

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

випуск № 1 (36)

2020

ISSN 2616-7700

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (36)

Ужгород 2020

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. Вип. №1 (36). 127 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук (Україна).

Технічний секретар — Бортош М. Ю., канд. фіз.-мат. наук (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — доктор філософії з математики, професор (ОАЕ), Бондаренко В. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна), Гече Ф. Е. — доктор техн. наук, професор (Україна), Гуляницький Л. Ф. — доктор техн. наук, с.н.с. (Україна), Зайченко Ю. П. — доктор техн. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Маринець К. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Нідерланди), Моклячук М. П. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Рейтій О. К. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Ронто А. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Чехія), Семенова Н. В. — доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. (Україна), Снитюк В. Є. — доктор техн. наук, професор (Україна), Тилищак О. А. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Чунов С. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Щобак Н. М. — канд. фіз.-мат. наук, професор (Чехія).

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 3 від 4 червня 2020 р.

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.). Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN (Print) 2616-7700

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mdt@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,
Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2020

© Ужгородський національний університет,
2020

ISSN 2616-7700

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (36)

Uzhhorod 2020

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2020. Issue 1 (36). 127 p.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), Lect. (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O. (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record No 3 dated by June 4.

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine. Category: B. Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN (Print) 2616-7700

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mdt@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами . . . 7
2. *Петечук В. М., Петечук Ю. В.* Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями 16
3. *Трошкі В. Б., Трошкі Н. В., Товт П. П.* Оцінки кореляційної функції гауссового стаціонарного процесу, коли відомі його значення у скінченній множині точок 30
4. *Ясинський В. К., Антоноук С. В.* Існування l -го моменту розв'язку стохастичних динамічних систем Іто-Скоророхода випадкової структури з зовнішніми збуреннями та нескінченною післядією 41
5. *Ясинський В. К., Антоноук С. В.* Стійкість розв'язку стохастичних динамічних систем випадкової структури із зовнішніми збуреннями, пуассоновими перемиканнями і всією передісторією 55

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бортош М. Ю., Тиллицяк О. А.* Розширені бінарні коди Голея за груповою алгеброю однієї групи 65
2. *Гуляницький Л. Ф., Коткова А. А.* До класифікації задач маршрутизації транспортних засобів 73
3. *Маляр М. М., Кондрук Н. Е.* Структурування критеріального простору за кутовою мірою подібності 85
4. *Поліщук В. В., Маляр М. М.* Моделювання оцінки рівня ризику функціонування соціо-економічних систем 92
5. *Селютін Є., Козін І.* Порівняльна ефективність використання метаевристичних методів 105
6. *Шаркаді М. М., Роботишин М. В., Маляр М. М.* Моделі і методи машинного навчання для завдань передбачення 112

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.* On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by two mutually annihilating idempotents..... 7
2. *Petechuk V. M., Petechuk Y. V.* Images of formal matrices of elements of matrix groups over associative rings..... 16
3. *Troshki V. B., Troshki N. V., Tovt P. P.* Estimates of the correlation function of a Gaussian stationary process when its values are known in a finite set of points 30
4. *Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V.* Existence of l -th moment of solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all prehistory 41
5. *Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V.* Stability of solution of the Ito-Skorokhod stochastic dynamic system of random structure with external random disturbances, Markov switching and all prehistory 55

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A.* Extended binary Golay codes by a group algebra of one group..... 65
2. *Hulianytskyi L. F., Kotkova A. A.* To the classification of vehicles routing problems 73
3. *Malyar M. M., Kondruk N. E.* Structuring of the criterional space by an angle similarity measure 85
4. *Polishchuk V. V., Malyar M. M.* Modeling of risk level of the socio-economic systems functioning..... 92
5. *Selyutin Y., Kozin I.* Comparative electiveness of metaheuristic methods.....105
6. *Sharkadi, M. M., Robotyshyn, M. V., Malyar, M. M.* Modeling of risk level of the socio-economic systems functioning 112

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).16-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29)**В. М. Петечук¹, Ю. В. Петечук²**

¹ Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, Ужгород,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
vasil.petechuk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5663-8789>

² Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II, Берегово,
доцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
yuliia.petechuk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3670-9671>

ЗОБРАЖЕННЯ ФОРМАЛЬНИМИ МАТРИЦЯМИ ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЧНИХ ГРУП НАД АСОЦІАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

В роботі обґрунтовується зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями шляхом використання властивостей лишкових і нерухомих модулів. Показано вигляд образів елементів лінійних груп відносно їх гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями з 1, в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

За допомогою даного підходу авторами були описані гомоморфізми з умовою (*) матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Зокрема, ізоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є гомоморфізмами з умовою (*).

Ключові слова: нерухомі та лишкові модулі, розклад модулів, ідемпотенти, формальні матриці, трансекції, комутатори, гомоморфізми лінійних груп над кільцями.

1. Вступ. Використання зображень елементів лінійних груп формальними матрицями до опису гомоморфізмів матричних груп вперше було застосовано одним з авторів в [1].

Зображення автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями формальними матрицями у загальному випадку є теоретично відомим і описаним у класичній літературі, зокрема, в [2].

У даній статті обґрунтовується зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями шляхом використання властивостей лишкових і нерухомих модулів. Показано вигляд образів елементів лінійних груп відносно їх гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями з 1, в яких елементи 2 або 3 є оборотними, а також поглиблюються і розширюються окремі твердження [3 – 4].

За допомогою даного підходу авторами були описані гомоморфізми з умовою (*) матричних груп над асоціативними кільцями [3 – 4]. Як відомо, ізоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є гомоморфізмами з умовою (*) і були описані в [5].

Можливості опису гомоморфізмів шляхом використання зображення елементів формальними матрицями далеко не вичерпані. Тому розвиток техніки, яка дозволяє вивчати гомоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є актуальним.

Інші підходи до вивчення матричних груп можна знайти в [6 – 8].

2. Нерухомі та лишкові модулі. Нехай V – довільний R -модуль над асоціативним кільцем R з 1 , σ – довільний ендоморфізм модуля V .

Нерухомими та лишковими підмодулями модуля V ендоморфізма $\sigma : V \rightarrow V$ будемо називати підмодулі $R(\sigma) = (\sigma - 1)V$ і $P(\sigma) = \ker(\sigma - 1)$ відповідно.

Тоді

$$R(\sigma) = \{(\sigma - 1)v \mid v \in V\} \text{ і } P(\sigma) = \{v \in V \mid \sigma v = v\},$$

а також $R(1 - \sigma) = \sigma V$ і $P(1 - \sigma) = \ker \sigma$.

Якщо σ – автоморфізм модуля V , то із рівності $\sigma^{-1} - 1 = (\sigma - 1)(-\sigma^{-1})$ випливає, що

$$R(\sigma^{-1}) = R(\sigma) \text{ і } P(\sigma^{-1}) = P(\sigma).$$

Якщо W – підмодуль модуля V , то

$$\sigma W = (\sigma - 1 + 1)W \subseteq R(\sigma) + W, \quad \sigma^{-1}W \subseteq R(\sigma^{-1}) + W = R(\sigma) + W.$$

Зокрема, якщо $R(\sigma) \subseteq W$, то $\sigma^{\pm 1}W \subseteq W$ і, як наслідок, $\sigma W = W$.

Якщо g – довільний ендоморфізм модуля V такий, що має місце один з випадків $g\sigma = \sigma^{\pm 1}g$, то відповідно $g(\sigma - 1) = (\sigma^{\pm 1} - 1)g$ і $(\sigma - 1)g = g(\sigma^{\pm 1} - 1)$. Тому

$$gR(\sigma) \subseteq R(\sigma^{\pm 1}) = R(\sigma) \text{ і } gP(\sigma) \subseteq P(\sigma^{\pm 1}) = P(\sigma).$$

Зокрема, якщо g – автоморфізм модуля V такий, що $g\sigma g^{-1} = \sigma^{\pm 1}$, то

$$gR(\sigma) = R(\sigma) \text{ і } gP(\sigma) = P(\sigma).$$

Цей же результат слідує також із загальних формул

$$gR(\sigma) = R(g\sigma g^{-1}) \text{ і } gP(\sigma) = P(g\sigma g^{-1}),$$

які із-за рівності $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1)g^{-1}$ вірні для будь-якого ендоморфізма σ і будь-якого автоморфізма g модуля V .

Мають місце включення

$$R(\sigma_1\sigma_2) \subseteq R(\sigma_1) + R(\sigma_2), \quad P(\sigma_1\sigma_2) \supseteq P(\sigma_1) \cap P(\sigma_2),$$

які випливають із рівностей $\sigma_1\sigma_2 - 1 = (\sigma_1 - 1)\sigma_2 + \sigma_2 - 1 = \sigma_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_1 - 1$.

Очевидно, що σ_1 і σ_2 комутують тоді і тільки тоді, коли комутують $\sigma_1 - 1$ і $\sigma_2 - 1$. Більше того, $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1) = 0$ тоді і тільки тоді, коли має місце система

$$\begin{cases} R(\sigma_1) \subseteq P(\sigma_2), \\ R(\sigma_2) \subseteq P(\sigma_1). \end{cases}$$

Зрозуміло, що із даної системи включень випливає комутативність σ_1 і σ_2 . Навпаки не завжди вірно.

Виявляється, що нерухомі і лишкові підмодулі елементів скінченного порядку, який є оборотним в кільці, співпадають з пірсовим розкладом ідемпотентів, які вони визначають.

Лема 1. Нехай R – асоціативне кільце з 1, V – лівий R -модуль (не обов'язково вільний), $\sigma \in GL(V)$, $\sigma^m = 1$, $m \in R^*$, $e = (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})m^{-1}$. Тоді $e^2 = e$ – ідемпотент і $V = R(\sigma) \oplus P(\sigma)$, де

$$P(\sigma) = \{v \in V \mid (\sigma - 1)v = 0\} = eV \text{ і}$$

$$R(\sigma) = \{v \in V \mid (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})v = 0\} = (1 - e)V.$$

Доведення. Оскільки $e\sigma^i = \sigma^i e = e$ для всіх $i \geq 0$, то $e^2 = e(1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})m^{-1} = e$ – ідемпотент і має місце пірсовий розклад

$$V = eV \oplus (1 - e)V, \text{ де } v = ev + (1 - e)v, v \in V.$$

З цього розкладу випливає, що

$$eV = \{v \in V \mid (1 - e)v = 0\} = \ker(1 - e) \text{ і } (1 - e)V = \{v \in V \mid ev = 0\} = \ker e.$$

Оскільки $e(1 - \sigma) = (1 - \sigma)e = 0$ і $1 - e = (1 - \sigma)t$, де $t \in \text{End}V$ і $\sigma t = t\sigma$, то

$$eV \subseteq P(\sigma) \subseteq \ker(1 - e) \subseteq eV \text{ і } (1 - e)V \subseteq R(\sigma) \subseteq \ker e \subseteq (1 - e)V.$$

Тим самим доведено, що

$$P(\sigma) = eV = \ker(1 - e) = \{v \in V \mid (\sigma - 1)v = 0\},$$

$$R(\sigma) = (1 - e)V = \ker e = \{v \in V \mid (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})v = 0\}.$$

Лема 2. Нехай K – асоціативне кільце з 1, $m \in K^*$, $a, b \in \text{End}V$, $a^m = b^m = 1$, $ab = ba$. Тоді

$$P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) = P(b) \cap P(ab), P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b),$$

$$P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a), R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b),$$

$$R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a).$$

Зокрема, якщо $m = 2 \in K^*$, то $R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab)$. Якщо $m = 3 \in K^*$, то $b = a$ на $R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$ і $b = a^2$ на $R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$.

Доведення. З властивостей нерухомих і лишкових підмодулів елементів скінченного порядку випливають рівності

$$\begin{cases} P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) \\ P(b) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) \end{cases}, \quad \begin{cases} P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b) \\ P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a) \end{cases}.$$

Нехай $v \in P(ab)$. Тоді $abv = v$ і $av = b^{-1}v$, $bv = a^{-1}v$. За індукцією $a^l v = b^{-l}v$, $b^l v = a^{-l}v$ для всіх $l \geq 0$. Тому $R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b)$, $R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a)$.

Якщо $m = 2 \in K^*$, то включення леми перетворюються в рівності. Адже, в цьому випадку

$$R(a) \cap R(b) = \{v \in V \mid av = -v, bv = -v\} \subseteq \{v \in V \mid abv = v\} \subseteq P(ab).$$

Тому $R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab)$. Зокрема,

$$R(a) \cap R(b) \cap R(ab) = 0, R(a) \cap R(b) \cap P(ab) = R(a) \cap R(b).$$

У випадку $m = 3 \in K^*$ виявляється, що $bv = av$, якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$ і $bv = a^2v$, якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$.

Дійсно, якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$, то

$$(a^2 + a + 1)v = (b^2 + b + 1)v = ((ab)^2 + ab + 1)v = 0.$$

В такому разі

$$(a^2 + ab + a)(a - b)v = a(a + b + 1)(a - b)v = a(a^2 - b^2 + a - b)v = 0.$$

З отриманих рівностей випливає, що $(ab - 1)(a - b)v = 0$. Оскільки $0 = ((ab)^2 + ab + 1)(a - b)v = 3(a - b)v$, то $bv = av$. Якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$, то $abv = v$ і $bv = a^2v$.

3. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (загальний випадок). Нехай $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ – розклад лівого R -модуля V в пряму суму своїх підмодулів V_1, \dots, V_n . Це означає, що будь-який елемент $v \in V$ однозначно зображається у вигляді суми $v = v_1 + \dots + v_n$, де $v_i \in V_i$. Із однозначності розкладу модуля V випливає, що існує відображення e_i модуля V на модуль V_i , яке кожному елементу v модуля V ставить у відповідність його i -ту компоненту розкладу v_i . Отже, $v_i = e_i v$. Насправді e_i – ендоморфізм модуля V , який називають проектором модуля V на підмодуль V_i .

Адже, якщо $v = v_1 + \dots + v_n$ і $v' = v'_1 + \dots + v'_n$ – довільні елементи модуля V , а $r \in R$, то $v + v' = v_1 + v'_1 + \dots + v_n + v'_n$, $rv = rv_1 + \dots + rv_n$.

Тому мають місце рівності

$$e_i(v + v') = v_i + v'_i = e_i v + e_i v', e_i(rv) = rv_i = r(e_i v).$$

Більше того, $e_i v_j = \delta_{ij} v_i$, $e_i e_j v = e_i v_j = \delta_{ij} v_j = \delta_{ij} e_j v$.

Накінець, $(e_1 + \dots + e_n)v = v$ для всіх $v \in V$.

Таким чином виконуються співвідношення

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_j, 1 = e_1 + \dots + e_n,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Тим самим доведено, що елементи e_1, \dots, e_n утворюють повну систему ідемпотентів кільця $EndV$. В такому разі виникає розклад

$$EndV = \bigoplus_{i,j} e_i EndV e_j.$$

Цей розклад називається пірсовим розкладом кільця $EndV$. Компоненти пірсового розкладу взагалі-то уже не є ні правими, ні лівими ідеалами. Але цей розклад дає зручну інтерпретацію кільця ендоморфізмів $EndV$ модуля V у вигляді формальних матриць. Дійсно, нехай σ – довільний елемент $EndV$. Позначимо через $A_\sigma = (\sigma_{ij})$ формальну матрицю, де $\sigma_{ij} = e_i \sigma e_j$ – гомоморфізми $V_j \rightarrow V_i$.

Якщо σ і σ' – довільні елементи кільця $EndV$, то

$$A_{\sigma+\sigma'} = (e_i(\sigma + \sigma')e_j) = A_\sigma + A_{\sigma'},$$

$$A_{\sigma\sigma'} = (e_i(\sigma\sigma')e_j) = (e_i\sigma 1 \cdot 1\sigma'e_j) = \left(\sum_k e_i\sigma e_k \cdot e_k\sigma'e_j\right) = A_\sigma A_{\sigma'}.$$

Якщо $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, $e_i : V \rightarrow V_i$, то $1 = e_1 + \dots + e_n$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_j$ і відображення $\sigma \rightarrow A_\sigma \in$ кільцевим гомоморфізмом кільця $EndV$ у кільце формальних $n \times n$ матриць із елементами $\sigma_{ij} = e_i \sigma e_j$.

Дію ендоморфізма $\sigma : V \rightarrow V$ на підмодулях V_1, \dots, V_n можна визначити матрицею (a_{ij}) де a_{ij} – гомоморфізми $V_j \rightarrow V_i$ за правилом:

$$\sigma v_i = \sum_k a_{ki}(v_i), v_i \in V_i, a_{ki} \in Hom(V_i, V_k).$$

Тоді $\sigma_{ij} v_j = e_i \sigma e_j v_j = e_i \sigma v_j = e_i(\sum_k a_{kj}(v_j)) = a_{ij}(v_j)$, $\sigma_{ij} = a_{ij}$.

Це означає, що $A_\sigma \in$ формальною матрицею елемента σ на підмодулях V_1, \dots, V_n . Матриця A_σ будується аналогічно до того, як будуються матриці ендоморфізмів у фіксованій базі шляхом запису у стовпці коефіцієнтів розкладу образів елементів бази відносно ендоморфізма σ . Таким чином, можна вважати, що підмодулі V_1, \dots, V_n виконують роль своєрідних базисних елементів, а елементами формальної матриці $A_\sigma \in$ гомоморфізми між ними.

Зокрема, якщо V_1, \dots, V_n вільні одномірні підмодулі, то елементи формальної матриці A_σ ототожнюються з елементами кільця R . У цьому випадку формальні матриці є звичайними матрицями над кільцем R .

Якщо $V_1 = \dots = V_n = V_0$, то $EndV \equiv (EndV_0)_n$, $GL(V) \equiv GL(n, EndV_0)$.

Це означає, що кільце $EndV$ можна ототожнювати з кільцем $n \times n$ матриць, а $GL(V)$ з повною лінійною (матричною) групою над кільцем $EndV_0$ шляхом ототожнення σ з A_σ . При цьому тотожні гомоморфізми зручно позначати 1 , а нульові 0 .

Якщо модулі V_1, \dots, V_n R -ізоморфні з деяким лівим R -модулем L і

$$g : V_1 \oplus \dots \oplus V_n \rightarrow L \oplus \dots \oplus L (n \text{ раз})$$

відповідний ізоморфізм, то має місце внутрішній ізоморфізм

$$i_g : EndV \rightarrow M(n, EndL) \text{ за правилом } i_g : \sigma \rightarrow g\sigma g^{-1},$$

який дає можливість кільце ендоморфізмів $EndV$ модуля V ототожнювати з кільцем квадратних $n \times n$ матриць $M(n, EndL) \equiv (EndL)_n$, а групу $GL(V)$ з групою $GL(n, EndL)$ над кільцем ендоморфізмів $EndL$.

Зокрема, якщо $V = L \oplus \sigma L$, де $\sigma \in GL(V)$, то ізоморфізми

$$g : L \oplus \sigma L \rightarrow L \oplus L \quad i_g^{-1} : L \oplus L \rightarrow L \oplus \sigma L$$

задаються за правилом: $g(l_1 + \sigma l_2) = l_1 + l_2$ (вितिрання σ), $g^{-1}(l_1 + l_2) = l_1 + \sigma l_2$ (дописування σ), де l_1, l_2 елементи L . Тому $i_g : GL(V) \rightarrow GL(L \oplus L)$,

$$i_g \sigma l_1 = g\sigma g^{-1}(l_1 + 0) = g\sigma(l_1 + 0) = g(\sigma l_1 + 0) = g(0 + \sigma l_1) = 0 \cdot l_1 + 1 \cdot l_1.$$

Це означає, що $i_g\sigma = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$.

Нехай e_{ij} – стандартна матрична одиниця у якої на місці (i, j) знаходиться 1, а на решті місць знаходяться нулі. Матриці $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, де $0 \neq r \in R$ будемо називати елементарними трансвекціями,

$$t_{ij} = t_{ij}(-1)t_{ji}(1)t_{ij}(-1) = t_{ji}(1)t_{ij}(-1)t_{ji}(1).$$

У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2 , а елемент $[g_1, \dots, g_t] = [[g_1, \dots, g_{t-1}], g_t]$ – комутатором довжини t елементів g_1, \dots, g_t групи G , де $t > 2$.

Мають місце матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl}r_1r_2),$$

де $1 \leq k \neq i, i \neq j, l \neq j \leq n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R . Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, де $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно різні довільні числа, $r \in R$.

4. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (випадок, коли 2 – оборотний елемент). Нехай K – асоціативне кільце з 1, W – лівий K -модуль, $EndW$ – кільце ендоморфізмів модуля W , $GL(W) = EndW^*$ – група автоморфізмів модуля W .

Скористаємося розкладом модуля W у суму підмодулів, які породжені нерухомими і лишковими підмодулями.

Лема 3. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $2 \in K^*$, W – лівий K – модуль, a, b, c, d – елементи групи $GL(W)$ такі, що $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba$, $ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$, $a \neq 1$. Тоді існують ліві K – модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \rightarrow W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, який індукує ізоморфізм $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c, \Lambda_g d$ можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \Lambda_g b = \text{diag}(1, -1, -1, 1), \Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),$$

$$\Lambda_g d = \text{diag}(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1)$$

де $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL, \gamma, \gamma_1 \in EndP$.

Доведення. За умовою $R(a) \neq 0$, $bR(a) = R(a)$, $bP(a) = P(a)$. Тому має місце розклад

$$W = R(a) \oplus P(a) = R(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap P(b) \oplus P(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Позначимо $L = R(a) \cap P(b)$, $P = P(a) \cap P(b)$. Тоді $cL = R(a) \cap P(ab) = R(a) \cap R(b)$ і $dcL = R(ab) \cap R(b) = P(a) \cap R(b)$.

Оскільки $R(a) = L \oplus cL \neq 0$, то $L \neq 0$ і $W = L \oplus cL \oplus dcL \oplus P$, де $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$. Розглянемо ізоморфізм модулів $g : W \rightarrow W_g$, який визначений за правилом $g(l_1 + cl_2 + dcl_3 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + p$, де $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 3$, $p \in P$

і індукований ним внутрішній ізоморфізм $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$, де $\Lambda_g \sigma = g \sigma g^{-1}$ для всіх $\sigma \in GL(W)$.

Будемо зображати елементи кільця $End(W_g)$ формальними 4×4 матрицями, записуючи дію елементів кільця $End(W_g)$ на модулі W_g у стовпчики. Зокрема отримаємо, що

$$\Lambda_g a = \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \Lambda_g b = \text{diag}(1, -1, -1, 1),$$

де 1 – одиниця кільця $EndL$ або кільця $EndP$ відповідно.

Адже, дія $\Lambda_g a$ на довільні елементи l_1, l_2, l_3 модуля L і довільний елемент p модуля P визначається рівностями $(\Lambda_g a)l_1 = g a g^{-1} l_1 = g a l_1 = g(-l_1) = -l_1$, $(\Lambda_g a)l_2 = g a g^{-1} l_2 = g a c l_2 = g(-c l_2) = -l_2$, $(\Lambda_g a)l_3 = g a d c l_3 = g d c l_3 = l_3$, $(\Lambda_g a)p = g a p = g p = p$.

Аналогічно визначається дія $\Lambda_g b$ на довільні елементи l_1, l_2, l_3 модуля L і довільний елемент p модуля P

$$(\Lambda_g b)l_1 = g b g^{-1} l_1 = g b l_1 = g l_1 = l_1, (\Lambda_g b)l_2 = g b c l_2 = g(-c l_2) = -l_2,$$

$$(\Lambda_g b)l_3 = g b g^{-1} l_3 = g b d c l_3 = g(-d c l_3) = -l_3, (\Lambda_g b)p = g b p = g p = p.$$

Окрім цього, $c^2 L = c R(a) \cap R(b) = R(a) \cap R(ab) = L$, $c d c L = c d R(a) \cap R(b) = P(a) \cap R(ab) = d c L$, $c P = P(a) \cap P(ab) = P$, $(\Lambda_g c)l_1 = g c l_1 = l_1$. Тому

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),$$

де $\alpha, \beta \in EndL, \gamma \in EndP$.

Аналогічно доводиться, що $d c L = c L$, $d^2 L = L$, $d P = P$, $(\Lambda_g d)l_2 = g d c l_2 = l_2$,

$$\Lambda_g d = \text{diag}\left(\beta_1 \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right),$$

де $\alpha_1, \beta_1 \in EndL, \gamma_1 \in EndP$.

Зокрема, якщо $c^2 = a$, то $\alpha = -1, \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$. Якщо $c^2 = 1$, то $\alpha = 1, \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$.

В якості елементів a, b, c, d , які визначені у лемі 3, можна вибрати образи інволюцій і елементів четвертого порядку.

Теорема 1. Нехай R і K – асоціативні кільця з $1, 2 \in K^*$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 3$, W – лівий K -модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ – довільний неодиначний гомоморфізм групи $E(n, R)$. Тоді в групі $GL(W)$ в якості елементів a, b, c, d , які визначені у лемі 3, за умови $\Lambda t_{ij}^2 \neq 1$ можна вибрати

$$a = \Lambda \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1), \quad b = \Lambda \text{diag}(1, -1, -1, 1, \dots, 1),$$

$$c = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right), \quad d = \Lambda \text{diag}\left(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right).$$

При цьому $c^2 = a, d^2 = b$.

Якщо $\Lambda t_{ij}^2 = 1$ для деяких, а значить і для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, то в якості елементів a, b, c, d , можуть бути вибрані елементи

$$a = \Lambda t_{12}(1), \quad b = \Lambda t_{13}(1), \quad c = \Lambda t_{32}(-1), \quad d = \Lambda t_{23}(-1).$$

При цьому $c^2 = 1, d^2 = 1$.

Доведення. Нехай $At_{ij}^2 \neq 1$. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що елементи a, b, c, d , які задані в умові теореми, задовольняють співвідношення леми 3 $a^2 = b^2 = 1, ab = ba, ca = ac, abc^{-1} = ab, db = bd, dad^{-1} = ab, a = \text{Diag}(-1, -1, 1, \dots, 1) = At_{12}^2 \neq 1$.

Якщо $At_{ij}^2 = 1$, то з рівності $[t_{ij}(1), t_{ik}^2] = t_{ij}(2)$ для різних чисел $1 \leq i, j, k \leq n$ випливає, що $At_{ij}(2) = 1$ і елементи a, b, c, d , які задані в умові теореми, також задовольняють співвідношення леми 3 $a^2 = b^2 = 1, ab = ba, ca = ac, abc^{-1} = ab, db = bd, dad^{-1} = ab$. Якщо при цьому $a = At_{ij}(1) = 1$, то з рівності $[t_{ij}(1), t_{jk}(r)] = t_{ik}(r)$ для різних чисел $1 \leq i, j, k \leq n, r \in R$ випливає, що $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ – одиничний гомоморфізм на групі $E(n, R)$. Це протирічить припущенню. Тому $a = At_{ij}(1) \neq 1$.

Відмітимо, що якщо Λ – гомоморфізм з умовою (*), то в теоремі 1 другий випадок не має місця.

5. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (випадок, коли 3 – оборотний елемент). У довільному асоціативному кільці з 1 мають місце співвідношення, використання яких у матричних кільцях дозволяє зображати ендоморфізми модулів формальними матрицями.

Лема 4. Нехай a, b – елементи деякого асоціативного кільця K з 1, $3 \in K^*$, такі, що $b^2 = 1, a^2 + a + 1 = 0, bab^{-1} = a^2, e = (1 - a)(1 - b)3^{-1}, e_1 = e - ab$. Тоді $e^2 = e, eae = (1 - e)a^2(1 - e) = 0$ і $e^2 = e_1, e_1ae_1 = (1 - e_1)a^2(1 - e_1) = 0, (a - b)e_1 = 0$.

Доведення. За умовою мають місце рівності $b(1 - b) = -(1 - b)$,

$$(1 - b)^2 = 2(1 - b),$$

$$(1 - b)a(1 - b) = (a - a^2b)(1 - b) = (a + a^2)(1 - b) = -(1 - b),$$

$$(1 - b)a^2(1 - b) = (a^2 - ab)(1 - b) = (a^2 + a)(1 - b) = -(1 - b).$$

Безпосередньою перевіркою отримуємо, що $e^2 = e$. Адже,

$$9e^2 = (3e)^2 = (1 - a)(1 - b)(1 - a)(1 - b) = (1 - a)((1 - b)^2 + 1 - b) = 9e.$$

Також $eae = 0$. Адже,

$$\begin{aligned} 9eae &= (1 - a)(1 - b)a(1 - a)(1 - b) = (1 - a)(1 - b)(a - a^2)(1 - b) = \\ &= (1 - a)(-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Тому $ea^2e = -e^2 - eae = -e$.

З другого боку, виконуються рівності

$$ab + ba = ab + a^2b = -b, a^2b + ba^2 = a^2b + ab = -b.$$

Неважко перевірити, що мають місце рівності

$$3(ea + ae) = (1 - a)((1 - b)a + a(1 - b)) = (1 - a)(2a + b),$$

$$3(ea^2 + a^2e) = (1 - a)((1 - b)a^2 + a^2(1 - b)) = (1 - a)(2a^2 + b),$$

$$3(eab + abe) = (1 - a)(1 - b)ab + ab(1 - a)(1 - b) =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - a - b + ab) ab + ab(1 - a - b + ab) = \\
&= ab - a^2b - a^2 + 1 + ab - b - a + 1 = 3(1 + ab).
\end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що $ead + abe = 1 + ab$.

Як і вище доводиться, що $(1 - e)a^2(1 - e) = 0$. Адже,

$$\begin{aligned}
&3(1 - e)a^2(1 - e) = 3(a^2 - (ea^2 + a^2e) + ea^2e) = \\
&= 3a^2 - (1 - a)(2a^2 + b) - 3e = a^2 - b + 2 + ab - 3e = \\
&= 1 - a - b + ab - 3e = 3e - 3e = 0.
\end{aligned}$$

Нехай $e_1 = e - ab$. З вищезазначених рівностей слідує, що

$$e_1^2 = (e - ab)^2 = e - (ead + abe) + abab = e - (1 + ab) + 1 = e - ab = e_1.$$

Окрім цього, має місце рівність $e_1ae_1 = 0$. Дійсно,

$$\begin{aligned}
&3e_1ae_1 = 3(e - ab)a(e - ab) = 3(ea - b)(e - ab) = 3(-ea^2b - be + a^2) = \\
&= -(1 - a - b + ab)a^2b - b((1 - a - b + ab) + 3a^2) = \\
&= -a^2b + b + a - a^2 - b + a^2b + 1 - a^2 + 3a^2 = a^2 + a + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що $(1 - e_1)a^2(1 - e_1) = 0$, $(a - b)e_1 = 0$.

З леми 4 випливає, що $ae = (1 - e)ae$, $a^2(1 - e) = ea^2(1 - e)$, $ae_1 = (1 - e_1) \cdot ae_1$ і $a^2(1 - e_1) = e_1a^2(1 - e_1)$.

Лема 5. Нехай K – асоціативне кільце з 1 , $3 \in K^*$, W – лівий K -модуль, a, b – елементи $GL(W)$ такі, що $a^3 = b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $a \neq 1$. Тоді існує ізоморфізм модулів $g : W \rightarrow W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus P$, і ізоморфізм Λ_g такі, що елементи $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

де $\gamma \in \text{End}P$, $\gamma^2 = 1$.

Зокрема, якщо $W = R(a)$, то

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай $R(a) = (a - 1)W$ і $P(a) = \ker(a - 1)$. Оскільки елементи a і b комутують, то підмодулі $R(a)$ і $P(a)$ є інваріантними відносно a і b . Як було зазначено вище

$$R(a) = \{v \in W \mid (a^2 + a + 1)v = 0\}, \quad P(a) = \{v \in W \mid av = v\}, \quad W = R(a) \oplus P(a).$$

Тому $a^2 + a + 1 = 0$ на підмодулі $R(a)$ і $a = 1$ на підмодулі $P(a)$.

Нехай $e = (1 - a)(1 - b)3^{-1}$, $e_1 = e - ab$, де 1 означає одиницю групи $GL(W)$.

Підмодулі $R(a)$ і $P(a)$ є інваріантними відносно e , e_1 , $eP(a) \subseteq (1 - a)P(a) = 0$. Згідно з лемою 4 e , e_1 – ідемпотенти на $R(a)$ і $e = 0$ на $P(a)$.

Ідемпотент e_1 кільця $EndW$ визначає розклад модуля W .

$$W = R(a) \oplus P(a) = e_1R(a) \oplus (1 - e_1)R(a) \oplus P(a),$$

де $R(a) = e_1R(a) \oplus (1 - e_1)R(a)$.

Позначимо $L = e_1R(a)$, $P = P(a)$. Оскільки $a \neq 1$, то $R(a) \neq 0$. Відповідно до леми 4 $ae_1R(a) \subseteq (1 - e_1)R(a)$ і $a^2(1 - e_1)R(a) \subseteq e_1R(a)$, $(1 - e_1)R(a) \subseteq ae_1R(a)$. Отже, $(1 - e_1)R(a) = ae_1R(a) = aL$.

Тим самим, доведено, що $R(a) = L \oplus aL$, $L \neq 0$, $W = L \oplus aL \oplus P$.

Нехай $W_g = L \oplus L \oplus P$ і $g : W \rightarrow W_g$ – ізоморфізм модулів, який визначений за правилом $g(l_1 + al_2 + p) = l_1 + l_2 + p$, де $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 2$, $p \in P$, а $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ – індукований g груповий ізоморфізм.

Це означає, що елементи кільця $End(W_g)$ можна зобразити формальними 3×3 матрицями

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Враховуючи рівність $(1 + a + a^2)R(a) = 0$ отримаємо, що $a_1 = a_2 = -1$. З рівності $b^2 = 1$ отримаємо, що $b_1 = 1$, $b_2 = 0$.

В якості елементів a, b які визначені у лемі 5, можна вибрати образи інволюцій і елементів третього порядку.

Теорема 2. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1 , $3 \in K^*$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 3$, W – лівий K – модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ – довільний неединичний гомоморфізм групи $E(n, R)$. Тоді в групі $GL(W)$ в якості елементів a, b які визначені у лемі 5, можна вибрати*

$$a = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right), \quad b = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -1, 1, \dots, 1\right), \quad \text{при } n \geq 3$$

або у випадку $n \geq 4$

$$a = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right), \quad b = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right),$$

або у випадку $n \geq 5$

$$a = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right), \quad b = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, 1, -1, \dots, 1\right).$$

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що мають місце співвідношення $a^3 = b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$.

З формули $[t_{ij}t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{ik}(-r)$, де $1 \leq i, j, k \leq n$ попарно різні числа і $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ – неединичний гомоморфізм групи $E(n, R)$ випливає, що має місце нерівність $a \neq 1$.

Згідно з теоремою 2 неединичний елемент a групи $GL(W)$, що задовольняє рівність $a^2 + a + 1 = 0$, при існуванні елемента b , $b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^2$, з точністю до ізоморфізма Λ_g , можна зобразити формальною матрицею $\text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right)$.

Лема 6. *Нехай K – асоціативне кільце з 1 , $3 \in K^*$, W – лівий K – модуль, a, b – елементи $GL(W)$ такі, що $a, b \in GL(W)$, $a^3 = b^3 = 1$, $ab = ba$. Тоді*

існує розклад модуля W в пряму суму підмодулів, ізоморфізм модулів $g : W \rightarrow W_g, W_g = W$ і ізоморфізм Λ_g такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}(z, E, x, y, E), \quad \Lambda_g b = \text{diag}(E, z_1, x, y^2, E),$$

$$\text{де } x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0, z^2 + z + 1 = 0, z_1^2 + z_1 + 1 = 0.$$

Доведення. Підмодулі $R(a), R(b), P(a), P(b)$ є інваріантними відносно елементів a і b і мають місце розклади $W = R(a) \oplus P(a), R(a) = R(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap P(b), P(a) = P(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$. Оскільки $(ab)^3 = 1$, то також має місце розклад

$$R(a) \cap R(b) = R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap P(ab).$$

Це означає, що має місце розклад модуля W в пряму суму підмодулів (деякі з яких можуть бути нульовими)

$$W = R(a) \cap P(b) \oplus P(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap \\ \cap P(ab) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Тим самим доведено, що елементи a і b мають вигляд вказаний в лемі 6.

Відмітимо, що оскільки $(x-1)(x+2) = -3 = (x^2-1)(x+1)$, то $x-1, x^2-1$ і аналогічно $y-1, y^2-1, z-1, z^2-1, z_1-1, z_1^2-1$ є оборотними на відповідних ненульових підмодулях.

Лема 7. Нехай K – асоціативне кільце з $1, 3 \in K^*, W$ – лівий K – модуль, a, b, c, d – елементи групи $GL(W)$ такі, що $a^3 = b^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^{-1}, c^2 = 1, dad^{-1} = b, d^2 = 1, dc = cd$.

Якщо $R(a) \cap P(b) \neq 0$, то існують ліві K – модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \rightarrow W_g, W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$, який індукує ізоморфізм групи $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c, \Lambda_g d$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right), \quad \Lambda_g b = \text{diag}\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \quad \Lambda_g d = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \text{End}P, \alpha^2 = \beta^2 = 1, \gamma^2 = \delta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, \gamma\alpha = \alpha^2\gamma, \gamma\beta = \beta^2\gamma, \delta\alpha = \beta\delta, E = \text{diag}(1, 1)$, 1 – одиниця $\text{End}L$ або $\text{End}P$.

Якщо $R(a) \cap P(b) = 0$, то існує ізоморфізм групи $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right), \quad \Lambda_g b = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \alpha & -1 - 2\alpha \\ 1 + 2\alpha & -1 - \alpha \end{pmatrix}, E\right),$$

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \quad \Lambda_g d = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in \text{End}L, \alpha + \alpha^2 = 0, l, \delta \in \text{End}P, l^2 = \delta^2 = 1, \alpha\beta = (\alpha + 1)\gamma = 0, \beta^2 + \gamma^2 = 1, \alpha = -\gamma^2, \beta\gamma = \gamma\beta = 0, 1$ – одиниця $\text{End}L, E$ – одиниця $\text{End}P$.

Доведення. Нехай $R(a) \cap P(b) \neq 0$. Як і в лемі 5 позначимо $e = (1 - a)(1 - c) \cdot 3^{-1} - ac$, $f = (1 - b)(1 - c)3^{-1} - bc$. Тоді $e^2 = e$, $ea e = 0$, $f^2 = f$, $fbf = 0$, $ded^{-1} = f$, $dfd^{-1} = e$.

$$W = R(a) \cap P(b) \oplus R(b) \cap P(a) \oplus R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b),$$

$$R(a) = eR(a) \oplus (1 - e)R(a), \quad R(b) = fR(b) \oplus (1 - f)R(b).$$

Як і в лемі 5 $eR(a) = (1 - e)R(a)$, $cfR(b) = (1 - f)R(b)$. За умовою $dR(a) \cap P(b) = R(b) \cap P(a)$.

Позначимо $L = eR(a) \cap P(b)$, $P = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$. Тоді $R(a) \cap P(b) = L \oplus cL$, $L \neq 0$, $dL = fR(b) \cap P(a) \cap R(b) \cap P(a) = dL \oplus dcL$. Тим самим доведено, що $W = L \oplus cL \oplus dL \oplus dcL \oplus P$.

Нехай $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$, $g : W \rightarrow W_g$ – ізоморфізм модулів, який визначений за правилом $g(l_1 + cl_2 + dl_3 + dcl_4 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + p$, де $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 4$, $p \in P$, і $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ – індукований ним груповий гомоморфізм.

Зобразимо елементи кільця $End(W_g)$ формальними 5×5 матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right), \quad \Lambda_g b = \text{diag}\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \quad \Lambda_g d = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$ і $A \in (EndL)_2$ – формальна 2×2 матриця, яка комутує з формальними 2×2 матрицями $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $1 \in EndL$. Тому, з точністю до спряження, формальною матрицею $\text{diag}(A, 1, 1)$ можна вважати, що $A = 1$.

Якщо $R(a) \cap P(b) = 0$, то $R(b) \cap P(a) = d(R(a) \cap P(b)) = 0$. Тому $W = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$. Як наслідок,

$$W = R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap P(ab) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Формули $[t_{ij}t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{ik}(-r)$, де $1 \leq i, j, k \leq n$ попарно різні числа, показують, що має місце нерівність $b \neq a^2$ і, як наслідок, виконується нерівність $R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \neq 0$.

Зауважимо, що згідно з теоремою 2 можна вважати, що $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Зобразимо елементи a і b формальними матрицями $a = \text{diag}(x, y, E)$, $b = \text{diag}(x, y^2, E)$, $ab = \text{diag}(x^2, E, E)$, $ab^2 = \text{diag}(E, y^2, E)$, де $x^2 + x + 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$.

Неважко бачити, що $R(a) = R(b)$ і $P(a) = P(b)$. За лемою 5 існує ізоморфізм групи $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right), \quad \Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, l\right).$$

Оскільки $ab = ba$, $cbc^{-1} = b^{-1}$, $b^2 + b + 1 = 0$ на $R(b) = R(a)$, то

$$\Lambda_g b = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} \alpha & -1 - 2\alpha \\ 1 + 2\alpha & -1 - \alpha \end{array} \right), E \right), \quad \Lambda_g d = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{array} \right), \delta \right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in \text{End}L$, $\alpha + \alpha^2 = 0$, $l, \delta \in \text{End}P$, $l^2 = \delta^2 = 1$, $\alpha\beta = (\alpha + 1)\gamma = 0$, $\beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha = -\gamma^2$, $\beta\gamma = \gamma\beta = 0$, 1 – одиниця $\text{End}L$, E – одиниця $\text{End}P$.

Відмітимо, що якщо Λ – гомоморфізм з умовою (*), то в лемі 7 другий випадок не має місця.

В якості елементів a, b, c, d які визначені у лемі 7, можна вибрати образи інволюцій і елементів третього порядку.

Теорема 3. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1 , $3 \in K^*$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 3$, W – лівий K – модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ – довільний неединичний гомоморфізм групи $E(n, R)$. Тоді в якості елементів a, b, c, d які визначені у лемі 6, можна вибрати*

$a = \Lambda \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right)$, $b = \Lambda \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), -1, 1, \dots, 1 \right)$, при $n \geq 3$
або у випадку $n \geq 4$

$$a = \Lambda \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \quad b = \Lambda \text{diag} \left(1, 1, \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right),$$

$$c = \Lambda \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \quad d = \Lambda \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & E \\ E & 0 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right),$$

де $E = \text{diag}(1, 1)$ – одинична 2×2 матриця.

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що мають місце співвідношення $a^3 = b^3 = 1$, $ab = ba$, $cac^{-1} = a^{-1}$, $cbc^{-1} = b^{-1}$, $c^2 = 1$, $dad^{-1} = b$, $d^2 = 1$, $dc = cd$. Тому до перерахованих в теоремі 3 елементів можна застосувати лему 7.

6. Висновки. У даній статті знайдено вигляд образів деяких елементів матричних груп над асоціативними кільцями відносно неединичних гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними елементами шляхом зображення їх формальними матрицями.

7. Перспективи подальших досліджень. Знаходження умов, подібних до умови (*) при яких гомоморфізми матричних груп над кільцями допускають стандартний опис.

Список використаної літератури

1. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки*. 1989. Т.45, вып. 2. С. 83–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01158061>
2. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. Киев: Вища школа, 1980. 192 с.
3. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2. С. 152–171.
4. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). С. 99–114.
5. Golubchik I. Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*. 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.

6. Hahn A. J. , O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin: Springer, 1989. 578 p.
7. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 188. 2013. P 490 – 550. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7>
8. Bovdi V. A., Rudko V. P. Extensions of the representation modules of a prime order group. *J. Algebra*, Vol. 295. 2006. P. 441 – 451. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.005>

Petechuk V. M., Petechuk Y. V. Images of formal matrices of elements of matrix groups over associative rings.

The paper substantiates the image by formal matrices of some elements of linear groups over associative rings by using the properties of redundant and fixed modules. The form of images of elements of linear groups with respect to their homomorphisms in the group of automorphisms of modules over associative rings of 1, in which there are reversible elements 2 or 3, is shown.

Using this approach, the authors described homomorphisms with the condition (*) of matrix groups over associative rings with 1. In particular, the isomorphisms of matrix groups over associative rings are homomorphisms with condition (*).

Keywords: residual and fixed modules, decomposition modules, idempotents, formal matrices, transvections, commutators, homomorphisms of linear groups over rings.

References

1. Petechuk, V. M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* 45, 144–151. <https://doi.org/10.1007/BF01158061> [in Russian].
2. Drozd, Yu. A. & Kyrychenko, V. V. (1980). *Konechnomernye algebry* [Finite-Dimensional Algebras]. Kiev: Vyscha shkola [in Russian].
3. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2 (25), 152–171 [in Russian].
4. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1 (26), 99–114 [in Russian].
5. Golubchik, I. Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*, 131(1) , P. 123–136.
6. Hahn, A. J., & O'Meara, O. T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer.
7. Vavilov, N. A. & Stepanov A. V. (2013). Linear groups over general rings. I. Generalities. *Journal of Mathematical Sciences*, 188, 490–550. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7>
8. Bovdi, V. A. & Rudko V. P. (2006). Extensions of the representation modules of a prime order group. *J. Algebra*, 295, 441–451. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.005>

Одержано 08.04.2020

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (36)

2020

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), М. Ю. Бортош (технічний секретар),
В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, Ф. Е. Гече, Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко,
К. В. Маринець, М. П. Моклячук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова,
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, С. В. Чупов, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88020, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: f-mdt@uzhnu.edu.ua