

$\frac{9}{30} - \frac{3}{21} = \frac{3}{10} - \frac{1}{7} = \frac{11}{70}$, így tehát a zsetonok $\frac{11}{70}$ része 363 darab zseton, azaz $\frac{1}{70}$ része $\frac{363}{11} = 33$ darab, vagyis összesen $70 \cdot 33 = 2310$ darab zseton volt a három gyerek birtokában.

Zsetonok száma:

Név	Elején	Végén
Kati	847	1210
Peti	770	770
Lali	93	330
Összesen:	2310	2310

Ellenőrzés: $847 : 770 : 693 = 11 : 10 : 9$, valamint $1210 : 770 : 330 = 11 : 7 : 3$.

5. (a) Megoldás során többször alkalmazzuk, hogy a háromszög belső szögeinek az összege 180°. 0Legyen $ABC\angle = \beta \Rightarrow \alpha = CAB\angle = 90° - \beta$.

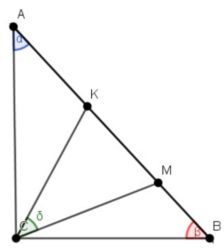
   Felhasználjuk, hogy a $CAM\Delta(AC = AM)$ és $CBK\Delta(BC = BK)$ egyenlőszárú háromszögek, vagyis az alapon fekvő szögeik egyenlők, így $BKC\angle = BCK\angle = \frac{180°-\beta}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$

   és $ACM\angle = AMC\angle = \frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{90°-\beta}{2} = 45° + \frac{\beta}{2}$.

   Tehát $ACM\angle + BCK\angle = 135°$ és $90° = ACM\angle + BCK\angle - KCM\angle = 135° - KCM\angle$.

   Innen $KCM\angle = 45°$.

   (b) Ha $ABC\angle - 30°$, akkor $AM = AC = \frac{1}{2}AB$ (Felhasználva, hogy a derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szemben fekvő befogó hossza megegyezik az átfogó felével), tehát az M az AB átfogót felezi (felezőpont).



Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

8. osztály feladatsor megoldása

1. $\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{8+1+4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1} = \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} = 2\sqrt{2}+1;$

   $\sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1;$

   $\sqrt{10+8(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{18+8\sqrt{2}} = \sqrt{16+(\sqrt{2})^2+2\cdot 4\sqrt{2}} = \sqrt{(4+\sqrt{2})^2} = 4+\sqrt{2};$

2. Ábrázolva:(a harmadik feladat után a következő oldalon)

3. Legyen az x a keresett szám első számjegye, y pedig a második számjegye, ekkor:

   $10x + y = (x+2)(y+2);$

   $10x + y = xy + 2x + 2y + 4;$

   $y - xy - 2y = 4 - 8x;$

   $y + xy = 8x - 4;$

   $y(x+1) = 8x - 4;$

   $y = \frac{8x-4}{x+1} = \frac{8x+8+12}{x+1} = 8 - \frac{12}{x+1}.$

   Mivel a feladat feltétele szerint $x \in 1; 2; ...9, y \in 1; 2; ...9.$

   Az adott x értékekre meghatározzuk a megfelelő y értékeket, és közülük kiválogatjuk a megfelelő egész számokat.

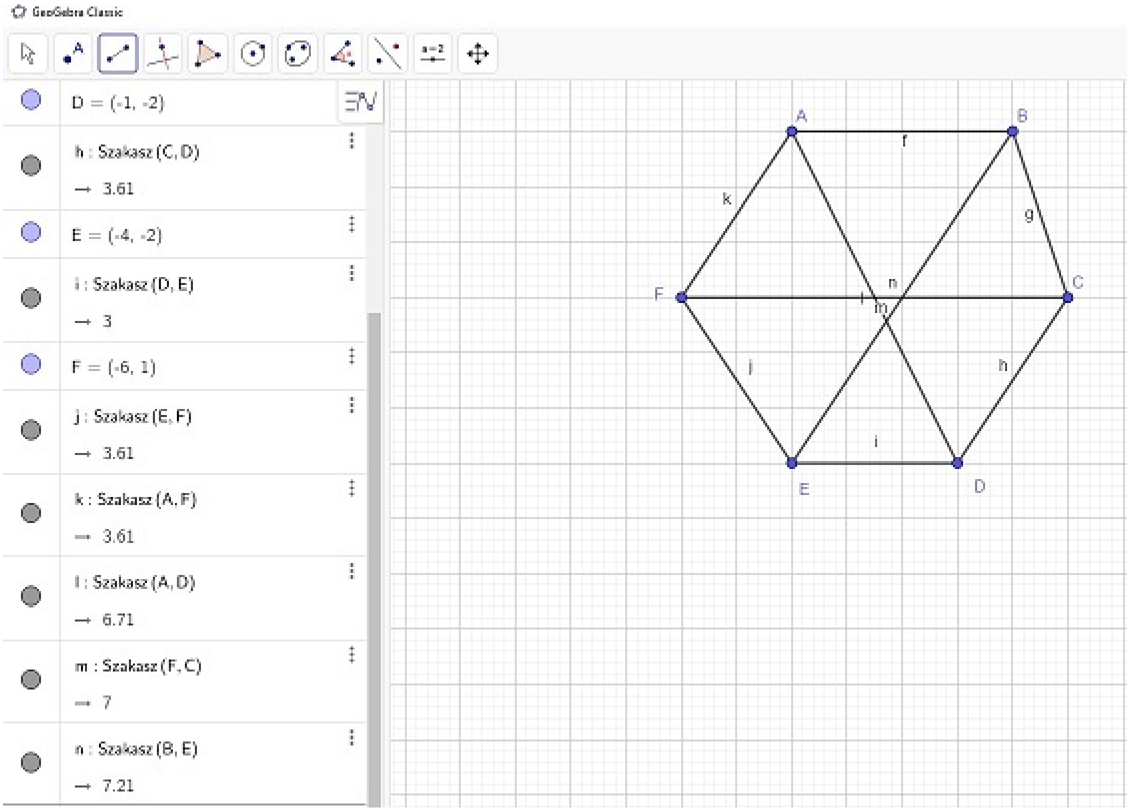
   Tehát a a következők felelnek meg a feladat feltételének: $12; 24; 35; 56.$

   $12 = 3 * 4;$

   $24 = 4 * 6;$

   $35 = 5 * 7;$

   $56 = 7 * 8.$



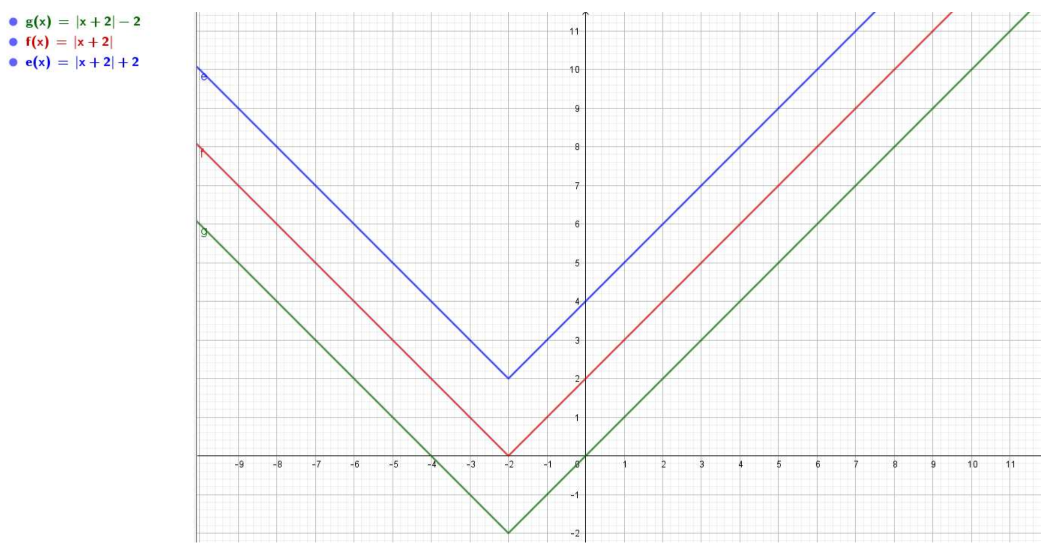
4. Meghatározzuk az értelmezési tartományát: $x \neq 0$ és $x \neq -2$, vagyis: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

   (a) Ha $x \in (-\infty;\ -2)$, akkor $y = -1 - 1 + |x+2| = |x+2| - 2$.

   (b) Ha $(-2;\ 0)$, akkor $y = 1 - 1 + |x+2| = |x+2|$.

   (c) Ha $(0;\ +\infty)$, akkor $y = 1 + 1 + |x+2| = |x+2| + 2$.

   A függvény grafikonja:

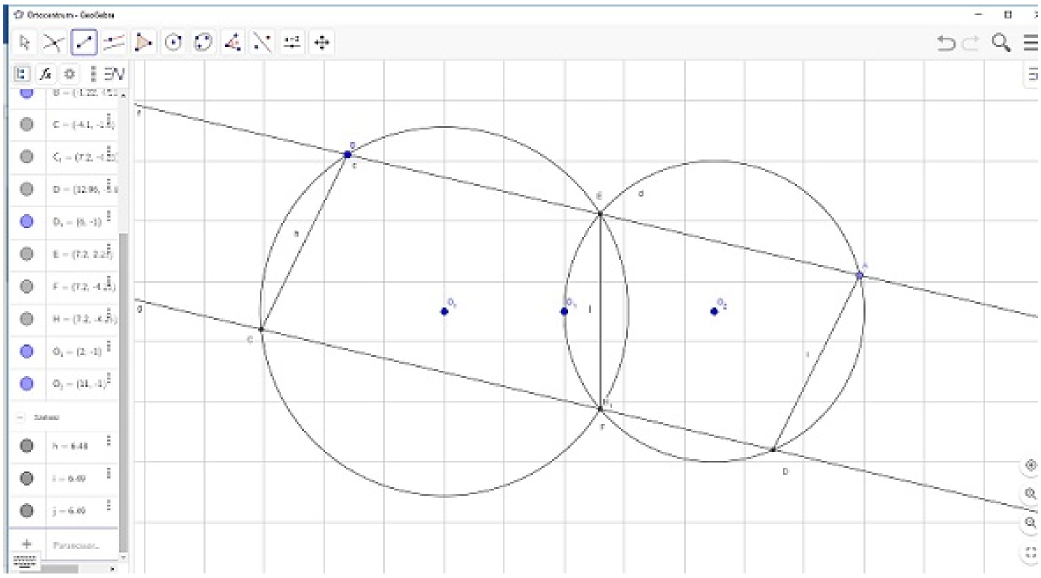


5. Az AB és CD oldalak párhuzamosak, mivel a párhuzamos egyenesek szakaszai. Be kell bizonyítani, hogy az AD és BC oldalak is párhuzamosak lesznek.

   Az EF pontokat összekötve, két húrnégyszöget kapunk. Az $AEFD$ és $BEFC$ négyszögek szemben fekvő szögeinek összege $180°$. Legyen $A\angle = \alpha$, akkor az $AEFD$ húrnégyszögben az $F\angle = 180° - \alpha$.

   A $BEFC$ húrnégyszög F szöge viszont α lesz, és az $EBC\angle = 180° - \alpha$.

   Vagyis azt kaptuk, hogy az $ABCD$ négyszög $A\angle = \alpha$ és $B\angle = 180° - \alpha$. Az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele alapján $BC||AD$.



Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

9. osztály feladatsor megoldása

1. $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{abc}$.

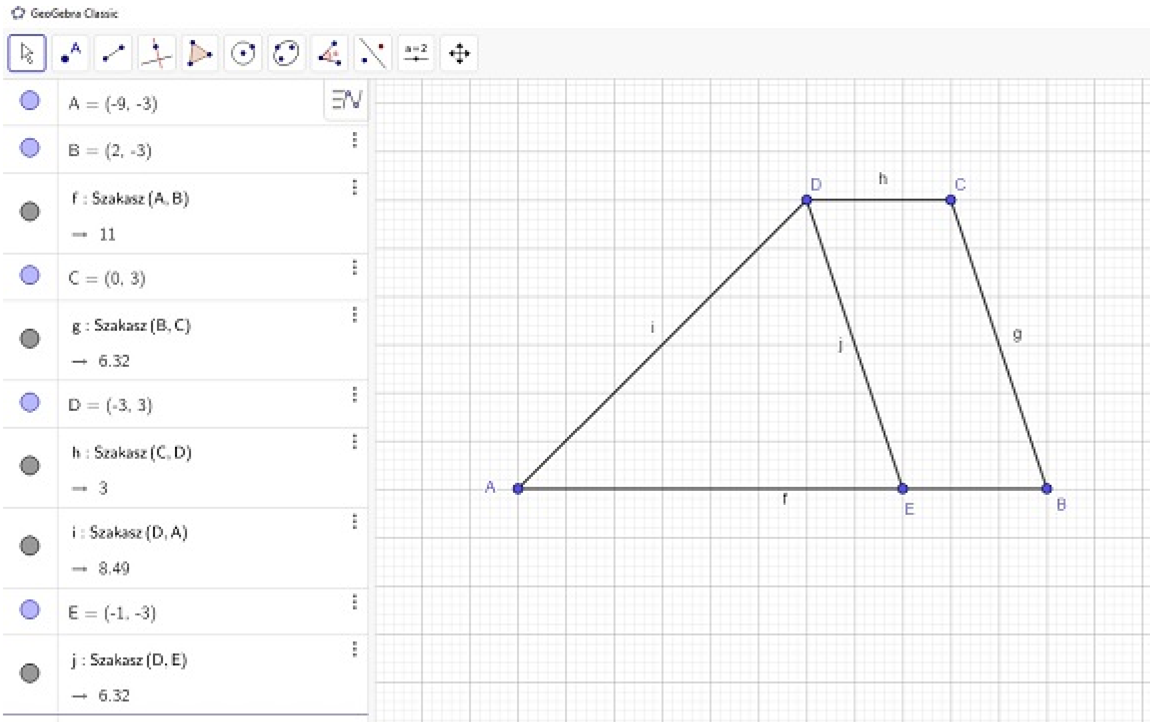
   $10a + a + 10b + b + 10c + c = 100a + 10b + c$;

   $89a = 10c + b$;

   $a = \frac{10c+b}{89}$;

   A $10c + b$ többszöröse 89-nek, ez csak abban az esetben lehetséges, ha $c = 8$ és $b = 9$.

   A megoldás tehát: $11; 99; 88198$.



2. Legyen $ABCD$ az adott, melyben $AB = 25cm, CD = 4cm, AD = 20cm, BC = 13cm$. A CB oldallal húzunk egy DE párhuzamos egyenest, mivel az $EBCD$ négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak, ezért paralelogramma lesz, és ebből következik, hogy $DC = EB = 4cm$, ebből következik, hogy $AE = 21cm$.

   Az AED háromszög magassága megegyezik a trapéz magasságával, és mivel a háromszög oldalait ismerjük, Héron-képletével meghatározzuk a területét:

   $p = \frac{20+13+21}{2} = 27$, $S = \sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)} = \sqrt{27 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 = 126.$

   A háromszög magasságát meghatározhatjuk a területképletből: $h = \frac{2*S}{a}$, $h = \frac{2 \cdot 126}{21} = \frac{252}{21} = 12cm$

   Tehát a trapézmagassága is $12cm$. A területe pedig: $S = \frac{25+4}{2} \cdot 12 = 29 \cdot 6 = 174cm^2$.

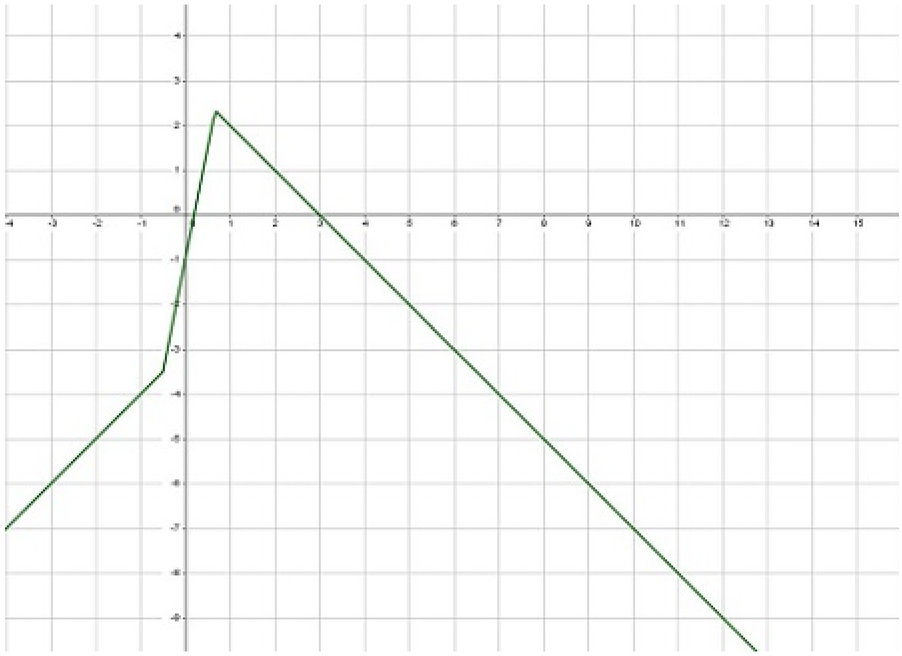
3. Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát: $\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ 9x^2 - 12x + 4 \geq 0. \end{cases}$; Mivel mindkét egyenlőtlenségben a bal oldali kifejezés teljes négyzet, ezért a függvény értelmezési tartománya $x \in (-\infty; +\infty)$ lesz, és a függvény ekvivalens az $y = |2x+1| - |3x-2|$ függvénnyel.

   Az értelmezési tartományt felbontjuk 3 intervallummá, és ezekben megrajzoljuk a megfelelő függvényeket:

(a) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), y = x - 3;$

(b) $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right), y = 5x - 1;$

(c) $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right), y = -x + 3.$



A függvény maximum pontja az $x_0 = \frac{2}{3}$ pontban van, ahol $y_0 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Tehát a függvény értékkészlete $y = (-\infty; 2\frac{1}{3}$.

4. Két nem negatív szám összege csak akkor lesz 0, ha mindkét tényezője nullával egyenlő. Ha $x = 1$ és $y = 1$.

5. Az egyenletnek akkor lesz két gyöke, ha $D \geq 0$, feladat feltételéből következik, hogy a csúcsa a $(-2; 1]$ intervallumban, és $f(-2) > 0$ $f(1) \geq 0$.

Tehát: $\begin{cases} D = a^2 + 8(a+3) = a^2 + 8a + 24 \geq 0 \\ f(-2) = 8 + 2a - a - 3 = a + 5 > 0, \quad f(1) = -2a - 1 \geq 0 \\ -2 < \frac{a}{4} \leq 1. \end{cases};$

$a^2 + 8a + 24 \geq 0;$

$D = 64 - 96 < 0;$

Vagyis ez az egyenlőség minden a értéke teljesül. $\begin{cases} a > -5 \\ a \leq -\frac{1}{2} \\ -8 < a \leq 4. \end{cases};$

Ennek a megoldása az $a \in \left(-5; -\frac{1}{2}\right]$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

10. osztály feladatsor megoldása

1. Legyen x, y, z három páronként különböző nem nulla valós szám!

   Határozzuk meg az xyz szorzat értékét, ha tudjuk, hogy:

   $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$.

   Megvizsgálva az egyenlőségeket külön-külön kapjuk: $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$;

   $x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$;

   $x - y = \frac{y-z}{zy}$;

   $zy = \frac{y-z}{x-y}$.

   Az utolsó átalakítás korrekt, mivel a számok páronként különbözőek.

   Hasonlóan kapjuk,hogy: $y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$;

   $y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$;

   $xz = \frac{z-x}{y-z}$;

   $x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x}$;

   $x - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$;

   $xy = \frac{y-x}{x-z}$;

   Összeszorozva a kapott egyenlőségeket kapjuk, hogy:$yz \cdot xz \cdot xy = \frac{y-z}{x-y} \cdot \frac{z-x}{y-z} \cdot \frac{y-x}{x-z} = 1$;

   Tehát $x^2y^2z^2 = 1$, innen $xyz = 1$, vagy $xyz = -1$.

2. Mivel $a - [a] = a$ és így :

   $\cos \pi x = \left[\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right]$.

   A törtrész tulajdonsága miatt $0 \leq \left\{\frac{x}{2}\right\} < 1$,

   így $-\frac{1}{2} \leq \left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

   Ebben az intervallumban két különböző egész érték lehetséges.

   $-\frac{1}{2} \leq \left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2} < 0$,

   ekkor $\left[\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right] = -1$,

   $\cos \pi \cdot x = -1, x = 1 + 2k, k \in Z$.

   Ekkor $\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2} = \left\{k + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2} = 0$ ami nem lehetséges.

$0 \leq \left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2} < 1$, ekkor $\left[\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right] = 0, \cos\pi \cdot x = 0, x = \frac{1}{2} + k, k \in Z.$

Ekkor, ha k páros $\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2} = \left\{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right\} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$,

ám ez nem felel meg a feltételeknek, vagy ha k páratlan

$\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2} = \left\{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right\} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

Így $x = \frac{3}{2} + 2n, n \in Z.$

3. Mivel a parabola áthalad a pontokon, így $\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 9. \end{cases}$

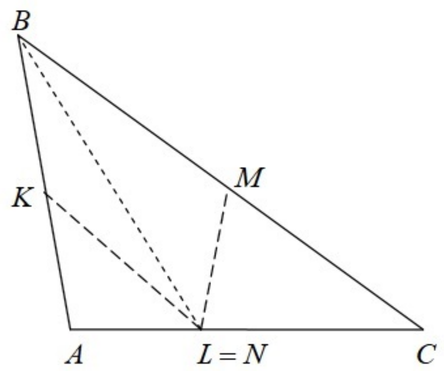
   Innen $b = 2$ és $4a + c = 5$. Mivel nem metszi az x tengelyt így nincs gyöke, tehát:

   $D = 4 - 4a(5 - 4a) = 16a^2 - 20a + 4 = 4a^2 - 5a + 1 < 0;$

   Amiből kapjuk, hogy $\frac{1}{4} < a < 1$.

   A parabola csúcsának x kordinárája $x_c s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{a}$, tehát $-4 < x_c s < -1$.

4. Az AB oldalon felvesszük az N pontot, amelyre $AK = AN$.



   $NC = AC - AN = AC - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AB + BC) - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = MC.$

   Mivel $\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}$, így $N = L$.

   Az AKL és CML háromszögek egyenlő szárúak, ezért $ALK\angle = 90° - \frac{1}{2}A\angle$ és $CLM\angle = 90° - \frac{1}{2}C\angle$.

   Innen $KLM\angle = 180° - 90° + \frac{1}{2}A\angle - 90° + \frac{1}{2}C\angle = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$.

5. A pontrácsot, valamint a szakaszokat egy gráf pontjainak és éleinek tekintjük. A gráf pontjait fokszámaik szerint három csoportba osztjuk.

Másodfokú	Harmadfokú	Negyedfokú
4	40	100

A piros pontok között 4 másod-,$40-20=20$ harmad- és $100-30=70$ negyedfokú van.

A piros pontokból kifutó élek száma $4\cdot 2+20\cdot 3+70\cdot 4=348$.

Mivel 130 piros él van ezért $130\cdot 2=260$ a piros pontokba futó élek összege.

$348-260=88$ él fut piros pontból kékbe.

Így 88 fekete él található a gráfban.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2018

11. osztály feladatsor megoldása

1. Az egyenlet mindkét oldalát beszorozva $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ kifejezéssel a következőt kapjuk:

   $\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-\sqrt{x-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x};$

   A rövidített szorzás képlete alapján:

   $x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{3}{2}\sqrt{x};$

   Egyszerűsítve a kovetkezővel, $\sqrt{x}$;

   $\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}=\frac{3}{2};$

   $\sqrt{x}=\frac{1}{2}+\sqrt{x-1}.$

   Négyzetre emelve kapjuk, hogy: $x=\frac{1}{4}+\sqrt{x-1}+x-1;$

   $\sqrt{x-1}=\frac{3}{4}.$

   Négyzetre emelve: $x-1=\frac{9}{16};$

   $x=\frac{25}{16}.$

   Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a kapott megoldás helyes.

2. Vizsgáljuk meg $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geq 2\sqrt{a_1\cdot\frac{1}{a_1}}=2.$

   Feltételezzük, hogy $a_n\geq n.$

   $a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-n-1=\frac{(a_n)^2-a_nn-a_n+n}{a_n}=\frac{(a_n-1)(a_n-n)}{a_n}\geq 0.$

   A feltevés szerint $a_n\geq n>1.$

3. Megkeressük az $x^2-4ax+3a^2-2a-1=0$ egyenlet megoldását.

   $D=(-4a)^2-4(3a^2-2a-1)=16a^2-12a^2+8a+4=4a^2+8a+4=4(a^2+2a+1)=4(a+1)^2.$

$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{4(a+1)^2}}{2} = \frac{4a \pm 2|a+1|}{2} = 2a \pm |a+1|$.

$x_1 = 2a + a + 1 = 3a + 1$;

$x_2 = 2a - a - 1 = a - 1$;

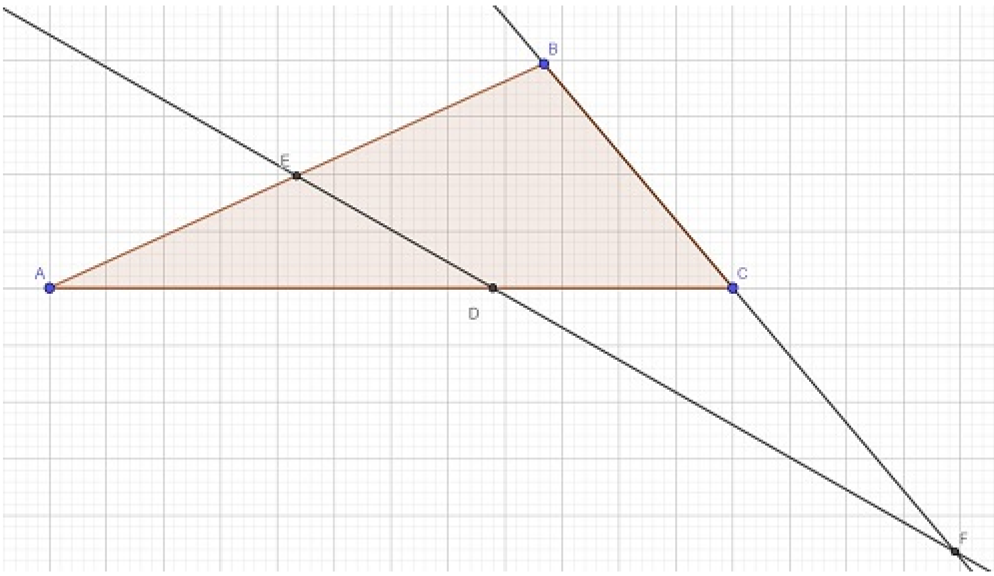
Az eredeti egyenletnek akkor lesz egyetlen megoldása, ha:

(a) $a + 1 = 0$, $a = -1$, megoldása az $x = 2a = -2$;

(b) $x_1 = 3a + 1 = 4$, $x_2 = a - 1 \neq 4$. Innen $a = 1$, megoldás az $x = 1 - a = 0$;

(c) $x_1 = 3a+1 \neq 4$, $x_2 = a-1 = 4$. Innen $a = 5$, megoldása az $x = 15+1 = 16$.

4. Hasonló háromszögekből, vagy az ABC háromszögre alkalmazva Menelaosz-tételét kapjuk, hogy $\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{FC}{FB} = 1$.



A feladat feltételei szerint $BE = EA = 3cm$. A szögfelező-tétel szerint $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Legyen $FC = x$. Behelyettesítve a meglévő értékeket a következőt kapjuk:

$\frac{10}{6} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{x}{x+10} = 1$;

$5x = 3(x + 10)$;

$2x = 30$;

$x = 15$;

$BF = 10 + 15 = 25cm$;

5. A táblázatban bármely cellából el lehet jutni bármely másik cellába legfeljebb 19 szomszédos cella érintésével, így a táblázatba beírt számok n és $95 + n$ közzé esnek, ahol n a táblázatban található legkisebb szám.

Ez legfeljebb 96 különböző szám lehet, így a skatulyaelv szerint biztosan van a táblázatban legalább két egyforma szám.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

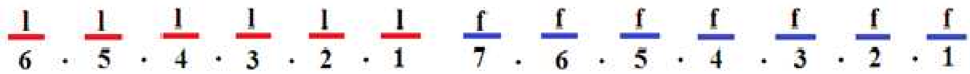
7. osztály feladatsor megoldása

1. $1-\frac{a-b}{\frac{a^2}{a+b}+\frac{ab(b-1)}{(a+b)(a-\frac{a}{b})}} = 1-\frac{a-b}{\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}} = 1-\frac{(a-b)(a+b)}{a^2-b^2} = 1-1=0.$

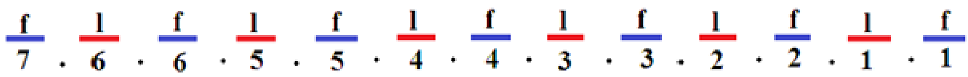
2.
   - $6+7=13$ (gyerek)

     Egyszerűsorbarendezéssel $13!$ féleképpen ülhetnek le a gyerekek.

   - Első 6 székre a lányokat, a tübbire a fiúkat $6!\cdot 7!$ féleképpen ültetjük sorba.



   - Mivel azonos neműek nem ülhetnek így fiúval kell kezdeni a sort, a sorbarendezés a következőképpen alakul:



     Látható, hogy ebben az esetben is $6!\cdot 7!$ féleképpen ültethetjük le a gyerekeket.

3. Mivel a keresett számok számjegyeinek a szorzata 0, és minden számjegyük különböző, így mindkét számban pontosan egy 0 számjegynek kell szerepelnie.

   - Mivel négyjegyű számról van szó, ezért az első számjegy nem lehet 0. Minél kisebb az első számjegy, annál kisebb a szám, ezért az első számjegyet 1-nek. A legkisebb szám értdekében válasszuk a 0 számjegyet másodiknak.

     Mivel a számjegyek összege $12\cdot(2+0+1+9)$, ezért a harmadik és negyedik számjegy összegének 11-nek kell lennie. A legkisebb szám a harmadik számjegyként a 2.

     Így az utolsó számjegy csak a 9 lehet.

     Vagyis a keresett szám: 1029.

- Minél nagyobb egy négyjegyű szám első számjegye, annál nagyobb a szám. Válasszuk tehát az első számjegyet a lehető legnagyobbra. Mivel a számjegyek összege 12, az első számjegy lehet a 9-es. Ehhez mérten a legnagyobb számjegyek a 2, 1, 0 lehetnek a feladat feltételeinek megfelelően.

  Így a legnagyobb szám: 9210.

4. Táblázatba foglalava:

	8 évvel ezelőtt	Most	7 év múlva
Anya	$2x - 15$	$2x - 7$	2x
Lánya	$x - 15$	$x - 7$	x

$2x - 15 = 5(x - 15)$

$2x - 15 = 5x - 75$

$60 = 3x$

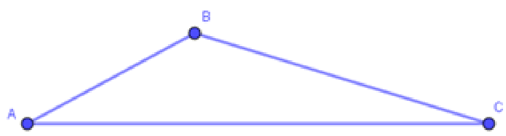
$x = 20$ (éves a lány 7 év múlva)

$x - 7 = 20 - 7 = 13$ (éves a lány most)

$2x - 7 = 2 \cdot 20 - 7 = 40 - 7 = 33$ (éves az anya most)

Felelet: 33 és 13 évesek

5. Ábrázolva



$ABC\Delta$:

$AB = 5cm$

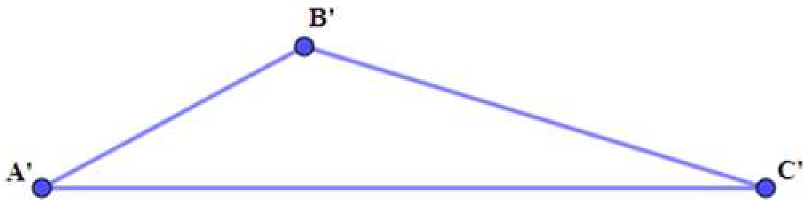
$BC = 8cm$

$AC = 12cm$

$A'B'C'\Delta$:

$A'C' - A'B' = 10,5$ cm

Legyen $A'B' = x$, akkor $A'C' = 10,5 + x$



$ABC\Delta$ hasonló $A'B'C'\Delta$.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$-ből következik:

$\frac{5}{x} = \frac{8}{B'C'} = \frac{12}{10{,}5+x}$

$\frac{5}{x} = \frac{12}{10{,}5+x}$-ből következik:

$52,5 + 5x = 12x$

$52,5 = 7x$

$x = \frac{52{,}5}{7}$

$x = 7,5(cm, A'B')$

$A'C' = 10,5 + x = 10,5 + 7,5 = 18$ (cm)

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$-ből következik:

$\frac{12}{18} = \frac{8}{B'C'}$

$B'C' = \frac{8\cdot 18}{12} = 12(cm)$

Felelet: $A'B' = 7,5cm$; $B'C' = 12cm$; $A'C' = 18cm$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

8.osztály feladatsor megoldása

1. $\left(\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x}\right) \div \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right)$

   $\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x} = \frac{2x}{(2x-y)(2x+y)} - \frac{1}{2x-y} = \frac{2x-(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{2x-2x-y}{(2x-y)(2x-y)} = -\frac{y}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{y}{(y-2x)(2x+y)}$;

   $\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2} = \frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2x(2x+y)-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{4x^2xy-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2xy}{(2x+y)^2}$;

   $\frac{y}{(y-2x)(2x+y)} \div \frac{2xy}{(2x+y)^2} = \frac{y(2x+y)^2}{(y-2x)(2x+y)2xy} = \frac{2x+y}{(2x(y-2x)}$.

2. $\frac{t}{42}$ - része merül le Áron telefonjának t óra alatt.

   $1 - \frac{t}{42}$ - része maradt meg Áron telefon töltöttségéből t óra múlva,

$1 - \frac{t}{21}$ -része maradt meg Bea telefon töltöttségéből t óra múlva,

$1 - \frac{t}{42} = 2(1 - \frac{t}{21})$.

$t = 14$

3. 8×8 - as igen.

   6×6-t nem, mivel 9 idomra lenne szükség, ha a 6×6-os táblát sakktábla szerűen színezzük, akkor 18 sötét és 18 világos mező lesz rajta. Egy idom vagy 1 fekete vagy 3 fekete mezőt fed le, így a lefedhető fekete mezők száma páratlan.

4. A 120 felírható relatív primek szorzataként:

   $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$ ezért elég belátni, hogy az $n^{2019} - 5n^{2017} + 4n^{2015}$ kifejezés osztható 3, 5 és 8 számok mindegyikével.

   Vizsgáljuk:

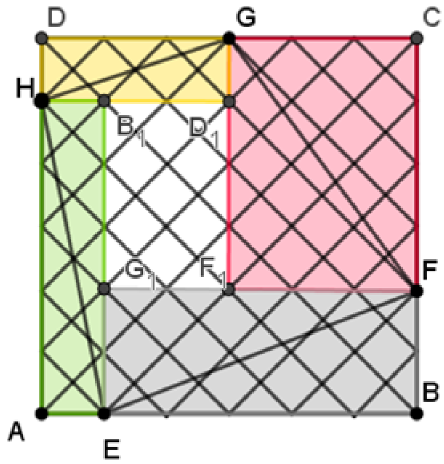
   $n^{2019} - 5n^{2017} + 4n^{2015} = n^{2015}(n^4 - 5n^2 + 4) = n^{2015}(n^4 - 2n^2 + 1 - 3n^2 + 3) = n^{2015}((n^2-1)^2 - 3(n^2-1)) = n^{2015}(n^2-1)((n^2-1)-3) = n^{2015}(n^2-1)(n^2-4) = n^{2014}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

   Ha $n = 2$, akkor a kifejezés értéke 0, így osztható 120-szal.

   Ha n nagyobb, mint 2. A szorzatban 5 egymást követő pozitív egészszám szorzata is található, ezek közül egyik biztosan osztható 5-tel, miden harmadik egész szám osztható 3-mal, így ez a szorzat is biztosan osztható 3-mal.

   5 egymást követő egész szám közül legalább két egymást követő páros szám van, ezek közül az egyik biztosan osztható 4-gyel a másik pedig 2-vel, így a szorzat osztható 8-cal.

5. Ábrázolva:



- Az $ABCD$ négyzetben $2+4+6+8+10+10+8+6+4+2+12=72$ kis négyzet van, így $EFGH$ négyzet területe: $144\ cm^2$.
- Az $EFGH$ négyszög területe téglalapokra bontással határozható meg:

  $\frac{1}{2}\cdot(6+24+20+10)=30$ kis négyzet, vagyis $EFGH$ területe:

  $30\cdot 2=60\ cm^2$;

  $144-60=84\ cm^2$.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

9. osztály feladatsor megoldása

1. Legyen a keresett szám $\overline{ab}, a, b \in N0...9$;

   Ekkor:

   $a=b+3$; $(10a+b)(a+b)=814$, vagy

   $b=a+3$; $(10a+b)\cdot(a+b)=814$.

   - $a=b+3$; $(10a+b)(a+b)=814$,

     $(10(b+3)+b)(b+3+b)=814$

     $22b^2+93b-724=0$

     $D=72361$

     $b_1=\frac{-93-269}{44}\prec 0$

     $b_2=\frac{-93+269}{44}=4$

     $a=7$
   - $b=a+3$; $(10a+b)\cdot(a+b)=814$.

     $(10a+a+3)(a+a+3)=814$

     $22a^2+39a-705=0$

     $D=72361$

     $a_1=-7$

     $a_2=\frac{115}{22}$

   Felelet: a keresett szám a 74

   Megjegyzés: a feladat próbálgatással is megoldható.

2. $(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1) + (x-1)^2 = 4x - x^2$

   $((x+1) - (x-1))^2 = 4x - x^2$

   $2^2 = 4x - x^2$

   $x^2 - 4x + 4 = 0$

   $(x-2)^2 = 0$

   $x = 2$

3. Legyen az adott munka egységnyi.A - első munkás - aki x óra alatt végezné el a munkát egyedül, B - második munkás - aki y óra alatt végezné el a munkát egyedül.

   Ezek szerint A először $\frac{2}{3}y$ óráig dolgozott, s mivel 1 óra alatt $\frac{1}{x}$ munkát végzett el, így $\frac{2}{3}y \cdot \frac{1}{x} = \frac{2y}{3x}$ munkát.

   Így B munkás $\frac{1-2y}{3x} = \frac{3x-2y}{3x}$ munka maradt, amit Ő $\frac{3x-2y}{3x \cdot y}$ óra alatt végzett el.

   Így a teljes munka $\frac{2}{3} + \frac{3x-2y}{3x \cdot y}$ ideig tartott.

   Ha együtt dolgoztak volna, akkor a teljes munka $1 \div (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$

   Ennek alapján a feladat szerint

   $\frac{2y}{3} + \frac{3xy-2y^2}{3x} = \frac{xy}{x+y} + 2$

   Másrészt, ha együtt dolgoztak volna, akkor A $\frac{xy}{x+y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x+y}$ munkát végzett volna el. Ekkor B-re $\frac{3x-2y}{3x}$ munkát hagyott volna, ezért a feladat szerint $\frac{2y}{x+y} = \frac{3x-2y}{3x}$ egyenletet kapjuk.

   Innen $3x^2 - 5xy - 2y^2 = (3x+y)(x-2y) = 0$

   Mivel $x, y > 0$, ezért $x = 2y$

   Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

   $\frac{2y}{3} + \frac{6y^2-2y^2}{6y} = \frac{2y^2}{3y+2}$

   $\frac{4y}{3} = \frac{2y}{3+2}$

   $y = 3$ és így $x = 6$.

   Felelet: Az első munkás 6 óra alatt, míg a második munkás 3 óra alatt fejezné be a munkát egyedül.

4. • Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?

     $P(A) = \frac{k}{n}$

     $n = 6^6$

$k = 6!$

$P(A) = \frac{6!}{6^6} \approx 1,54\%$

- Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz? $P(A) = \frac{k}{n}$

  $n = 6^6$

  A kedvező eset, amikor 36, 35 vagy 34 a számok összege:

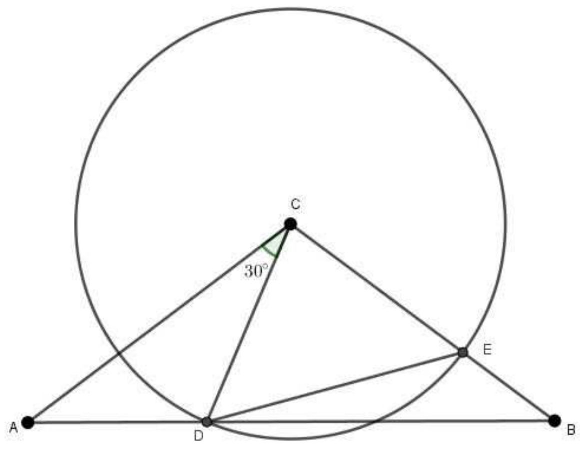
  36, ha mind hatos, ezen esetek száma 1.

  35, ha 5 hatos és 1 ötös dobókocka van, ezen esetek száma: $\frac{6!}{5!}$

  34, ha 4 hatos és 2 ötös vagy 5 hatos és 1 négyes dobókocka van, ezen esetek száma: $\frac{6!}{5} + \frac{6!}{4!2!}$

  $P(A) = \frac{\frac{1+6!}{5!} + \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{4!2!}}{6^6} \approx 0,06\%$

5. $AC = BC$



Legyen $CAD\angle = CBA\angle = \alpha$

Ekkor $DCB\angle = 180° - 30° - 2\alpha = 150° - 2\alpha$

Mivel $CD = CE$, ezért CDE egyenlőszárú háromszög

$CDE\angle = CED\angle = (180° - (150° - 2\alpha)) \div 2 = 15° + \alpha$

$DEB\angle = 180° - CED\angle = 165° - \alpha$

$BDE\angle = 180° - EBD\angle - DEB\angle = 180° - \alpha - (165° - \alpha) = 15°$

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

10. osztály feladatsor megoldása

1. Jelölje A, B és C megfelelően az *Ádám*, *Béla* és *Cecil* diákokat. Akkor a diákok a következő jegyeket mondták:

   $$\text{A-}\begin{cases} 4 \\ 4. \end{cases}$$

   $$\text{B-}\begin{cases} 5 \\ 3. \end{cases}$$

   $$\text{C-}\begin{cases} 3 \\ 4. \end{cases}$$

   Nyilvánvaló, hogy az diák biztosan kapott egy hármast, mert a B és a C diákok által elmondott jegyek között van hármas.

   Hasonló gondolkodással kapjuk, hogy B is biztosan kapott egy négyest. Ezért, ha az A diák a hármas jegyét, vagy B a négyesét árulja el, akkor nem tudjuk egyértelműen meghatározni vizsgajegyeiket. Vagyis az A és B diákok tetszőleges vizsgajegyükből nem lehet egyértelműen meghatározni minden diák vizsgajegyét.

   Ha a C diák árulja el az egyik jegyét, akkor az elárult jegytől függően a következő eseteket kapjuk:

   - ekkor, ha 3, a C 5 és 3, az A 3 és 4, a B pedig 4 és 4.
   - ekkor, ha 4, a C 4 és 4, az A 5 és 3, a B pedig 3 és 4.
   - ekkor, ha 5, a C 5 és 3, az A 3 és 4, a B pedig 4 és 4.

2. $x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020 = (x^4 + x^3 + x^2) - (x^3 + x^2 + x) + 2020(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 2020)$.

3. A bizonyításhoz az $a^2 + b^2 \geq 2ab$ egyenlőtlenséget használjuk fel.

   Akkor $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{xy}$.

4. Legyen az ABC háromszögben a C szög a derékszög. Az O - a körülírt körvonal középpontja, melynek R a sugara.

   Jelöljük CD-vel a C-ből húzott magasságot, és S-el pedig a háromszög területét. Nyilvánvaló, a derékszögű háromszög körülírt körvonalának tulajdonságából, hogy CO súlyvonal és $AB = 2 \cdot CO$.

   Mivel $CO = R$, akkor $AB = 2R$.

   A feladat feltétele szerint $CO = \sqrt{AC \cdot CB}$, innen $R = \sqrt{AC \cdot CB}$ és $CB = \frac{R^2}{AC}$.

Az egyik oldalról $S = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot CD = R \cdot CD$ vagyis $CD = \frac{S}{R}$.

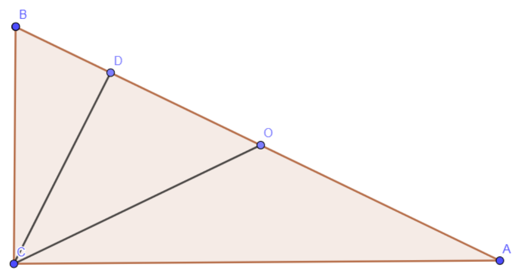
A másik oldalról $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot C = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{R^2}{AC} = \frac{1}{2}R^2$.

Innen kapjuk, hogy $CD = \frac{S}{R} = \frac{\frac{1}{2}R^2}{R} = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \cdot CO$.

Tehát a CDO derékszögű háromszögben a CD befogó egyenlő a CO átfogó felével, ami azt jelenti, hogy $DOC\angle = 30°$, vagyis az $AOC\angle = 180° - 30° = 150°$.

Az AOC egyenlőszárú háromszögből ($CO = OA = R$) kapjuk, hogy az $OAC\angle = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$.

Innen kapjuk, hogy $ABC\angle = 90° - 15° = 75°$.



5. $\begin{cases} (a+4)x + 3y = a+1 \\ ax + (a-1)y = a-1. \end{cases}$

Ha $a = 1$, akkor egy $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ megoldást kapunk.

Átalakítjuk egyenleteit ($a \neq 1$):

$\begin{cases} y = -\frac{a+4}{3}x + \frac{a+1}{3} \\ y = -\frac{a}{a-1}x + 1. \end{cases}$

Mindkét egyenlet egyenesek iránytényezős egyenleteit adja meg ($y = kx + b$). Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása lesz, ha ezek az egyenesek egybeesnek, vagyis egyenlők megfelelően iránytényezőjük és szabadtagjaik:

$\begin{cases} \frac{a+4}{3} = \frac{a}{a-1} \\ \frac{a+1}{3} = 1. \end{cases}$

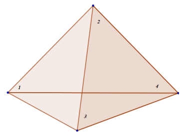
A kapott egyenletrendszer $a = 2$ a megoldása.

Geőcze Zoárd matematika verseny-2019

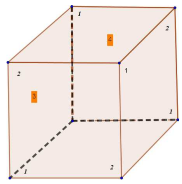
11.osztály feladatsor megoldása

1. Szabályos tetraédernél:

Kiszinezéshez szükséges színek száma: 8**.**

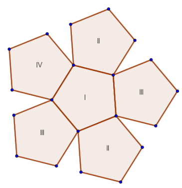


Kocka esetén:



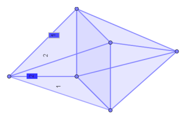
Kiszinezéshez szükséges színek száma: 5**.**

Dedokaéder (szabályos ötszög) esetén:



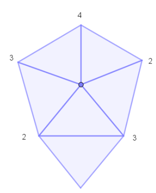
Kiszinezéshez szükséges színek száma: 7**.**

Oktaéder esetén:



Kiszinezéshez szükséges színek száma: 5**.**

Ikozaéder - szabályos háromszöggel - esetén:



Kiszinezéshez szükséges színek száma: 6**.**

2. $p = \frac{5}{20}$

   (a) legkisebb 3-szor 8-ból. Ellentett esemény: $0, 1, 2$ találat a 8-ból.

   $P(0 - talalat) = C_8^0 p^0 (1-p)^8 = \left(1 - \frac{5}{20}\right)^8 = \left(\frac{3}{4}\right)^8 \approx 0.1001$

$P(1-talalat) = C_8^1 p^1 (1-p)^7 = 8 * \frac{1}{4} * \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 2 * \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0.2670$

$P(2-talalat) = C_8^2 p^2 (1-p)^6 = 28 * \left(\frac{1}{4}\right)^2 * \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{7}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0.3115$

Felelet: $P(3-talalat-legalabb) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 * \left(\frac{9+24+28}{16}\right) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 * \left(\frac{61}{16}\right) \approx 0.321$

(b) legalább 1-szer 8-ból. Ellentett esemény: 1-szersem.

$P(0-talalat-n-lovesbol) = Cn^0 p^0 (1-p)^n = p_0$

$p = \frac{1}{4}$

$1 - p = \frac{3}{4}$

$C_n^0 = 1$

$P(legalabb-1-szer) = 1 - p_0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0.95$

$(\frac{3}{4})^n \leq 0.05;\ / : \log_{10}$

$\log_{10}(\frac{3}{4})^n \leq \log_{10}\frac{5}{100}$

$n * \log_{10}\frac{3}{4} \leq \log_{10} 5 - 2$; (mivel $\log_{10}\frac{3}{4} < 0$, így)

$n \geq \frac{\log_{10} 5\ -2}{\log_{10}\frac{3}{4}} \approx 10.41$

$n = \left[\frac{\log_{10} 5\ -2}{\log_{10}\frac{3}{4}}\right] + 1$

Tehát Daninak - 11 lövésre van szüksége legalább.

(c) eset:

$P(1-vagy-2) = C3^1 p^1 (1-p)^2 + C3^2 p^2 (1-p) = 0.72$

$3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) = 0.72;\ / : 3$

$p(1-p)(1-p+p) = 0.24$

$p - p^2 = 0.24$

$p^2 - p + 0.24 = 0$

$p_1 = 0.6$

$p_2 = 0.4$ és ez < 0.5, nem javult.

Felelt: $p = 0.6 = 60\%$.

3. $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$

$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3$

$\frac{(4^{\cos^2 x})^2}{4} + 4^{\cos^2 x} = 3$

$4^{\cos^2 x} = t$

$\frac{t^2}{4} + t = 3$

$t^2 + 4t - 12 = 0$

$t = -6; t = 2.$

$4^{\cos^2 x} = -6 \oslash$

$4^{\cos^2 x} = 2 = 4^{\frac{1}{2}}$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

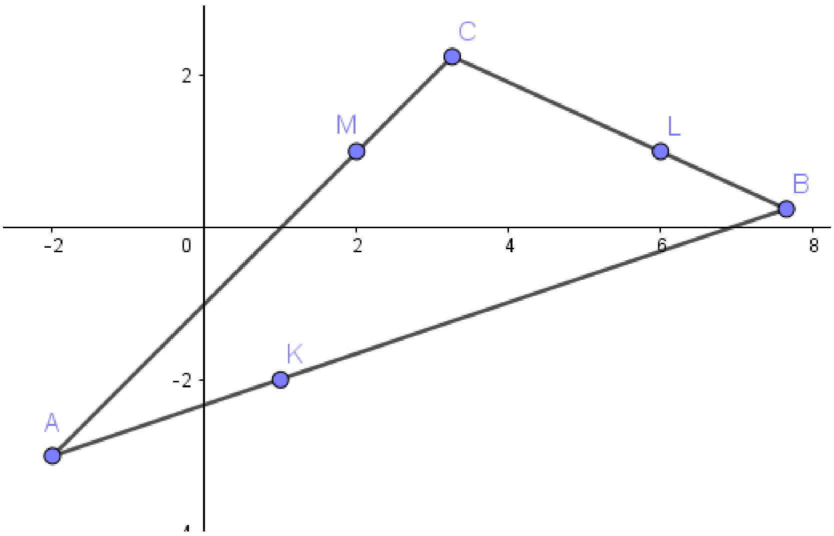
$x = \frac{\Pi}{4} + kn$

Mivel $x \in [0.75; 1]$, ezért $k = 0$ $x = \frac{\Pi}{4} = \frac{3.14}{4} > 0.75$; megfelel.

$k = 1$ $x = \frac{\Pi}{4} + \Pi > 1$; nem felel meg.

$k = -1$ $x = \frac{\Pi}{4} - \Pi < 0$; nem felel meg.

Felelet: $x = \frac{\Pi}{4}$ rad $= 45°$.



4.

$\overline{AK} = \overline{(3;1)} * \overline{AB} = 3\overline{AK} = \overline{(9;3)}$

$\overline{AB} = (b_1 + 2; b_2 + 3) \Rightarrow B(7;0)$

$\overline{BC}(C_1 - 7; C_2 - 0)$ $C(4;3)$

$\overline{CM} = (-2;-2)$ $\overline{CA} = 3\overline{CM} = (-6;-6)$

$\cos\phi = \frac{\bar{a} * \bar{b}}{|\bar{a}| * |\bar{b}|}$

$\cos A\angle = \frac{\overline{AB} * \overline{AC}}{|\overline{AB}| * |\overline{AC}|} = \frac{\overline{(9;3)} * \overline{(6;6)}}{\sqrt{81+9} * \sqrt{36+36}} = = \frac{54+18}{\sqrt{90} * \sqrt{72}} = \frac{72}{3*6*\sqrt{2}*\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

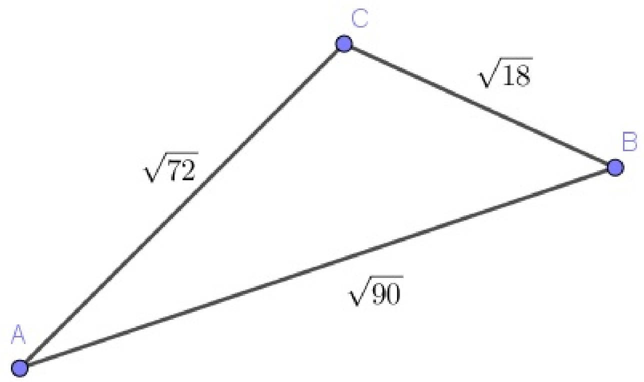
$A\angle = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos B\angle = \frac{\overline{BA} * \overline{BC}}{|\overline{BA}| * |\overline{BC}|} = \frac{\overline{(-9;-3)} * \overline{(-3;3)}}{\sqrt{90} * \sqrt{18}} = = \frac{27-9}{3*3*2\sqrt{5}} = \frac{18}{18\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$B\angle = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos C\angle = \frac{\overline{CA}*\overline{CB}}{|\overline{CA}|*|\overline{CB}|} = \frac{\overline{(-6;-6)}*\overline{(3;-3)}}{\sqrt{72}*\sqrt{18}} == \frac{0}{\sqrt{72}*\sqrt{18}} = 0$

$C\angle = 90°$



$|\overline{AB}| = \sqrt{90}$; $|\overline{AC}| = \sqrt{72}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{18}$.

Ésszre vehetjük, hogy $AB^2 = AC^2 + BC^2$, hisz $90 = 72 + 18 \Rightarrow C\angle = 90°$.

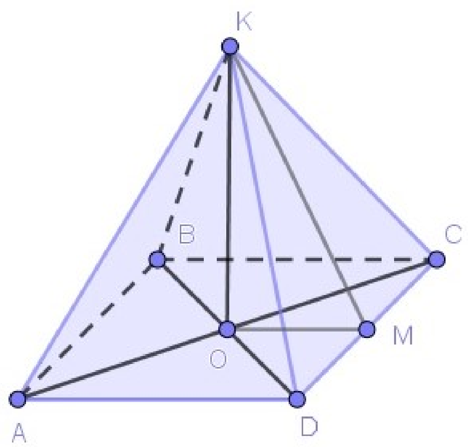
$\cos A\angle = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$A\angle = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos B\angle = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{90}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

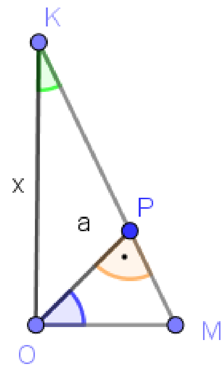
$B\angle = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$

5. $d(0; CKD) = a$ $d(0; CK) = b$ $\widehat{(CKD), KO}$-?



Legyen $KO \perp (ABCD)$; $KM \perp DC$; $\Rightarrow 3\perp$ tétele $OM \perp DC$.

Legyen $OK = x$; $OP = a$.



$\sin K\angle = \frac{a}{x}$

$\sin K\angle = \frac{OM}{KM}$

$KM = \frac{OM}{\sin K\angle} = \frac{OM}{\frac{2}{x}} = \frac{OM*x}{a}$

$POM\angle = OKP\angle \Rightarrow \cos POM\angle = \cos K\angle = \frac{a}{OM}$

$\sin K\angle = \frac{a}{x}$

$\cos K\angle = \frac{a}{OM}$

$\sin^2 K\angle + \cos^2 K\angle = 1$

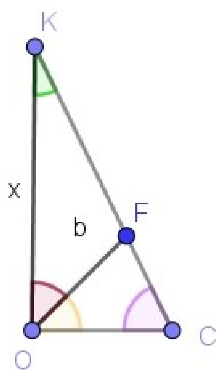
$\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{OM^2} = 1$

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{a^2}$

$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$

$OM = \frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}};$

$KM = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$



$KC^2 = x^2 + \frac{2a^2x^2}{x^2-a^2} = \frac{x^2+a^2x^2}{x^2-a^2}$

$KC = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$\frac{OF}{OK} = \frac{OC}{KC}$

$OC^2 = b * \left(\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$

$\frac{2a^2x^2}{x^2-a^2} = b * \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$\frac{2a^2x}{\sqrt{x^2-a^2}} = b\sqrt{x^2+a^2} \Rightarrow 2a^2x = b\sqrt{x^4-a^4}$

$4a^4x^2 = b^2(x^2-a^2)$

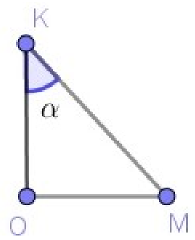
$b^2x^4 - 4a^4x^2 - b^2a^4 = 0$

$D = 16a^8 + 4b^4a^4 = 4a^4(a^4+b^4)$

$x^2 = \frac{4a^4 \pm 2a^2\sqrt{a^4+b^4}}{2b^2}$

$x_1^2 = x$

$x_2^2 = \frac{a^2(a^2+\sqrt{a^4+b^4})}{b^2}$



Keresett szög: $\tan\alpha = \frac{OM}{OK} = \frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}} : x = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2(a+\sqrt{a^4+b^4})}{b^2}-a^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+b^4}-b^2}}$.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

3. osztály feladatsor megoldása

1. 9 és 8 összege $9+8=17$, valamint ennek ötszöröse $17 \cdot 5 = 85$.

   A 78 és 6 hányadosa: $78 : 6 = 13$.

   Tehát: $85 + 13 = 98$.

2. A háromjegyű számok, amelyekben a számjegyek összege 4 tíz darab van és ezek a következők:

   $103; 130; 301; 310; 112; 121; 211; 202; 220; 400$.

3. Annánál és Zsuzsinál összesen 53 locsoló járt, s Zsuzsinál öttel többen voltak, mint Annánál, tehát ha azt az öt főt nem számítjuk akkor ugyan annyian voltak a locsolók mindkét lánynál, azaz összesen $53 - 5 = 48$-an.

Ezt a számot osztva 2-vel megkapjuk, hogy hány locsoló járt Annánál, így: $48 : 2 = 24$.

Mivel Zsuzsinál 5 locsolóval több volt , mint Annánál ezért: $24 + 5 = 29$.

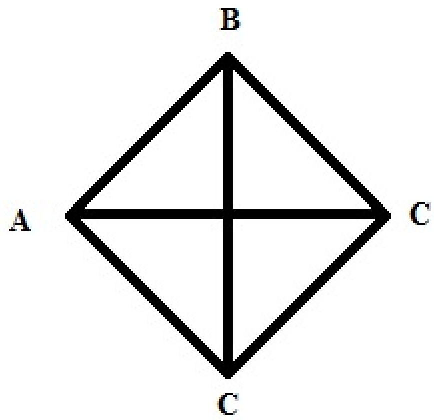
Annánál így a maradék tojások száma $30 - 24 = 6$, Zsuzsinál pdeig: $30 - 29 = 1$.

Felelet: Annánál 6 darab míg Zsuzsinál 1 darab tojás maradt.

4. A feladat szövegéből tudhatjuk, hogy miután a nagypapa oda adja a jobb zsebéből a hét mogyorót akkor a bal zsebében kétszer annyi lesz, mint a jobban, ez pedig csak akkor lehetséges, ha a két zsebébel külön-külön 14 mogyoró van eredetileg.

   Tehát az összegük 28.

5. Felelet: 6 szakaszt.



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

4. osztály feladatsor megoldása

1. 2016 és 2009 különbsége: $2016 - 2009 = 7$.

   A 2912 negyede pedig: $\frac{2912}{4} = 723$.

   A 2016 és 2009 különbsége pedig $\frac{723}{7} = 104$-szer kevesebb 2912 negyedénél.

   Felelet: 104-szer kevesebb.

2. A háromjegyű számokból, melyeknek számjegyeik különböző számjegyekből állnak és számjegyeik összege 5, 12 darab van amik a következőek:

   $122; 131; 113; 221; 212; 311; 104; 401; 203; 302; 230; 320$.

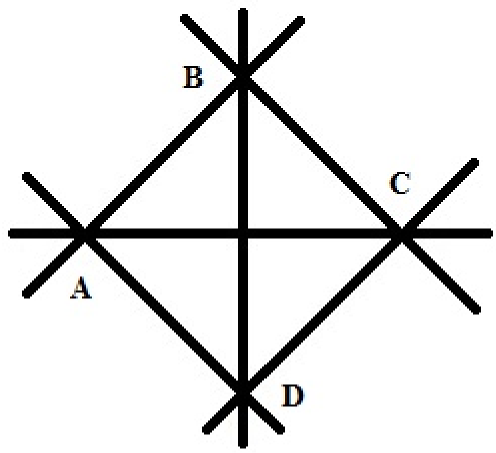
3. Először kiszámítjuk, hogy 1 bolhaugrás hány macska ugrásnak felel meg.

   Tudjuk, hogy 3 szöcskeugrás az 2 macskaugrással egyenlő s azt is hogy 6 szöcske-ugrás 1 bolhaugrással egyenlő, ezért 1 bolhaugrás $\frac{6}{3} \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$ macskaugrással egyenlő.

   Tehát ha 4 macskaugrás 1 bolhaugrás, akkor 20 macskaugrás $\frac{20}{4} \cdot 1 = 5 \cdot 1 = 5$ bolhaugrással egyenlő.

4. A legközelebbi palindrom szám az a 13031. A feladat nem utal a sebesség változtatására ezért egyenletes sebességgel haladva két óra alatt 110 km-ert tett meg, így ebből következik akkor, hogy egy óra alatt 55 km-ert tett meg.

5. Felelet: 6 egyenest.



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

5. osztály feladatsor megoldása

1. A 3216 számmal elvégezve a feladatban megadott műveleteket kapjuk, hogy:

   $32 + 3 + 2 = 37$ és $16 + 1 + 6 = 23$.

   Tehát 3216-ból a 3723 számot kaptuk.

2. Visszafelé érdemes okoskodni. A harmadik nap maradt 8 alma, a második nap a megmaradtak kétharmada, így a második nap 12 alma maradt a ládában.

   A 12 alma az első nap után megmaradt almák kétharmada, tehát az első nap után 18 alma maradt a ládában.

   A 18 alma eredetileg a kosárman lévő almák kétharmada, tehát eredetileg 27 alma volt a kosárban.

3. Olyan 2016 jegyű szám, amelyben számjegyek összege kettő csak két 1-es, vagy egy 2-es számjegyet tartalmazhat.

   A 2-es számjegyet csak az első helyre írhatjuk, tehát ilyen 2016 jegyű szám 1 darab van.

   Az két 1-es számjegyet tartalmazó 2016 jegyű számokból 2015 darab van.

   Tehát 2016 darab 2016 jegyű szám van amelyekben a számjegyek összege 2.

4. A feladatot a legegyszerübben a következő képlettel oldhatjuk meg: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

   Vagyis $|A \cap B \cap C| = 3$;

   $|A| = 10$;

   $|B| = 9$;

   $|C| = 10$;

   $|A \cap B| = 2$;

   $|A \cap C| = 2$;

   $|B \cap C| = 4$;

   $|A \cup B \cup C| = x$;

   Innen: $x = 10 + 9 + 10 - 2 - 2 - 4 + 3$;

   Tehát: $x = 24$.

   Felelet: 24 tanuló.

5. A 30 dm átalakítjuk cm-ré, tehát az 300 cm.

   Ha a háromszög A csúcsát meggyújtanánk, akkor az elkezdene égni az AB, valamint az AC irányba is, így a két oldal 300 mp alatt ég el, mivel 1 cm 1 mp alatt ég el.

   Miután leégett az AB, valamint az AC oldal így a B és C csúcstól egyszerre kezd al égni a zsinór a BC oldalon, tehát ez az oldal fele annyi idő alatt ég el mint a másik kettő vagyis 150 cm 150 mp alatt.

   Tehát a háromszög kerületét díszítő zsinór, ha azt az egyik csúcsnál meggyújtanánk 450 mp alatt, vagyis $7,5$ perc alatt égne el.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2016

6. osztály feladatsor megoldása

1. A feladatból tudjuk, hogy miután elfoglaltak minden széket, a szobában lévő lábak száma 36 volt. Mivel a széken ülő embernek is két lába van ezért az is hozzáadódott a székek lábainak számához. Ezért, ha veszünk egy 4 lábú széket, amelyet már elfoglaltak, akkor a lábuk száma hat lesz, hasonlóan a 3 lábú székeknél a lábak száma öt lesz.

   Tehát feltételezzük, hogy van a szobában egy 4 és egy 3 lábú szék ezért, a szobában lévő lábak száma 11.

   Ha a megadott 36-ot elosztjuk a 11-gyel, akkor azt kapjuk, hogy a szobában lévő lábak, így három 4 és három 3 lábú és még fenn maradt 6 láb, ami megintcsak egy 4 lábú szék lesz.

   Tehát négy 4 lábú és három 3 lábú.

2. Először kiszámoljuk a 40 30%-át, ami 12, majd a kétötöd részét, ami 16.

   Mivel a kék szeműek háromnegyede szőke így az 9.

   Ebből $16 - 9 = 7$ csak szőkék, illetve $12 - 9 = 3$. Szóval $7 + 3 + 9 = 19$ és $40 - 19 = 21$.

3. Hogy osztható legyen 45-el ezért 9-cel és 5-tel is osztódnia kell. Hogy 5-tel osztódjon a szám, ezért 0 vagy 5 számok állhatnak az utolsó helyen, de mivel az a szám az első és az utolsó helyen is szerepel, ezért csak 5-ös lehet.

   A többi számot pedig úgy választhatjuk ki, hogy ezen számjegyeinek $abcba$ összege osztható legyen 9-cel.

   $2a = 5$

   $a = 10$

   Ezért a számjegy összeg maximálisan 18 vagy 27 lehet. Mindkét esetben két lehetőség áll fenn.

   Első lehetőség amikor az összeg 18:

   (a) $b = 8$ így $c = 1$;

   (b) $b = 7$ így $c = 3$;

   Második lehetőség amikor az összeg 27:

(a) $b = 2$ így $c = 4$;

(b) $b = 3$ így $c = 2$.

4. Négyzetrácson ábrázolva a rajzot meg tudjuk határozni területét úgy, hogy megszámoljuk hány egész négyzetet foglal magába a háromszög.

   Felelet: 9 négyzet.

5. Megoldása: $-1, 1, 5, 3, 10$.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

3. osztály feladatsor megoldása

1. A legnagyobb háromjegyű szám a 999, a legkisebb pedig a 100. Így ennek a két számnak a összege:

   $999 + 100 = 1099$.

   Az egyjegyű számok összege pedig: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

   Tehát: $1099 - 45 = 1054$.

   Felelet: A legnagyobb háromjegyű és legkisebb háromjegyű szám összege 1054-gyel több az egyjegyű számok összegénél.

2. Miután a varjak elrepültek az első fáról, majd a másodikról átrepültek az elsőre így $8 - 8$ varjú volt mindkét fán. Akkor az első fán ülő varjak számából kivonjuk azt az ötöt, ami átrepült rá a másodikról így kapjuk, hogy: $8 - 5 = 3$.

   Mivel a második fán az átrepülés után nyolc varjú maradt, ezért hozzáadjuk az elrepült varjakat és megkapjuk, hogy eredetileg hány varjú volt a második fán. Tehát: $8 + 5 = 13$.

   Hasonlóan az első fán is: $3 + 9 = 12$.

   Felelet: Az első fán eredetileg 12 varjú volt, míg a másodikon 13.

3. A feladat szövegéből tudjuk, hogy Barna nem piros és nem zöld könyvet olvasott, ezért csak kék lehetett a könyve, Mátyás zöld vagy kék könyvet, de azt már tudjuk, hogy Barna kéket olvasott így ő már neki csak a zöld maradt és Gáspár pedig csak pirosat olvashatott.

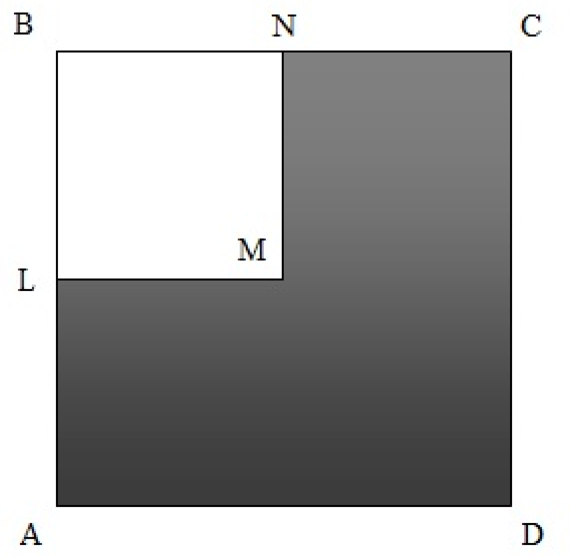
4. Először kiszámítjuk, hogy 12 nyúlnak mennyi eleségre van szüksége egy hónapra.

   Mivel a 12 nyúl négyszer több mint a 3 nyúl, ezért négyszer annyi eleségre is van szüksége 12-nek, mint 3-nak. Tehát $80 \cdot 4 = 320$ kilogramm.

   Ha 12 nyúlnak egy hónapra 320 kilogramm eleségre van szüksége, akkor két hónapra: $320 \cdot 2 = 640$ kilogrammra.

   Felelet: 640 kilogramm eleségre van szüksége 12 nyúlnak két hónapra.

5. Adva van egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet alapú kartonlap.



   Mivel egy 3×3-as négyzetet vágtak ki belőle, ezért kiszámíthatjuk, hogy mennyit vág le az oldalakból: $AB - LB = BC - BN = 6 - 3 = 3$ cm.

   Tehát, már tudjuk minden oldal hosszát, így már kiszámíthatjuk az alakzat kerületét: $P_{ALMNCD} = AL + LM + MN + NC + CD + DA = 3 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 = 24$ cm.

   Felelet: 24 cm az alakzat kerülete.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

4. osztály feladatsor megoldása

1. A legnagyobb ötjegyű az 99999 és legnagyobb páros négyjegyű szám 9998, s így ezen számok összege:

   $99999 + 9998 = 109997.$

Az 5600 és 100 hányadosa pedig: $\frac{5600}{100} = 56$.

Tehát a legnagyobb ötjegyű és legnagyobb páros négyjegyű szám összege az 5600 és 100 hányadosánál $109997 - 56 = 109941$-gyel több.

Felelet: 109941-gyel több.

2. A cirkuszi előadásra az alsó osztályos tanulók a 240 jegy negyed részét kapták, tehát: $240 : 4 = 60$ darab jegyet.

   Hasonlóan a színházi előadásra a 420 jegy hatodrészét kapták, így a 420 jegyből $420 : 6 = 70$ az övék.

   A színházi és a cirkuszi jegyek számát összeadva kapjuk, hogy összesen az alsó tagozatos tanulók $70 + 60 = 130$ jegyet kaptak.

   Felelet: 130 jegyet.

3. A feladat szövegéből tudjuk, hogy Kormos Tappancs és Bodri előtt, Bodri nem utolsónak és Tappancs közvetlenül Foltos előtt ért a célba,így az utolsó csak Foltos lehetett. Tehát Foltos lett az utolsó, vagyis az ötödik, Tappancs a negyedik, Bodri a harmadik, Kormos a második és Cézár az első, mivel Kormos nem nyert.

   Felelet: Cézár, Kormos, Bodri, Tappancs, Foltos.

4. A feladatban említett négy gyerek akiknek nincsen tésvérük, ezért mindegyiküket elkísérte az édesanyja.

   Mivel négy gyereknek pedig egy tesvére van, ezért ők egy-egy testvérpárt alkotnak, így őket két édesanya kíséri.

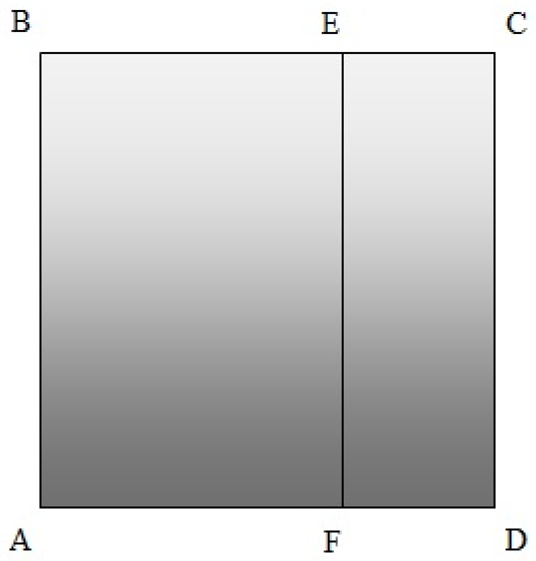
   Az a hat gyerek akinek kettő testvére van, közöttük hárman tesvérek egymással, szóval őket is két édesanya kíséri el.

   Akinek hárman tesvére van ők négyen testvérek egymással, így őket egy édesanya kíséri el.

   Tehát: $4 + 2 + 2 + 1 = 9$.

   Felelet: 9 édesanya kíséri el a gyerekeket.

5. Adva van egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet alapú kartonlap, melyet két táglalappá vágtak szét, s egyikük területe kétszer nagyobb a másiknál.



Vagyis $AB = BC = CD = DA = 6$, $S_{ABEF} = 2 \cdot S_{FECD}$, ezért az $AF = 2 \cdot FD$.

Jelöljük el az FD oldalt x-el.

Mivel $AD = AF + FD = 6$, így $2x + x = 6$; $3x = 6$;

Innen $x = \frac{6}{3} = 2$, vagyis $FD = 2$;

$AF = 2 \cdot FD = 2 \cdot 2 = 4$;

A nagyobbik téglalap kerülete: $S_{ABEF} = 2 \cdot (6 + 4) = 20$.

Felelet: 20 cm.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

5.osztály feladatsor megoldása

1. A feladat szövegéből tudjuk, hogy András fiát nem Istvánnak hívják, tehát csak Gábor lehet András fia, s mivel Józsefnek és Enikőnek fiúk van, akit csak Istvánnak hívhatnak.

   Béla feleségét nem Fanninak hívják, ezért ő András felesége lesz és mint már tujuk, hogy József felesége Enikő így Béla feleségének neve csak Márta lehet, gyerekük neve pedig Mária.

   Felelet: József fia István, felesége Enikő. András fia Gábor, felesége Fanni. Béla lánya Mária, felesége Márta.

2. A skatulya elvet felhasználva *Ha van* $(n + 1)$ *darab golyó és* n *darab skatulyába akarom belehelyezni, akkor mindig lesz olyan skatulya, amiben két golyó lesz* a legrosszab esetet vesszük figyelembe:

(a) $4 + 1 = 5$;

(b) $12 + 1 = 13$;

(c) $12 + 12 + 1 = 25$.

3. A feladatot a következő képlettel oldhatjuk meg a legkönnyebben: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

   Vagyis $|A \cup B \cup C| = 28$;

   $|A| = 12$;

   $|B| = 20$;

   $|C| = 14$;

   $|A \cap B| = 8$;

   $|A \cap C| = 5$;

   $|B \cap C| = 10$;

   $|A \cap B \cap C| = x$;

   Innen: $28 = 12 + 20 + 14 - 8 - 5 - 10 + x$;

   Tehát: $x = 28 - 23 = 5$.

   Felelet: 5 tanuló.

4. A viziló növényevő állat, ezért ő nem evett egy halat sem.

   A rozmár x halat evett, így a pelikán $3x$ mennyiséget, míg a bálna $5 \cdot 3x = 15x$.

   $x + 3x + 15x = 57$;

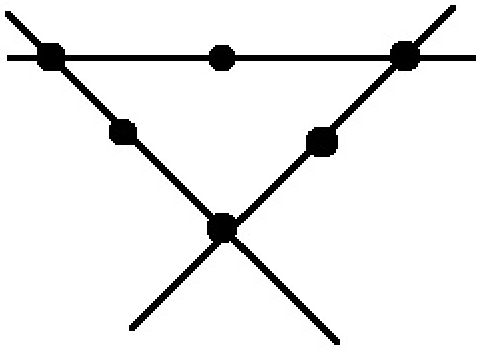
   $19x = 57$;

   $x = \frac{57}{19}$;

   $x = 3$.

   Felelet: A rozmár 3-at, a pelikán 9-et és a bálna 45 halat evett.

5. A három pont az egyenesek metszéspontja, és még egy-egy pont az egyeneseken a metszéspontok között.



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2017

6. osztály feladatsor megoldása

1. Prim számjegyek amiket felhasználhatunk: $2; 3; 5; 7$.

   $4 * 3 * 2 = 24$ háromjegyű prím szám van, melynek számjegyei különbözőek, mert a 4 prím számból az első helyre négyet írhatunk, de a harmadikra már csak hármat, mert nem szabad, hogy ugyanazok a számok legyenek, hasonlóan a harmadik számot kettő közűl válaszhatjuk ki;

   $3 * 2 * 1 = 6$ páros lesz, mivel ahhoz, hogy páros legyen az utolsó számnak 2-nek kell lennie, így az első számot csak három szám közűl választhatom és a másodikat csak kettő közűl.

2. A 145380 osztható 3-al. Ha beírunk 3 azonos számjegyet, akkor a számjegyek összege osztódni fog 3-al tehát a kapott szám nem lehet prím szám.

   Felelet: Nem.

3. A skatulya elvvel indokolható, mivel 5-tel való osztás esetén különböző maradék lehetséges.

   Tehát a hatodik szám osztási maradéka már megegyezik az előző számok közül valamelyik osztási maradékával. Ezen két szám különbsége pedig, osztható 5-tel.

4. Elsősorban hozzuk közös nevezőre a törteket: $\frac{12}{12}; \frac{6}{12}; \frac{4}{12}; \frac{3}{12}; \frac{2}{12}; \frac{1}{12}$.

   A számlálók összegét két egyenlő részre kell osztani:

   $\frac{28}{2} = 14$.

   Így a megoldás a következő: $\left(\frac{12}{12} + \frac{2}{12}\right) - \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} + \frac{1}{12}\right) = 0$.

5. A legnagyobb területü téglalap a négyzet, így kiszámíthatjuk az oldalainak hosszát, ami:

   $\frac{12}{4} = 3$;

   Területe: $3 \cdot 3 = 9cm^2$;

   $9cm^2 = 900mm^2$.

   Felelet: $900mm^2$.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

3. osztály feladatsor megoldása

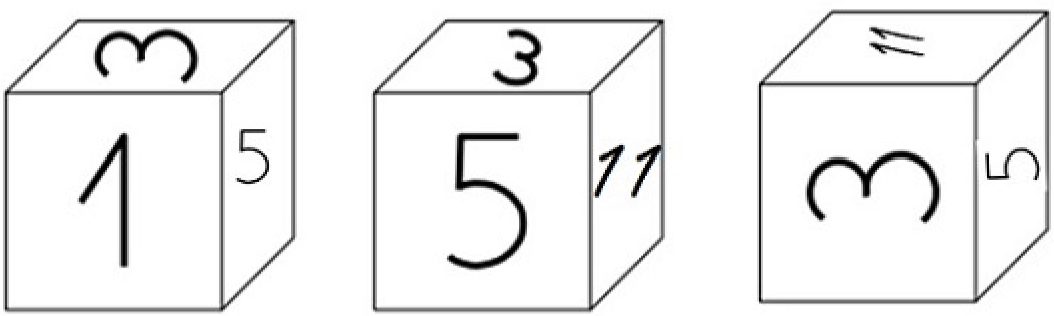
1. $94 - 88 = 88 - 82 = 6$ tehát a sorozat minden tagja 6-tal kisebb az előző tagnál. Ezért: $94, 88, 82, 76, 70, 64, 58, 52$;

   $26 - 13 = 39 - 26 = 13$ tehát a sorozat minden tagja 13-mal nagyobb az előző tagnál. Ezért: $13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104$.

2. $150 + 220 = 370$ (év) az erdei fenyő élettartama, $370 + 20 = 390$ (év) a hársfa élettartama.

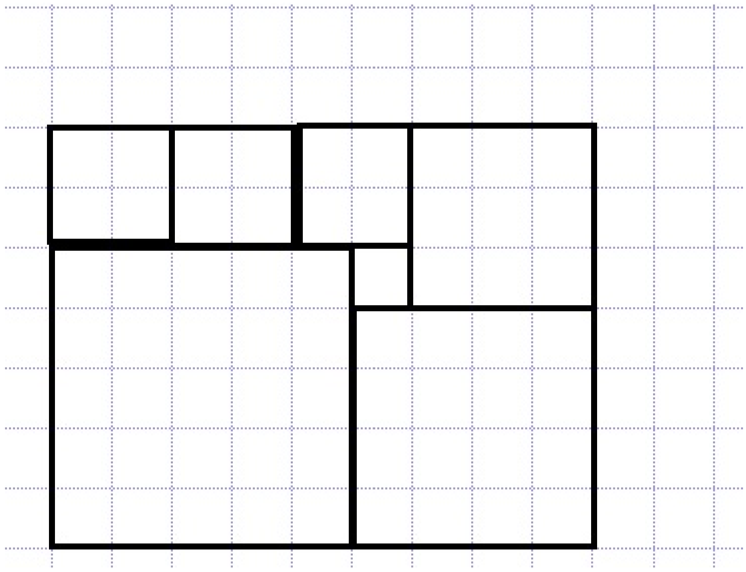
3. Az első kockára az 5-ös kerül, a második kép miatt. A második kockára 11, mivel az 1-sel szemközti oldalon csak a 11 lehet(különben nem lenne a szemközti lapokon levő számok összege mindig ugyanannyi).

   A harmadikra 11 és 5, az első és második kocka miatt.



4. A kő a 2. másodpercben $4m7dm + 8m7dm = 13m4dm$ tesz meg, a 3. másodpercben $13m4dm + 8m7dm = 22m2dm$ tesz meg, így összesen $4m7dm + 13m4dm + 22m2dm = 40m3dm$ a szakadék mélysége.

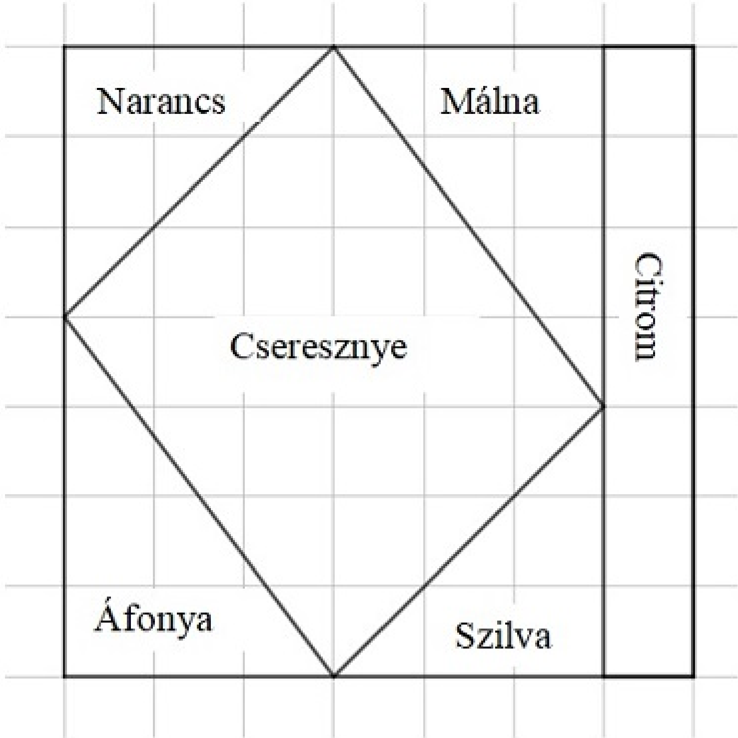
5. Megrajzolva



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

4. osztály feladatsor megoldása

1. Egy tehén egy hét alatt $7 \cdot 50 = 350kg$ füvet legel, ezért három tehén egy hét alatt $3 * 350 = 1050kg$ füvet legel.
2. A legnagyobb ilyen szám a 9876415 a legkisebb a 9023415 a különbség 853000.
3. Megoldás - 9
4. $200 - 32 = 168kg$ mézet osztottak szét 6 kannába, ezért $168 \div 6 = 28kg$ jutott egy kannába.
5. Az egész torta területe 49 négyzet $(4900cm^2)$ ebből 7 négyzet $(700cm^2)$ területet foglal el a citromos, a szilva és a narancs együtt 9 négyzetet $(900cm^2)$, az áfonya és málna összesen 12 négyzetet $(1200cm^2)$, így a cseresznyés részre marad $49 - 7 - 9 - 12 = 21$ négyzet, ami $2100cm^2(4900cm^2 - 700cm^2 - 900cm^2 - 1200cm^2 = 2100cm^2)$.



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

5. osztály feladatsor megoldása

1. Csoportosítva az összeadandókat: $\frac{1}{101} + \frac{100}{101} = 1$. Ilyen összegből 50 lesz. Így az összeg 50.

2. Nullát úgy kapunk a szám végén, ha a szorzatban egy páros és egy 5-tel osztható szám van.

   Mivel $15, 20, 25, 30, 35, 40$ és 45 számok osztódnak öttel, melyek 45-től nem nagyobb, de 13-tól nem kisebbek (ez 8 ötös tényező), ezért 8 nullával végződő számot kapunk.

3. Nyilvánvaló, hogy a családban kisebb a kisfiúk száma a kislányok számától. Egy fiú nem lehetséges. De kettő sem, mivel ha a kisebbik lánytestvér 1 éves lesz akkor a lánytestvérek éveinek összege nagyobb: $1+3+3+4+5+6 = 21$, és a fiútestvéreké $7 + 8 = 15$. Továbbá ez a különbség csak növekszik.

   Tehát marad az 5 lány- és 3 fiútestvér esete. Amikor a kisebbik lánytestvér 1 éves lesz kapjuk az $1+2+3+4+5 = 15$ éveik összegét és a $6+7+8 = 21$ fiútestvérek éveinek összegét. Mint látjuk az évek összegeinek különbsége 6. Mivel minden év lepergésével a lánytestvérek éveinek összege 5-tel növekszik és a fiútestvérek éveinek összege 3-mal növekszik(2-vel közelítik egymást a számok egy év alatt). Ezért pontosan 3 év múlva az évek összegeinek száma egyenlő lesz.

Tehát, amikor a kisebbik lánytestvér 4 éves, akkor kapjuk a $4+5+6+7+8=30=9+10+11$ egyenlőséget.

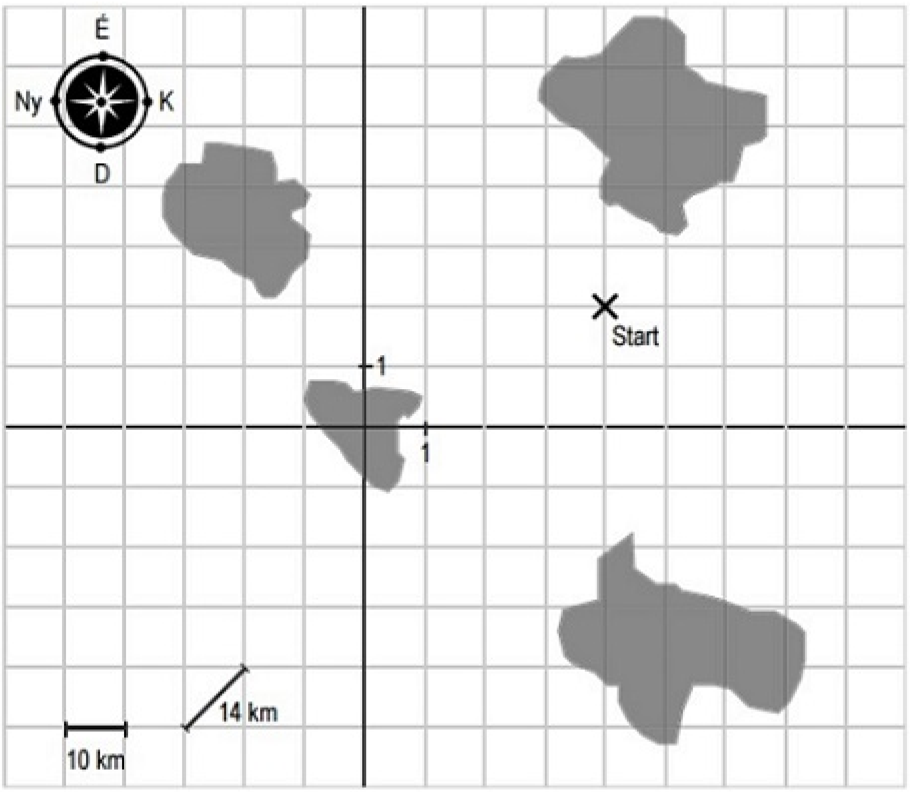
4. Mivel $BA+AD+DC=BC$, tehát ezek a városok $BADC$ sorrendben helyezkednek el. Tehát $AC=AD+DC=220km$.

5. Összesen 100 sor, 100 oszlop és két átló van így 202 összeg között kell két egyenlőnek lenni. Az összegek értékei 100-tól (mindegyik négyzetbe 1-est írunk) 300-ig (mindegyik négyzetbe 3-ast írunk) lehetnek. Ez maximálisan 201 különböző érték lehetséges. Tehát biztosan van két azonos érték (202 több mint 201).

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2018

6. osztály feladatsor megoldása

1. A következő ábrán egy vitorlaverseny térképe látható.



Felelet: $(1;-3)$.

2. Ha a kijelzőn ab, cd, mn számjegyek láthatóak, akkor az a értéke nem lehet 3. Tehát csak 5 eset lehetséges, amikor a b, c, d, m, n egyike nem egyenlő 3-mal és a többi négy pedig egyenlő hárommal.

   (a) Az $ab, 33, 33$ kijelzés, ahol $b \neq 3$. Ilyenből 21 van.

   (b) Az $a3, c3, 33$ kijelzés, ahol $c \neq 3$. Ilyenből 15 van.

   (c) Az $a3, 3d, 33$ kijelzés, ahol $d \neq 3$. Ilyenből 27 van.

   (d) Az $a3, 33, m3$ kijelzés, ahol $m \neq 3$. Ilyenből 15 van.

   (e) Az $a3, 33, 3n$ kijelzés, ahol $n \neq 3$. Ilyenből 27 van.

   Összesen $21+15+27+15+27 = 105$ kijelzés lesz, mely mindegyike 1 másodpercig tart.

3. Ahhoz, hogy a számpár jelentése hónapot és napot is jelölhessen mindkét száma nem haladhatja meg a 12-es számot. Ilyen számpárokból 144 van. E mellett, ha a számpár egyenlő számokból áll, akkor a dátumot egyértelműen megtudjuk határozni. Ilyen számpárokból pedig 12 van.

   Tehát, a dátumot egyértelműen nem tudjuk meghatározni 144-12=132 esetben.

4. A 15% a 4-től: $4 \cdot 0.15 = 0.6$ (kilogram).

   Tehát a szárazz gomba súlya $4 - 0.6 = 3.4$ (kilogramm).

   Akkor a 20 kilogramm friss gombában $20 - 3.4 = 16,6$ (kilogramm) víz lesz. Akkor a víz százaléka a friss gombában: $\frac{16.6 \cdot 100}{20} = 83$ $(\%)$.

5. Például a $12 = 22^2 \cdot 3$ megfelelő, hiszen az osztók száma a $(2+1) \cdot (1+1) = 6$. Ebből következik, hogy 7 különböző osztó nem fordulhat elő a 3-mal és 4-gyel osztható számok között. Mivel az osztóinak a száma $(2 + x) \cdot (1 + y) \cdot z$ alakú lehet, ahol x, y, z egészek és $z \geq 1$.

   A 7 prímszám, így pedig nem írható fel ilyen alakban.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

3. osztály feladatsor megoldása

1. A feladat szövege alapján sorba haladun a megoldással:

   $7 * 5 = 35$

$96/4 = 24$

$35 - 24 = 11$

A legkisebb kétjegyű páratlan szám: 11, így:

$11 + 11 = 22$

A legnagyobb egyjegyű szám pedig: 9, tehát:

$22/9 = 2\frac{4}{9}$

Felelet: Az eredmény: $2\frac{4}{9}$.

2. A feadat megoldásához, visszafelé kell haladnunk. Mivel péneteken 300 m-et futnak és ez a szombati távtól 200 - al kevesebb, így:

   $300 + 200 = 500$ m a szombati táv.

   A vasárnapi pedig az előzőnek a kétszerese, tehát: $500 * 2 = 1000$ m.

   Felelet: Vasárnap 1000 m-et futnak.

3. Legyenek: E az eper, Me a meggy és M a málna ízű cukorkák.

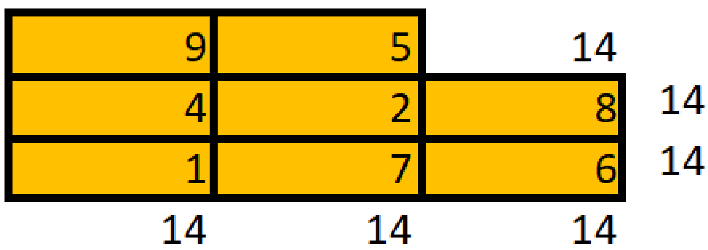
$$\begin{cases} Me + M = 25 \\ E + Me = 21 \\ E + M = 27. \end{cases}$$

   $2(E + Me + M) = 25 + 21 + 27$ $2(E + Me + M) = 73$ $E + Me + M = \frac{73}{2}$

   A páratlan összeg nem osztható maradéktalanul kettővel, így az adott feltételek alapján a feladatnak nincs megoldása.

   Megyjegyzés: Valószínű, hogy a feladatsorok összeálításakor elírás történt.

4. A megoldás a következő:



Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

4. osztály feladatsor megoldása

1. A felírt számok: 10; 12; 19; 20; 21; 29; 90; 91; 92.

   A különbség: $92 - 10 = 82$.

2. • Első módszer:

   $4 \cdot 4 = 16$ $72 \div 16 = 4$ (maradék 8)

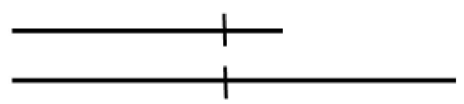
   • Második módszer:

   $72 \div 4 = 18$ -oldal keríthető körbe , ebből 4 oldalanként 4 négyzet keríthető körbe, tehát:

   $2 \cdot 4 = 8$ méter marad.

   Felelet: 8 méter kötél marad.

3. Rajz:



   $130 - 4 = 126$

   $126 : 3 = 42$

   Egyik polc: $42 + 4 = 46$ (könyv)

   Másik polc: vagy $130 - 46 = 84$ könyv

4. $2 \cdot 54 = 108$ (km)

   $54 + 12 = 66$ (km)

   $108 + 66 = 174$ (km)

   $280 - 174 = 106$ (km)

   $106 \div 2 = 53$ (km/h)

   Felelet: 53 km/ó sebességgel tette meg az út utolsó szakaszát.

5. $108 \cdot 6 = 648$ (felnőtt)

   $648 \div 2 = 324$ (gyerek)

   $648 + 324 = 972$ (összesen)

   Felelet: 972-en vettek részt a futóversenyen.

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

5. osztály feladatsor megoldása

1. 2 hrn 25 kop - 1 alma ára

   11 hrn 25 kop - 5 alma ára

   $23hrn15kop - 11hrn25kop = 11hrn90kop$ - a maradék összeg narancsra

   $4 \cdot 2hrn75kop = 11hrn$ - 4 narancs ára

   90 kopek - a maradék összeg

   Válasz: 4 narancsot tud vásárolni, és 90 kopekje marad.

2. Az út negyedét, valamint a visszaútat hazáig 10 *km/h* sebességgel, ugyanannyi idő alatt teszi meg, mint az otthonától lévő távot az iskoláig $20km/h$ sebességgel.

   Ezáltal azt kapjuk, hogy $v = 20$ *km/h*, $t = \frac{30perc}{2} = \frac{0.5ra}{2} = 0.25$ *óra*.

   $S = v \cdot t$;

   $S = 20 \cdot 0,25 = 5$ (km) Válasz: 5 km-re van az otthona az iskolától.

3. A nyolc dobókockából kirakott nagykockának 8 csúcsa van.Ezért minden dobókockának az elhelyezés után, 3 egy közös ponttal rendelkező oldallapja lesz látható.

   Kitudjuk úgy választani, hogy minden egyes dobókockának, hogy a 6, 5 és 4 ponttal rendelkező oldalai legyenek láthatók.

   $6 + 5 + 4 = 15$ - egy kockán a látható pöttyök összege

   $15 \cdot 8 = 120$ - a külső felületen látható összes pont összege

   Válasz: 120 pont lehet a kocka felületén maximálisan.

   Összekötve a harmadolópontokat látható, hogy 1×1 négyzeteket kapunk.

4. Az $ADB\triangleleft$ területe egy 3×1 téglalap felével egyenlő

   $S_ADB = 0,5 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5\ (cm^2)$

   A $COB\triangleleft$ területe egy 2×1 téglalap felével egyenlő

   $S_COB = 0,5 \cdot 2 \cdot 1 = 1\ (cm^2)$

   A $DOC\triangleleft$ területe egy 1×1 négyzet felével egyenlő

   $S_DOC = 0,5 \cdot 1 \cdot 1 = 0,5\ (cm^2)$

A befestett rész területe ezek összege:

$S = 1,5 + 1 + 0,5 = 3\ (cm^2)$

Válasz: A befestett rész területe: 3 (cm^2).

5. - Mivel nincs megadva semmilyen feltétel, ezért összesen $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 13!$ féleképpen ülhetnek le

     Válasz: $13!$

   - Itt már látható, hogy feltétel is van. Az első hat székre a lányok $6!$ féleképpen tudnak leülni.

     Az utolsó hét székre 7! féleképpen tudnak leülni a fiúk.

     Összesen $6! \cdot 7!$ féleképpen ülhetnek le.

     Válasz: $6! \cdot 7!$

   - Mivel eggyel kevesebb lány van azért a sort csakis fiú kezdheti. Hogy teljesüljön a feltétel egyszer fiú egyszer lány fog leülni: $flfl...lf$.

     $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 7 \cdot (6!)^2$

     Válasz: $7 \cdot (6!)^2$

Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny-2019

6. osztály feladatsor megoldása

1. Jelölje x az összes gyerek számát, akire főztek levest.Felírhatjuk a feladat feltételei alapján a következő összefüggéseket:

nem szereti	40%	nem ettek	0,4x
imádja	1/4x = 0,25x	2 adagot ettek	2*0,25x = 0,5x
megette	$x - (0,4x + 0,25x)$	1 adagot evett	0,35x
maradt			21 adag

Felhasználva a táblázatban szereplő adatokat, felírjuk és megoldjuk a következő egyenletet:

$0,5x + 0,35x + 21 = x$

$0,85x + 21 = x$

$x - 0,85x = 21$

$0,15x = 21$

$x = \frac{21}{0,15} = \frac{2100}{15} = 140$

Felelet: Az iskola éttermében 140 adag paradicsomlevest főztek.

2. Ha egy kiválasztott cédulát 10 részre vágunk, 9-cel nő a cédulák száma.

   Tehát az eljárás minden lépésében 9 egy többszörösével nő a cédulák száma, és így a teljes eljárás során is 9 egy többszörösével.

   $2017 - 216 = 1801$

   Azaz összesen 1801-gyel nőtt a cédulák száma.

   De 1801 nem osztható 9-cel, ezért a számolás helytelen volt

   Felelet: A számolás helytelen.

3. - Adott a feladat feltételében a hónap harmadik napja, ebből alakítjuk ki a negyedik nap jelölését. Először leírjuk a harmadik nap jelölését, majd utána írjuk ennek a kombinációnak a felcserélt változatát: $YAAY$

     Így a negyedik napot az $AYYAYAAY$ betűsor jelöli.

   - Az első napban 1 A betű szerepel.

     A második nap jelölésében szintén 1 A betű.

     A harmadik nap jelölésében 2 A betű.

     A negyedik nap jelölésében 4 A betű.

     A negyedik nap betűsorából láthatjuk, hogy az ötödik nap felírásában szerepelni fog a negyedik napi kombináció, valamint ennek a felcserélt változata, tehát összesen 8 A betűt fog tartalmazni.

     Folytatva megláthatjuk, hogy minden következő nap felírásában az előzőhöz képest kétszer több A betű található. Tehát minden következő nap az előzőhöz képest A betűből a 2-es szám többszörösét fogja tartalmazni.

     Így elmondható, hogy a hatodik nap 16 A betűt fog tartalmazni.

- Az előző pontban alkotott logika szerint felírjuk, hogy $64 = 2^6$. Megfigyelve, hogy az első két nap 1-1 A betűt tartalmaz, 64 A betűt a $6 + 2 = 8$. nap fog tartalmazni.

4. A négyzet egy belső pontjának két szemközti oldaltól vett távolságának az összege éppen a négyzet oldala.

   Tehát a 6, 7, 8, 9 számokat kell két csoportra osztanunk, hogy a két részben a számok összege azonos legyen. Ez csak úgy lehetséges, ha 6, 9 van az egyik, 7, 8 a másik csoportban.

   Ekkor $6 + 9 = 7 + 8 = 15$ cm a négyzet oldala.

   A négyzet kerülete a $P = 4a$ képlettel számítható ki.

   Felhasználva a fentebb kiszámított értéket kapjuk, hogy $P = 4 \cdot 15 = 60$ cm.

   A körlap területének képlete $S = \pi R^2$.

   A négyzetbe írt kör sugara egyenlő a négyzet oldalának felével: $R = \frac{15}{2} = 7,5$ cm.

   Kiszámítjuk a körlap területét:

   $S = \pi \cdot (7,5)^2 = 56,25\pi$

   Behelyettesítve a π értékét, megközelítőleg kapjuk, hogy $S \approx 3,14 \cdot 56,25 \approx 176,625(cm^2)$

   Felelet: a négyzet oldala 15 cm, a négyzet kerülete 60 cm, a négyzetbe írt körlap területe $S \approx 176,625(cm^2)$.

5. Jelölje a gyerekjegy árát x. Akkor a felnőttjegy ára $2x$. Figyelembe véve, hogy az apa 3 gyerekért és saját magáért 50 zedet fizetett, felírjuk és megoldjuk a következő egyenletet:

   $x + x + x + 2x = 50$

   $5x = 50$

   $x = \frac{50}{5} = 10$

   A gyerekjegy ára tehát 10 zed.

   Figyelve arra, hogy a felnőttjegy kétszer drágább, mint a gyerekjegy, megvizsgáljuk, hogy hány gyereket vihet magával az apa, hogy a jegyeket összesen 50 zedet fizessen.

   Azt biztosan elmondhatjuk, hogy az árnak $(50zed)$ osztódni kell $(n+2)$ -re, ugyanis az apának ennyi jegyet kell vennie, ahol$n$ - a gyerekek számát jelöli.

Felsoroljuk 50 osztóit: 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Innen láthatjuk, hogy az 1 és a 2 nem felel meg nekünk, viszont a többi szám megfelel az $(n+2)$ összegnek:

5 esetén 3 gyereket vitt magával.

10 esetén 8 gyereket vitt magával.

25 esetén 23 gyereket vitt magával.

50 esetén 48 gyereket vitt magával.

Nézzük meg, mi történik akkor, ha a jegyek árát duplázzuk, tehát nem 50, hanem 100 zed áll rendelkezésünkre:

100 osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

Ismét láthatjuk, hogy az 1 és a 2 nem felel meg nekünk:

4 esetén 2 gyereket vitt magával.

5 esetén 3 gyereket vitt magával.

10 esetén 8 gyereket vitt magával.

20 esetén 18 gyereket vitt magával.

25 esetén 23 gyereket vitt magával.

50 esetén 49 gyereket vitt magával.

100 esetén 98 gyereket vitt magával.

Abban az esetben pedig, ha az 50 zedet másfélszer növeljük, akkor 75 zedért vehetünk jegyet.

Felírjuk 75 osztóit: 1, 3, 5, 15, 25, 75.

Az 1 nem felel meg nekünk, tehát:

3 esetén 1 gyereket vitt magával.

5 esetén 3 gyereket vitt magával.

15 esetén 13 gyereket vitt magával.

25 esetén 23 gyereket vitt magával.

75 esetén 73 gyereket vitt magával.

Felelet: Egy gyerekjegy ára 10 zed. A feladat megoldható még $8, 23, 48$ gyerek esetén. Ha az összeget duplázzuk, akkor $2, 3, 8, 18, 23, 49, 98$ gyereket vihet magával, ha pedig másfélszerezzük az összeget, akkor $1, 3, 13, 23, 73$ gyereket vihet magával.

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

8. osztály feladatsor megoldása

1. $\frac{2x+60}{3x-60} = \frac{6}{5}$;

   $10x + 300 = 18x - 360$;

   $8x = 660$;

   $x = 82,5$;

   Felelet: $82,5 \cdot 5 = 412,5$ km hosszú az egész út.

2. $|2|x-1| - 3| = 5$;

   $2|x-1| - 3 = 5$; $2|x-1| - 3 = -5$;

   $2|x-1| = 8$; $2|x-1| = -2$;

   $|x-1| = 4$; $|x-1| = -1$.

   $x - 1 = 4$

   $x - 1 = -4$ Nincs gyöke $x = 5x = -3$.

   Felelet: az egyenlet gyökei 5 és -3.

3. Pitagorasz tétele szerint:

   $(20x)^2 + (21x)^2 = c^2$;

   $841x^2 = c^2$;

   $29x = c$;

   A kerület adott $20x + 21x + 29x = 140$;

   $70x = 140$;

   $x = 2$;

   A háromszög oldalai:

   $40cm, 42cm, 58cm$.

   $S = \frac{40 \cdot 42}{2} = 840cm^2$.

   Felelet: A háromszög területe $840cm^2$.

4. A BPC háromszög szabályos, ezért szögei $60°$-ak, ezért PBA szög $30°$.

   A BPC háromszög szabályos, ezért $PB = BC = AB$, így ABP egyenlő szárú és az AP alapon fekvő szögei $\frac{180°-30°}{2} = 75°$-osak.

   $BAP\angle = AQD\angle$, mert váltószögek, így $AQC = 180° - 75° = 105°$ ami megegyezik a keresett PQC szöggel.

5. Csak úgy lehet kezdeni, hogy megfordítod mindkét homokórát. Mert ha csak az egyiket fordítsd meg, akkor azután, hogy leperget benne a homok, visszakerülsz a kezdőhelyzetbe. Két megoldás létezik:

   (a) Megfordítod mindkét homokórát, és akkor teszed fel a tojást, amikor a kisebbiken(7 perc) lepereg a homok. Hagy a homokot leperegni a nagyobbikban is (ez 4 perc), és fordítsd meg, majd hagyd újra leperegni benne a homokot. Mire ez megtörténik, a tojás éppen 15 percet főtt.

   (b) A homokórák megfordításával egy időben tedd fel főni a tojást. 7 perc múlva a kisebbiket megfordítod, ekkor a nagyobbikban 4 percre való homok van még. Amikor e 4 perc elteltével a homok a nagyobbikban is lepereg, akkor a 7 perces tetejében 3 percnyi homok van, de ami még fontosabb: 4 percnyi hullt le az aljába. Megfordítod a 7 perceset és megvárod amíg lepereg benne a homok (4 percnyi). Ez pontosan 15 percig tart és ennél gyorsabban nem készülhetsz elé a reggelivel.

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

9. osztály feladatsor megoldása

1. $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$;

   $\frac{x^4+6x^3+18x^2}{(x+3)^2} + \frac{6x^2}{x+3}$;

   Legyen $\frac{x^2}{x+3} = y$, akkor az $y^2 + 6y - 16 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $y_1 = -8$ és $y_2 = 2$.

   Tehát, $\frac{x^2}{x+3} = 2$, vagy $\frac{x^2}{x+3} = -8$, ebből $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$.

2. Legyen a kisebbik, b nagyobbik a keresett háromjegyű számok közül, tehát $100 \leq a < b < 1000$ és $a + b = 498k$, $b = 5a$, vagy $6a = 498k$,

   $a = 83b$ (1), akkor

$b = 415k$ (2)

A (1)-ból $k \geq 2$, a (2)-ból $k \leq 2$, tehát $k = 2$.

Így $a = 166$, $b = 830$.

Felelet: 166 és 830.

3. Legyen $2014 = n$, akkor $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 1 = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = (n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2) + 1$.

   Feltetelezzük $n^2 + 3n + 1 = m$, akkor $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 1 = (m - 1) \cdot (m + 1) + 1 = m^2$.

4. Legyenek I és O pontok a háromszögbe írt és a háromszög köré írt körök középpontjai, amelyek szimmetrikusak az ABC háromszög BC oldalához viszonyítva.

   Akkor $BOC\Delta = BIC\Delta$, ezért $IBC\Delta$ egyenlő szárú. Ebből: $ABC\Delta$- egyenlő szárú.

   Így $BOC\angle = BIC\angle$ és $BOC\angle = 360^2\circ - 2 \cdot BAC\angle$;

   $BIC\angle = 90° + \frac{1}{2} \cdot BAC\angle$;

   Ezért $360° - 2 \cdot BAC\angle = 90° + \frac{1}{2} \cdot BAC\angle$;

   $2 \cdot \frac{1}{2} BAC\angle = 270°$

   $BAC\angle = 108°$,

   $ABC\angle = ACB\angle = 36°$;

   Felelet: $36°, 36°, 108°$.

5. A 10×10 mező lefedéséhez 25 alakzatra lenne szükség. Az adott sakktáblán 50 fehér és 50 fekete mező van. Mindegyik alakzat három fehér és egy fekete, vagy három fekete és egy fehér mezőt fedd le. Legyen az elsőből k darab, a másodikból n darab, akkor $n + k = 25$ és $3n + k = 50$, ebböl $n = 12,5$; $k = 12,5$.

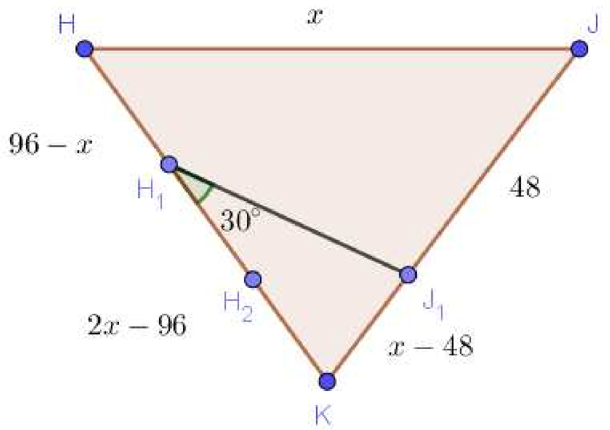
   Így a 25 alakzattal nem fedhető le (pl. 50 fekete mező).

   Felelet: Nem fedhető le.

Bólyai János matematika emlékverseny-2016

10. osztály feladatsor megoldása

1. Vegyük a következő összefüggések alapján a megoldást:



$\frac{48}{v_1} = t_1 = \frac{96-x}{v_2}$;

$\frac{48}{v_1} = \frac{96-x}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1 = \frac{96-x}{48}}$;

$\frac{x-48}{v_1} = \frac{2x-156}{v_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{2x-156}{x-48}$;

$\frac{96-x}{48} = \frac{2x-156}{x-48}$;

$(96 - x)(x - 48) = 48(2x - 156)$;

$96x - x^2 - 48 * 96 + 48x = 48 * 2x - 48 * 156$;

$x^2 + 48x - 4 * 96 + 48 * 156 = 0; *(-1)$

$x^2 - 48x - 2880 = 0$

$D^2 = 48^2 + 4 * 1 * 2880 = 2304 + 11520 = 13824$

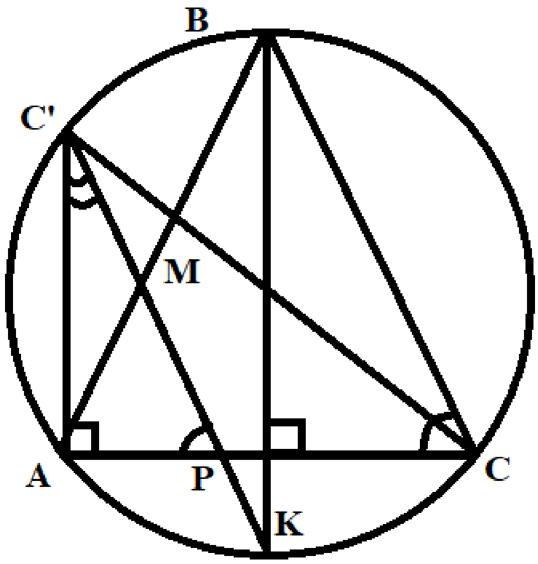
$x_1 = \frac{48+\sqrt{13824}}{2}$

$x_2 = \frac{48-\sqrt{13824}}{2}$

Mivel a gyök megközelítőleg -117.58, ezért az x_2-ben negatív eredményt kapunk így ez nem lesz megfelelő megoldás.

Tehát az x, azaz a kiindulás kezdetekor a távolság $\frac{48+\sqrt{13824}}{2}$.

2. $y = f(x)$ páros függvény és értelmezési tartománya R, tehát ha x_1 megoldás, akkor $\breve{}x_1$ is megoldás és ezért a megoldások száma páros. De a feltétel szerint a megoldások száma 2017 amiből következik, hogy a nulla is megoldás, vagyis $20f(0) = 17$, ebből $f(0) = \frac{17}{20} = 0.85$



3.

$CC' - d \Rightarrow CAC'\angle = 90°$

$AC'||BK \Rightarrow C'B$ ív $= AK$ ívvel $\Rightarrow AC'K\angle = MAC'\angle$. Ez alapján $C'M = AM$.

$C'K||BC$, így a $C'PA\angle = BCA\angle = BAP\angle$. Ebből az következik, hogy az AMP háromszögben az $AM = MP$.

$C'M = AM = MP \to C'M = MP$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az M a PC' szakasz középpontja.

4. $\sqrt{(x+2) * |x+1| + |x|} \geq x + 2$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2<0 \\ (x+2)(-x-1)-x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ (x+2)|x+1|+|x| \geq (x+2)^2. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2 \\ x^2+4x+2 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-2;1] \\ -x^2-3x-2-x \geq x^2+4x+4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1;0] \\ x^2+3x+2-x \geq x^2+4x+4; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;+\infty) \\ x^2+3x+2+x \geq x^2+4x+4; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2 \\ x \in \left[-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right]; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-2;-1] \\ x^2+4x+3 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-1;0] \\ 2x+2 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;+\infty) \\ 2 \geq 4; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-2-\sqrt{2};-2\right] \\ ;x \in [-2;1]; \\ Nincsmegoldasa; \\ Nincsmegoldasa. \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left[-2-\sqrt{2};-1\right]$$

Felelet: $x \in \left[-2-\sqrt{2};-1\right]$

5. Az $x \geq 0$ esetén $x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0$.

   Megoldva ezt az egyenletet, kapjuk:

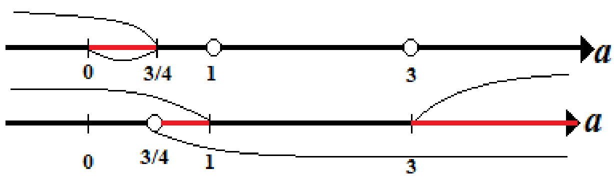
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{D}{4} = a^2 - 4a + 3 > 0; \\ a > 0; \\ 4a - 3 \geq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a < 1; \\ a > 3. \end{array}\right. \\ a > 0; \\ a \geq \frac{3}{4}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4} \leq a < 1; \\ a > 3. \end{array}\right.$$

   Az egyenletnek egy nem negatív gyöke van, ami:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} D = 0, \\ a \geq 0. \end{array}\right. \\ 4a - 3 < 0, \\ \left\{\begin{array}{l} a = \frac{3}{4}, \\ a < 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 3, \\ a < \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

   Az $x < 0$ esetén $x = \frac{4a-3}{2a} < 0 \Rightarrow 0 < 0 < \frac{3}{4}$.

   Az első és a második esetet összeasonlítva észrevehetjük, hogy abban az esetben is, ha $0 < a < \frac{3}{4}$ két megoldása van az egyenletrendszernek.



Bólyai János matematika emlékverseny-2016

11. osztály feladatsor megoldása

1. $1 + 2x \geq 0$;

   $x \geq -\frac{1}{2}$;

$x \neq 0$.

Az egyenlőtlenség bal oldala egyenlő:

$\left(\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = \frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2$;

$\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}} = \frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+2x}}{1+\sqrt{1+2x}} = \frac{2x(1+\sqrt{1+2x})}{-2x} = -(1+\sqrt{1+2x})$.

Visszahelyettesítve:

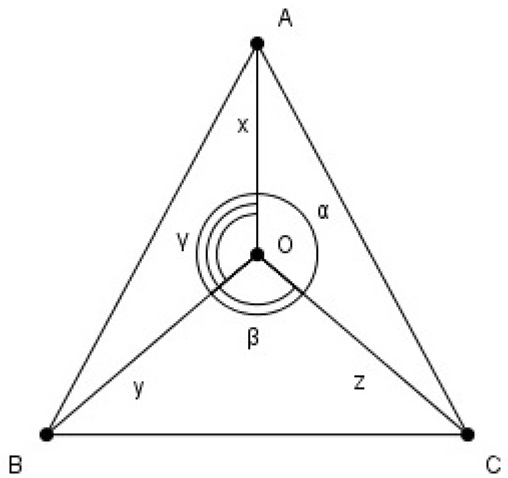
$\left(-(1+\sqrt{1+2x})\right)^2 < 2x+9$;

$x < \frac{45}{8}$.

Felelet: $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{48}{9}$, s $x \neq 0$. Egész megoldások: 1,2,3,4,5.

2. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ y^2+yz+z^2=11 \\ x^2+xz+z^2=9. \end{cases}$;

Az egyenletekre tekintsünk úgy, mint olyan háromszögre, melyre fel van írva a koszinusz tétel. Az első háromszög oldalai x, y és $\sqrt{13}$, valamint az x és y által bezárt szög $120°$. A másik két egyenlet hasonlóan.



$\alpha = \beta = \gamma = 120°$;

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$;

$S_{AOB} = \frac{1}{2}xy \cdot \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$;

$S_{AOC} = \frac{\sqrt{3}}{4}xz$;

$S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4}yz$;

Az ABC háromszög területe Héronképlete szerint:

$p = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}+3}{2}$

$S = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}+3}{2} \cdot \left(-3 + \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}+3}{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{11} + \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}+3}{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}+3}{2}\right)}$

$S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(\sqrt{13} + \sqrt{11} + 3) \cdot (\sqrt{13} + \sqrt{11} - 3) \cdot (\sqrt{13} - \sqrt{11} + 3) \cdot (\sqrt{11} + 3 - \sqrt{13})}$

$S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left((\sqrt{13} + \sqrt{11})^2 - 9\right) \cdot \left(3 + (\sqrt{13} - \sqrt{11})\right) \cdot \left(3 + (\sqrt{13} - \sqrt{11})\right)}$

$S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left((\sqrt{13} + \sqrt{11})^2 - 9\right) \cdot \left(9 - (\sqrt{13} - \sqrt{11})^2\right)}$

$S = \frac{1}{4}\sqrt{61};$

$S_{ABC} = S_{ABC};$

$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz) = \frac{1}{4}\sqrt{61};$

$xy + yz + xz = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{3}}.$

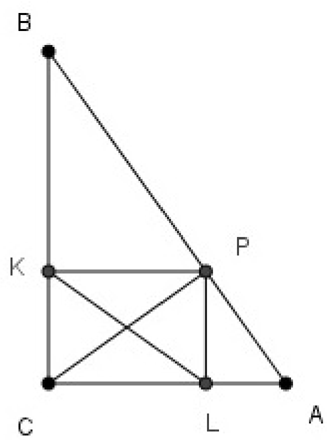
3. A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott, illetve nem lejátszott mérkőzéseket vizsgáljuk. Összesen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ mérkőzés van (összes eset).

   Eddig 8 mérkőzés volt, 7 maradt.

   Tehát $P(A) = \frac{7}{15}$.

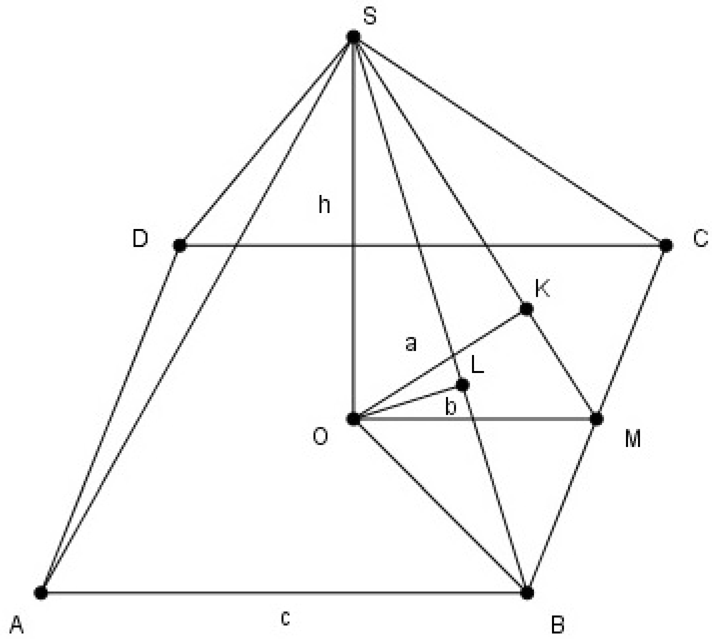
   Felelet: $\P(A) = \frac{7}{15}$.

4. A $KPLC$ négyszög téglalap, ezért $KL = CP$. Ez akkor lesz a legkisebb, ha P pont a C csúcsból húzott magasság talppontja.



5. $\alpha = KMO\angle$;

   $\beta = LBO\angle$.



OKM der. háromszögből: $sin\alpha = \frac{2a}{c}$

SOM der. háromszögből: $sin\alpha = \frac{h}{SM}$;

$SM = \frac{hc}{2a}$

OLB der. háromszögből: $sin\beta = \frac{2b}{c\sqrt{2}}$

SOB der. háromszögből: $sin\beta = \frac{h}{SB}$;

$SB = \frac{2b}{c\sqrt{2}}$

SMB der. háromszögből: $SB^2 = SM^2 + BM^2$

$\frac{h^2c^22}{4b^2} = \frac{h^2c^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4} \mid \cdot a^2b^2$

$h^2(2c^2a^2 - c^2b^2) = a^2b^2c^2$

$h^2 = \frac{a^2b^2}{2a^2-b^2}$

SOM der. háromszögből: $SB^2 = SM^2 + BM^2$

$\frac{h^2c^2}{4a^2} = h^2 + \frac{c^2}{4}$

$c^2 = \frac{4a^2h^2}{h^2-a^2}$

Behelyettesítve $h^2 = \frac{a^2b^2}{2a^2-b^2}$ értékét kapjuk:

$c^2 = \frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}$

Ezt behelyettesítve az (1)-es képletbe kapjuk:

$sin\alpha = \frac{2a}{c} = \frac{2a}{\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-a^2}}} = \frac{2\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{2}}$.

Innen: $\alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{2}}$.

Bólyai János matematika emlékverseny-2017

8. osztály feladatsor megoldása

1. Legyen x-a 7 fejű sárkányok száma, y-a 13 fejű sárkányok száma.

   $$\begin{cases} 7x + 13y = 175 \\ x + y = 19. \end{cases}$$

   $$\begin{cases} 7(19 - y) + 13y = 175 \\ x = 19 - y. \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x = 12 \\ y = 7. \end{cases}$$

   Felelet: 12 hétfejű és 7 tízenhárom fejű sárkány ment a gyűlésre.

2. $9^{2015} + 9^{2016} = 9^{2015}(1 + 9) = 9^{2015} \cdot 10$. Ha a szorzat egyik tagja osztható 10-zel, akkor maga a szorzat is osztható 10-zel.

3. A négyzet oldala $9cm$, akkor kerülete $P_n = 4 \cdot 9 = 36cm^2$. Mivel az alakzatok területe egyforma, ezért az egyenlő oldalú háromszög kerülete szintén $36cm^2$. Az oldala $36 : 3 = 12cm$.Ha a téglalap területe $36cm^2$, hosszúsága $12cm$, akkor a szélessége $6cm$.

4. Meghúzzuk a KM egyenest párhuzamosan a BC oldalhoz. A K pont az AB oldalon fekszik. Az AKM háromszög egyenlő oldalú, ezért minden szöge $60°$.

   Megmutatjuk, hogy BKM háromszög és MNC háromszög egybevágó. $MN = BM$ a feladat feltétele alapján. $BKM\angle = MBC\angle$ a párhuzamos egyenesek ismertetőjele alapján (a különböző oldalon fekvő szögek egyenlők). $MBC\angle = MNB\angle$ (mert BMN egyenlő szárú háromszög) BKM háromszög és MCN háromszög egybevágó a háromszög egybevágóságának 2. ismertetőjele alapján.

   Ezért $CN = KM$.

5. Jelöljük a számokat x, y, z-vel. A feladat alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{cases} x+y+z=9999 \\ x+y-z=2009 \\ x-(y+z)=1000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5500 \\ y=504 \\ y=3995x. \end{cases}$$

.

Bólyai János matematika emlékverseny-2017

9. osztály feladatsor megoldása

1. $9-1$ jegyű, $90-2$ jegyű, $900-3$ jegyű szám van. Amelyeket ha leírnánk $9, 180, 2700$ számjegyet írnánk le.

   $9+180=189$ (az 1 és 2 számjegyűek);

   $1234-189=1045$ (a fennmaradó számjegyek);

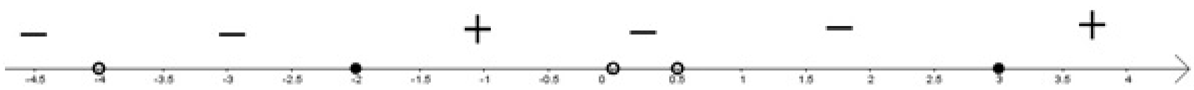
   $1045:3=348$ (maradék 1);

   Tehát a keresett számjegy a 349 háromjegyű szám első számjegye. $9+90+349=448$

   Felelet: 4.

2. $\frac{(x+4)^2\cdot(x-3)^3\cdot(x+2)}{(1-2x)^6\cdot(x+3)^4\cdot x^7} \geq 0.$

$$x_1=-4; x_2=3; x_3=-2; x_4=0,5; x_5=-4; x_6=0$$



   Felelet: $x \in [-2;0) \cup [3;+\infty)$

3. $3x^2-4x+a=0$

   $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=5;$

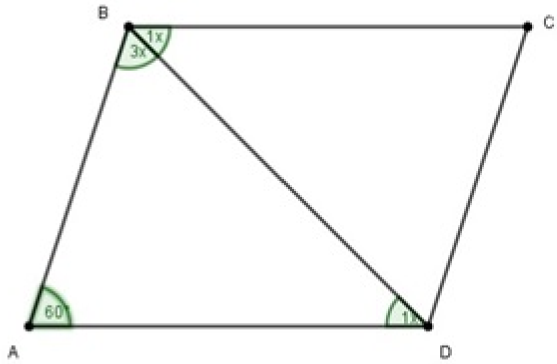
   Viete tétele szerint $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{4}{3} \\ x_1\cdot x_2=\frac{a}{3}. \end{cases}$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1x_2;$

$\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 5 + 3 \cdot \frac{a}{3};$

$a = -3\frac{2}{9};$

Felelet: $a = -3\frac{2}{9}$.

4. 

$1x + 3x = 120°;$

$x = 30°;$

$3x = 90°;$

Tehát ABC derékszögű háromszög.

(a) Ha $ABD\angle = 90°;$

$\cos ADB\angle = \frac{BD}{AD} \to AD = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20cm;$

$AB = AD \cdot \frac{1}{2} = 10;$

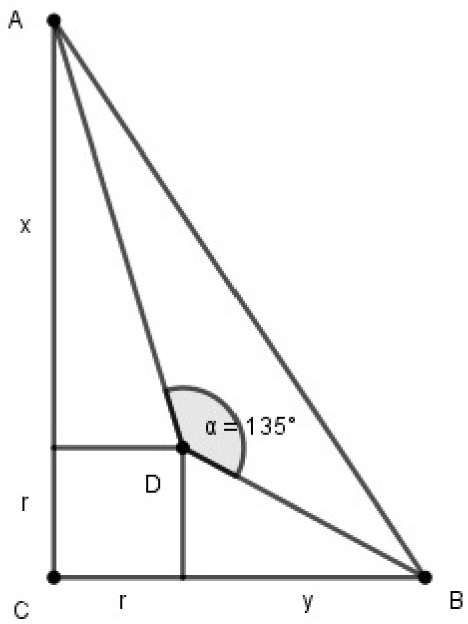
$P_{ABCD} = 2(10 + 20) = 60cm;$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos 120°} = 10\sqrt{7}cm;$

(b) Ha $ABD\angle = 30°;$

Hasonlóan: $P_{ABCD} = 60cm$; $AC = 10\sqrt{7}cm;$

Felelet: $P_{ABCD} = 60cm, AC = 10\sqrt{7}cm$:



5.

Pitagorasz tételből: $\begin{cases} 10 = x^2 + r^2 \\ 5 = y^2 + r^2. \end{cases} \rightarrow 5 = x^2 - y^2;$

Az AD és BD szögfelezők közötti szög: $180° - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 135°;$

Koszinusz tételből: $(x+y)^2 = 10 + 5 + 2\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25;$

Tehát: $x + y = 5;$

Ha $5 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), akkor x - y = 1;$

Tehát: $x = 3, y = 2, r = 1;$

Felelet: $AC = 4cm, BC = 3cm.$

Bólyai János matematika emlékverseny-2017

10. osztály feladatsor megoldása

1. Először meghatározzuk azoknak a hatjegyű számoknak a számát, amelyek felírásában csak páratlan számjegyek fordulnak elő. Ilyenekből $5^6 = 15625$ van. Tehát, olyan hatjegyű számokból, amelynek legalább egy számjegye páros $900000 - 15625 = 884375$ van.

   Felelet: 884375.

2. Megoldjuk az $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$ egyenletrendszert, amelyet így is megoldhatunk: $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 13 + xy. \end{cases}$

Legyen $x + y = U$ és $xy = V$, akkor $\begin{cases} U = V = 7 \\ U^2 = 13 + V. \end{cases}$, ebből $U = 7 - V$ így

$(7 - V)^2 - 13 - V = 0$

$V^2 - 15V + 36 = 0;$

$V_1 = 3, V_2 = 12.$

Az (1)-ből $U_1 = 4$ és $U_2 = -5$, tehát (I) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3. \end{cases}$, vagy (II) $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 12. \end{cases}$.

Az (I) megoldása: $(1, 3)$ és $(3, 1)$, a (II)-nek nincs megoldása. Így a grafikonok metszéspontjai a $(1, 3)$ és $(3, 1)$ pontok. A kapott pontok közötti távolság $d = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Felelet: $2\sqrt{2}$.

3. Legyen $ABCD$ adott trapéz. BC párhuzamos AD. $A\angle = 90°$. Legyen O pont a trapézba irt körvonal középpontja. $COD\angle = 90°$ (OC és OD társszögek szögfelezői).

   $CM = CK = a - r$, $MD = DP = b - r$.

   A $COD\Delta$-ben $OM^2 = (a - r)(b - r)$,

   $r^2 = ab - r(a + b) + r^2$,tehát $r = \frac{ab}{a+b}$.

4. Az $|1 - \sqrt{|x + 3|}| = a$ egyenlet megoldásainak száma megegyezik az $y = |1 - \sqrt{|x + 3|}|$ függvény grafikonjának és $y = a$ egyenes metszéspontjainak számával.

   Felelet: Ha a<0, akkor nincs megoldás,

   ha a=0, akkor 2 megoldás van,

   ha 0<a<1, akkor 4 megoldás van,

   ha a=1, akkor 3 megoldás van,

   ha a>1, akkor 2 megoldás van.

5. Ha $P(x) = (1-2x^2)^n + (3x-8)^{2n}$ polinom maradék nélküloszthatό $x-5$-tel, akkor $x = 5$ a polinom gyöke, tehát: $(1 - 50)^n + (15 - 8)^{2n} = (-49)^n + 49^n = 0$, ami csak páratlan n esetén igaz.

   Felelet: n páratlan természetes szám esetében.

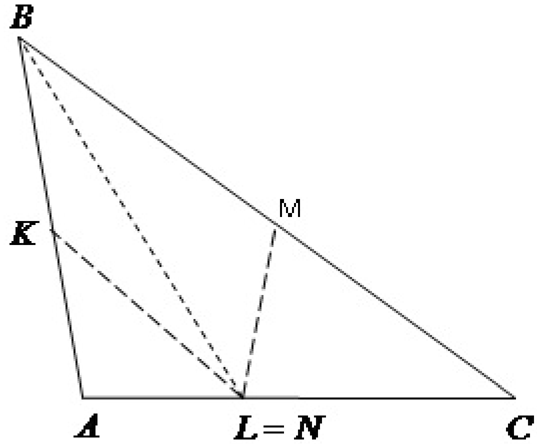
Bólyai János matematika emlékverseny-2017

11. osztály feladatsor megoldása

1. $\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2 \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$;

Az első egyenletből azt kapjuk hogy, $x > \max y, z$ és z páros. Ha x páros a második egyenletben ellentmondást kapunk, tehát x páratlan. A második egyenletből kapunk még egy megközelítést $13x < 4x + 3x + 29$ vagy $6x < 29$. Ebből $x < 5$, ezért $x = 1$ (ami ellentmond az x maximalitásának) és $x = 3$ a többi egyszerű válogatással megtaláljuk az egyetlen megoldást.

Felelet: $(3, 1, 2)$.



2.

Felveszünk egy olyan N pontot, hogy $N \in AC$, amelyre teljesül $AN = \frac{1}{2}AB = AK$. Ekkor $NC = AC - AN = \frac{1}{2}(AB + BC) - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = MC$.

$\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}$, ahonnan $N = L$.

3. Az utolsó tóra csak egy liba szálhatott le, csak így lehetet hogy egy fél liba egyben a repülő libák fele. Ezután visszafele számolva megkapjuk a hatodik tóra 2 liba, ötödikre 4 liba, negyedikre 8 liba, harmadikra 16 liba, másodikra 32 liba és az elsőre 64 liba szállt le. Ami azt jelenti hogy, az eredeti csapatban 127 liba volt.

4. $x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}(5x^2-2x-3)=x^2+2x}$

$x^2 \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - \frac{-1}{1} x \log_6(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$

$x^2 \log_6(5x^2 - 2x - 3) + 2x \log_6(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$

$log_6(5x^2 - 2x - 3) * \frac{x^2+2x}{2} = x^2 + 2x$

$\log_a b = c$; és $a^c = b$

$x^2 + 2x \neq 0$; $x \neq 0$ vagy $x \neq -2$

$log_6(5x^2 - 2x - 3) = 2$

$5x^2 - 2x - 3 = 6^2$

$5x^2 - 2x - 39 = 0$

$D = 4 + 4 * 5 * 39 = 4 + 780 = 784$

$x_1 = \frac{2+\sqrt{784}}{2*5} = \frac{2+28}{10} = 3$

$x_2 = \frac{2-\sqrt{784}}{2*5} = \frac{2-28}{10} = -2,6$

5. $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 - 16x^2 - \Pi^2 + 8\Pi x$

$\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = 2 - (16x^2 - 8\Pi x + \Pi^2$

$\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = 2 - (4x - \Pi)^2$

$\frac{\tan^4 x - 2\tan^2 x + 1}{\tan^2 x} + (4x - \Pi)^2 = 0$

Mivel két szám összege, akkor 0, ha mind a két szám is egyenlő 0.

$\tan^2 x \neq 0$

$\tan x \neq 0$

$x \neq \arctan 0$

$x \neq \Pi n$

$\tan^2 x + \cot^2 x + 16x^2 - 8\Pi x + \Pi^2 = 0$

$(\tan^2 x - 1)^2 + (4x - \Pi)^2 * \tan^2 x = 0$

$\tan^2 x - 1 = 0$

$\tan x = \pm 1$

$x = \pm\frac{\Pi}{4} + \Pi n, n \in Z$

és $4x - \Pi = 0$

$x = \frac{\Pi}{4}$

$\tan^2 x \neq 0$

A helyes megoldás a $\frac{\Pi}{4}$ lesz, azaz nem lehet helyes megoldás a $-\frac{\Pi}{4}$, mert csak az előző esetben lesz 0 mind a két szám.

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

8. osztály feladatsor megoldása

1. A könyv 9 oldalának megszámozásához $9 * 1$ számjegyre van szükség.

   Az oldalak 10-től 99-ig történő megszámozásához $(99-10+1)*2 = 180$ számjegyre van szükség.

   Az oldalak megszámozásához a 100 és 999 között $(999 - 100 + 1) * 3 = 2700$ számjegyre lesz szükség.

   Mivel 1392 számjegyre volt szükség a könyv összes oldalának megszámozásához, egy ilyen könyvnek több mint 99, de kevesebb mint 999 oldala volt, sőt, pontosan $1392 - 9 * 1 - 90 * 2$ számot használták a könyv azon oldalainak megszámozására, amelyek száma három számjegyű, összesen 1203 számjegy.

   Ezért a háromjegyű számú oldalak száma $\frac{1203}{3} = 401$.

   Így a könyvben 1392 számjegyet használtunk az összes oldal megszámozására, pontosan $9 + 90 + 401 = 500$ oldal.

   Felelet: a könyv 500 oldalas volt.

2. A *BCE* háromszög egyenlő oldalú, mivel $BE = CE$. Ez két esetben lehetséges: ha a négyzeten belül, vagy a négyzeten kívül található az *E* pont.

   Az első esetben $ABE\angle = 90° + 60° = 150°$,

   $BAE\angle = BEA\angle = 15°$,

   $EAD\angle = EDA\angle = 90°\,\check{}\,15° = 75°$,

   $AED\angle = 180°\,\check{}\,2 * 75° = 30°$.

   A második esetben az $ABE = 90° - 60° = 30°$,

   $BAE\angle = BEA\angle = 75°$,

   $EAD\angle = EDA\angle = 90°\,\check{}\,75° = 15°$,

   $AED\angle = 180°\,\check{}\,2 * 15° = 150°$.

3. $\left(1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{2014*2015}\right) * 2015 =$

   $= \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}\right) * 2015 =$

   $= \left(2 - \frac{1}{2015}\right) * 2015 = 4030 - 1 = 4029$

   Felelet: Az eredmény 4029.

4. Először számoljuk ki a téglalap területét, ami: $90 * 28.5 = 2565\ m^2$,

   majd a téglalap területének a $\frac{2}{5}$ részét, tehát: $2565 * \frac{2}{5} = 1026$.

Fel írhatjuk a megfelelő egyenletrendszert.

Legyen x a nyulak száma, y pedig a csirkék száma.

5. $\begin{cases} 4x + 2y = 2652 \\ x + y = 1026. \end{cases}$;

Az egyenletrendszer megoldásával kapjuk, hogy $x = 300$ és $y = 726$.

Felelet: 300 nyulat és 726 csirkét tenyésztenek a gazdaságban.

6. Legyen x a piacra vitt tojások száma.

Először az asszony eladta a piacra hozott tojások felét, majd egy fél tojást, tehát: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ tojást.

A megmaradt tojások: $x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Ezután az eladott $\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2}$ tojást, és így maradt

$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{x}{2} - 1 - \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} =$

$= \frac{\frac{2x-4}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}{2}.$

Az egyenlet a következőképpen néz ki: $\frac{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}{2} = 13$, ahonnan $x = 55$.

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

9.osztály feladatsor megoldása

1. Legyen az N', az AB oldal középpontja, meghúzzuk DN', egyenest ami párhuzamos BN egyenessel.

   Ennek értelmében a szögek egyenlők $MAN\angle = N'DM\angle = BPM\angle$

   Amit bizonyítani kellett.

2. $x^y + 1 = z$, ha x, y, z prim számok.

   Ha x^y páratlan, akkor $(x^y + 1)$ páros, ami a z primszám esetén azt jelentené, hogy $z = 2$, de ekkor $x^y + 1 > 2$, így ez nem lehetséges.

   Tehát x^y biztosan páros, ez abban az esetben állhat fenn, ha $x = 2$, mivel a 2 az egyetlen pozitiv páros prim.

   Oldjuk meg a $2^y + 1 = z$ egyenletet.

   Észrevehetjük, hogy az $y = 2$ és $z = 5$ az egyenlet megoldása.

Ha $y \neq 2$, akkor y prim szám miatt páratlan és 2^y hárommal osztva -1-et ad maradékul bármely páratlan y esetén.

De akkor $(2^y + 1)$ osztható hárommal, ami azt jelenti, hogy z is, viszont akkor $z = 3$ lehet csak a primség miatt és az $y = 1$, ami ellentmondás.

Tehát csak egy megoldás van: $(2, 2, 5)$.

Felelet: az $x = 2$, az $y = 2$ és $z = 5$.

3. Legyen $x = b + \beta$, ahol a b egész és β ennek a számnak a tört része.

   Megvizsgálunk 3 esetet.

   (a) $\beta \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$. Akkor a kifejezés bal oldali része egyenlő:

   $S(x) = b + b + b = 3b = [3b + 3\beta] = [3x]$

   (b) $\beta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Akkor a kifejezés bal oldali része egyenlő:

   $S(x) = b + b + (b + 1) = 3b + 1 = [3b + 3\beta] = [3x]$

   (c) $\beta \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$. Akkor a kifejezés bal oldali része egyenlő:

   $S(x) = b + (b + 1) + (b + 1) = 3b + 2 = [3b + 3\beta] = [3x]$

   Amit bizonyítani kellett.

4. Az egyenlőtlenséget könnyű átalakítani a következő formára:

   $x^2 + y^2 + 8x^2y^2 \leq 1$

   Mivel $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ akkor:

   $x^2 + y^2 + 8x^2y^2 = (x + y)^2 + 8x^2y^2 - 2xy = 1 + 2xy(4xy - 1) \leq 1.$

   Amit be is kellett bizonyítani.

5. Legyen az idősebb testvér Y éves a kisebbik X. $Y^{\smile}X$ évvel ezelőtt a kisebbik $X^{\smile}(Y^{\smile}X)$ éves volt, a nagyobbik X éves és $(X^{\smile}(Y^{\smile}X)) * 3 = X$ egyenlőség teljesült.

   $Y^{\smile}X$ év múlva a kisebbik Y éves lesz és a nagyobbik $Y + Y^{\smile}X$ éves, fennáll az $Y + Y^{\smile}X + Y = 60$ egyenlet.

   Tehát a $3Y^{\smile}X = 60$

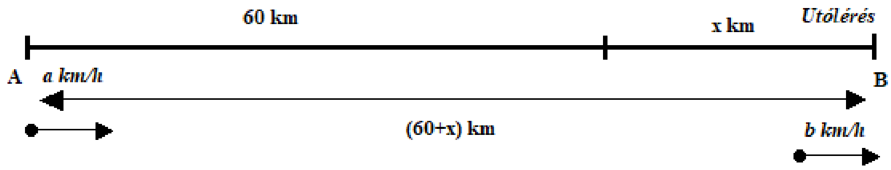
   $(X^{\smile}(Y^{\smile}X)) * 3 = X$ egyenlet rendszer megoldása lesz a felelet, ami $X = 15$ és $Y = 25$.

   Felelet: A fiatalabb testvér 15, az idősebb testvér pedig 25 éves.

Bólyai János matematika emlékverseny-2018

11. osztály feladatsor megoldása

1. Ábrázolva:



$$\begin{cases} t =^{I} \frac{60+x}{a} =^{II} \frac{x}{b} \\ t-1 =^{III} \frac{60+x}{a+10} =^{IV} \frac{x}{b+8}. \end{cases};$$

$(II) \Rightarrow x = t * b$

$(IV) \Rightarrow t-1 = \frac{t*b}{b+8}$, ahonnan $(t-1)(b+8) = t*b$, tehát $b = 8t-8$

$(I) \Rightarrow t = \frac{60+x}{a}$, ahonnan $a = \frac{60+x}{t} = \frac{60+t*(8t-8)}{t} = \frac{60}{t} + 8t - 8$.

$(III) \Rightarrow t-1 = \frac{60+t*(8t-8)}{\frac{60}{t}+8t-8+10}$, rendezve kapjuk, hogy

$t^2 - t - 30 = 0$, ahonnan $t = 6$ megoldás csak, ami a feladat feltételeinek is megfelel.

Tehát $b = 8*6-8 = 40$ *m/h*, illetve $a = \frac{60+6*40}{6} = 50$ *m/h*.

2. *Megjegyzés: A feladat szövege nem tartalmaz elég információ ahhoz, hogy mag tudjuk oldani a feladatot. Elírás, vagy nyomtatási hiba történt. Azon az éven a versenybizottság figyelmen kívül hagyta ezt a feladatotn az értékelésben is.*

3. Legyen x és y az O pont távolsága AD és AB oldalaktól.

   Pitagorasz tételével kifejezzük x és y segítségével az adott kifejezést és átalakítjuk a következő formára:

   $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$

   Ebből látszik, hogy ez a kifejezés csak akkor egyenlő 2-vel, ha a két négyzet mindegyike egyenlő nullával. Innen, azt kapjuk, hogy $x = \frac{1}{2}$ és $y = \frac{1}{2}$.

   Be van bizonyítva!

4. Az első néhány elemet kiírva:

   $x_1 = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$

   $x_2 = 1 - \frac{1}{x_1} = \frac{a}{a-1} = \frac{1}{1-a}$

$x_3 = 1 - \frac{1}{x_2} = 1 - \frac{1-a}{1} = a$

$x_4 = 1 - \frac{1}{x_3} = 1 - \frac{1}{a} = x_1$

Innen tovább már nyilvánvaló, hogy $x_5 = x_2$ és $x_6 = x_3$ tehát a sorozat elemi hármasával periodikusan ismétlődnek és általában:

$x_{3n+1} = x_1$

$x_{3n+2} = x_2$

$x_{3(n+1)} = x_3$

minden pozitív egész n-re.

Mivel $2017 = 3n + 1$ és $2018 = 3n + 2$ ezért:

$x_{2017} + x_{2018} = x_1 + x_2 = \frac{a-1}{a} + \frac{1}{1-a}$

Így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$\frac{a-1}{a} + \frac{1}{1-a} = 1$

$(a-1)^2 - a = a(a-1)$

$a^2 - 3a + 1 = a^2 - a$

$a = \frac{1}{2}$.

Felelet: az $a = \frac{1}{2}$.

5. Ha két páratlan számot törlünk le, akkor helyettük páros szám kerül a táblára. Ilyenkor a táblán lévő páratlan számok száma 2-vel csökken.

   Ha két páros számot vagy, ha egy páros és egy páratlan számot választunk, az ilyen törlés-felírás alkalmával a táblán lévő páratlan számok száma nem változik.

   A táblán kezdetben 1009 páratlan szám van, ez a szám 2-esével csökken, ezért a táblán maradt páratlan szám, bárhogyan is történik ez a törlés-felírás sorozat.

   Tehát nem lehet nulla.

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

8. osztály feladatsor megoldása

1. Mivel a sokszög bármely oldalának kisebbnek kell Lennie a többi oldalhossz összegénél, ezért csak a következő kombinációk alkotnak sokszöget:

   Háromszögek: $2cm, 3cm, 4cm$

$3cm, 4cm, 6cm$

$4cm, 6cm, 9cm$ Négyszögek: $2cm, 3cm, 4cm, 6cm$

$2cm, 3cm, 6cm, 9cm$

$2cm, 4cm, 6cm, 9cm$

$3cm, 4cm, 6cm, 9cm$

Ötszög: $2cm, 3cm, 4cm, 6cm, 9cm$

Összesen: $3 + 4 + 1 = 8$.

2. Terület: $S = a * b$,

   $1,3a * 1,3b = 1,69ab = 1,69 * S$, tehát a téglalap területe 69%-kal nő.

   Kerület: $P = 2(a + b)$,

   $2(1,3a + 1,3b) = 1,3 * 2(a + b) = 1,3 * P$, tehát a téglalap kerülete 30%-kal nő.

3. Legyen az apa sebessége x *kör/perc*, a fiúé y *kör/perc*. Ha egymás után korcsolyáznak akkor a lekörözés sebessége $x - y$. Ha szembe akkor a találkozási sebesség $x + y$ az egyik sebesség ötször nagyobb vagyis $(x - y) * 5 = x + y$, $5x - 5y = x + y$ továbbá $4x = 6y$ innen $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

4. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

   $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 64$

   $-2xy = 64 - 46 = 18$

   $xy = -9$

   $x^3 - y^3 = 8(46 - 9) = 8 * 37 = 296$

5. $\frac{(2009*2029+100)*(1999*2039+400)}{2019^4} = \frac{(2019^2-10^2+100)*(2019^2-20^2+400)}{2019^4} = \frac{2019^2 \cdot 2019^2}{2019^4} = 1.$

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

9. osztály feladatsor megoldása

1. Az adott három szám összege $n^2 - 10n + 23 + n^2 - 9n + 31 + n^2 - 12n + 46 = 3n^2 - 31n + 100 = 2n^2 - 30n + n(n - 1) + 100$.

   Minden összeadandó páros, tehát az összeg páros.

Ha a három szám mindegyike prímszám, akkor pontosan az egyik egyenlő kettővel.

Sem az $n^2 - 12n + 46 = 2$, sem az $n^2 - 9n + 31 = 2$ egyenletnek nincs természetes gyöke.

Tehát $n^2 - 10n + 23 = 2$, innen $n = 3$ vagy $n = 7$.

Megvizsgáljuk, hogy prímszámokat adnak-e.

Ha $n = 3$, akkor $n^2 - 12n + 46 = 19$ és $n^2 - 9n + 31 = 13$, prímszámok lesznek.
Ha $n = 7$, akkor $n^2 - 12n + 46 = 11$ és $n^2 - 9n + 31 = 17$, prímszámok lesznek.

Felelet: a keresett számok $n = 3$ és $n = 7$.

2. $\left(\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}\right)^2 = |40\sqrt{2} - 57| - 2\sqrt{|40\sqrt{2} - 57| \cdot (40\sqrt{2} + 57)} + 40\sqrt{2} + 57 = 57 - 40\sqrt{2} - 2\sqrt{|3200 - 3249|} + 40\sqrt{2} + 57 = 100.$

$\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} = -10.$

3. $\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} > -\frac{1}{x}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 - x^2 > \frac{1}{x^2} \\ 4 - x^2 \geq 0 \\ -\frac{1}{x} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ -\frac{1}{x} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2} < 0 \\ x^2 \leq 4 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 1 < 0 \\ x^2 \leq 4 \\ x < 0 \end{cases} \\ 0 < x \leq 2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-2; -\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) \\ x \in (0; 2] \end{array}\right.$$

Felelet: $x \in \left(-2; \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) \cup (0; 2]$.

4. Legyen *x km/h* a gyalogos sebessége, *y km/h* a kerékpáros sebessége.

Akkor $\begin{cases} \frac{5}{6}(x + y) = AB \\ \frac{AB}{x} - \frac{AB}{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6}(x + y) = AB \\ AB = \frac{4xy}{y - x} \end{cases}$

$\frac{5}{6}(x + y) = \frac{4xy}{y - x} \Rightarrow 5y^2 - 24xy - 5x^2 = 0$

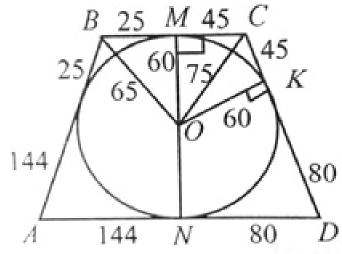
$y_1 = -0,2x,$

$y_2 = 5x.$

Tehát $y = 5x$, $AB = \frac{4x \cdot 5x}{5x - x} = 5x$.

A gyaloglás által megtett idő: $\frac{AB}{x} = 5$ *óra*.

5. $S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MO,$



$MO = r$

$S_{OBC} = \sqrt{105 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 35} = 2100\ cm^2$

$\frac{1}{2} \cdot 70 \cdot r = 2100 \Rightarrow r = 60cm \Rightarrow h_{trap.} = 2r = 120$ *cm*

$MC = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ *cm*

$CK = MC = 45$ *cm*

$r^2 = CK \cdot KD \Rightarrow KD = 80 = ND$

Tehát, $CD = 125$ *cm*

$AB = 169$ *cm*

$AD = 224$ *cm*

$S = \frac{70+224}{2} \cdot 120 = 17640\ cm^2$.

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

10. osztály feladatsor megoldása

1. A feltétel szerint $b\breve{\ } a = c\breve{\ } b$. Megmutatjuk, hogy ugyanez a tulajdonság igaz a másik három számra is.

   $(a^2 + ac + c^2) - (a^2 + ab + b^2) = c^2 - b^2 + a(c - b) = (c - b)(a + b + c)$

   $(b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ac + c^2) = b^2 - a^2 + c(b - a) = (b - a)(a + b + c)$

   A feltételből következően a két különbség egyenlő, tehát az állítás igaz.

2. Legyen x az első gép, y pedig a második gép napi előrehaladása m-ben kifejezve.

   A teljes alagút hossza tehát $60x + 60y$.

   Az első gép teljes előirányzott feladatának 30%-a:

   $60 * x * 0.3 = 18x$ a másik gép feladatának $26\frac{2}{3}\%$-a:

   $60 * y * \frac{26\frac{2}{3}}{100} = 16y$.

A feladat szövege alapján tehát:

$18x + 16y = 60.$

A második gép feladatának $\frac{2}{3}$ része: $\frac{2}{3} * 60 * y = 40y$ mely munkát az első gép $\frac{40y}{x}$ nap alatt végezné el.

Az első gép munkájának 30%-a:

$60 * x * 0.3 = 18x$, mely munkát a második gép $\frac{18x}{y}$ nap alatt végezné el.

Így a feladat szerint:

$\frac{18x}{y} + 6 = \frac{40y}{x}$

Megoldandó az egyenletrendszer: $\begin{cases} 18x + 16y = 60; \\ \frac{40y}{x} = \frac{18x}{y} + 6. \end{cases}$

legyen $z = \frac{x}{y}$, így a második egyenlet:

$\frac{40}{z} = 18z + 6$, $(z \neq 0)$ ebből $9z^2 + 3z - 20 = 0$

$z_1 = \frac{4}{3}$,

$z_2 = -\frac{5}{3}$.

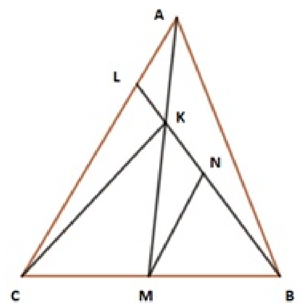
Csak az első gyök lehet megoldás, azaz $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3}y$.

Az első egyenletből: $18 * \frac{4}{3}y + 16y = 60$, $y = \frac{2}{3}$, $x = 2$.

Az első gép 2 *m*-t, a második 1.5 *m*-t halad előre naponta. Az alagút tervezett hossza:

$60 * (2 + 1.5) = 210$ *m*.

3. Legyen $MN || AC$, $(N \in BL)$



Így MN a BCL háromszög középvonala, és $MN = \frac{1}{2}LC$.

Az $AKL\Delta$ hasonló az $MKN\Delta$, ezért $\frac{AL}{MN} = \frac{AK}{MK} = \frac{1}{2}$, ebből:

$AL = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}CL$, tehát

$AL = \frac{1}{5}AC$

Így $S_{AMC} = \frac{1}{2}S$, $S_{AKC} = \frac{1}{3}S_{AMC} = \frac{1}{6}S$,

$S_{AKL} = \frac{1}{5}S_{AKC} = \frac{1}{30}S$.

4. Keressük a szabályt $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban, ahol $a, b, c \in R$ és $a \neq 0$.

   A függvény zérushelyei az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldásai. A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

   $a(x + 2)(x - 6) = 0 \Rightarrow a(x^2 - 4x - 12) = 0$.

   Az y tengellyel való metszéspontból $f(0) = 24$. Ebből: $a = -2$.

   A függvény hozzárendelési szabálya:

   $f(x) = -2(x^2 - 4x - 12) = -2x^2 + 8x + 24$.

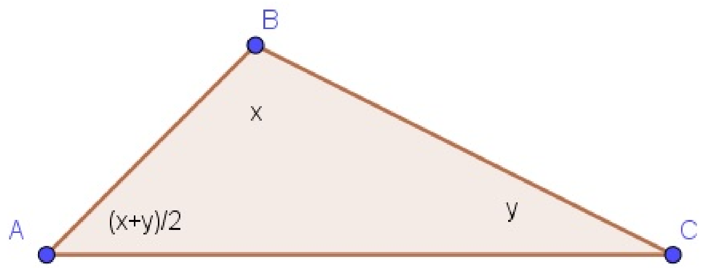
5. A szöveg alapján a kislibák száma 4-gyel osztva 3, 5-tel osztva 4, és 7-tel osztva 6 maradékot ad. Azaz a kislibák számának 4-es, 5-ös és 7-es maradéka -1.

   A kislibák számához egyet adva olyan számot kapunk, amely osztható 4-gyel, 5-tel és 7-tel is. Tehát a kislibák száma a $4*5*7 = 140$ valamelyik (pozitív) többszörösénél eggyel kisebb szám.

   Mivel a kislibák száma száz és kétszáz közötti, ezért számuk 139.

Bólyai János matematika emlékverseny-2019

11. osztály feladatsor megoldása

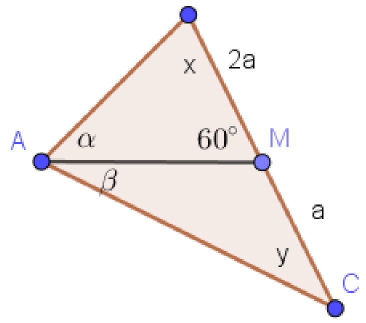
1. 

$x + y + \frac{x+y}{2} = 180°$

$3(x + y) = 360°$

$x + y = 120°$

$A\angle = 60°$



Mivel $ABC\angle = x$ és $AMB\angle = 60°$, ezért az $ABC\Delta$ hasonló az $MBA\Delta$, tehát $\Rightarrow \alpha\angle = y\angle$.

$\frac{AB}{\sin 60°} = \frac{BM}{\sin y°} = \frac{AM}{\sin x}$

$\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin 60°}$

$AB = \frac{BM * \sin 60°}{\sin y}$

$AB = \frac{BC * \sin y}{\sin 60°}$

$\frac{2a * \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin y} = \frac{3a * \sin y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\sin^2 y = \frac{1}{2}$

$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = 45°$

$x = 180° - 60° - 45° = 75°$

$A\angle = 60°$

$B\angle = 75°$

$C\angle = 45°$

2. $n + S(n) = 2019$

   2019$\vdots$3, tehát mivel a szám és a számjegyei összege ugyanolyan maradékot ad 3-ra ezért csak 3-ra osztható szám lehet n.

   n nem lehet több mint 4 jegyű és nem lehet csak 3 jegyű, ekkor $999 + S(999) < 2019$, tehát ha n szám négy jegyű, akkor $S(n) < 36$, tehát $n > 2019 - 36 = 1983$

   $n > 1983$ és $n = 32$

   $n = 1986$, $S(n) = 24$ nem felel meg

   $n = 1989$, $S(n) = 27$ nem felel meg

$n = 1992$, $S(a) = 21$ nem felel meg

$n = 1995$, $S(n) = 24$ megfelel, $n = 1995$

$n = 1998$, $S(n) = 27$ nem felel meg

$n = 2001$, $S(n) = 3$ nem felel meg

$n = 2004$, $S(n) = 6$ nem felel meg

$n = 2007$, $S(n) = 9$ nem felel meg

$n = 2010$, $S(n) = 3$ nem felel meg

$n = 2013$, $S(n) = 6$ megfelel, $n = 2013$

$n = 2016$, $S(n) = 9$ nem felel meg

3. Apa egy kör, x idő, $v_a = \frac{1}{x}$

   Fia egy kör, y idő, $v_f = \frac{1}{y}$

   $v_a > v_f$

	kör	v	t
Apa	l	x	$\frac{l}{x}$
Fiú	l	y	$\frac{l}{y}$

   Első találkozáskor:

	út	v	t
Apa	$(k+1) * l$	x	$\frac{k+1}{x} * l$
Fiú	$k * l$	y	$\frac{k*l}{y}$

   $\Rightarrow \frac{(k+1)*l}{x} = \frac{k*l}{y}$

   $\Rightarrow \frac{k+1}{x} = \frac{k}{y}$

   Szemben:

	S	v	t
Apa	$\frac{k*l*x}{5y}$	x	$\frac{k*l}{5y}$
Fiú	$\frac{k*l}{5}l$	y	$\frac{k*l}{5y}$

   $\frac{k*l*x}{5y} + \frac{k*l}{5} = l$

   $\frac{k*x}{y} + k = 5$

$$\begin{cases} \frac{k+1}{x} = \frac{k}{y} \\ \frac{k*x}{y} + k = 5. \end{cases}$$

$\frac{k+1}{k} = \frac{x}{y}$

$k * \frac{k+1}{k} + k = 5$

$2k + 1 = 5$

$k = 2$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

Tehát az apa 1.5-szer gyorsabb a fiánál.

4. Összegezve az adottakat:

	oldat	szesz
1.	x	$0.1x$
2.	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3} * 0.1x = \frac{1}{15}x$
3.	$\frac{5}{6}x$	$\frac{1}{15}x$
	100%	$y\%$

$y\% = \frac{100*\frac{1}{15}x}{\frac{5}{6}x} = 100 * \frac{1}{15} * \frac{5}{6} =$

$= \frac{100}{18} = \frac{50}{9} \approx 5\frac{5}{9}\%$

5. a, b, c számtani sorozat, tehát ebből a zkövetkezik, hogy $2b = a + c$, másképpen $b - a = c - b$.

Ellenőrzés:

$(a^2 + ac + c^2) * 2 =^? a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2$

$2a^2 + 2ac + 2c^2 =^? a^2 + c^2 + 2b^2 + b(a + c)$

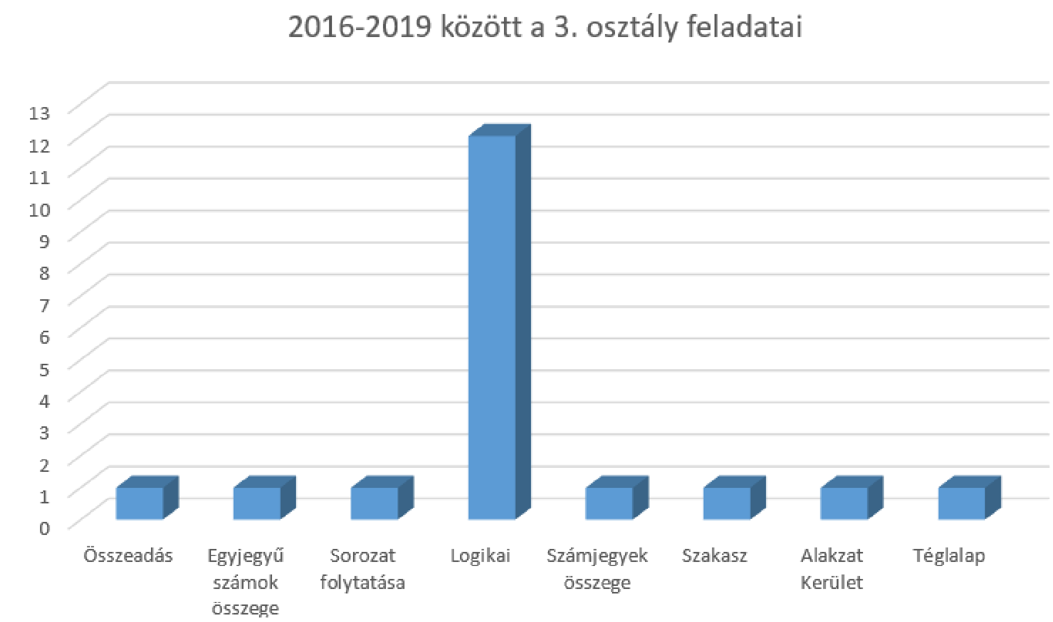
$a^2 + 2ac + c^2 =^? 4b^2$

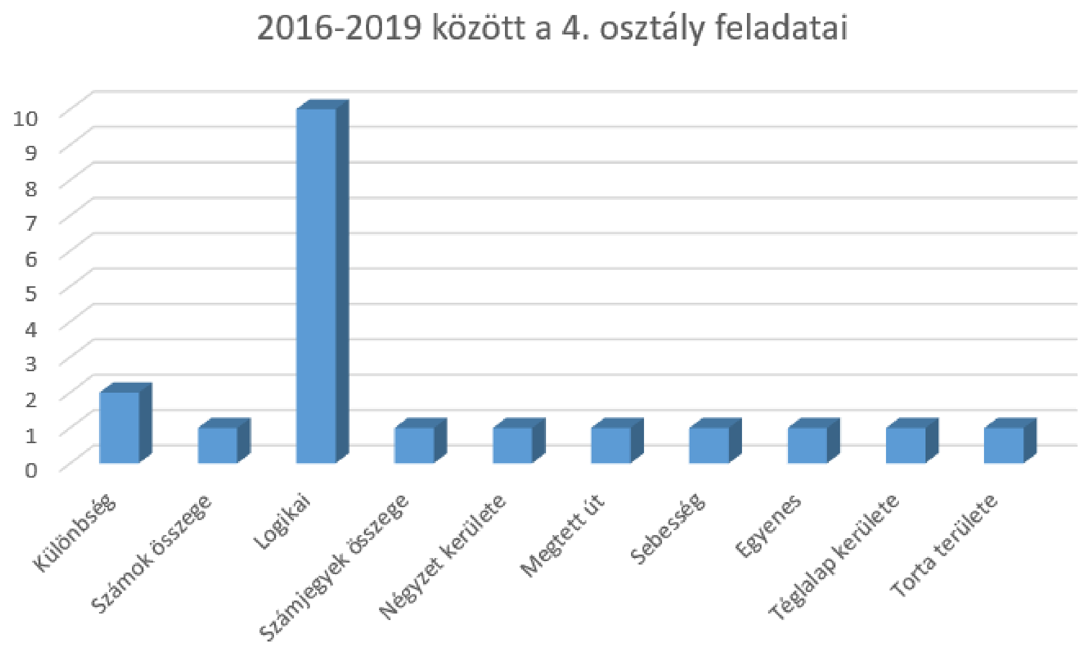
$(a + c)^2 =^? (\frac{a+c}{2})^2$

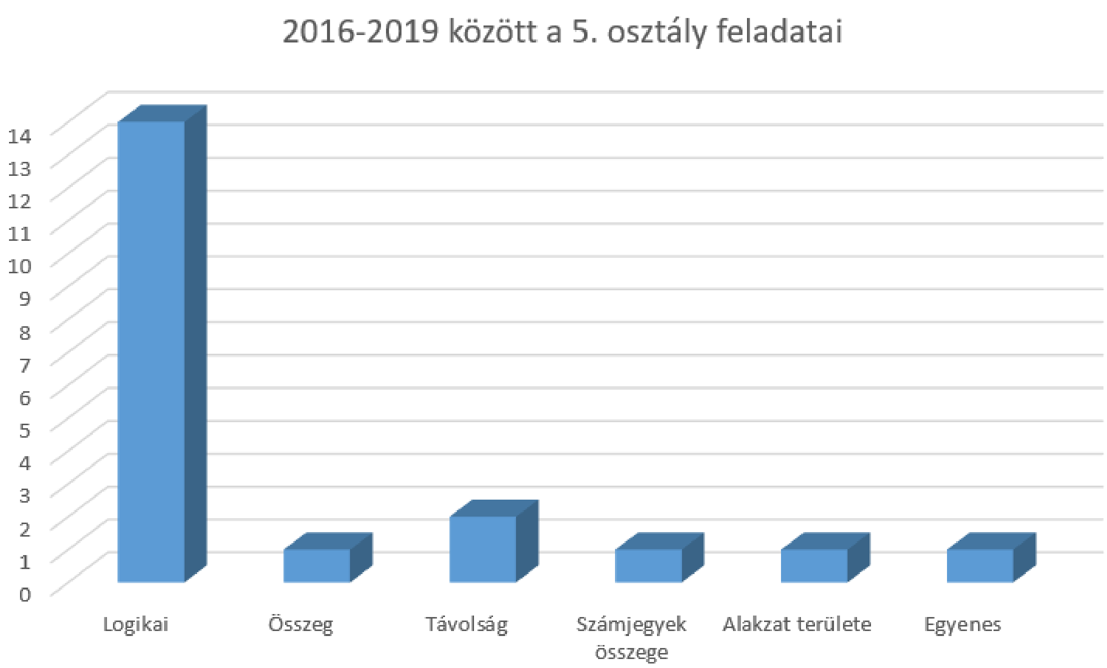
$(a + c)^2 =^? (a + c)^2$

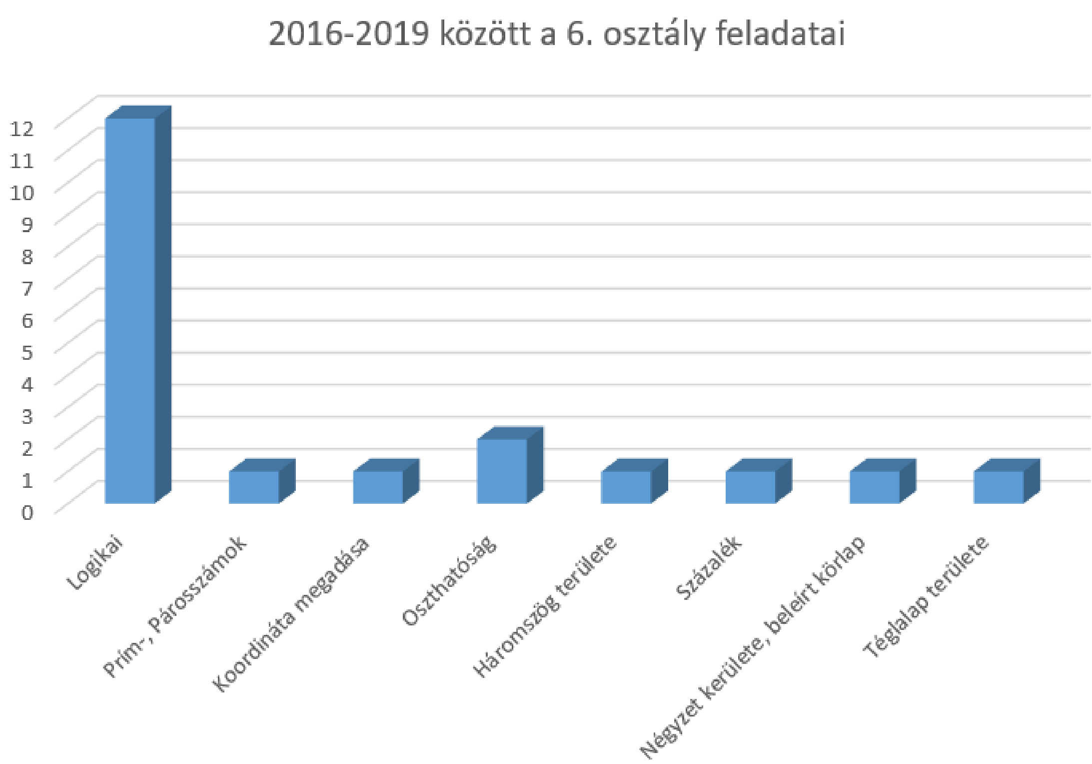
Tehát igaz.

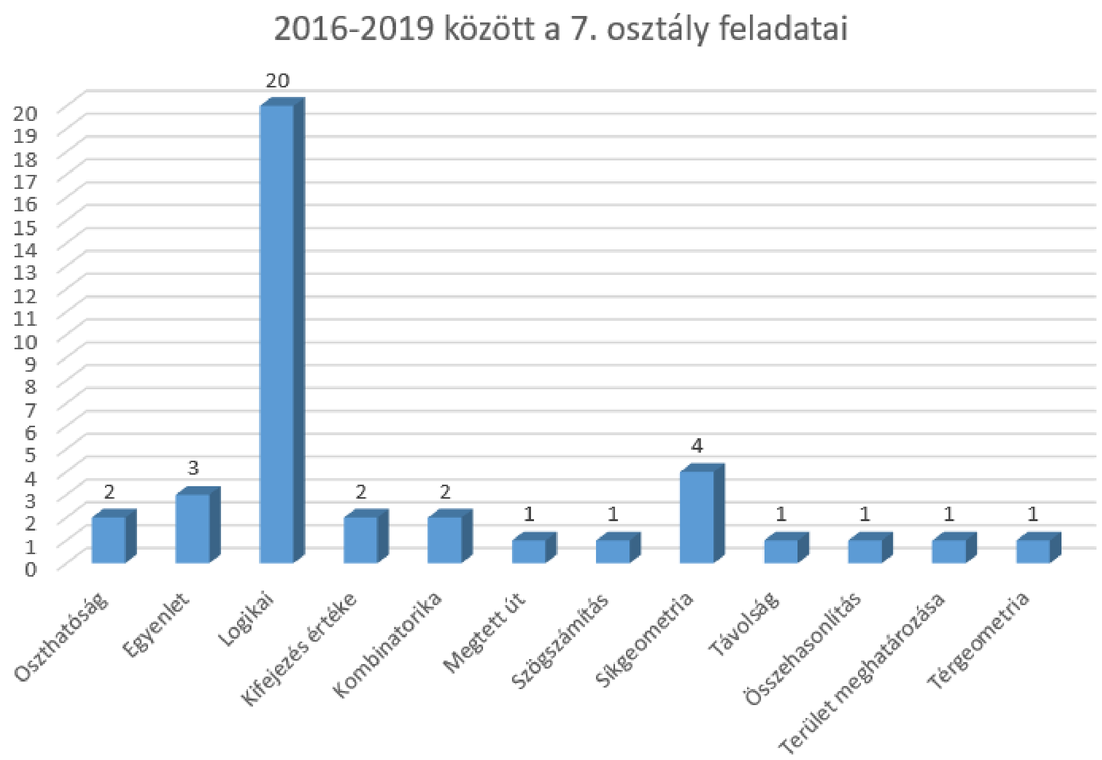
9. A matematika versenyek feladatainak elemzése

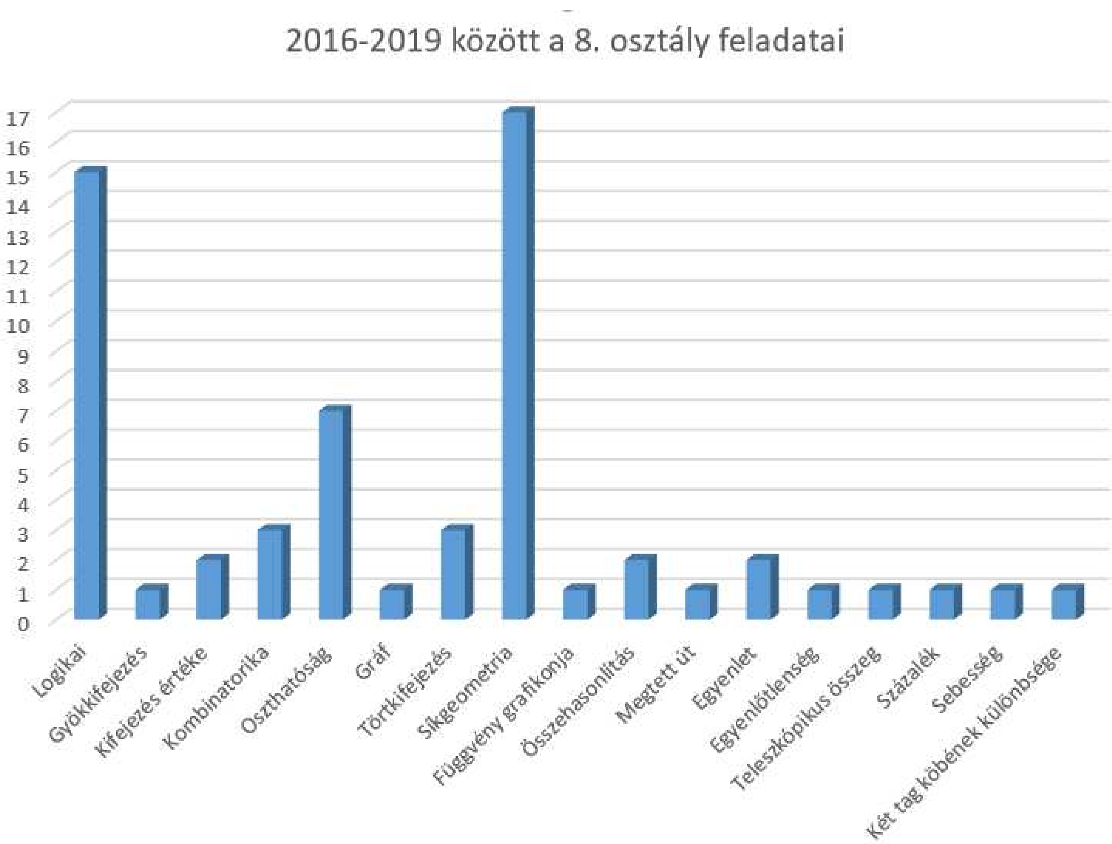


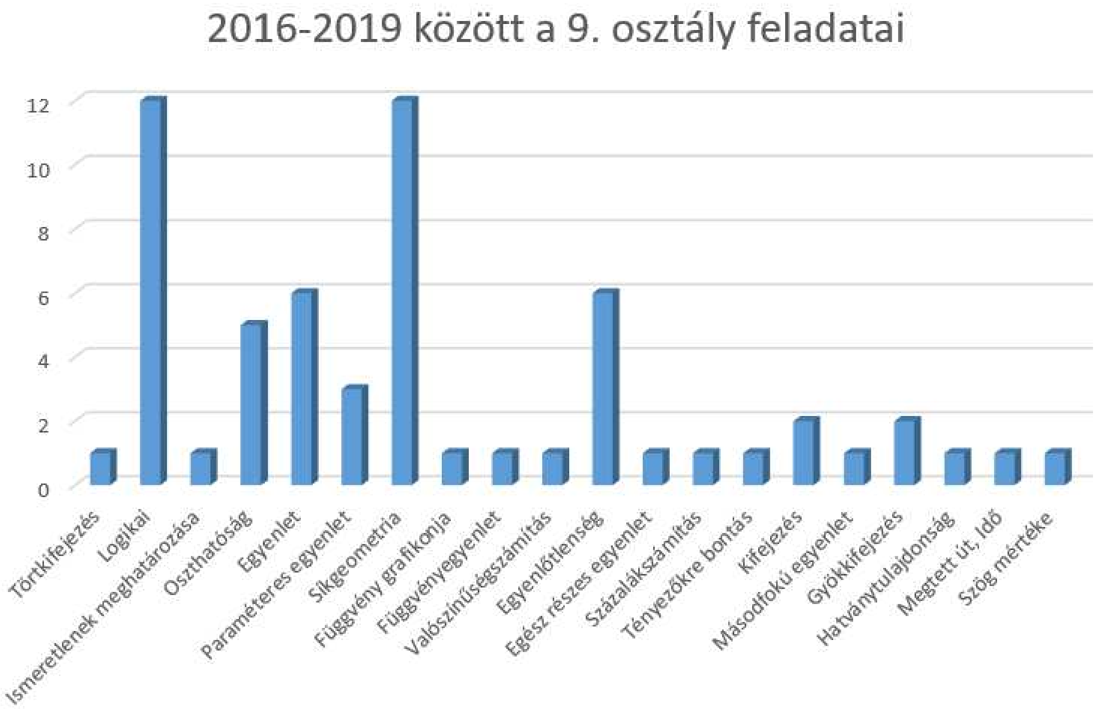


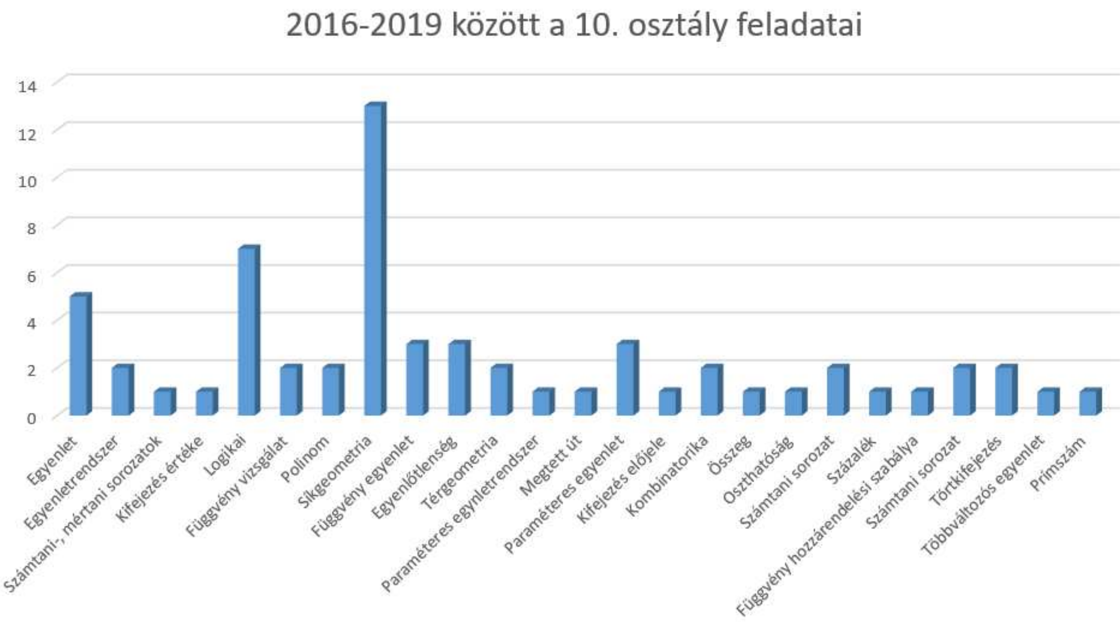

2016-2019 között a 5. osztály feladatai
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Logikai
Összeg
Távolság
Számjegyek összege
Alakzat területe
Egyenes

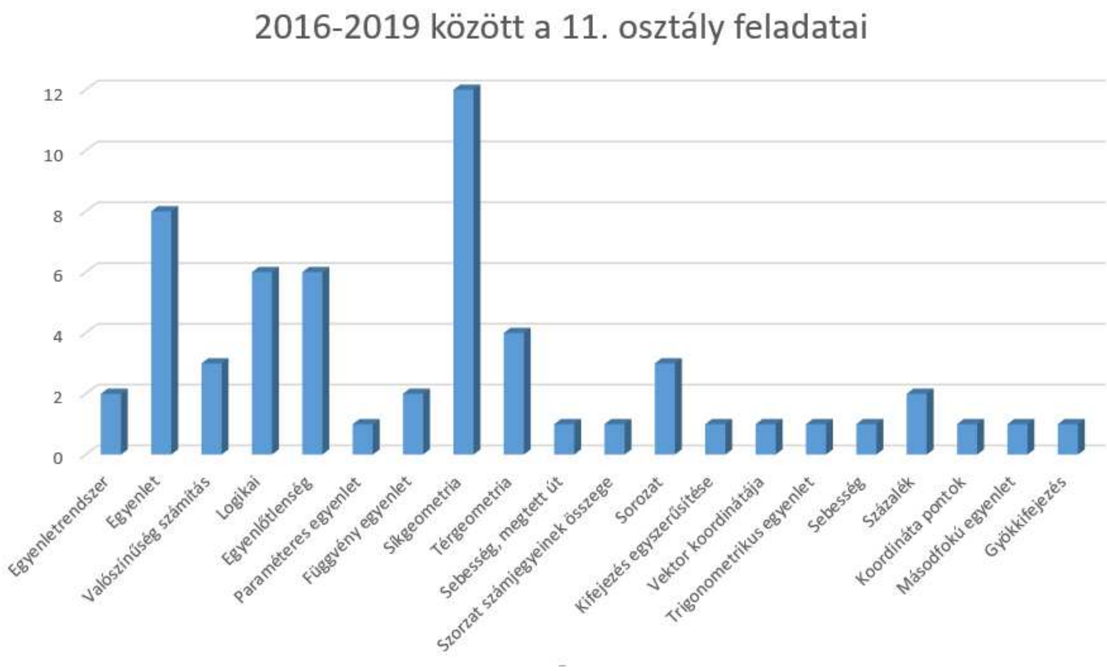

2016-2019 között a 6. osztály feladatai
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Logikai
Prím-, Párosszámok
Koordináta megadása
Oszthatóság
Háromszög területe
Százalék
Négyzet kerülete, beleírt körlap
Téglalap területe


2016-2019 között a 7. osztály feladatai
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
3
20
2
2
1
1
4
1
1
1
1
Oszthatóság
Egyenlet
Logikai
Kifejezés értéke
Kombinatorika
Megtett út
Szögszámítás
Síkgeometria
Távolság
Összehasonlítás
Terület meghatározása
Térgeometria


2016-2019 között a 8. osztály feladatai
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Logikai
Gyökkifejezés
Kifejezés értéke
Kombinatorika
Oszthatóság
Gráf
Törtkifejezés
Síkgeometria
Függvény grafikonja
Összehasonlítás
Megtett út
Egyenlet
Egyenlőtlenség
Teleszkópikus összeg
Százalék
Sebesség
Két tag köbének különbsége


2016-2019 között a 9. osztály feladatai
12
10
8
6
4
2
0
Törtkifejezés
Logikai
Ismeretlenek meghatározása
Oszthatóság
Egyenlet
Paraméteres egyenlet
Síkgeometria
Függvény grafikonja
Függvényegyenlet
Valószínűségszámítás
Egyenlőtlenség
Egész részes egyenlet
Százalékszámítás
Tényezőkre bontás
Kifejezés
Másodfokú egyenlet
Gyökkifejezés
Hatványtulajdonság
Megtett út, Idő
Szög mértéke


2016-2019 között a 10. osztály feladatai
14
12
10
8
6
4
2
0
Egyenlet
Egyenletrendszer
Számtani-, mértani sorozatok
Kifejezés értéke
Logikai
Függvény vizsgálat
Polinom
Síkgeometria
Függvény egyenlet
Egyenlőtlenség
Térgeometria
Paraméteres egynletrendszer
Megtett út
Paraméteres egyenlet
Kifejezés előjele
Kombinatorika
Összeg
Oszthatóság
Számtani sorozat
Százalék
Függvény hozzárendelési szabálya
Számtani sorozat
Törtkifejezés
Többváltozós egyenlet
Prímszám



A 2016-2019 évek között álltalam vizsgált Kárpátaljai matematika versenyek 3-11. osztályos feladatoknak a túlnyomó többsége logikai feladat. Mint a *2016-2019 között a 3. osztály feladatai* diagrammon is látható a többi témakörhöz képest, hogy a logikai feladatok a feladatsornak több mint a felét teszi ki. Hasonlóan a 4.-6. osztályos feladatsorokhoz. Emiatt a pedagógusoknak ajánlott nagyobb hangsúlyt fektetnie oktatáskor a gyermekek logikus gondolkodásának fejlesztésére.

A 7. osztályos feladatok elemzéskor megfigyelhető az, hogy még mindig a logikai feladatokra fektetnek nagyobb hangsúly, de a 8. osztálynál már látszik más témakörű feladatok számának jelentős növekedése. Mint a *2016-2019 között a 8. osztály feladatai* diagrammon is látható, hogy a felkészülésnél érdemes a logikai feladatokon kívül, síkgeometriai és oszthatósági feladatokat is gyakorolni. A 8. osztályos síkgeometriai feladatai között szerepelnek: háromszöggel, téglalappal, trapézzal, körlappal, paralelogrammával kapcsolatos feladatok, tehát érdemes ezen témakörök átismétlése felkészüléskor.

A 9. osztálynál még több témakörre van több hangsúly fektetve. Mint a *2016-2019 között a 9. osztály feladatai* diagrammon is látható, hogy a felkészülésnél síkgeometriai, oszthatóság, és logikai feladatokon kívül még ajánlott az egyenletek, egyenlőtlenségek és paraméteres egyenletek témakörének átismétlése is. A 9. osztályos síkgeometriai feladatai között szerepelnek: háromszögbe írt-, körül írt körvonal, háromszög szögeinek kiszámítása, paralelograma kerülete, téglalap, tehát érdemes ezen témakörök átismétlésére felkészüléskor nagyobb hangsúlyt fektetnek.

A 10-11. osztálynál az eddigi témakörökön kívűl más témakörök is nagyobb hangsúly van fektetve. Mint a *2016-2019 között a 10. osztály feladatai* diagrammon is látható, hogy a felkészülésnél síkgeometriai, oszthatóság, és logikai feladatokon kívül még ajánlott az egyenletek, egyenlőtlenségek és paraméteres egyenletek, valamint a térgeometria, kombinatorikapolinom, függvény vizsgálat, valószínűségszámítás témakörének átismétlése. A 10-11. osztályos síkgeometriai feladatai között szerepelnek: négyzetek, körlapok területe, trapéz és területe, paralelogramma, szög meghatározása, szög cosinusa, háromszög, konvex, konkáv sokszög, tehát érdemes ezen témakörök átismétlése készüléskor. A 10-11. osztályos térgeometriai feladatai között szerepelnek: kocka, egyenes hasáb, gúla témakörök is.

Felhasznált irodalom

[1] Cserepek a magyarországi matematikai tehetséggondozó műhelyekből

http://www.mategye.hu/download/cserepek/cserepek.pdf, 50 o. Letöltés: 2020.04.20

[2] Tantárgyi vetélkedők

http://kmpsz.uz.ua/tantargyi-vetelkedok/zrinyi-ilona-matematikaverseny.html, Letöltés: 2020.04.20

[3] Mategye versenykiírás

http://www.mategye.hu/download/zrinyi/kiiras_019.pdf, 3 o. Letöltés: 2020.04.20

[4] Cserepek a magyarországi matematikai tehetséggondozó műhelyekből

http://www.mategye.hu/download/cserepek/cserepek.pdf, 51 o. Letöltés: 2020.04.20

[5] Zrinyi Ilona matematikaverseny kiírás

http://www.mategye.hu/download/zrinyi/kiiras_2019.pdf, 1 o. Letöltés: 2020.04.20

[6] Balogh Eszter Diplomamunkája

http://genius-ja.uz.ua/images/files/balog-eszterdiplomamunka.pdf, 24-25 o. Letöltés: 2020.04.20

[7] Tanulmányi vetélkedő leírása

http://kmpsz.uz.ua/images/files/tanvetleiras201415javitott.pdf, 18 o. Letöltés: 2020.04.20

[8] Geőcze Zoárd metematikus

http://versenyvizsga.hu/hires-matematikusok/geocze-zoard, Letöltés: 2020.04.20

[9] Tanulmányi vetélkedő leírása

http://kmpsz.uz.ua/images/files/tanvetleiras201415javitott.pdf, 19 o. Letöltés: 2020.04.20

[10] Szedlák Ferenc matematika emlékverseny

https://karpataljalap.net/2003/12/12/szedlak-ferenc-matematikai-emlekverseny, Letöltés: 2020.04.20

[11] Bólyai János matematika vetélkedő

https://karpataljalap.net/2013/12/19/xx-bolyai-janos-matematikai-vetelkedo-munkacson, Letöltés: 2020.04.20

[12] Geőcze Zoárd Matematika verseny $2016 - 9$

$https : //kop.at.ua/kmpsz16/geocze2016_{o}szt09.pdf$, Letöltés: 2020.05.20

[13] Geőcze Zoárd Matematika verseny $2016 - 10$

$https : //kop.at.ua/kmpsz16/geocze2016_{o}szt10.pdf$, Letöltés: 2020.05.20

[14] Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny $2016 - 3$

$https : //kop.at.ua/kmpsz16/terebesi2016_{o}szt03.pdf$, Letöltés: 2020.05.20

[15] Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny $2016 - 5$

$https : //kop.at.ua/kmpsz16/terebesi2016_{o}szt05.pdf$, Letöltés: 2020.05.20

[16] Terebesi Viktort Matematika Emlékverseny 2017

http://kmpsz.uz.ua/tantargyi-vetelkedok-feladatsorai/201617.html, Letöltés: 2020.05.20

Összegzés

Diplomamunkám során áttekintettem a Kárpátalján megrendezésre kerülő matematikai versenyek feladatsorait. Felkutattam öt kárpátaljai matematika verseny rövid történetét. Majd összegyűjtöttem a versenyeken használt feladatsorokat négy évre visszamenőleg. Ezek megoldását a nyolcadik fejezet tartalmazza. Az szakdolgozat hiánypótló jellegű mivel ezeknek az információknak a többsége nem található meg a szakirodalomban. Így ez egy forráselemző dolgozat.

A forrásokat elemezve levonhatjuk a következtetést, hogy Kárpátalján évente hat magyar nyelvű matematika verseny kerül megrendezésre. Ezek közül egy állami szevezésű, a többi alapítványi vagy civil kezdeményezés. A versenyek közül kettő tesztverseny, míg a többi feladatmegoldó megmérettetés. Ezeknek a tükrében elmondhatjuk, hogy Kárpátalján a matematika iránt érdeklődő diákoknak, kortól függetlenül, számos lehetősége van arra, hogy kibontakoztassa és megmutassa tehetségét.

Резюме

Під час виконання дипломної роботи я переглянула завдання математичних змагань, що проходили на Закарпатті. Я опрацювала коротку історію п’яти закарпатських змагань з математики. Потім я і зібрала всі завдання, які використовувались на змаганнях, за останні чотири роки.

Розв'язка цих завдань розміщена у восьмому розділі. Тема дипломної роботи до сих пір не опрацьована у фаховій літературі.

Дипломна робота опирається на методи аналізу первинних джерел, та накопичення та аналізу фактів.

На основі вивчених джерел, ми можемо зробити висновок, що на Закарпатті щороку проводиться шість угорськомовних змагань з математики. Один з них фінансується державою, а решта – благодійними фондами чи громадянськими організаціями. З цих два конкурси – це тестові змагання, а інші містять розв'язування задач.

У світлі цього можна сказати, що учні, які цікавляться математикою на Закарпатті, незалежно від віку, має багато можливостей розвивати та визначати свої знання та талант.

UNICHECK

Власник документу:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
27.05.2020 23:24:44 EEST

Дата звіту:
27.05.2020 23:30:04 EEST

ID **перевірки:**
1003551112

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID **користувача:**
92712

Назва документу: proba1_javitott

ID **файлу:** 1003565883 **Кількість сторінок:** 171 **Кількість слів:** 36669 **Кількість символів:** 197834 **Розмір файлу:** 2.20 MB

8.44% Схожість

Найбільша схожість: 1.48% **з джерело** http://kmpsz.uz.ua/images/files/terebesi-viktor-emlekverseny-feladatsor-1.doc

8.44% Схожість з Інтернет джерелами 674 .... Page 173

0.05% Текстові збіги по Бібліотеці акаунту 30 .... Page 181

0% Цитат

Не знайдено жодних цитат

71.9% Вилучень

Джерела менше, ніж 8 слів автоматично вилучено

Не знайдено жодного вилученого тексту з Інтернету

71.9% Вилученого тексту з Бібліотеки 1 .... Page 181

Підміна символів

Заміна символів 56

Nyilatkozat

Alulírott, Jakab Fruzsina Stefánia 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSC diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalmat, eszközöket stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatom a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.