ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Магістерська робота

Про дикі скінченні 2-групи над локальними кільцями характеристики нуль

Сокодаті Томаш

Студент ІІ-го курсу

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

Освітній рівень: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол №3 / 2019

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к.ф.-м.н., доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 2020 року

Протокол № ______ / 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Магістерська робота

Про дикі скінченні 2-групи над локальними кільцями характеристики нуль

Освітній рівень: магістр

Виконав: студент II-го курсу

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Сокодаті Томаш

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к.ф.-м.н., доцент

Рецензент: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Берегове
2020

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

VÉGES VAD 2-CSOPORTOK NULLA KARAKTERISZTIKÁJÚ LOKÁLIS GYŰRŰK FELETT

Magiszteri dolgozat

Készítette: Szakadáti Tamás

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Sztojka Miroszláv

fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens

Recenzens: Kucsinka Katalin

fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens

Beregszász – 2020

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikai tudományban, a csoportelmélet a csoport megnevezésű algebrai struktúrát tárgyalja. A csoportelmélet fontos számtani eszköze a vegytannak és a fizikában is gyakran előjön, különösen a kvantumfizikában. Gyakran a csoportelmélet a kémiában elsősorban a szimmetriacsoportok vagy pontcsoportok elméletében bukkan fel.

A reprezentáció a permutáció csoportok és mátrix algebrák megjelenésével jelentkezik. Ezen megfontolás jelentőségét a csoportok vizsgálatában F. G. Frobenius és A. Burnside értették jól, mert nyilvánvaló, hogy az elméleti műveleteket könnyebb végrehajtani egy mátrix csoportban, annál inkább mint egy absztrakt csoportban. F. G. Frobenius a 19. század végén írta le a csoportok reprezentációjának elméletét egy elég teljes és nem nehezen használható formában. F. G. Frobenius és A. Burnside nevéhez köthető az, hogy a reprezentáció elméletnek jelentős szerepe van a véges csoportok elméletében. 1911-ben lépett színre az a könyv (A. Burnside), amely bemutatta a reprezentáció elméletet, és sok eredményt foglalt magába a véges csoportokról. Az 1929-hez datálható E. Noether cikke szoros összefüggésben áll a reprezentáció elméletével és a modulok elmélettel a gyűrűk és az algebrák felett. A másik fontos lépés a reprezentáció elmélet tanulmányozásában R. Brauer publikációja volt a véges csoportok moduláris reprezentációiról. Az F. G. Frobenius eredményeihez hasonlóan R. Brauer elméletének sok jelentős alkalmazásával találkozhatunk a csoportok elméletében. Emellett szoros kapcsolatot ír le az algebrák reprezentáció elméletével, új modulokkal és gyűrűkkel összefüggésben álló problémákat javasol, és megnyitja az alapvető fontosságát a számelméleti feladatoknak a csoport- és a reprezentáció elméletben.

A megemlített témák aktív tanulmányozásának idejében a csoportok mátrix reprezentációját sok tudós kutatta: K. W. Roggenkamp, V. Bashev, R. Frucht, G. Higman, T. Hannulo, I. Shur, K. Jamazaki, I. Reiner, K. Ringel, S. Berman, P. M. Gudivok, V. M. Bondarenko, S. Kruglyak, Yu A. Drozd, L. Barannyk, és sokan mások. A fontosabb kérdések, amelyek előjönnek a reprezentáció elmélet kutatása során, a véges csoportok vadságát valamint szelídségét tárgyalják. A munkában sok jelentős eredmény van leírva, melyek a véges csoportok vadságának problémájával foglalkoznak.

Testek felett a véges csoportok mátrix reprezentációja már széleskörűen kutatva volt. Ha a reprezentációs típusról vesszük, abban az esetben, amikor a csoport rendje nem osztható a test karakterisztikájával, akkor a csoport az ekvivalencia pontossággal, végtelen számú felbonthatatlan reprezentációkból áll, ellenkezőleg csak olyan csoportnak van véges számú felbonthatatlan reprezentációja, amely Sylow ciklikus p-részcsoporttal rendelkezik, ahol p a test karakterisztikáját jelöli. Az ilyen esetet modulárisnak hívják. V. Basev a (2,2) típusú csoport szelídségét bizonyította be. Ezek után P. Gudivok (nem került publikálásra) és külön S. Kruhlyak a $(p; p)$ típusú csoport a $(p > 2)$ esetben való vadságát bizonyították be. Később S. Brenner bebizonyította, hogy a (2,2,2) és a (2,4) típusú csoport vad lesz, és legvégül V. Bondarenko és Yu. Drozd bebizonyították a szelídség kritériumát tetszőleges fixált karakterisztikájú kommutatív test felett. A csoportok reprezentációjának tanulmányozása kommutatív gyűrűk esetében, mely valamilyen szinten általánosítása azok testek feletti reprezentációknak, összetettebbnek bizonyult.

Ha egy G csoport mátrix reprezentációt tanulmányozzuk lokális gyűrűk esetében, akkor a jelentősebb esetek az alábbiak lesznek::
1) G egy p-csoport, K egy nulla karakterisztikájú gyűrű, $K = RadK$ is egy nulla karakterisztikájú gyűrű (nem moduláris eset);
2) G egy p-csoport, K egy p^s $(s > 0)$ karakterisztikájú gyűrű (moduláris eset);
3) G egy p-csoport, K egy nulla karakterisztikájú gyűrű, $K = RadK$ egy p^s $(s > 0)$ karakterisztikájú gyűrű (moduláris eset).

Fontos megjegyezni, hogy minél kisebb a csoport rendje vagy az s szám, annál összetettebb a csoport vadságának (szelídségének) bizonyítása. A diplomamunka három fejezetből tevődik össze. Az elsőben az alapfogalmak vannak definiálva. A második fejezet a véges csoportok vadságával kapcsolatban álló jelentősebb kutatási eredményeket tárgyalja. A harmadik fejezetben egy 2-csoport vadságának bizonyítása szerepel valamely lokális faktoriális gyűrű felett.

1. Alapfogalmak

Legyen adott egy G véges csoport és egy K egységelemes kommutatív gyűrű.

1.1. Definíció. *A $\Gamma : G \to GL(n,K)$ homomorfizmust a G csoportról a $GL(n,K)$-ra (a teljes lineáris csoportra) n-edrendű mátrix reprezentációjának nevezzük a G csoportnak a K gyűrű felett.*

1.2. Definíció. *A Γ és Γ' n-edrendű mátrix reprezentációit a G csoportnak a K gyűrű felett K-ekvivalensnek nevezzük, ha létezik olyan $C \in GL(n,K)$, hogy $C^{-1}\Gamma(g)C = \Gamma'(g)$, tetszőleges $g \in G$.*

1.3. Definíció. *A G csoport Γ n-edrendű mátrix reprezentációját reducibilisnek nevezzük a K gyűrű felett, ha az K-ekvivalens a Γ' reprezentációval:*

$$g \to \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(g) & T(g) \\ 0 & \Gamma_2(g) \end{pmatrix},$$

ahol g a G csoport tetszőleges eleme, Γ_i egy n_i-rendű (n_i<n; $i = 1,2$) mátrix reprezentációi a G csoportnak a K gyűrű felett. Ellenkező esetben a Γ reprezentációt irreducibilisnek nevezzük a K gyűrű felett.

1.4. Definíció. *A G csoport Γ mátrix reprezentációját teljesen reducibilisnek nevezzük a K gyűrű felett, ha az K-ekvivalens a Γ' reprezentációval:*

$$g \to \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Delta_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_r(g) \end{pmatrix},$$

ahol g a G csoport tetszőleges eleme, $\Delta_i(g)(i = 1, ..., r)$ irreducibilis mátrix reprezentációja a G csoportnak a K gyűrű felett.

1.5. Definíció. *A G csoport Γ mátrix reprezentációját felbonthatónak nevezzük a K gyűrű felett, ha az K-ekvivalens a Γ' reprezentációval:*

$$g \to \Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(g) & 0 \\ 0 & \Gamma_2(g) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ahol Γ_i egy n_i-rendű mátrix reprezentációja a G csoportnak (n_i<$n; i = 1,2$) a K gyűrű felett. Ellenkező esetben a Γ reprezentációt felbonthatatlannak nevezzük a K gyűrű felett.
Ha a Γ mátrix reprezentáció K-ekvivalens az (1) Γ' reprezentációval, akkor Γ reprezentációra azt mondjuk, hogy az összege Γ_1 és Γ_2 reprezentációknak és a következőképpen jelöljük: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

1.1. tétel. *(Maschke) Legyen K^* multiplikatív csoportja a K gyűrűnek, G egy véges csoport, melynek rendje $|G|$. Ha a $|G| \in K^*$, akkor bármely mátrix reprezentációja a G csoportnak teljesen reducibilis lesz a K gyűrű felett.*

1.2. tétel. *(Maschke) Legyen G egy véges csoport, P egy test, melynek karakterisztikája p. Ha a p szám nem osztja a G csoport rendjét, abból az következik, hogy bármely mátrix reprezentációja a G csoportnak teljesen reducibilis lesz a P test felett.*

1.3. tétel. *(Frobenius) Legyen G egy véges csoport. P egy algebrailag zárt test, melynek karakterisztikája p, és az nem osztja a G csoport rendjét. A G csoport nem ekvivalens irreducibilis mátrix reprezentációinak száma a P test felett megegyezik a G csoport konjugált osztályainak számával.*

1.4. tétel. *(Frobenius) Legyen G egy véges csoport. P egy algebrailag zárt test, melynek karakterisztikája p, és az nem osztja a G csoport rendjét. $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_s$- a G csoport összes nem ekvivalens irreducibilis mátrix reprezentációi a G csoportnak a P test felett és $n_1, n_2, ..., n_s$ megfelelően az adott reprezentációk rendjei. Akkor a csoport rendje $|G| = n_1^2 + n_2^2 + ... + n_s^2$.*

1.6. Definíció. *Legyen adott F test. $A_i, B_i (i = 1, 2)$ n-es mátrixok az F test felett. Az (A_1, A_2) és (B_1, B_2) pár mátrixokat hasonlónak nevezzük az F test felett, ha létezik olyan $C \in GL(n, F)$ amelyre:*

$$C^{-1} A_i C = B_i, (i = 1, 2).$$

1.7. Definíció. *Legyen $\Gamma(A_1, A_2)$ mátrix reprezentációja a véges G csoportnak az F test felett. Itt az A_1 és A_2 n-es mátrixok. Ha a $\Gamma(A_1, A_2)$ és $\Gamma(B_1, B_2)$ ekvivalenciájukból az következik, hogy az (A_1, A_2) és (B_1, B_2) pár mátrixok hasonlóak az F test felett, akkor a G csoportot vadnak nevezzük az F test felett.*

1.8. Definíció. *Legyen adott egy G véges csoport és egy K kommutatív egységelemes gyűrű. Legyen $\Gamma(A_1, A_2)$ mátrix reprezentációja a G csoportnak a K gyűrű felett. Itt az A_1 és A_2 n-es mátrixok. A G csoportot vadnak nevezzük a K gyűrű felett ha a $\Gamma(A_1, A_2)$ és $\Gamma(B_1, B_2)$ ekvivalenciájukból az következik, hogy az $(\overline{A_1}, \overline{A_2})$ és $(\overline{B_1}, \overline{B_2})$ pár mátrixok hasonlóak a $\overline{K} = K/V$ test felett (V valamely maximális ideálja a K gyűrűnek, $\overline{A} - \overline{K}$ feletti mátrix, amelyet az A, K feletti mátrixból kapunk ha összevonjuk az elemeit V ideál modulo szerint).*

2. Vad csoportok kommutatív gyűrűk felett

A csoportok reprezentációit a következőképpen kutatták: először a véges típusú objektumokat (csoportokat) tanulmányozták, vagyis azokat, melyeknek az ekvivalencia pontossággal véges számú felbonthatatlan reprezentációja létezik. Később a szelíd (tame) típusú objektumokat. A szelíd objektumok magukba foglalják a véges típusú objektumokat. Ezután a vad (wild) típusú objektumokat vizsgálták, melyek reprezentáció leírásának problémája tartalmazza a lineáris algebra klasszikus nem megoldott feladatát a pár mátrixok hasonlóságáról. A vad és szelíd csoportok formális definícióit Yu. A. Drozd vezette be.

2.1. lemma. *Legyen* $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ *egy Abel* (p, p) *típusú* p*-csoport* $(a^p = b^p = e, p \neq 2)$. K *egy nulla karakterisztikájú integritási tartomány* $p \notin K^*$ *és* $\varepsilon \in K(\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1)$. *Akkor a* H *csoport vad a* K *gyűrű felett.*

Bizonyítás. Könnyen beláthatjuk, hogy a következő alakú mátrix reprezentációja a H csoportnak K gyűrű felett pár mátrixok hasonlóságának feladatához vezethető a $\overline{K} = K/V$ (V valamely maximális ideálja a K gyűrűnek) test felett:

$$a \to \Gamma_a(A, B) = \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 & E & A \\ 0 & \varepsilon E & 0 & E & E \\ 0 & 0 & \varepsilon E & E & B \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$b \to \Gamma_b(A, B) = \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & \varepsilon^2 E & 0 & \varepsilon E & \lambda E \\ 0 & 0 & E & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

ahol $\lambda = 1 + \varepsilon$, E egy n-es egységmátrix, A és B tetszőleges n-es mátrixok K gyűrű felett.

2.2. lemma. *Legyen* $H = \langle a \rangle$ *egy ciklikus* p*-csoport, melynek rendje* $p(p > 3)$. K *egy nulla karakterisztikájú integritási tartomány,* $p \notin K^*$ *és* $\varepsilon \in K(\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1)$. *Akkor a* H *csoport vad a* K *gyűrű felett.*

Bizonyítás. Könnyen beláthatjuk, hogy a következő alakú mátrix reprezentációja a H csoportnak K gyűrű felett pár mátrixok hasonlóságának feladatához vezethető a $\overline{K} = K/V$ (V valamely maximális ideálja a K gyűrűnek) test felett:

$$a \to \Gamma_a(A,B) = \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & E & A & B \\ 0 & \varepsilon^2 E & E & E & E \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^4 E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

ahol E egy n-es mátrix a K gyűrű felett.

2.3. lemma. *Legyen $H = \langle a \rangle$ egy ciklikus 3-csoport, melynek rendje 9, K egy nulla karakterisztikájú integritási tartomány, $3 \notin K^*$ és $\varepsilon \in K(\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1)$. Akkor a H csoport vad a K gyűrű felett.*

Bizonyítás: Vizsgáljuk a következő $H = \langle a \rangle$ csoport $\Gamma(A,B)$ reprezentációját a K gyűrű felett:

$$a \to \begin{pmatrix} D_1 & 0 & D_4(A,B) \\ 0 & D_2 & D_5 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} = \Gamma_a(A,B), \tag{2}$$

ahol

$$\mathrm{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon E \\ E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 E \\ E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon E & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}_4(A,B) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

ahol E egy n-es egységmátrix, A és B tetszőleges n-es mátrixok a K gyűrű felett.
Megmutathatjuk, hogy a (2)-es alakú reprezentáció pár mátrixok hasonlóságának feladatához vezet a $\overline{K} = K/V$ (V valamely maximális ideálja a K gyűrűnek) test felett.
Vagyis a H csoport vad a K gyűrű felett.

2.1. tétel. ([1]) *Legyen G egy véges p-csoport, melynek rendje $|G| > 1$. K egy nulla karakterisztikájú integritási tartomány, $p \notin K^*$ és $\varepsilon \in K(\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1)$. A G csoport vad lesz a K gyűrű felett, ha teljesül az alábbi feltételek egyike:*
1) p >3;
2) G egy 3-csoport, melynek rendje $|G| > 3$.

A tétel bizonyítása következik az 1-3 lemmákból.

2.2. tétel. $([2])$ *Legyen K egy nulla karakterisztikájú noether lokális integritási tartomány p-karakterisztikájú rezidum testtel.*
1) a G véges nem ciklikus p-csoport, melynek rendje $|G|$ szelíd (tame) a K gyűrű felett akkor és csak akkor, ha $|G| = 4$ és $RadK = 2K$;
2) a G véges ciklikus p-csoport, melynek rendje $|G| = p^r(r > 2)$ szelíd (tame) a K gyűrű felett akkor és csak akkor, ha $|G| = 8$ és $RadK = 2K$;
3) ciklikus p-csoport, melynek rendje p^2 vad a K gyűrű felett, ha a K egy faktoriális és nem diszkréten normalizált gyűrű.

P. M. Gudivok és V. J. Pohorilyak [3],[4] véges csoportok vadságát tanulmányozták $p^s(s > 0)$ karakterisztikájú kommutatív lokális gyűrűk felett.

2.3. tétel. $([3, 4])$ *Legyen G egy véges p-csoport, melynek rendje $|G| > 1$. K egy p^s $(s > 1)$ karakterisztikájú kommutatív lokális gyűrű, V egy maximális ideálja a K gyűrűnek . A G csoport nem lesz vad a K gyűrű felett akkor és csak akkor, ha $|G| = p$ és $V = Kp$.*
Amikor a $K = Z/p^sZ$ a 2.3 tétel V. M. Bondarenko által volt bizonyítva. $[5]$

2.4. tétel. $([3, 4])$ *Legyen G egy véges p-csoport, melynek rendje $|G| > 2$, K egy p-karakterisztikájú kommutatív gyűrű, ami nem lesz test. A G csoport vad a K gyűrű felett.*
V. J. Pohorilyak megoldotta egy másodrendű G csoport 2-karakterisztikájú kommutatív lokális gyűrű feletti vadságának feladatát az alábbi esetekben:
1) a K egy nullától eltérő nilpotens elemet tartalmaz;
2) a K egy ideált tartalmaz, amely nem kevesebb mint 3 elemmel van generálva.

2.5. tétel. $([6])$ *Legyen K egy 2-karakterisztikájú lokális gyűrű, amely egy nullától eltérő $t(t^r = 0,\ t^{r-1} \neq 0,\ r \geq 2,\ r \in N)$ elemet tartalmaz, V egy maximális ideálja a K gyűrűnek . A $G = \langle a \rangle$ ciklikus 2-csoport, melynek rendje $|G| > 1$ nem vad a K gyűrű felett akkor és csak akkor, ha $|G| = 2, t^2 = 0, V = Kt$.*

2.6. tétel. $([6])$ *Legyen K egy 2-karakterisztikájú lokális gyűrű, amely nem kevesebb mint 3 elemmel generált ideált tartalmaz. A $G = \langle a \rangle$ ciklikus 2-csoport, melynek rendje $|G| > 1$ vad a K gyűrű felett.*

2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a K integritási tartomány a eleme egyértelműen felbontódik prím elemek szorzatára, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*
1) a K gyűrűben léteznek olyan p_i elemek, hogy $a = \prod p_i$;
2) ha $a = \prod q_i$ egy másik felbontás, melyben q_i a K gyűrű prím elemei, akkor $m = n$ és a megfelelő számozás mellett a $p_i \sim q_i$ (asszociált elemek) tetszőleges i-re $(i = 1, ..., m)$.

Asszociált alatt azt értjük, hogy a $p_i = tq_i$, ahol t egy invertálható elem.

2.2. Definíció. *A gyűrűt faktoriálisnak nevezzük, ha az integritási tartomány és tetszőleges nullától eltérő eleme, amely nem invertálható, egyértelműen felbontódik prím elemek szorzatára.*

P. M. Gudivok és J. J. Pohorilyak [7] a következő eredményeket kapták.

2.7. tétel. $([7])$ *Legyen adott egy G véges p-csoport, melynek rendje $|G| > 2$. K egy p-karakterisztikájú egységelemes integritási tartomány. Ekkor a G csoport vad a K gyűrű felett.*

2.8. tétel. $([7])$ *Legyen adott egy G véges p-csoport, melynek rendje $|G| > 1$. K egy p-karakterisztikájú noether faktoriális gyűrű. A G csoport nem lesz vad a K gyűrű felett akkor és csakis akkor, ha a K főideálok tartománya és $|G| = 2$.*

3. p-csoport vadsága lokális gyűrű felett

Legyen I egy ideálja a K gyűrűnek. Jelölje $m(I)$ az I ideál generátorrendszerének elemszámát. Jelöljük K^*-gal a K gyűrű multiplikatív csoportját.

3.1. tétel. *Legyen G egy véges 2-csoport, melynek rendje $|G| > 1$, K egy lokális faktoriális gyűrű, melynek karakterisztikája nulla, és rezidum testének $(K/RadK)$ karakterisztikája 2. Ha 2 a K gyűrű prím eleme és a $\overline{K} = K/2K$ faktorgyűrű tartalmaz olyan I ideált, hogy $m(I)$ véges és $m(I) > 1$, akkor a G csoport vad lesz a K gyűrű felett.*

Bizonyítás. Mivel a G véges 2-csoport, melynek rendje $|G| > 1$, akkor létezik olyan H normális részcsoportja, melyre a G/H faktorcsoport másodrendű ciklikus csoport lesz.

Legyen $\overline{\Gamma}$ mátrix K-reprezentációja a G/H faktorcsoportnak. Megszerkesztjük Γ és G csoport egy a K gyűrű feletti mátrix reprezentációját a következőképpen:

$$g \to \Gamma(g) = \overline{\Gamma}(gH), \forall g \in G.$$

Nyilvánvaló, hogy az ilyen megfeleltetés leképezés lesz, mivel ha fixáljuk a G csoport g elemét, akkor annak egyértelműen megfelel a gH mellékosztály.

Ezután megmutatjuk, hogy a Γ az egy K gyűrű feletti mátrix reprezentáció lesz. Ehhez be kell bizonyítani, hogy a Γ homomorfizmus.

Legyenek adottak $g_1, g_2 \in G$ tetszőleges elemei a G csoportnak. Vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$\Gamma(g_1 g_2) = \overline{\Gamma}(g_1 g_2 H) = \overline{\Gamma}(g_1 H g_2 H)$$

Mivel $\overline{\Gamma}$ az egy K gyűrű feletti mátrix reprezentáció, vagyis $\overline{\Gamma}$ homomorfizmus, akkor kapjuk

$$\overline{\Gamma}(g_1 H g_2 H) = \overline{\Gamma}(g_1 H)\overline{\Gamma}(g_2 H) = \Gamma(g_1)\Gamma(g_2)$$

Az utolsó kettő egyenlőség azt bizonyítja, hogy Γ egy K gyűrű feletti mátrix reprezentációja a G csoportnak.
Tehát, a tételt elegendő bizonyítani másodrendű ciklikus csoportokra. Legyen továbbá a $G =< c >$ egy másodrendű ciklikus csoport.

Mivel a $\overline{K} = K/2K$ faktorgyűrű tartalmaz olyan I ideált, hogy $m(I)$ véges és $m(I) > 1$, akkor léteznek $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{K}$ különböző prím elemek (nem asszociált elemek), melyekre $\overline{a} \neq \theta\overline{b}(\theta \in (K/2K)^*)$. Legyen

$$\overline{a} = a + 2K, \overline{b} = b + 2K.$$

Vizsgáljuk a következő leképezést:

$$\Gamma(A, B) : c \to \begin{pmatrix} -E & S(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_c(A, B),$$

ahol

$$S(A, B) = \begin{pmatrix} abE & a^2A & 0 \\ b^2E & abE & a^2B \\ 0 & b^2E & abE \end{pmatrix},$$

A, B tetszőleges n-es mátrixok a K gyűrű felett, E pedig egy n-es egységmátrix.
Nyilvánvaló, hogy

$$\Gamma_c^2(A, B) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Tehát $\Gamma(A, B)$ K gyűrű feletti mátrix reprezentációja a G csoportnak.
Legyenek $\Gamma(A, B)$ és $\Gamma(A', B')$ K gyűrű feletti mátrix reprezentációk ekvivalensek. Akkor létezik $C \in GL(6n, K)$ mátrix, amelyre teljesül:

$$\Gamma_c(A, B)C = C\Gamma_c(A', B'), \tag{3}$$

ahol $C = ||C_{ij}||, C_{ij}$ n-es mátrixok a K gyűrű felett $(1 \leq i, j \leq 6)$.
Átírjuk az (3) kifejezést a következő alakban:

$$\begin{pmatrix} -E & S(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & S(A', B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

ahol

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -EC_1 & -EC_2 + S(A, B)C_4 \\ 0 & EC_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(-E) & C_1S(A', B') + C_2E \\ 0 & C_4E \end{pmatrix}.$$

Az utolsó mátrix egyenlőségben az első sor második oszlopában található elemek egyenlők, vagyis:

$$-EC_2 + S(A,B)C_4 = C_1 S(A',B') + C_2 E.$$

Innen kapjuk

$$S(A,B)C_4 = C_1 S(A',B') + 2C_2$$

Az utolsó mátrix egyenlőséget szétírva:

$$\begin{pmatrix} abE & a^2A & 0 \\ b^2E & abE & a^2B \\ 0 & b^2E & abE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abE & a^2A' & 0 \\ b^2E & abE & a^2B' \\ 0 & b^2E & abE \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} abC_{44} + a^2AC_{54} & abC_{45} + a^2AC_{55} & abC_{46} + a^2AC_{56} \\ b^2C_{44} + abC_{54} + a^2BC_{64} & b^2C_{45} + abC_{55} + a^2BC_{65} & b^2C_{46} + abC_{56} + a^2BC_{66} \\ b^2C_{54} + abC_{64} & b^2C_{55} + abC_{65} & b^2C_{56} + abC_{66} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} abC_{11} + b^2C_{12} & a^2C_{11}A' + abC_{12} + b^2C_{13} & a^2C_{12}B' + abC_{13} \\ abC_{21} + b^2C_{22} & a^2C_{21}A' + abC_{22} + b^2C_{23} & a^2C_{22}B' + abC_{23} \\ abC_{31} + b^2C_{32} & a^2C_{31}A' + abC_{32} + b^2C_{33} & a^2C_{32}B' + abC_{33} \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Az újonnan keletkezett mátrix egyenlőségben a megfelelő helyen lévő elemek egyenlők. Így egyenlők a harmadik sor első oszlopában található elemek, tehát

$$b^2C_{54} + abC_{64} = abC_{31} + b^2C_{32} + 2C_{34},$$

innen

$$\overline{b}^2C_{54} + \overline{a}\overline{b}C_{64} = \overline{a}\overline{b}C_{31} + \overline{b}^2C_{32}. \tag{4}$$

Egyenlőek a második sor első oszlopában található elemek, tehát

$$b^2C_{44} + abC_{54} + a^2BC_{64} = abC_{21} + b^2C_{22} + 2C_{24},$$

innen

$$\overline{b}^2C_{44} + \overline{a}\overline{b}C_{54} + \overline{a}^2BC_{64} = \overline{a}\overline{b}C_{21} + \overline{b}^2C_{22}. \tag{5}$$

Egyenlőek az első sor első oszlopában található elemek, tehát

$$abC_{44} + a^2AC_{54} = abC_{11} + b^2C_{12} + 2C_{14},$$

innen

$$\overline{a}\overline{b}C_{44} + \overline{a}^2AC_{54} = \overline{a}\overline{b}C_{11} + \overline{b}^2C_{12}. \tag{6}$$

Egyenlőek a harmadik sor második oszlopában található elemek, tehát

$$b^2C_{55} + abC_{65} = a^2C_{31}A' + abC_{32} + b^2C_{33} + 2C_{35},$$

innen

$$\overline{b}^2C_{55} + \overline{a}\overline{b}C_{65} = \overline{a}^2C_{31}A' + \overline{a}\overline{b}C_{32} + \overline{b}^2C_{33}. \tag{7}$$

Egyenlőek a második sor második oszlopában található elemek, tehát

$$b^2C_{45} + abC_{55} + a^2BC_{65} = a^2C_{21}A' + abC_{22} + b^2C_{23} + 2C_{25},$$

innen

$$\overline{b}^2C_{45} + \overline{a}\overline{b}C_{55} + \overline{a}^2BC_{65} = \overline{a}^2C_{21}A' + \overline{a}\overline{b}C_{22} + \overline{b}^2C_{23}. \tag{8}$$

Egyenlőek az első sor második oszlopában található elemek, tehát

$$abC_{45} + a^2AC_{55} = a^2C_{11}A' + abC_{12} + b^2C_{13} + 2C_{15},$$

innen

$$\overline{a}\overline{b}C_{45} + \overline{a}^2AC_{55} = \overline{a}^2C_{11}A' + \overline{a}\overline{b}C_{12} + \overline{b}^2C_{13}. \tag{9}$$

Egyenlőek a harmadik sor harmadik oszlopában található elemek, tehát

$$b^2C_{56} + abC_{66} = a^2C_{32}B' + abC_{33} + 2C_{36},$$

innen

$$\overline{b}^2C_{56} + \overline{a}\overline{b}C_{66} = \overline{a}^2C_{32}B' + \overline{a}\overline{b}C_{33}. \tag{10}$$

Egyenlőek a második sor harmadik oszlopában található elemek, tehát

$$b^2C_{46} + abC_{56} + a^2BC_{66} = a^2C_{22}B' + abC_{23} + 2C_{26},$$

innen

$$\overline{b}^2C_{46} + \overline{a}\overline{b}C_{56} + \overline{a}^2BC_{66} = \overline{a}^2C_{22}B' + \overline{a}\overline{b}C_{23}. \tag{11}$$

Egyenlőek az első sor harmadik oszlopában található elemek, tehát

$$abC_{46} + a^2AC_{56} = a^2C_{12}B' + abC_{13} + 2C_{16},$$

innen

$$\overline{a}\overline{b}C_{46} + \overline{a}^2AC_{56} = \overline{a}^2C_{12}B' + \overline{a}\overline{b}C_{13}. \tag{12}$$

Az (5)-ből azt kapjuk, hogy

$$ab(C_{21} - C_{54}) + b^2(C_{22} - C_{44}) = a^2BC_{64} + 2C_{24},$$

innen

$$\overline{a}\overline{b}(C_{21}-C_{54})+\overline{b}^2(C_{22}-C_{44})=\overline{a}^2BC_{64}. \tag{13}$$

A (6)-ból azt kapjuk, hogy

$$a^2AC_{54}=ab(C_{11}-C_{44})+b^2C_{12}+2C_{14},$$

innen

$$\overline{a}^2AC_{54}=\overline{a}\overline{b}(C_{11}-C_{44})+\overline{b}^2C_{12}. \tag{14}$$

Mivel a (13)-as kifejezésben a bal oldal első tagja és a jobb oldal osztható $\overline{a}$-val, ezért a következő kongruenciát kapjuk:

$$C_{22}\equiv C_{44}(modRadK). \tag{15}$$

Mivel a (8)-as kifejezésben a bal oldal második és harmadik tagja, valamint a jobb oldal első és második tagja osztható $\overline{a}$-val, ezért

$$C_{45}\equiv C_{23}(modRadK),$$

tehát

$$\overline{b}^2C_{45}=\overline{b}^2C_{23},$$

innen és a (8)-as egyenlőségből kapjuk:

$$C_{22}\equiv C_{55}(modRadK). \tag{16}$$

Mivel a (14)-es kifejezés bal oldala és a jobb oldal első tagja osztható $\overline{a}$-val, ezért kapjuk:

$$C_{12}\equiv 0(modRadK). \tag{17}$$

Mivel a (9)-es kifejezés bal oldala és a jobb oldalának első kettő tagja osztható $\overline{a}$-val, ezért kapjuk:

$$C_{13}\equiv 0(modRadK). \tag{18}$$

A (14)-es egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$\overline{b}^2C_{12}=0.$$

Ebből és ismét a (12)-es egyenlőségből kapjuk a következő kongruenciát:

$$C_{11}\equiv C_{44}(modRadK). \tag{19}$$

A (9)-es egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\overline{b}^2 C_{13} = 0.$$

Ebből és ismét a (9)-es egyenlőségből kapjuk a következő kongruenciát:

$$C_{11}A' \equiv AC_{55}(modRadK). \quad (20)$$

Mivel a (7)-es kifejezés bal oldalának második tagja és a jobb oldalának első két tagja osztódik $\overline{a}$-val, ezért kapjuk a következő kongruenciát:

$$C_{33} \equiv C_{55}(modRadK). \quad (21)$$

Mivel a (10)-es kifejezés bal oldalának második tagja és annak jobb oldala osztódik $\overline{a}$-val, akkor

$$C_{56} \equiv 0(modRadK),$$

tehát

$$\overline{b}^2 C_{56} = 0.$$

Ebből és a (10)-es egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$C_{33} \equiv C_{66}(modRadK). \quad (22)$$

Mivel a (11)-es kifejezés bal oldalának első kettő tagja, valamint jobb oldalának utolsó tagja osztódik $\overline{b}$-vel, a következő kongruenciát kapjuk:

$$C_{22}B' \equiv BC_{66}(modRadK). \quad (23)$$

Tehát a (15) - (23)-as kongruenciákból az következik, hogy

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{33} \equiv C_{55} \equiv C_{66}(modRadK), \quad (24)$$

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0(modRadK),$$

$$C_{11}A' \equiv AC_{11}(modRadK), \quad (25)$$

$$C_{11}B' \equiv BC_{11}(modRadK). \quad (26)$$

A C_{11} mátrix invertálható, mert az ellenkező esetben, számításba véve a (24)-es kongruenciát, a C mátrix nem lenne invertálható, ami ellentétbe ütközik annak kiválasztásával. A (25)-ös és (26)-os kongruenciák bizonyítják a tételt.

Összefoglalás

A csoportok vadságára már számos eredmény született, melyeknek köszönhetően szinte teljesen megoldottnak tekinthető e kérdés testek felett. A csoportok vadságát eleinte olyan testek felett vizsgálták, melyek karakterisztikája nem osztja a csoport rendjét (nem moduláris eset), ezt követően olyan testek felett, melyek karakterisztikája osztja a csoport rendjét (moduláris eset), majd a (2,2) típusú, valamint a (p,p) típusú csoport a (p>2) esetben voltak megvizsgálva vadságukra. Ezt követően a (2,2,2) és a (2,4) típusú csoportokat vizsgálták meg. Legvégül V. M. Bondarenko és Yu. A. Drozd bebizonyították a szelídség kritériumát tetszőleges fixált karakterisztikájú test felett.

A véges csoportok mátrix reprezentációinak kutatása kommutatív gyűrűk felett sokkal összetettebb és bonyolultabb. Ilyen csoportok reprezentációit az 1930-as években kezdték tanulmányozni (H. Zassenhaus, F. E. Diederichsen, R. Brauer és sokan mások). Az eddigi eredmények alapján még nem minden esetben tisztázott a csoportok vadságának kérdése.

A reprezentációk részletes vizsgálata megmutatta, hogy a véges csoportok reprezentációinak tanulmányozásakor az egyik legfontosabb eset kommutatív gyűrűk felett a lokális gyűrűk és a p-csoportok esete.

A munkám során a véges csoportok vadságát tanulmányoztam, melynek eredménye egy 2-csoport vadságának tisztázása valamely feltételekkel bíró lokális gyűrű felett.

Irodalomjegyzék

1. Гудивок П. М., Кіндюх С. П. Про матричні зображення скінченних p -груп над областями цілісності характеристики нуль. Науковий вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. і інформ. 2005. Вип. 10-11. 49-56 с.

2. Gudivok Petro: On matrix representations of finite p-groups over local rings. Groups and group rings, abstracts, Wisla. 1998. 11 p.

3. П. М. Гудивок, В. І. Погоріляк Зображення скінченних p-груп над локальними кільцями додатної характеристики. Доповіді АН УРСР, сер. А. 1989. № 2. 5-8 с.

4. П. М. Гудивок, В. И. Погориляк Матричные представления конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами характеристики p^s. Укр. матем. ж. 2002. Т. 54, № 6. 764-770 с.

5. Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцами классов вычетов. Матем. сб., Киев, «Наук. думка». 1976. 275-277 с.

6. Погоріляк В. Й. Про зображення циклічних 2-груп над комутативними локальними кільцями характеристики 2. Науковий вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. 1997. № 2. 86-91 с.

7. П. М. Гудивок, Е. Я. Погориляк О модулярных представлениях конечных групп над областями целостности. Труды Матем. ин-та АН СССР. 1990. Т. 183. 78-86 с.

Резюме

Задача дикості скінченних груп над полями є цілком розв'язана. Про це отримано багато цікавих результатів. Спершу задачу дикості груп досліджено над полем, характеристика якого не ділить порядок групи. Цей випадок прийнято називати немодулярним. Пізніше було досліджено випадок, коли характеристика поля ділить порядок групи – модулярний випадок. Потім на дикість були досліджені групи типу (2,2) і (p,p) у випадку p>2. Через деякий час на дикість були досліджені групи типу (2,2,2) і (2,4). Насамкінець В.М. Бондаренко і Ю.С. Дрозд вивели критерій, коли скінченна група над довільним полем сталої характеристики буде ручною.

Вивчення матричних зображень для груп, що є скінченними у випадку зображень над кільцями, що є комутативними встановило, що воно є складнішим за випадок полів. Дослідження таких зображень розпочалось ще на кінці тридцятих років двадцятого століття. Питання дикості скінченних груп над деякими кільцями потребує подальшого дослідження.

Всебічні вивчення зображень привели до висновку, що важливим випадком при дослідженні зображень груп над кільцями є випадок локального кільця і p-групи.

В дипломній роботі досліджувалась дикість групи над деякими комутативними кільцями, а також доведено дикість скінченної 2-групи над кільцем, що є локальним.

UNICHECK

Власник документу:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
04.05.2020 11:34:53 EEST

Дата звіту:
04.05.2020 11:37:35 EEST

ID перевірки:
1002667617

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
92712

Назва документу: matematika_Szakadati_Tamas

ID файлу: 1002679920 **Кількість сторінок:** 18 **Кількість слів:** 4698 **Кількість символів:** 26734 **Розмір файлу:** 272.15 KB

2.13% Схожість

Найбільша схожість: 0.64% з джерело http://dspace.univer.kharkov.ua/bitstream/123456789/8957/5/Analit_geometry.pdf

2.13% Схожість з Інтернет джерелами 13 Page 20

Не знайдено жодних джерел у Бібліотеці

0% Цитат

Не знайдено жодних цитат

0% Вилучень

Вилучений текст відсутній

Підміна символів

Заміна символів 52

Nyilatkozat

Alulírott, Szakadáti Tamás 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalmat, eszközöket stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatom a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.