ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Дипломна робота

Дикість скінченної p-групи над локальними кільцями

Староста Микола Миколайович

Студент IV-го курсу

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

Освітній рівень: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол №3 / 2019

Науковий керівник: **Стойка М. В.**
доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**
к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 2020 року

Протокол № ______ / 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Дипломна робота

Дикість скінченної p-групи над локальними кільцями

Освітній рівень: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Староста Микола Миколайович

Науковий керівник: **Стойка М. В.**

доцент

Рецензент: **Кучінка К. Й.**

к. ф.-м. н

Берегове
2020

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

VÉGES P-CSOPORT VADSÁGA LOKÁLIS GYŰRŰK FELETT

Szakdolgozat

Készítette: Sztároszta Miklós

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Sztojka Miroszláv

docens

Recenzens: Kucsinka Katalin

fizika és matematika tudományok kandidátusa

Beregszász – 2020

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A reprezentáció elmélet kezdetét veszi a permutáció csoportok és mátrix algebrák tanulmányozásával. Az ilyen megfontolás fontosságát a csoportok tanulmányozásához jól értette F. G. Frobenius és A. Burnside, mivel az elméleti számításokat könnyebb elvégezni egy mátrix csoportban mint egy absztrakt csoportban.

A csoportok reprezentáció elméletét egy kellően teljes és könnyen használható formában F. G. Frobenius fejlesztette ki a 19. század utolsó két évtizedében. F. G. Frobenius és A. Burnside-nak köszönhetően a reprezentáció elmélet fontos szerepet játszott a véges absztrakt csoportok elméletben.

Az első könyv, amely rendszeres bemutatást adott a reprezentáció elméletéről 1911-ben jelent meg (A. Burnside), és számos eredményeket tartalmazott a véges csoportokról. Az 1929-ben megjelent E. Noether munkája szoros kapcsolatot mutatott ki a reprezentáció elmélet és a modulok elmélete a gyűrűk és az algebrák felett.

Egy másik fontos állomás a reprezentáció elmélet kidolgozásában R. Brauer munkája volt a véges csoportok moduláris reprezentációiról. Az F. G. Frobenius klasszikus elméletéhez hasonlóan R. Brauer elméletének számos fontos alkalmazása van a véges csoportok elméletében.

Ugyanakkor kapcsolatot alakit ki az algebrák reprezentáció elméletével, új modulokkal és gyűrűkkel kapcsolatos problémákat javasol a minimalitás feltétellel, és feltárja az alapvető jelentőségét a számelméleti kérdéseknek a csoport- és a reprezentáció elméletben.

Az említett témák intenzív kutatásának időszakában a csoportok mátrix reprezentációját számos szerző tanulmányozta, olyanok mint : G. Higman, V. Bashev, I. Shur, R. Frucht, K. Jamazaki, K. Ringel, K. W. Roggenkamp, T. Hannulo, S. Kruglyak , I. Reiner , S. Berman, P. M. Gudivok, V. M. Bondarenko, Yu A. Drozd, L. Barannyk és mások.

Fontos kérdések, melyek a mátrix reprezentáció elmélet tanulmányozása során jelennek meg a véges csoport nem ekvivalens felbonthatatlan reprezentációk számáról, az irreducibilis reprezentációkról valamint a csoportok vadságáról vagy szelídségéről szól-nak. A szakdolgozatban számos fontos eredmény van megadva amelyek kapcsolódnak ezen kérdésekhez, különös tekintettel a bizonyításaik vannak bemutatva.

Az 5. fejezetben egy másodrendű ciklikus csoport vadsága van bebizonyítva valamely lokális faktoriális gyűrű felett.

1. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben ismertetjük a csoport mátrixreprezentáció elméletének jól ismert definícióit, amelyekre szükség lesz a továbbiakban. Legyen adott K egy egységelemes kommutatív gyűrű, $GL\left(n, K\right)$ az összes invertálható n-es mátrixok csoportja a K gyűrű felett és G egy véges csoport, melynek rendje $|G|$.

1.1. definíció. *A $\Gamma : G \to GL\left(n, K\right)$ homomorfizmust a G csoportról a teljes lineáris csoportra $GL\left(n, K\right)$-ra n-edrendű mátrix reprezentációjának nevezzük a G csoportnak a K gyűrű felett.*

1.2. definíció. *Γ és Γ' n-edrendű mátrix reprezentációit a G csoportnak a K gyűrű felett K-ekvivalensnek nevezzük, ha létezik olyan $C \in GL\left(n, K\right)$ mátrix, melyre $C^{-1}\Gamma\left(g\right)C = \Gamma'\left(g\right)$, tetszőleges $g \in G$.*

Nyilvánvaló, hogy az összes n-edrendű mátrix reprezentációk halmaza a G csoportnak a K gyűrű felett K-ekvivalens reprezentációkat tartalmazó osztályokra bontódik.

1.3. definíció. *Γ a G csoport K gyűrű feletti mátrix reprezentációját reducibilisnek nevezzük a K gyűrű felett, ha az K-ekvivalens a Γ' reprezentációval:*

$$g \to \Gamma'\left(g\right) = \begin{pmatrix} \Gamma_1\left(g\right) & T\left(g\right) \\ 0 & \Gamma_2\left(g\right) \end{pmatrix}, g \in G$$

ahol Γ_i n_i-rendű K gyűrű feletti mátrix reprezentációja a G csoportnak $(n_i > n; i = 1, 2)$. Az ellenkező esetben a Γ reprezentációt irreducibilisnek nevezzük a K gyűrű felett.

1.4. definíció. *Γ a G csoport K gyűrű feletti mátrix reprezentációját felbonthatónak nevezzük a K gyűrű felett, ha az K-ekvivalens a Γ' reprezentációval:*

$$g \to \Gamma'\left(g\right) = \begin{pmatrix} \Gamma_1\left(g\right) & 0 \\ 0 & \Gamma_2\left(g\right) \end{pmatrix}, g \in G \qquad (1)$$

ahol $\Gamma_i\,(i=1,2)$ *K gyűrű feletti mátrix reprezentációja a G csoportnak.*

Ha a Γ reprezentáció K-ekvivalens az (1) alakú reprezentációval, akkor a Γ reprezentációt a Γ_1 és a Γ_2 reprezentációk összegének nevezzük, és a következőképpen jelöljük:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

1.5. definíció. *Γ a G csoport K gyűrű feletti mátrix reprezentációját teljesen reducibilisnek nevezzük a K gyűrű felett, ha az K-ekvivalens a Γ' reprezentációval:*

$$g \to \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_r(g) \end{pmatrix}$$

ahol $\Gamma_i\,(i=1,\ldots,r)$ *irreducibilis mátrix K-reprezentációja a Gcsoportnak.*

1.1. tétel. *(Maschke-tétel) Legyen K^* multiplikatív csoportja a K gyűrűnek és G egy véges $|G|$ rendű csoport. Ha $|G| \in K^*$, akkor tetszőleges K gyűrű feletti mátrix reprezentációja a G csoportnak teljesen reducibilis.*

Nyilvánvaló, hogy ha a G csoport K gyűrű feletti mátrix reprezentációja irreducibilis a K gyűrű felett, akkor az felbonthatatlan a K gyűrű felett. Megjegyezzük, hogy ennek az állításnak az ellenkezője nem lesz igaz.

1.6. definíció. *Legyen adott $\Gamma(A_1,A_2)$ a G csoport K gyűrű feletti mátrix reprezentációja, mely tetszőleges A_1 és A_2 n-es mátrixoktól függ (abban az értelemben, hogy az összes mátrix reprezentáció tömbös alakú, és minden tömb nem kommutatív polinom az A_1és A_2 mátrixoktól) a K gyűrű fölött (n egy tetszőleges természetes szám). Azt mondjuk hogy a G csoport vad a K gyűrű felett ha a $\Gamma(A_1,A_2)$ és $\Gamma(B_1,B_2)$ ekvivalenciájukból az következik, hogy az $\left(\overline{A_1},\overline{A_2}\right)$ és $\left(\overline{B_1},\overline{B_2}\right)$ pár mátrixok hasonlóak a $\overline{K}=K/V$ test felett (V valamely maximális ideálja a K gyűrűnek, $\overline{A}$ egy $\overline{K}$ test feletti mátrix, amelyet az A feletti mátrixból kapunk ha összevonjuk az elemeit V ideál modulo szerint).*

Különböző alkalmazásokkal kapcsolatban érdekes lehet a következő feladat :

1. Feladat. Határozza meg az összes véges csoportot, melyek K gyűrű feletti mátrix reprezentációinak leírása nem foglalja magában a pár mátrixok hasonlóságának feladatát valamely test fölött. Az ilyen csoportokat gyakran szelid(tame) csoportoknak nevezzük.

A véges csoportok reprezentációi test felett már tanulmányozva vannak. Ha a reprezentációs típusról beszélünk, akkor a klasszikus esetben, amikor a test karakterisztikája nem osztja a csoport rendjét(nem moduláris est), akkor a csoport az ekvivalencia pontossággal, végtelen számú felbonthatatlan reprezentációkat tartalmaz. Az ellenkező esetben, amelyet modulárisnak neveznek, véges számú felbonthatatlan reprezentációk csak olyan csoportoknak van, melyek Sylow ciklikus p-részcsoportal rendelkeznek, ahol p a test karakterisztikája. A moduláris esetben a csoport többsége vad, vagyis az ekvivalens reprezentációk leírásának problémája a lineáris algebra megoldatlan klasszikus problémáját tartalmazza a pár mátrixok hasonlóságáról. Azokat a csoportokat amelyek lehetővé teszik a reprezentációk leírását, szelíd (tame) csoportoknak nevezzük (a szelíd és vad mátrixok problémáját definiálta J. A. Drozd [1]). A véges szelíd csoportokat a moduláris esetben teljesen leírták V. M. Bondarenko és J. A Drozd [2].

2. fejezet

Véges csoportok test feletti felbonthatatlan reprezentációja

V. A. Bashev [3] 1961-ben az ekvivalencia pontossággal meghatározta a véges nem ciklikus p-csoport felbonthatatlan p-karakterisztikájú F test feletti mátrix reprezentációit. Valamint leírta, az ekvivalencia pontossággal, az összes felbonthatatlan mátrix reprezentációit a $(2, 2)$ típusú Abel csoportnak egy 2 karakterisztikájú test felett.

A következő eredményt G. Higman kapta meg [4].

Legyek K egy test melynek karakterisztikája $p > 0$

2.1. tétel. ([4]) *A $G = \langle a \rangle$ p^r rendű ciklikus p-csoport összes felbonthatatlan, nem ekvivalens mátrix reprezentációja a K gyűrű felett a következő reprezentációk lesznek:*

$$\Gamma_j : a \to V_j \, (j = 1, 2, \ldots, p^r)$$

ahol V_j egy Jordán-tömb, melynek a főátlón egységelemek vannak.

2.2. tétel. ([4]) *A $G\,(p, p)$ típusú Abel csoportnak léteznek tetszőlegesen nagy hatványú felbonthatatlan mátrix reprezentációi a K gyűrű felett.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk a következő K gyűrű feletti reprezentációját a $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ $(a^p = b^p = 1)$ csoportnak

$$\Gamma_n : a \to \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = A_n, b \to \begin{pmatrix} E_n & V_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = B_n,$$

ahol E egy n-es egységmátrix és n pedig természetes szám. Legyen $C - 2n$-es mátrix a K gyűrű felett, melyre $A_nC = CA_n, B_nC = CB_n$.

Ebből következik, hogy a C mátrix alakja:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (\alpha \in K)\,.$$

Következésképpen, C egy invertálható vagy nilpotens mátrix. Ebből és a 2.1 tételből az következik, hogy Γ_n felbonthatatlan reprezentáció a K gyűrű felett.

□

2.3. tétel. ([4]) *Legyen G egy véges p-csoport. A K gyűrű feletti nem ekvivalens felbonthatatlan mátrix reprezentációk száma a G csoportnak véges akkor és csakis akkor, ha a G csoport ciklikus.*

A fent említett következtetések és tételekből Higman tétele [4] következik a véges csoport nem ekvivalens felbonthatatlan mátrix reprezentációk számáról, egy $p > 0$ karakterisztikájú test felett.

2.4. tétel. ([4]) *Legyen G egy véges csoport, melynek H Sylow p-részcsoportja és K egy test, melynek karakterisztikája p. A nem ekvivalens felbonthatatlan mátrix reprezentációk száma a G csoportnak a K gyűrű felett véges, akkor és csakis akkor, ha a G ciklikus csoport.*

V. M. Bondarenko [5] és K. Ringel [6] ekvivalencia pontossággal leírták a felbonthatatlan reprezentációit a diéder csoportnak

$$D_m = \left\langle a, b | a^{2m} = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle (m \in \mathbb{N})$$

a 2 karakterisztikájú test felett.

P. M. Gudivok és E. J. Pohorilyak [7] bebizonyították a következő tételt.

2.5. tétel. ([7]) *Legyen G egy véges p-csoport, melynek a rendje $|G| > 1$, S - p karakterisztikájú test, $R = S\left[x_1, \ldots, x_n\right] (n > 1)$, m egy tetszőleges 1-től különböző természetes szám. Létezik végtelen sok m-ed rendű nem ekvivalens és nem reducibilis mátrix reprezentációja a G csoportnak az R gyűrű felett.*

P. M. Gudivok, V. S. Drobotenko és O. I. Lichtmann [8] jelentős eredményeket értek el a véges csoportok reprezentációiról a Z_m , m modulo maradékosztályok gyűrűje felett. A következő tételeket kapták.

2.6. tétel. ([8]) *Ha* $m \equiv 0\,(mod\,p^2)$*, akkor minden* G p*-csoport, melynek rendje* $|G| > 1$*, tetszőlegesen nagy rendű irreducibilis mátrix reprezentációval rendelkezik a* Z_m *gyűrű felett.*

2.7. tétel. ([8]) *A* t *rendű* G *csoport tetszőlegesen nagy rendű irreducibilis mátrix reprezentációval rendelkezik a* Z_m *gyűrű felett akkor és csakis akkor, ha létezik egy olyan* p *prím szám, melyre teljesül következő feltételek egyike:*

1. $t \equiv 0\,(mod\,p)$ *és* $m \equiv 0\,(mod\,p^2)$;

2. $m \equiv 0\,(mod\,p)$ *és a* G *csoport Sylow* p*-részcsoportja nem ciklikus.*

P. M. Gudivok [9] megoldotta a véges p-csoport p-karakterisztikájú integritás tartomány feletti felbonthatatlan mátrix reprezentációk rendjeinek halmazának végességéről szólo feladatát.

2.8. tétel. ([9]) *Legyen* G *egy véges* p*-csoport, melynek a rendje* $|G| > 1$*,* K *egy* p*-karakteriszikájú főideálok tartománya . A* G *csoport* R *gyűrű feletti felbonthatatlan mátrix reprezentációk rendjeinek halmaza véges akkor és csakis akkor, ha a* G *csoport ciklikus és teljesül egyike a következő feltételeknek:*

1. K *egy test;*

2. G *egy* 2 *rendű csoport.*

3. fejezet

Véges csoportok mátrix reprezentációja és a pár mátrixok problémája test felett

Először olyan reprezentációkat tanulmányozták, amelyeknél a test karakterisztikája nem osztja a csoport rendjét, és kiderült hogy mindegyik véges típusú(felbonthatatlan mátrix reprezentációk rendjeinek halmaza véges); abban az esetben, ha a test karakterisztikája $p\,(p > 0)$ osztja a csoport rendjét,először levoltak írva a véges típusú csoportok és azok voltak a ciklikus Sylow p-részcsoportokkal rendelkező csoportok. Ezután bevolt bizonyítva a $(2, 2)$ típusú csoport szelidsége (V. A. Bashev) és a (p, p) csoport vadsága amikor $p \neq 2$ (P.N. Gudivok, nem publikált eredménye, és S.A. Kruglyak) valamint a $(2, 2, 2)$ és $(2, 4)$ tipusú csoportok vadsága (S. Brenner), majd a diéder és kvazidiéder csoportok szelídsége (V.M. Bondarenko). Végül, véges csoportok fix karakterisztikájú test feletti szelídség kritérium volt bebizonyítva (V.M. Bondarenko, J. A. Drozd).
Ismeretes, hogy a véges csoportok vadságának problémája nagyon jól tanulmányozott testek felett. S.A. Kruhlyak $[10]$ bebizonyította a következő tételt.

3.1. tétel. $([10])$ *Legyen G egy véges nem ciklikus p-csoport és K egy test, melynek karakterisztikája $p\,(p \neq 2)$. A G csoport vad lesz a K test felett.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a tételt elegendő bebizonyítani egy $G\,(p, p)$ típusú Abel csoportra: $a^p = b^p = 1, ab = ba$. Megvizsgáljuk a G csoport következő K test feletti

$\Gamma(A,B)$ reprezentációját

$$a \to \Gamma_a(A,B) = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & A \\ 0 & 0 & E & E \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix};$$

$$b \to \Gamma_b(A,B) = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & B \\ 0 & 0 & E & A \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix};$$

(E egy n-es egységmátrix, A és B tetszőleges n-es mátrixok a K test felett).

Legyen $\Gamma(A,B)$ és $\Gamma(A',B')$ a G csoport K test feletti ekvivalens mátrix reprezentációja, vagyis létezik olyan $C \in GL(n,L)$ mátrix, hogy $\Gamma_a(A,B)\,C = C\Gamma_a(A',B')$, $\Gamma_b(A,B)\,C = C\Gamma_b(A',B')$.

Felirva a $\Gamma_a(A,B)\,C = C\Gamma_a(A',B')$ mátrix egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & A \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & A' \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} C_{11}+C_{31} & C_{12}+C_{32} & C_{13}+C_{33} & C_{14}+C_{34} \\ C_{21}+AC_{41} & C_{22}+AC_{42} & C_{23}+AC_{43} & C_{24}+AC_{44} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{11}+C_{13} & C_{12}A'+C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{21}+C_{23} & C_{22}A'+C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{31}+C_{33} & C_{32}A'+C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{41}+C_{43} & C_{42}A'+C_{44} \end{pmatrix}.$$

Egyelőek a (1,1) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{11} + C_{31} = C_{11},$$

innen

$$C_{31} = 0.$$

Egyelőek a (2,1) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{21} + AC_{41} = C_{21},$$

innen

$$C_{41} = 0.$$

Egyelőek a (1,2) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{12} + C_{32} = C_{12},$$

innen

$$C_{32} = 0.$$

Egyelőek a (2,2) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{22} + AC_{42} = C_{22},$$

innen

$$C_{42} = 0.$$

Egyelőek a (2,4) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{24} + AC_{44} = C_{22}A' + C_{24},$$

innen

$$AC_{44} = C_{22}A'.$$

Egyelőek a (3,3) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{33} = C_{31} + C_{33},$$

innen

$$C_{31} = 0.$$

Egyelőek a (1,3) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{13} + C_{33} = C_{11} + C_{13},$$

innen

$$C_{33} = C_{11}.$$

Azután, felirjuk a $\Gamma_b(A, B) C = C\Gamma_b(A', B')$. mátrix reprezentációját

$$\begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & B \\ 0 & 0 & E & A \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & B' \\ 0 & 0 & E & A' \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

innen kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} C_{11}+C_{21} & C_{12}+C_{22} & C_{13}+C_{23} & C_{14}+C_{24} \\ C_{21}+BC_{41} & C_{22}+BC_{42} & C_{23}+BC_{43} & C_{24}+BC_{44} \\ C_{31}+AC_{41} & C_{32}+AC_{42} & C_{33}+AC_{43} & C_{34}+AC_{44} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{11}+C_{12} & C_{13} & C_{12}B'+C_{13}A'+C_{14} \\ C_{21} & C_{21}+C_{22} & C_{23} & C_{22}B'+C_{23}A'+C_{24} \\ C_{31} & C_{32}+C_{32} & C_{33} & C_{32}B'+C_{33}A'+C_{34} \\ C_{41} & C_{41}+C_{42} & C_{43} & C_{42}B'+C_{43}A'+C_{44} \end{pmatrix}.$$

Egyelőek a (1,1) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{11}+C_{21}=C_{11},$$

innen

$$C_{21}=0.$$

Egyelőek a (2,1) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{21}+BC41=C_{21},$$

innen

$$C_{41}=0.$$

Egyelőek a (1,2) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{12}+C_{22}=C_{11}+C_{12},$$

innen

$$C_{11}=C_{22}.$$

Egyelőek a (1,3) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{13}+C_{23}=C_{13},$$

innen

$$C_{23}=0.$$

Egyelőek a (2,4) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{24}+BC_{44}=C_{22}B'+C_{23}A'+C_{24},$$

innen

$$BC_{44} = C_{22}B'.$$

Egyelőek a (2,3) helyen lévő elemek, tehát

$$C_{23} + BC_{43} = C_{23},$$

innen

$$C_{43} = 0.$$

Ezután megkapjuk a C mátrix alakját:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{11} & 0 & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix}$$

és $AC_{11} = C_{11}A', BC_{11} = C_{11}B'$, ahol $C_{11} \in GL(n, L)$. Tehát, az R-reprezentáció leírásának problémája magába foglalja a pár mátrixok hasonlóságának problémáját az R test felett. $\square$

S. Brenner $[11]$ a következő tételt bizonyította be .

3.2. tétel. $([11])$ *Legyen adott a* $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle, (2, 2, 2)$ *típusú csoport és* F 2 *karakterisztikájú test. A* G *csoport vad az* F *test felett.*

Bizonyítás. Először felépítjük a $\Gamma(A, B) : G \to GL(2n, F)$ leképezést:

$$a \to \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma(a),$$

$$b \to \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma(b, A),$$

$$c \to \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma(c, B).$$

Itt az A, B tetszőleges F test feletti n-es mátrixok, E egy n-es egységmátrix. Megmutatjuk, hogy a vizsgált leképezés homomorfizmus, vagyis reprezentációja lesz a G csoportnak. Ehhez ellenőriznünk kell a következő feltételeket:

1. $\Gamma(a)^2 = \Gamma(b, A)^2 = \Gamma(c, B)^2 = E', E' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$;

2. $\Gamma(a), \Gamma(b, A), \Gamma(c, A)$ felcserélhetőek a szorzás műveletére.

Ezután feltételezzük, hogy a $\Gamma(A, B)$ és $\Gamma(A', B')$ ekvivalens $2n$ -edrendű reprezentációk.

Akkor, $\exists C = \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ ($C_i n$- es mátrix az F felett, $i = 1, 2$, melyre $C \in G(2n, F)$, hogy:

$$\Gamma(a) C = C\Gamma(a),$$

$$\Gamma(b, A) C = C\Gamma(b, A'),$$

$$\Gamma(c, B) C = C\Gamma(c, B'),$$

Kapjuk

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 A = A' C_1,$$

$$C_1 B = B' C_1.$$

A C mátrix alakja azt bizonyítja, hogy a C_1 mátrix invertálható. Az utolsó kettő mátrix egyenlőségből pedig kapjuk, hogy az (A, B) és (A', B') pár mátrixok hasonlóak. Tehát a csoport vad a vizsgált test felett (S. Brener)

□

V. M. Bondarenko és Yu. A. Drozd [2] egy véges csoport szelídségének kritériumát bizonyították egy fix p karakterisztikájú test felett.

3.3. tétel. ([2]) *A G véges nem ciklikus csoport szelíd lesz a p karakterisztikájú K test felett akkor és csak akkor ha $(G : G') \leq 4$. Az ellenkező esetben a G csoport vad lesz a K test felett.*

Itt a G' kommutátorát jelöli a G-nek.
E tétel részeseteit G. Higman [4], V.A. Bashev [3] és S.A. Kruglyak [10] bizonyították.

4. fejezet

Null karakterisztikájú gyűrűk esete

Legyen K egységelemes kommutatív gyűrű, V a K gyűrű ideálja.

4.1. definíció. *Az* $a, b \in K$ *kongruensnek nevezzük moduló* V *szerint ha* $a - b \in V$ $(a \equiv b\,(modV))$

4.1. tétel. ([2]) *Legyen* $G = \langle a \rangle$ *ciklikus másodrendű csoport,* K *egy nulla karakterisztikájú lokális faktoriális gyűrű és* $2 \in K^*$, $2 = \theta t_1^{S_1} \dots t_d^{S_d}$*,* $(\theta \in K^* S_i \geq 1, d > 2)\,, t_1 \dots t_d$ *a* K *gyűrű különböző prím elemei (nem asszociált elemek),* $(t_i \neq \theta_j t_j, \theta_j \in K^*, i \neq j)$*. Akkor a* G *csoport vad a* K *gyűrű felett.*

Bizonyítás. Felépítjük a következő leképezést

$$\Gamma :\to \begin{pmatrix} -E & S\,(A,B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a\,(A,B)\,, \tag{4.1}$$

ahol $S\,(A,B) = t_1 t_2 E + t_1 t_3 A + t_2 t_3 B$, $A, B - n-$es mátrixok a K gyűrű felett, E egy n-es egységmátrix.

Tegyük fel hogy $\Gamma_a\,(A,B) \sim \Gamma_a\,(A',B') \Rightarrow \exists C$ a K gyűrű felett hogy

$$\Gamma_a\,(A,B)\,C = C\Gamma_a\,(A',B')\,. \tag{4.2}$$

Könnyen belátható hogy a $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}$, ahol $C_{ij} - n-$es mátrixok a K gyűrű felett $(i, j = 1, 2)\,.$

Az $(4.1)\,, (4.2)$-ből kapjuk:

$$\begin{pmatrix} -E & S\,(A,B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & S\,(A',B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -C_{11} & -C_{12}+S\left(A,B\right)C_{22} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{11} & -C_{11}S\left(A',B'\right)+C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Egyenlőek az $(1,2)$ helyen lévő elemek, tehát

$$-C_{12}+S\left(A,B\right)C_{22}=C_{12}-C_{11}S\left(A',B'\right),$$

$$S\left(A,B\right)C_{22}-C_{11}S\left(A',B'\right)=2C_{12}.$$

Innen:

$$\left(t_1t_2E+t_1t_3A+t_2t_3B\right)C_{22}-C_{11}\left(t_1t_2E+t_1t_3A'+t_2t_3B\right)=2C_{12},$$

$$t_1t_2\left(C_{22}-C_{11}\right)+t_1t_3\left(AC_{22}-C_{11}A'\right)+t_2t_3\left(BC_{22}-C_{11}B'\right)=2C_{12}.$$

Mivel

$$2=\theta t_1^{S_1}t_2^{S_2}\dots t_d^{S_d}$$

innen következik, hogy $C_{22}-C_{11}\in V$, ahol V a K gyűrű maximális ideálja.

Tehát

$$C_{22}\equiv C_{11}\left(modV\right). \tag{4.3}$$

Az $AC_{22}-C_{11}A'$ osztódik t_2-vel, ezért $AC_{22}-C_{11}A'\in V$.

Tehát,

$$AC_{22}\equiv C_{11}A'\left(modV\right), \tag{4.4}$$

Hasonlóan megkapjuk $BC_{22}-C_{11}B'\in V$, vagyis

$$BC_{22}\equiv C_{11}B'\left(modV\right). \tag{4.5}$$

A (4.3),(4.4) következik

$$AC_{11}\equiv C_{11}A'\left(modV\right). \tag{4.6}$$

A (4.3),(4.5) következik

$$BC_{11}\equiv C_{11}B'\left(modV\right). \tag{4.7}$$

A (4.6), (4.7) kongruenciákból következik, hogy G vad a K felett. □

4.2. tétel. ([13]) *Az egységelemes kommutatív gyűrűben tetszőleges elem invertálható vagy hozzátartozik a gyűrű valamely maximális ideáljához.*

4.3. tétel. ([2]) *Legyen* H *egy* $(3,3)$ *típusú csoport* $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $a^3 = b^3 = e$. K *integritás tartomány melynek karakterisztikája* 0 *és* $3 \notin K^*, \varepsilon \in K, \varepsilon^3 = 1, \varepsilon \notin 1$. *Akkor a* G *csoport vad lesz a* K *gyűrű felett.*

Bizonyítás. Felépítjük a leképezést:

$$\Gamma : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 & E & A \\ 0 & \varepsilon E & 0 & E & E \\ 0 & 0 & \varepsilon E & E & B \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A,B),$$

$$b \to \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & \varepsilon^2 E & 0 & \varepsilon E & (1+\varepsilon) E \\ 0 & 0 & E & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_b(A,B),$$

ahol A, B n-es mátrixok a K gyűrű felett, E n-es egységmátrix.

Legyen $\Gamma(A,B) \overset{K}{\sim} \Gamma(A',B')$, akkor $\exists C \in GL(5n,K)$ hogy teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$\Gamma_a(A,B)\, C = C \Gamma_a(A',B'),$$

$$\Gamma_b(A,B)\, C = C \Gamma_b(A',B').$$

Nyilvánvaló, hogy a C mátrix alakja:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix}.$$

Felírjuk az egyenlőséget mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 & E & A \\ 0 & \varepsilon E & 0 & E & E \\ 0 & 0 & \varepsilon E & E & B \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 & E & A' \\ 0 & \varepsilon E & 0 & E & E \\ 0 & 0 & \varepsilon E & E & B' \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Ha az első mátrix első három sorát a második mátrix utolsó két sorára szorozzuk, akkor kapjuk:

$$\begin{pmatrix} C_{14}+C_{44} & \varepsilon C_{15}+AC_{55} \\ \varepsilon C_{24}+C_{44} & \varepsilon C_{25}+C_{55} \\ \varepsilon C_{34}+C_{44} & \varepsilon C_{35}+BC_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}+C_{14} & C_{11}A'+C_{15} \\ C_{22}+C_{24} & C_{22}+C_{25} \\ C_{33}+C_{34} & C_{33}B'+C_{35} \end{pmatrix}.$$

Egyenlőek az $(1,1)$ helyen lévő elemek, tehát

$$C_{44} \equiv C_{11}\,(modV)\,.$$

Egyenlőek az $(2,2)$ helyen lévő elemek, tehát

$$C_{55} \equiv C_{22}\,(modV)\,.$$

Egyenlőek az $(2,1)$ helyen lévő elemek, tehát

$$C_{22} \equiv C_{44}\,(modV)\,.$$

Egyenlőek az $(3,1)$ helyen lévő elemek, tehát

$$C_{44} \equiv C_{33}\,(modV)\,.$$

Egyenlőek az $(3,2)$ helyen lévő elemek, tehát

$$BC_{55} \equiv C_{33}B'\,(modV)\,.$$

Egyenlőek az $(1,2)$ helyen lévő elemek, tehát

$$AC_{55} \equiv C_{11}A'\,(modV)\,.$$

Tehát

$$AC_{11} \equiv C_{11}A'\,(modV)\,,$$

$$BC_{11} \equiv C_{11}B'\,(modV)\,.$$

Innen következik hogy, a G csoport vad a K felett.

$\square$

5. fejezet

A 2-csoport vadsága null karakterisztikájú lokális faktoriális gyűrűk felett

Megfogalmazzuk a véges p-csoportok vadságát az egész p-adikus racionális számok gyűrűén amit P. Gudivok [8],[14] munkáiból kaptuk.

5.1. tétel. $([8]\,,[14])$ *Legyen G egy véges p-csoport és $\mathbb{Z}_1'$ az egész p-adikus racionális számok gyűrűje. A G csoport szelíd lesz a $\mathbb{Z}_1'$ gyűrű felett akkor és csak akkor, amikor G egy $(2,2)$ típusú csoport vagy ciklikus csoport melynek rendje p^r ($r \leq 2$ amikor $p \neq 2$ és $r \geq 3$ amikor $p = 2$)*

5.1. következmény. $([8]\,,[14])$ *Legyen G egy véges csoport, melynek H Sylow p-részcsoportja $(p \neq 2)$. A G csoport szelíd lesz a $\mathbb{Z}_p'$ gyűrű felett akkor és csak akkor, amikor H ciklikus csoport melynek rendje p^r $(r \leq 2)$.*

I. Reiner és H. Zassenhaus [15] megkapták annak a kapcsolatát, hogy mikor lesz ekvivalens a $\mathbb{Z}_p'$ feletti reprezentáció egy véges csoportnak ugyan ezen csoport p-adikus racionális számok testének bővítése felett és az adott bővítés egészek gyűrűje felett.

5.2. tétel. $([15])$ *Legyen F_p véges bővítése a $\mathbb{Q}_p$ racionális p-adikus számok testének és az R_p pedig az F_p test egészek gyűrűje. $\mathbb{Z}_p'$ feletti Γ és Γ' mátrix reprezentációi a véges G csoportnak $\mathbb{Z}_p'$ felett ekvivalensek akkor és csakis akkor, ha azok R_p felett lesznek ekvivalensek.*

5.2. következmény. $([15])$ *Ha a véges G csoport vad a $\mathbb{Z}_p'$ gyűrű felett, akkor vad lesz a R_p gyűrű felett is.*

Megadjuk az eredményeket, amelyek viszont nem rég voltak megkapva P. Gudivok és S. Kindjuh [16],[17] által, a p csoport vadságát illetően valamely null karakterisztikájú integritás tartomány felett.

Főleg a [16]-ban bevolt bizonyítva a G 2-csoport vadsága melynek rendje $|G| > 2$ a lokális faktoriális gyűrű felett melynek karakterisztikája nulla mely 2 karakterisztikájú rezidum testel rendelkezik.

5.3. tétel. ([16]) *Legyen G egy véges 2-csoport melynek rendje $|G| > 2$ és K egy nulla karakterisztikájú lokális faktoriális gyűrű mely 2 karakterisztikájú rezidum testel rendelkezik. A G csoport vad lesz a K gyűrű felett, ha K nem diszkréten normalizált gyűrű.*

5.4. tétel. ([16]) *Legyen G egy véges 2-csoport melynek rendje $|G| > 1$ és K egy lokális faktoriális gyűrű melynek karakterisztikája nulla mely 2 karakterisztikájú rezidum testel rendelkezik. Ha K nem diszkréten normalizált gyűrű és $2 = \theta t_1^e$ ahol $(\theta \in K^*, e > 1)$ vagy $2 = \theta t_1^{r_1} \dots t_s^{r_s}$, ahol $t_1 \dots t_s$ - a K gyűrű különböző prím elemei (nem asszociált elemek), $s \geq 2$ és $r_1 + \ldots + r_s > 2$, akkor a G csoport vad lesz a K gyűrű felett.*

5.5. tétel. ([17]) *Legyen G egy véges 2-csoport melynek rendje $|G| > 1$ és K egy null karakterisztikájú integritás tartomány , $p \notin K^*$ és $\epsilon \in K$ $(\epsilon^p = 1, \epsilon \neq 1)$. A G csoport vad lesz a K gyűrű felett, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *$p > 3$;*
2. *G egy 3-csoport melynek rendje $|G| > 3$*

Jelöljük $m\,(I)$-vel, ahol I – ideálja valamely K gyűrűnek, az I ideál generátor elemeinek számát. K^* a K gyűrű multiplikatív csoportja.

5.6. tétel. *Adott $G = \langle a | a^2 = e \rangle$ és K egy lokális faktoriális gyűrű, melynek karakterisztikája nulla, és amelynek rezidum testének $(K/RadK)$ karakterisztikája 2, valamint teljesülnek a következő feltételek :*

1. *$2 = t_1 t_2 \dots t_s \, (s \in \mathbb{N}, s > 1)$, ahol $t_1 t_2 \dots t_s$ - különböző prím elemei a K gyűrűnek $\left(t_i \neq \theta t_j, \theta \in K^*, i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}, i \neq j\right)$;*
2. *a $\overline{K_1} = K/t_1 K$ gyűrű I ideálnak véges $m\,(I) > 1$. Akkor a G csoport vad lesz a K gyűrű felett.*

Bizonyítás. Legyen K olyan, mint a tétel feltételben leírt feltételekben. Akkor, létezik $v \in K$, hogy $(v, t_1) = 1$. Tényleg, az ellenkező esetben, vagyis, ha $(v, t_1) \neq 1$, akkor $(v, t_1) = t_1$ és v osztódna t_1-re, $\overline{v} = v + t_1 K = t_1 K = 0$ és a $\overline{V} = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \langle \overline{u}, 0 \rangle = \langle \overline{u} \rangle$ ideál fő ideál lenne, ami lehetetlen.

Vizsgáljuk a következő mátrix K-reprezentációját a G csoportnak:

$$\Gamma(A, B) : a \to \begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B),$$

ahol

$$D(A, B) = \begin{pmatrix} vt_1 E & t_1^2 A & 0 \\ v^2 E & vt_1 E & t_1^2 B \\ 0 & v^2 E & vt_1 E \end{pmatrix},$$

$A, B-$ tetszőleges n-es mátrixok a K gyűrű felett; E egy n-es egységmátrix.

Legyenek $\Gamma(A, B)$ és $\Gamma(A', B')$ K-ekvivalens reprezentációk, vagyis létezik olyan $C \in GL(6n, K)$ mátrix, hogy

$$\Gamma_a(A, B) C = C \Gamma_a(A', B'), \tag{5.1}$$

ahol $C = \|C_{ij}\|; i, j = \overline{1, 6}, C_{ij} - n$-es mátrixok a K gyűrű felett.

Felírjuk az (5.1) mátrix egyenlőséget a következő képen:

$$\begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & D(A', B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

ahol

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

A mátrixok egyenlőségéből kapjuk, hogy az (1,2) helyen lévő elemek egyenlők, vagyis

$$-EC_2 + D(A, B) C_4 = C_1 D(A', B') + C_2 E$$

innen

$$D(A, B) C_4 = C_1 D(A', B') + 2C_2.$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} vt_1 E & t_1^2 A & 0 \\ v^2 E & vt_1 E & t_1^2 B \\ 0 & v^2 E & vt_1 E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt_1 E & t_1^2 A' & 0 \\ v^2 E & vt_1 E & t_1^2 B' \\ 0 & v^2 E & vt_1 E \end{pmatrix} + 2C_2,$$

$$\begin{pmatrix} vt_1C_{44}+t_1^2AC_{54} & vt_1C_{45}+t_1^2AC_{55} & vt_1C_{46}+t_1^2AC_{56} \\ v^2C_{44}+vt_1C_{54}+t_1^2BC_{64} & v^2C_{45}+vt_1C_{55}+t_1^2BC_{65} & v^2C_{46}+vt_1C_{56}+t_1^2BC_{66} \\ v^2C_{54}+vt_1C_{64} & v^2C_{55}+vt_1C_{65} & v^2C_{56}+vt_1C_{66} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} vt_1C_{11}+v^2C_{12} & t_1^2C_{11}A'+vt_1C_{12}+v^2C_{13} & t_1^2C_{12}B'+vt_1C_{13} \\ vt_1C_{21}+v^2C_{22} & t_1^2C_{21}A'+vt_1C_{22}+v^2C_{23} & t_1^2C_{22}B'+vt_1C_{23} \\ vt_1C_{31}+v^2C_{32} & t_1^2C_{31}A'+vt_1C_{32}+v^2C_{33} & t_1^2C_{32}B'+vt_1C_{33} \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Az így kapott mátrix egyenlőségben összehasonlítjuk a megfelelő helyen lévő elemeket. Ehhez bevezetjük a következő jelöléseket:

$$D_1 = C_{34}, \quad D_2 = -C_{24}, \quad D_4 = C_{35},$$

$$D_5 = -C_{25}, \quad D_6 = -C_{15}, \quad D_7 = -C_{36}, \quad D_8 = -C_{26}, \quad D_9 = -C_{16}.$$

Ha a (3,1) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$v^2C_{54} + vt_1C_{64} = vt_1C_{31} + v^2C_{32} + 2D_1. \tag{5.2}$$

Ha a (2,1) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$vt_1C_{21} + v^2C_{22} = v^2C_{44} + vt_1C_{54} + t_1^2BC_{64} + 2D_2. \tag{5.3}$$

Ha a (1,1) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$vt_1C_{11} + v^2C_{12} = vt_1C_{44} + t_1^2AC_{54} + 2D_3. \tag{5.4}$$

Ha a (3,2) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$t_1^2C_{31}A' + vt_1C_{32} + v^2C_{33} = v^2C_{55} + vt_1C_{65} + 2D_4. \tag{5.5}$$

Ha a (2,2) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$t_1^2C_{21}A' + vt_1C_{22} + v^2C_{23} = v^2C_{45} + vt_1C_{55} + t_1^2BC_{65} + 2D_5. \tag{5.6}$$

Ha a (1,2) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$t_1^2C_{11}A' + vt_1C_{12} + v^2C_{13} = vt_1C_{45} + t_1^2AC_{55} + 2D_6. \tag{5.7}$$

Ha a (3,3) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$t_1^2C_{32}B' + vt_1C_{33} = v^2C_{56} + vt_1C_{66} + 2D_7. \tag{5.8}$$

Ha a (2,3) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$t_1^2 C_{22} B' + v t_1 C_{23} = v^2 C_{46} + v t_1 C_{56} + t_1^2 B C_{66} + 2 D_8. \tag{5.9}$$

Ha a (1,3) helyen lévő elemeket összehasonlítjuk, kapjuk

$$t_1^2 C_{12} B' + v t_1 C_{13} = v t_1 C_{46} + t_1^2 A C_{56} + 2 D_9. \tag{5.10}$$

A (5.3)-ból könnyen látható:

$$v t_1 C_{21} + v^2 C_{22} = v^2 C_{44} + v t_1 C_{54} + t_1^2 B C_{64} + t_1 t_2 \dots t_s D_2,$$

vagy (ekvivalens alakban)

$$v t_1 \left(C_{21} - C_{54} \right) + v^2 \left(C_{22} - C_{44} \right) = t_1^2 B C_{64} + t_1 t_2 \dots t_s D_2. \tag{5.11}$$

Mivel, a (5.11) kifejezésben minden tag osztódik t_1-el, kivéve a baloldali második tag, akkor számításba véve, hogy a v és t_1 relatív prímek, kapjuk

$$C_{22} - C_{44} \equiv 0 \left(mod\ RadK \right)$$

innen

$$C_{22} \equiv C_{44} \left(mod\ RadK \right). \tag{5.12}$$

A (5.4)-ből kapjuk, hogy

$$v t_1 C_{11} + v^2 C_{12} = v t_1 C_{44} + t_1^2 A C_{54} = t_1 t_2 \dots t_s D_3.$$

Mivel, az utolsó kifejezésben minden tag osztódik t_1-el, kivéve a baloldali második tag, akkor számításba véve, hogy a v és t_1 relatív prímek, kapjuk, hogy C_{12} osztódik t_1-re, vagyis $C_{12} = t_1 C'_{12}$. Tehát,

$$C_{12} \equiv 0 \left(mod\ RadK \right) \tag{5.13}$$

és (ha behelyettesítjük $C_{12} = t_1 C'_{12}$ és t_1-el egyszerűsítünk)

$$v \left(C_{11} + v C'_{12} - C_{44} \right) = t_1 A C_{54} + t_2 t_3 \dots t_s D_3. \tag{5.14}$$

Legyen

$$C_{11} + v C'_{12} - C_{44} \not\equiv 0 \left(mod\ RadK \right).$$

Akkor a (5.14) kifejezésből kapjuk

$$\overline{v} \overline{\theta} = \overline{t_2 t_3 \dots t_s} \overline{x_1} \left(\overline{x_1} \in \overline{K_1} \right).$$

Mivel $\theta \in K^*$, ezért $\overline{\theta} \in (K/t_1K)^*$.

Tehát,

$$\overline{v}\overline{\theta^{-1}}\overline{t_2t_3\ldots t_s}\overline{x_1} = \overline{t_2t_3\ldots t_s}\overline{x_2} = \overline{u}\,\overline{x_2}.$$

Ellentétbe ütköztünk, mert $\overline{V} = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ nem fő ideál.
Innen kapjuk

$$C_{11} + vC'_{12} - C_{44} \equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,.$$

Tehát,

$$C_{11} - C_{44} \equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,,$$

vagyis,

$$C_{11} \equiv C_{44}\,(mod\ Rad\ K)\,. \tag{5.15}$$

Az (5.5) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$t_1^2C_{31}A' + vt_1C_{32} + v^2C_{33} = v^2C_{55} + vt_1C_{65} + t_1t_2\ldots t_sD_4,$$

vagy (ekvivalens alakban)

$$t_1^2C_{31}A' + vt_1\,(C_{32} - C_{65}) + v^2\,(C_{33} - C_{55}) = vt_1 + t_1t_2\ldots t_sD_4$$

ahonnan (az előzőkhöz hasonlóan)

$$C_{33} \equiv C_{55}\,(mod\ Rad\ K)\,. \tag{5.16}$$

A (5.6)-ból kapjuk:

$$t_1^2C_{21}A' + vt_1C_{22} + v^2C_{23} = v^2C_{45} + vt_1C_{55} + t_1^2BC_{65} + t_1t_2\ldots t_sD_4.$$

Innen

$$t_1^2C_{21}A' + vt_1\,(C_{22} - C_{55}) = v^2\,(C_{45} - C_{23}) + t_1^2BC_{65} + t_1t_2\ldots t_sD_5,$$

$$t_1C_{21}A' + v\,(C_{22} - C_{55} - vx) = t_1BC_{65} + t_2t_3\ldots t_sD_5,$$

$$v\,(C_{22} - C_{55} - vx) = t_1x + t_2t_3\ldots t_sD_5.$$

Hasonlóan, mint a (5.14) egyenlőségnél tettük, kapjuk, hogy

$$C_{22} \equiv C_{55}\,(mod\ Rad\ K)\,. \tag{5.17}$$

A (5.7) -ből kapjuk:

$$t_1^2C_{11}A' + vt_1\,(C_{12} - C_{45}) + v^2C_{13} = t_1^2AC_{55} + t_1t_2\ldots t_sD_6$$

Mivel, az utolsó kifejezésben minden tag osztódik t_1-el, kivéve a baloldali második tag, akkor számításba véve, hogy a v é t_1 relatív prímek, kapjuk, hogy C_{13} osztódik t_1-re. Tehát,

$$C_{13} \equiv 0\,(mod\ Rad\ K) \tag{5.18}$$

és (ha behelyettesítjük $C_{13} = t_1 C'_{13}$ és t_1-re egyszerűsítünk),

$$t_1\,(C_{11}A' - AC_{55}) - v\,(C_{12} - C_{45} + vC'_{13}) = t_2 t_3 \ldots t_s D_6$$

amit a következő képen írunk fel

$$t_1\,(C_{11}A' - AC_{55}) = vx + t_2 t_3 \ldots t_s D_6,$$

ahol

$$x = C_{12} - C_{45} + vC'_{13}.$$

Legyen

$$C_{11}A' - AC_{55} \not\equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,.$$

Akkor

$$\overline{t_1}\overline{\theta} = \overline{v}\,\overline{x}\,(\theta = C_{11}A' - AC_{55})\,, \overline{t_1} = \overline{v}\,\overline{y}\left(\overline{y} = \overline{x}\overline{\theta^{-1}}\right),$$

ami ellentéthez vezet a t_1 meghatározásával.

Tehát,

$$C_{11}A' - AC_{55} \equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,.$$

Innen kapjuk

$$C_{11}A' \equiv AC_{55}\,(mod\ Rad\ K)\,. \tag{5.19}$$

A (5.8)-ból megkapjuk:

$$t_1^2 C_{32} B' + vt_1\,(C_{33} - C_{66}) = v^2 C_{56} + 2D_7,$$

innen

$$t_1^2 C_{32} B' + vt_1\,(C_{33} - C_{66}) = v^2 C_{56} + t_1 t_2 \ldots t_s D_7.$$

Hasonlóan, mint a (5.4) egyenlőségnél, kapjuk, hogy

$$C_{33} \equiv C_{66}\,(mod\ Rad\ K)\,. \tag{5.20}$$

A (5.9) egyenlőségből

$$t_1^2 C_{22} B' + vt_1 C_{23} = v^2 C_{46} + vt_1 C_{56} + t_1^2 B C_{66} + t_1 t_2 \ldots t_s D_8,$$

innen

$$t_1^2\left(C_{22}B' - BC_{66}\right) + t_1 v\left(C_{23} - C_{56}\right) = v^2 C_{46} + t_1 t_2 \ldots t_s D_8.$$

Mivel, az utolsó kifejezésben minden tag osztódik t_1-el, kivéve a jobboldali első tag, akkor számításba véve, hogy a v é t_1 relatív prímek, kapjuk, hogy C_{46} osztódik t_1-re. Tehát, $C_{46} = t_1 C'_{46}$, vagyis

$$t_1^2\left(C_{22}B' - BC_{66}\right) + t_1 v\left(C_{23} - C_{56}\right) = v^2 t_1 C'_{46} + t_1 t_2 \ldots t_s D_8.$$

innen (ha t_1-re egyszerűsítünk)

$$t_1\left(C_{22}B' - BC_{66}\right) + v\left(C_{23} - C_{56} - vC'_{46}\right) = t_2 \ldots t_s D_8.$$

vagy

$$t_1\left(C_{22}B' - BC_{66}\right) + vx = t_2 \ldots t_s D_8$$

ahol

$$x = C_{23} - C_{56} - vC'_{46}.$$

Legyen

$$C_{22}B' - BC_{66} \not\equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,.$$

Akkor kapjuk, hogy

$$\overline{t_1}\overline{\theta} = \overline{v}\,\overline{x}\,(\theta = C_{22}B' - BC_{66})\,, \overline{t_1} = \overline{v}\,\overline{y}\left(\overline{y} = \overline{x}\overline{\theta^{-1}}\right),$$

ami ellentéthez vezet t_1 meghatározásával, mert t_1 és v relatív prím elemek.

Tehát,

$$C_{22}B' - BC_{66} \equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,,$$

innen

$$C_{22}B' \equiv BC_{66}\,(mod\ Rad\ K)\,. \tag{5.21}$$

Tehát, a (5.12), (5.14), (5.16), (5.17) és (5.20) egyenlőségekből kapjuk:

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{66} \equiv C_{55} \equiv C_{33}\,(mod\ Rad\ K) \tag{5.22}$$

és a (5.13), (5.18) egyenlőségekből, hogy

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0\,(mod\ Rad\ K)\,.$$

Tehát, a C mátrixra igaz a következő kongruenció:

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{11} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{11} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{11} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & C_{65} & C_{11} \end{pmatrix} (mod\ Rad\ K)\,.$$

A C mátrix alakjából könnyen látható, hogy az akkor és csak akkor invertálható, ha invertálható a C_{11} mátrix.

Számításba véve a (5.19), (5.21) és (5.22) kapjuk, hogy

$$C_{11}A' \equiv AC_{11}\,(mod\ Rad\ K)\,,$$

és

$$C_{11}B' \equiv BC_{11}\,(mod\ Rad\ K)\,.$$

Tehát, a G csoport vad lesz a K gyűrű felett. $\square$

Összefoglalás

A matematikában és az absztrakt algebrában, a csoportelmélet a csoport nevű algebrai struktúrával foglalkozik. A csoportelmélet nélkülözhetetlen számtani eszköze a vegytan és fizika sok ágának, különösen a kvantumfizikának. Többek között a csoportelmélet a kémiában elsősorban a szimmetriacsoportok elméletében jelentkezik.

Fontos kérdések, melyek a mátrix reprezentáció elmélet tanulmányozása során jelennek meg a véges csoport nem ekvivalens felbonthatatlan reprezentációk számáról, az irreducibilis reprezentációkról valamint a csoportok vadságáról vagy szelídségéről szólnak.

A vadság problémát testek esetében először olyan testek felett kutatták, melyek karakterisztikája nem ossza a csoport rendjét (ezek véges típusúaknak bizonyultak); ezután olyan testek felett, melyeknek karakterisztikája osztja a csoport rendjét (itt csak azok a csoportok lesznek véges típusúak, melyeknek ciklikus p-Sylov részcsoportjuk van); később V. Basev bebizonyítódta, hogy a $(2, 2)$ típusú csoport szelíd csoport; ezután P. Gudivok (nem publikált eredmény) és külön S. Kruhlyak azt, hogy a (p, p) típusú csoport a $(p > 2)$ esetben vad; aztán S. Brenner a $(2, 2, 2)$ és a $(2, 4)$ típusú csoportok vadságát bizonyította és legvégül V. Bondarenko és Yu. Drozd bebizonyították a szelídség kritériumát tetszőleges fixált karakterisztikájú kommutatív test felett. A munkában külön kitérés van valamely csoportok vadságának problémájára null karakterisztikájú gyűrűk felett.

A munkában ezen eredmények vannak ismertetve, különösen tekintettel azok bizonyítása volt bemutatva. Az utolsó fejezetben egy másodrendű ciklikus csoport vadságát sikerült bebizonyítani valamely lokális faktoriális gyűrű felett.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах . Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. 1977. 104-114 с.
2. Бондаренко В. М. Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. Записки науч. Семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1977. 24-41 с.
3. Башев В. А. Представление группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ в поле характеристики 2. ДАН СССР. 1961. 1015-1018 с.
4. HIGMAN DONALD: *Indecomposable representations at characteristic p*. Duke Math Journal. 1954. 377-381 p.
5. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2. Мат. сб. 1975. 63-74 с.
6. RINGEL GERHARD: *The indecomposable representations of dihedral 2-groups*. Math. Ann. 1975. 19-34 p.
7. Гудивок П. М. О модулярных представлениях конечных групп над областями целостности. Труды Матем. ин-та АН СССР. 1990. 78-86 с.
8. Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп. ДАН СССР. 1974. 993-996 с.
9. Гудивок П. М. Про обмеженість степенів нерозкладних модулярних зображень скінченних груп над кільцем головних ідеалів. Доп. АН УРСР. Сер. А. 1971. 683-685 с.
10. Кругляк С. А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p. ДАН СССР. 1963. 1253-1256 с.
11. BRENNER SYDNEY: *Modular representations of p-groups*. Journal of Algebra. 1970. 89-102 p.

12. SCHUR JAN: *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen.* J. Reine Angew. Math. 1907. 85-137 p.
13. Гудивок П. М. Представления конечных групп над коммутативными кольцами. Ужгород, Ужгородский национальный университет 2003. 119 с.
14. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом. Труды Матем. ин-та АН СССР, 1978. 96-105 с.
15. Reiner I. Zassenhaus H. Equivalence of representations under extensions of local group rings. Ill. J. Math., 1961. 409-411 p.
16. Гудивок П. М. Кіндюх С. П. Про матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль. Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. 2006. 59-64 с.
17. Гудивок П. М. Кіндюх С. П. Про матричні зображення скінченних p-груп над областями цілісності характеристики нуль. Наук. віс-ник Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. 2005. 49-56 с.

Резюме

У математиці та абстрактній алгебрі теорія груп вивчає алгебраїчну структуру – група. Теорія груп є незамінним арифметичним інструментом для багатьох галузей хімії та фізики, особливо квантової фізики. Серед іншого, теорія груп в хімії в першу чергу пов'язана з теорією груп симетрій.

Важливі питання, які з'являються під час дослідження груп стосуються питання нееквівалентних незвідних зображень, числа нерозкладних зображень груп а також дикості та ручності груп.

Спочатку зображення були вивчені у випадку, коли характеристика поля не ділить порядок групи і виявилося, що всі вони мають скінченний тип; у випадку, коли характеристика поля p $(p > 0)$ ділить порядок групи, спочатку були описані групи скінченного типу і ними виявилися лише групи з циклічними силовськими p-підгрупами, потім була доведена ручність групи $(2,2)$ (В. А. Башев) і дикість груп (p, p) при $p \neq 2$ (П. М. Гудивок, неопублікований результат, і С. А. Кругляк) та $(2,2,2)$, $(2,4)$ (Ш. Бреннер), потім ручність діедральних і квазідіедральних груп (В. М. Бондаренко), а вже потім отримано критерій ручності скінченної групи над довільним полем фіксованої характеристики (В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд). В роботі окремо розглядається дикість деяких груп над кільцями характеристики 0

У ході своєї роботи було розглянуто ці результати, з особливим акцентом на їх доведення. В останньому розділі було доведено дикість циклічної групи другого порядку над локальним факторіальним кільцем.

UNICHECK

Власник документу:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
06.05.2020 20:37:47 EEST

Дата звіту:
06.05.2020 20:45:36 EEST

ID перевірки:
1002807665

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
92712

Назва документу: Sztaroszta_Miklos_matematika

ID файлу: 1002821901 **Кількість сторінок:** 33 **Кількість слів:** 7666 **Кількість символів:** 40058 **Розмір файлу:** 1.35 MB

13.2% Схожість

Найбільша схожість: 6.56% з джерело бібліотеки. ID файлу: 1002679920

7.76% Схожість з Інтернет джерелами 84 .... Page 35

6.56% Текстові збіги по Бібліотеці акаунту 1 .... Page 35

0% Цитат

Не знайдено жодних цитат

0% Вилучень

Вилучений текст відсутній

Підміна символів

Заміна символів 87

Nyilatkozat

Alulírott, Sztároszta Miklós 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSC diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalmat, eszközöket stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatom a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.