ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Використання історії матемтики на уроках математики

Келемен Домініка Федорівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 10 від 27 жовтня 2021 року**

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к. ф.-м. н, доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Використання історії матемтики на уроках математики

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконала: студентка IV-го курсу

Келемен Домініка Федорівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к. ф.-м. н, доцент

Рецензент: **Петечук Юлія Василівна**

к. ф.-м. н, доцент

Берегове
2022

ЗМІСТ

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A MATEMATIKATÖRTÉNET FELHASZNÁLÁSA A MATEMATIKAOKTATÁSBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Kelemen Dominika

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Sztojka Miroszláv

fiz.- mat. tud. doktora, docens

Recenzens: Petecsuk Júlia

fiz.- mat. tud. doktora, docens

Beregszász – 2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Napjainkban az iskolákat közszervezetekként tekintik, amely felelős a társadalom szellemi fejlődéséért. Ahogy fejlődik az iskolarendszer és az oktatás úgy fejlődik és alakul a társadalom is. Ahogy mindig úgy jelenleg is az iskolai oktatás új, korszerű formáit kutatják a tanulók intellektuális képességeinek növelése érdekében. Az iskolában a matematika feltételeket biztosít a tanulóknak, hogy lássák és értékeljék ennek a tantárgynak a szépségét. Az iskolai oktatást tehát fejleszteni kell, hogy a tanulók új lehetőségeket kaphassanak valamit új képességekre és készségekre tegyenek szert, annak érdekében, hogy függetlenedni tudjanak a tanulás terén.

J. A. Drobisev professzor a matematikában a történelem elemeinek a tanulók fejlődésében való részvételéről gondolkodva ezt írja:

> „A történelem elemeinek beillesztése a matematika tanításának tartalmába a pluralitás jelensége szempontjából kulturális, elősegíti a tanulók megértését, hogy a matematika olyan tudomány, amelynek fejlődéséhez különböző kultúrák és népek képviselői járultak hozzá."[1]

Korunkban a történelem és a matematika kereszteződését még nem tárták fel teljesen. Ha megnézzük, a munka harmadik fejezetét láthatjuk, hogy a tankönyvszerkesztők is megjelenítenek matematika történeti részeket a könyvekben. Matematikusok életéről tudományos munkáiról, felfedezéseiről kapunk információkat. A diákok, amikor megismerik a tudósok, matematikusok elképzeléseinek fejlődését, mérlegelhetik a módszerek és fogalmak logikai összefüggéseit. Emiatt a matematika történet elemeinek bevonása az óra fő anyagába fontossá válik.

A matematika történet fejlődésének módszertani alapjait megalapozó tanulmá-nyokat olyan matematikusok végezték, mint I. K. Andronov, N. Bourbaki (a francia matematikusok egy csoportjának gyűjtőneve), G. Weil (német matematikus) , A. N. Kolmogorov, M. Kline (amerikai matematikus), F. Klein (német matematikus), V.N. Young, A. Poincare (francia matematikus), A. K. Sukhotin és még mások. V. V. Bobynin úgy véli, hogy a történelem elemeinek matematika órán történő használata elősegíti a tanulók kognitív aktivitásának növelését.

[1] Дробышев, Ю.А. Историко-математический аспект в методической подготовке учителя. Монография.

Történelmi-genetikai módszerével V.V. Bobynin[2] olyan módszert ért el, amely a tudomány álláspontjait és következtetéseit pontosan úgy tanítja, ahogyan azok a valóságban fejlődtek. J. A.Drobisev is ragaszkodik ezen elképzeléshez, hangsúlyozva, hogy ez segít az iskolásoknak új oktatási anyagok elsajátításában. L. M. Fridman úgy véli, hogy a történelmi elemeket a matematikaoktatásban kevéssé és szerényen mutatják be, és egyáltalán nem mossák össze az oktatási anyaggal. Ez azt jelenti, hogy ennek a feladatnak a megoldása segítené a tanulókat a tantárgy jobb megértésében, növelné az érdeklődést, kreatívabbak lennének, és természetesen jobban elsajátítanák a tantárgy történetét. Ha történelmi elemeket adunk hozzá egy matematika órához, akkor ez a tanuló sokoldalúságához, és az anyag új megközelítéséhez vezet. Az ilyen momentumok fejlesztése frissíti és feltölti a tanuló mentális élményének különböző aspektusait.

A **kutatási probléma** annak kiderítése, hogy a mentális tapasztalatok feldolgozásához milyen tanulságos anyagokra van szükség, beleértve a matematikában a történelem elemeit.

A **szakdolgozat célja** a matematika történet elemeinek felhasználási módszereinek összegzése a mentális élmény gazdagítására, valamit a hazai matematika tankönyvek elemzése matematika történeti szempontból.

A **szakdolgozat alapja** az általános iskolás tanulók matematika tanításának folyamata.

A **munka hipotézise** a következő: ha a matematika történet elemeit bevezetjük a matematikaoktatásban, akkor ez által nő a tanulók körében az érdeklődés, a kreativitás és a matematikai ismeretek minősége.

[2]Бобынин, В. В. Цели, формы и средства введения исторических элементов в курсе математики средней школы Текст.

1. fejezet

A matematikatörténet, mint eszköz az iskolások nevelésébe

1.1. A matematikatörtének, pszichológiai, pedagógiai és filozófiai vonatkoztatásai

A világ és a társadalom folyamatosan fejlődik, ezért változnak a követelmények az intézményekkel és iskolákkal, pontosabban az iskolai oktatással szemben. Ahogy a modern világ változik, úgy változnak az emberi képességek is. Nem furcsa, hogy minden változás élén az iskola áll, ami nagyban befolyásolja az emberi élet minőségét egy adott ország és a társadalom fejlődését. Ebben az időszakban a társadalom a legújabb tanítási módokat keresi, hogy felkeltse, a diákok érdeklődését továbbá növelje szellemi képességeiket. Az oktatás megváltoztatása szükséges ahhoz, hogy kialakuljon a készségek, ismeretek asszimilációs foka, és a jelenlegi körülmények között lehetőség legyen a tanulók szellemi formálódására.

M.A. Kholodnaja beszámol arról, hogy az adotthoz kapcsolódóan megváltozik a társadalomhoz való kognitív kapcsolat típusa: ebben az esetben az egyén is elfogadja, felismeri és megmagyarázza a történéseket. Minél magasabb egy személy intellektuális foka, annál objektívebben viszonyul a társadalomhoz. Ezért az oktatásnak kell képeznie a társadalmunkban élők általános kulturális, általános műveltségi szintjét.

Az ember, mint egyén köteles törekedni a legújabb installációkra, amelyben elsősorban kreatív potenciálja mutatkozik meg. J. O. Drobisev professzor a matematikában a történelem elemeinek a tanulók fejlődésében való részvételéről gondolkodva ezt írja:

> „A történelem elemeinek beillesztése a matematika tanításának tartalmába a pluralitás jelensége szempontjából kulturális, elősegíti a tanulók megértését, hogy a matematika olyan tudomány, amelynek fejlődéséhez különböző kultúrák és népek képviselői járultak hozzá." [1]

Az oktatás tartalmi változása annak érdekben kell bekövetkeznie, hogy a tudás elsajátításának mértékét garantálják,és ösztönözze a serdülők szellemi formálódását, kezdeményezőkészségét, szemléletét, önállóságát.

E.V. Zubkov, válaszolva a kérdésre - "miért kellene a mai tinédzsereknek történelmet tanulniuk?" - tájékoztat minket arról, hogy: ahhoz, hogy a mi korszakunkban elsajátíthassunk egy adott tevékenység megalapozását és megteremtését, meg kell tanulni megérteni, a tevékenységet a múltban.

A múlt ebben az esetben két megnyilvánulást jelent, amelyek a jelen szempontjából jelentősek:

1. a módszer azonosítása
2. ugyanúgy szükség van a szellemi kérdések megválaszolására, mint a nyilvános oktató anyagokra.

A matematikai cselekvésének tanulmányozását, különböző területek szakemberei végzik: matematikusok, pedagógusok, filozófusok, pszichológusok. A matematikai tanulmányozás összetevői jelentőségének és területének azonosítását, tanulmányozását és iskolai projektekben, konzisztens eszközök kiválasztása és megoldásával, a gyakorlati oktatásban való megvalósítása, majd azoknak a problémáknak az ellenőrzése, amelyet a tanulók az óra kezdete előtt állapítanak meg, - fontos problémának tekintik.

[1] Дробышев, Ю.А. Историко-математический аспект в методической подготовке учителя. Монография.

1.2. Történelmi anyag a matematika órán, mint a kognitív tevékenység aktivizálásának eszköze

A matematika és a történelem két alapvetően más, de összefüggő tudomány terület. Az aritmetika tanulmányozásának tárgya, amely az iskola sok más tudományától különbözik, közvetlenül a társadalomban bennünket körülvevő tantárgy, illetve az ezekre a tantárgyakra jellemző szám és tér alakzatok kapcsolata. Ez a jellegzetes vonás elsősorban a matematika tanár előtt felmerülő, a többi tantárgyat tanító pedagógusok által nem értett problémákat magyarázza. A matematika tanárnak nehéz a gyerekek hozzáállását a természetes kötelezettségből, "szárazságról" ennek a tudománynak a mindennapi életben és gyakorlatban való használatára.

Az aritmetika ilyen jellegzetessége elsősorban a tanár előtt álló feladatok sajátosságát magyarázza, aki ez által nevelési célokat kíván közölni a tanulókkal, így ebben az esetben sokkal komplexebb és jelentősebb az előtte álló cél, mint sok tudományág esetében. Ez a tudomány terület, amely nem a tantárgyakat, mint olyanokat, hanem csak a köztük lévő numerikus és plasztikus kapcsolatokat vizsgálja, csak ritka esetben ad indokot arra, hogy a tanár befolyásolja a világnézet alakulását és a tanulók természetét azzal a céllal, hogy szabályozza cselekedeteiket. Minden időkben a legjobb tanárok folyamatosan fokozták az érdeklődést a tantárgy absztrakt megközelítésének hiányosságai és a tanítási hibái iránt, és kezdeményezték, hogy a matematika által a környező társadalom megértésének valódi látható vonásait sajátítsa el a diák.

M. V. Ostrogradsky és A. Bluma " Reflections on Teachig" című könyve jelentős érdeklődést mutat az ilyen kapcsolatok iránt. A következőket olvashatjuk ebben az említett könyvben:

> " Ki ne látta volna közülünk, azt hogy ötven diák közül negyvenen undorodtak és elbátortalanodtak a gondolatok elvonatkoztatásától, amelyek azelőtt felmerülnek, hogy a valós életből vett példákból világossá válnak." [3]

Az "Olvasókhoz intézett levélben" a "A matematika története az iskolában" a moldovai szovjet tudós Gersh Icaakovich Glaser a következőket írja:

[3] Малаховой Н. А. - Элементы истории математики как средство воспитания школьников

"A saját harmincéves egyéni tevékenység alapján az ember egy-egy beszélgetés szerint tanácsot tud adni bármely órához. Meg kell érteni a relatív "beszélgetés" szót, valamint a számtan eseményéből származó precedens információt, amelyet elbeszélés, áttekintés és kép magyarázat, rövid kritikai megjegyzések, elemzés formájában a diákok elé tárhat, a probléma történelmi hátterének kíséretében."

A történelmi információkat közvetítő anyagok, például ókori problémák, mítoszok, ókori szerzők bizonyításai különleges szerepet töltenek be a matematika tanulmányozásában.

Változnak az idők, a szakértők nézetei és meggyőződései, és ezzel együtt iskolai projektek, tankönyvek és tanítási technológiák is. Számos jelentős papír alapú feljegyzés azonban állandó értékű. A matematika eseményeiről szóló információkat egymással kombinálva két teljesen különböző és egymással nem összefüggőnek tűnő tudományt: a krónikát és a matematikát. A krónika megtölti az aritmetikát humanitárius és esztétikai bemenettel, segítheti a tanulók megértését. A matematika a maga formájában a logikai és holisztikus megértést formálja, ezen kívül megragadja a problémák fő momentumait ezzel segítve annak jobb megértését.

Hogyan lehet azonban megoldást találni arra, hogy két iskolai tárgy képességeinek felhasználásával növeljük a tanulók érdeklődését? Történeti adatok a matematikáról, szofizmusról, történeti jellegű problémákról - ez csak néhány példa e két, látszólag távoli, de kivétel nélkül valóban fontos tárgy kapcsolatára. De hogyan lehet rávenni a tanulókat, hogy érdeklődéssel űzzék az aritmetikát? Valamint azt igazolni, hogy a matematika nem csak a hétköznapi létezésben lehet hasznos, hanem a más tárgyak tanulmányozásának bázisává is válhat? Hogyan tanítsuk meg a probléma megoldást? Ezeket a problémákat számos iskolai matematika tankönyv oldja meg. Ennek érdekében a tudományág iránti érdeklődés felkeltése érdekében érdekes problémákat, eljárási koncepciókat találhatnak, amelyek megteremtik a szükséges ismereteket és készségeket, valamint olyan gyakorlati problémákat, amelyek a számtan más ismeret területekkel való kapcsolatát tükrözik. Természetesen a tankönyvekben történelmi utalásokat tartalmazó oldalakkal is találkozhatunk. Ezeket elemezve megtanuljuk a különböző probléma megoldási módszerek továbbfejlesztését. A diákok érdeklődési köre kibővíti ezeket az aritmetikai eseményeket, megmutatja az objektum mélységét. Emiatt, emiatt fontos, hogy az értelmes történelmi mintájú érvek finoman beilleszkedjenek a matematika feladatokba, hogy a gyerekeknél elérje a matematika, mint tudomány csodálását. Az elmondottak alapján arra a következtetésre jutunk, hogy a historizmus komponenseit az aritmetikai problémákba kell foglalni és tanulmányozni, mert:

- A tanulók alkotói dinamizmusát fokozza a feladatokban felhasznált általános történeti anyag. A diákok ugyanis új utakat találnak az érdekes történelmi problémák megoldására. A neves matematikusok munkájának, eredményeinek mintái segítségével a tanár kreatív folyamattal tudja bemutatni a tanulóknak a természettudományos kreativitást, hogy megérintsék a legjelentősebb precedensek.
- A tanár az óra történeti mélységében lévő belépés segítségével lehetőséget tud adni a tanulóknak a matematika felfedezéseihez kapcsolódó történelmi adatok kiválasztására, az ismeretek megosztására osztálytársakkal. Mindez teljes mértékben hozzájárul ahhoz, hogy a serdülők megtanuljanak önrendelkezni, bízni képességeikben, valamint megtanulják megvédeni a személyes nézeteiket és meggyőződéseiket.
- A matematika történeti problémáit tárgyaló, a tanárok által gondosan megalkotott és megfontolt tudományos viták, amelyekben a számtan jelentős nehézségeit tárgyalják hozzájáruljanak a tanulók toleranciájának megtanításához mások ítélete iránt, önmaguk tiszteletére mások tiszteletén keresztül, éberségen keresztül. A hasonló tudományos megbeszéléseken keresztül megvalósuló interperszonális interakciók elősegíthetik a kommunikációs készségek és képességek elsajátítását, a konfliktushelyzetek megoldásának lehetőségét.
- A történelmi adatokon alapuló anyag célja, hogy javítsa a tudást, a tanulók érdeklődését, növelje az írástudást - ez az egyik lehetséges lehetőség a tanulók intellektuális forrásának növelésére, gondolkodásra tanítani, a döntések gyors végrehajtására az élet legnehezebb pillanataiban. Az aritmetika tanulmányozása során használt általános történeti anyag a kognitív munka kialakítása érdekében történik. Ehhez a számolási felada-

tokban használt általános történelmi anyag helyes bemutatása érdekében a tanárnak be kell tartania, hogy a probléma megjelenítés terjedelmének, arculatának, lényegének meg kell felelnie a tanulók életkori képességeinek. A tanárnak előre meg kell határoznia az órán bizonyítandó információk mennyiségét, bizonyos „határok között" matematika történeti anyagokat kell használnia.

Az anyag mennyiségének meghatározására a következő követelmények vonatkoznak:

a) a matematika történeti tananyag összekapcsolása az óra anyagaival;

b) a tájékoztatásra szánt idő;

c) a tanulók felkészültségi foka;

d) a tanulók életkora.

A tanár a tanulók érdeklődésének és képzettségének megfelelően kapcsolja össze az információs téma kiválasztását a feladat problémájával.

1.3. Az óraszervezés formái történelmi anyag felhasználásával

Ahhoz, hogy a tanár saját óráin történelmi, matematikai jellegű feladatokat tudjon alkalmazni, meg kell tanulnia birtokolni a történelmi anyagot, és tudnia kell azt az óra problémájába beleszőni. A múlt tudományának ismerete elősegíti a tudományos definíciók megjelenésének, a tudományos gondolatok létrejöttének, a tanulmányi módszerek kialakításának kiterjesztett megértését.

G. Leibniz így írt a történelem és a tudomány jelentéséről:

> „Nagyon hasznos tudni a figyelemre méltó felfedezések valódi eredetét, különösen azokét, amelyeket nem véletlenül, hanem a gondolat erejével lettek. Ez nem csak a történelem számára előnyös, hanem másokat is dicséretre ösztönöz...a kiváló példák módszerének ismerete a felfedezés művészetének fejlődéséhez vezet." [3]

[3] Малаховой Н. А. - Элементы истории математики как средство воспитания школьников

B. Gnedenko[5], kialakítva ezt az ötletet, megjegyezte, hogy a tudománytörténet olyan láng, amely megvilágítja a továbbképzés megközelítését az új nemzedékek számára, és Ptolemaiosz szent lángjával ajándékozza meg őket, amely motiválja őket új felfedezésekben, folyamatos szelekcióban, hogy megértsék a környező társadalmat, különösen önmagukat.

A személy meghatározott tulajdonságainak egyidejű kialakítását a tananyag mélyreható elsajátítása, a képzés és a tinédzserek képzése is előírja. A tudománytörténet a tárgy logikájával és felhasznált anyagával összefüggésben a tudományt, mint munkát mikro- és makroszinten elemzi: a tudomány formálódási folyamatának történeti eredménye és az egyetlen felfedezés folyamatának eredménye. Az aritmetika történetét egyetlen esemény részének tekintik az emberi kultúra kialakulásában. Az aritmetika története, valamint egyik tudományága magában foglalja:

- Ahhoz, hogy a tanár saját óráin történelmi, matematikai jellegű feladatokat tudjon alkalmazni, meg kell tanulnia birtokolni a történelmi anyagot, és tudnia kell azt az óra problémájába beleszőni. A múlt tudományának ismerete elősegíti a tudományos definíciók megjelenésének, a tudományos gondolatok létrejöttének, a tanulmányi módszerek kialakításának kiterjesztett megértését. G. Leibniz így írt a történelem és a tudomány jelentéséről:

  > „Nagyon hasznos tudni a figyelemre méltó felfedezések valódi eredetét, különösen azokét, amelyeket nem véletlenül, hanem a gondolat erejével lettek. Ez nem csak a történelem számára előnyös, hanem másokat is dicséretre ösztönöz...a kiváló példák módszerének ismerete a felfedezés művészetének fejlődéséhez vezet."

- a formáció során szerzett és összegyűjtött tényeket;

- hipotéziseket, pl. az életkészségek által jóváhagyott megerősítést lehetővé tevő elfogadásokat;

- módszertant, ebben az esetben vannak általános elméleti pontos szimbólu-mok és fogalmak értelmezése, amelyek a „matematika” tárgy tanulmányo-zásának fő szempontját jellemzik.

[5] Гнеденко Б. В.-Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике.

A vizsgálat tárgya és annak meghatározása is hogyan történik az aritmetika összetevő-inek kialakulása a vizsgált történeti időszakban. Ennek megfelelően az aritmetika eposza nagy problémakör megoldásáért felelős. Annak érdekében, hogy a tanár megtanulja a történelmi jellegű kognitív feladatok alkalmazását, speciális órákat kell tartani. Ezekre azért van szükség, hogy a tanár elmélyítse ismereteit a matematika eseményéről, és megtanítsa a tipikus iskolában használt általános történeti anyag használatát. Ezen órák célja: tanulmányozza az egzakt kultúra kialakulását a különböző népek és államok között, feltárja az aritmetika kialakulásának kulcsfontosságú törvényeit, megismerkedni a matematikus szakemberek tudományos munkájá-val és életrajzával, meghatározza a matematika iskolai irányában felhasználandó történeti adatok méretét, lényegét,a tinédzserek megtanítása, hogy milyen alapok alapján történik a számtan eseményéből felhasznált anyag kiválasztása, ennek célja, hogy az a tanórán kívüli munkában és az iskolai feladatokban is használható legyen,létrehozása és összegzése a tanítás során, technológiai aritmetikai esemény komponensek alkalmazási folyamatairól.

2. fejezet

A matematikatörténet tananyagba történő beépítése

Feltehetjük a kérdést, hogy mégis mi építhető be a matematikatörténetből az iskolai tananyagba vagy iskolán kívüli foglalkozás tananyagába vagy miért építsünk be történelmi elemeket a foglalkozásokba?.

Elsősorban megismertethetjük a diákokat a matematika nyelvezetének eredetével. Sokszor hallhatjuk a gyerekek szájából: " ebben már több a betű, mint a szám" kifejezést. A matematikában vannak olyan jellegzetes jelek, mint a summa, integrálás, indexek(alsó, felső) a görög ABC elemei, amelyek az absztrakt tudomány megtestesítői, viszont idegenen sőt ijesztően hathat a diákok számára. Ezt a jelenséget nem csak a gyengébb képességű tanulók esetében figyelhetjük meg, előfordul, hogy a nagyobb matematika kompetenciával rendelkező diákokat is megzavarja egy-egy jelölés. Ezt a tényt már Pólya György is szemléltette egy munkájában, ő így fogalmazott:

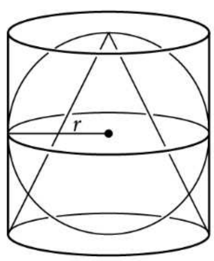
> „Nemcsak a legreménytelenebb fickóknak lehet averziójuk az algebrával szemben, hanem egészen értelmes diákoknak is. A jelölésekben mindig van valami önkényes és mesterkélt; új jelölés megtanulása új teher az emlékezőtehetség számára. Az értelmes diák visszautasítja a teher vállalását, ha nem látja, kap-e érte ellenszolgáltatást. Az értelmes diáknak az algebra iránti ellenszenve igazolást nyer, ha nincs tág lehetősége arra, hogy saját tapasztalatából győződjön meg arról, hogy a matematikai jelek nyelve segíti az értelmet. A tanár fontos feladata, sőt

mondhatni, egyik legfontosabb feladata, hogy segítsen neki ilyen irányú tapasztalatokat szerezni."[7]

Ha a matematika tanár tisztában van egy jelölés kialakulásának előzményeivel akkor lehetősége van arra, hogy elmagyarázza azt a diákok számára. Ez által a magyarázat által a tanulók megismerkedhetnek a jelölés eredetével és a hasznával. A nagyobb diákok (14-15 év) könnyebben elfogadják a betűk jelölésként való használatát, ha annak látják értelmét és célját. Ahhoz pedig, hogy egy diákkal megismertessük, ezeket szükségünk van a történeti rész bemutatására. A történeti rész segítségével bemutathatjuk, hogy egy adott jelölést, milyen szükség vezérelve vezettek be a matematikába, majd a megfelelő jelölésekkel, milyen matematikai problémák nyertek megoldást, esetleg könnyebben értelmezhető megoldást. A gyerekek megtanulhatják ezáltal, hogy a jelölések nem azért vannak, hogy megnehezítsék a tanulásukat, hanem épp ellenkezőleg. Egy-egy jelöléssel, sokkal rövidebben adhatunk meg egy fogalmat. Pl. egy szöget a matematikában jelölhetünk három latin betűvel, vagy akár egy görög betűvel, és ez csak egy rövid példa a jelölések széleskörű használatában.

Ha beszélünk arról, hogy a jelölések megkönnyítik a feladat megoldást, akkor miért ne vezethetnénk be a matematika történet elemeit egy-egy feladat kialakulásának megismertetésére. Ha a gyerekek tudják kitől/ honnan származik, egy matematikai probléma akkor azt érdekesebbnek találhatják. Az iskolai vagy iskolán kívüli feladatmegoldó matematika órákon be lehet azt vezetni, hogy egy-egy feladat megoldása végén vagy annak oldása közben szemléltethetjük, hogy az oldott feladat kitől származik, mit tudhatunk előzményeiről.

2.1. Példa. *Arkhimédesz nevéhez fűződik ez az ábra*



2.1. ábra. Arkhimédesz ábra

[7]Pólya György - A gondolkodás iskolája

Számítsuk ki a három test térfogatának arányát! (Legyen r a henger sugara!). Számítsuk ki a henger, a gömb és a kúp felszínét, ha a henger alapkörének sugara 5 cm!

Megoldás: *A forgáskúp térfogatát ugyanúgy számolhatjuk ki, mint a gúlák térfogatát:*

$$V_k = \frac{S_a \cdot d}{3} \text{ ,ahol } d = 2 \cdot r \text{ tehát } V_k = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r}{3} \ .$$

Felírjuk a gömb térfogatát is:

$$V_g = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} \ .$$

A forgáshenger térfogata a következő:

$$V_h = S_a \cdot d = r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot r^3 \cdot \pi \text{ vagyis}$$

$$V_k : V_g : V_h = 1 : 2 : 3$$

Ha a henger magassága 10 cm akkor a felszíne:

$$S_h = 2 \cdot S_a + S_p = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h =$$

$$= 2 \cdot 5^2 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 150\pi (cm^2)$$

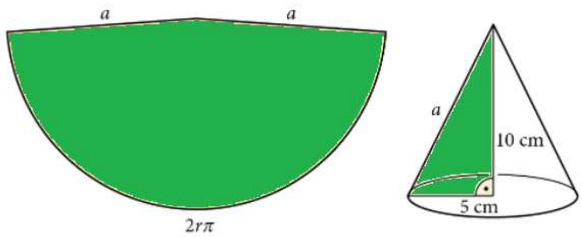
A gömb sugara 5 cm, ezért a felszíne:

$$S_g = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot 5^2 \cdot \pi = 100\pi (cm^2)$$

Ez pontosan kétharmada a henger felszínének. Itt megjegyezhetjük a gyerekeknek, hogy Arkhimédész észrevette, hogy a forgáshengerbe írt gömb és a henger felszínének aránya minden esetben $2:3$*, ugyanúgy, mint a térfogatuk aránya. Erre a felfedezésére oly annyira büszke volt, hogy Kívánsága szerint sírkövére a hengerbe írt gömb és kúp körvonalait vésték. Halála után 150 évvel ez alapján a híres felirat alapján sikerült azonosítani a sírját.*

A kúp felszínét az alaplap területének és a kúppalást területének összege adja:

$$S_k = S_a + S_p = \text{ a kúp alapterülete } S_a = 25\pi (cm^2)$$



2.2. ábra. Forgáskúp

A forgáskúp kiterített palástja olyan körcikk, amelynek a sugara a forgáskúp alkotója, körívének hossza pedig a kúp alapkörének kerületével egyenlő.

A kúp alkotójának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki:

$$a = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}(cm)$$

Az alapkör krülete $10\pi(cm)$, tehát a kifeszített palást egy olyan körcikk, amelynek a sugara $\sqrt{125}(cm)$ az íve pedig $10\pi(cm)$.
A körcikk területét kiszámíthatjuk a következő képpen:

$$S_c = \frac{I_c \cdot r_c}{2} \text{ következik } S_p = \frac{10\pi \cdot \sqrt{125}}{2} = 25\pi\sqrt{5}(cm^2)$$

A kapott eredményből kifolyólag közelítő értékekkel azt kapjuk, hogy a henger felszíne $471(cm^2)$, a gömb felszíne $314(cm^2)$, a kúp felszíne pedig $254(cm^2)$.

Sok diák úgy gondolja, hogy a feladatok csak arra szolgálnak, hogy a különféle matematika tételeket és szabályokat begyakorolhassuk. Azonban ahogy Vincze Szilvia is fogalmaz:

> „Aki a matematika titkát a problémák táján keresi valószínűleg nem nagyot fog tévedni. A matematika bármely ágához tartozó feladat elemzése hozzájárul a feladatok megoldásához szükséges matematikai gondolkodás természetének megismeréséhez."[8]

A diákjaink, ha azt látják, hogy egy feladat meg- vagy átfogalmazása, megoldása vagy annak általánosítása hasonlóan nagy elismerésben részesíti azt a személy,

[8]Vincze Szilvia - A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával.

aki véghezvitte, mint mondjuk egy új matematikai fogalom megalkotóját, akkor a Vincze Szilvia által említett elgondolás erősödhet a diákban.

A feladatok történetének említése segítséget nyújthat abban a problémában is, miszerint a tanulók nagyobb része az életszerű feladatokat is csak mechanikusan oldja, s nem figyel az élet adta feltételekre. Például Csíkos Csaba nemzetközi kutatást idézve megemlíti, hogy a tanulók elsöprő többsége 10-et adta meg a következő feladat megoldásaként: „Pisti 4 darab, egyenként $2,5$ méter hosszú deszkát vásárolt. Hány darab 1 méteres darabot tudott ezekből lefűrészelni?” Ez a jelenség nem csak a kisebb korosztályban figyelhető meg, előfordul, hogy az idősebb diákok is hasonló hibát ejtenek a szöveges feladatok megoldásánál, amelyekben a való életben előforduló probléma vetődik fel.

Eddigi pedagógusi tapasztalatom azt mutatja, hogy amikor a diákok elérik, a hetedik osztályt ahol a matematika kettő külön tantárgyra osztódik az algebrára és a mértanra, sokszor nem értik, hogy miért kell külön tanulniuk, keverik, a tantárgyakat nem tudják eldönteni, hogy egy adott téma melyik tantárgyhoz kapcsolódik. Ezért ahogyan érdemes egy-egy feladat történetét megemlíteni úgy indokolt a matematika egy-egy ágának kialakulását tanulmányozni. Ezzel lehetőségünk nyílik arra, hogy bemutassuk, hogy a matematikának egyaránt van olyan ága, amelyet a gyakorlati problémákra adott válaszkeresés, és amit az absztrakt gondolkodás hozott létre. Előbbi esetben a gyakorlati problémák megoldását követte a létrejövő fogalmak és állítások megalkotása és rendszerezése, illetve a tudományág axiomatikus felépítése, míg utóbbi esetben az egzakt felépítést követően jelentek meg alkalmazások, s az elméleti problémák megoldása során létrejövő modell adott gyakorlati probléma megoldásához segítséget.

A matematika történetnek ugyan úgy, mint minden tudományág történetében vannak jelentős dátumok, illetve találkozhatunk kiemelkedő személyekkel. Nem kell sokat keresgélnünk milyen nevekkel találkozhat egy gimnazista a matematika tanulás alatt. Ki ne hallott volna **Pitagorasz tételéről**, az **euklédeszi geometriáról**, **Descartes koordináta rendszer**ről. Tehát aki matematikát tanul gyakran találkozik híres matematikusok neveivel, hiszen tételek, fogalmak vagy egész tudományágak viselik matematikusok neveit. Könnyen beláthatjuk, hogy az ilyen fajta megnevezések merőben leegyszerűsítik a matematikatanulást, és a matematikai kifejezéseket. Vegyünk egy egyszerű példát. Mennyivel hosszabb azt, mondani minden alkalommal, hogy "Bármely derékszögű háromszög leghosszabb oldalának (átfogójának) négyzete megegyezik a másik két oldal (a befogók) négyzetösszegével.", mint sem azt mondani, hogy a Pitagorasz tétel alapján, felhasználva stb... ám ezekben az elnevezésekben országonként és nyelvenként is fordulhatnak eltérések. Például Thalész tétele alatt több országban a párhuzamos szelők/szelőszakaszok tételét értik, valahol pedig a derékszögű háromszög és a körülírt kör kapcsolatát értik.

Egy matematikus születési dátumának megemlítése segíthet a tanulónak térben és időben elhelyezni az adott személyt. A nemzetiség megemlítése pedig segíthet a nevek helyes kiejtésében. Ezek minimális életrajzi adatok is segíthetnek bepillantást nyerni a diáknak a matematika épülésébe. Különösen fontos Kárpátalján a magyar nemzettudat fejlesztése. Ebben az is segíthet, hogy amennyiben egy matematikusnak vannak magyar kötődései úgy az említett információkon kívül azokat is megemlítsük meg az órán. Például amikor tanítjuk a diákoknak a középponti és kerületi szögeket és a róluk szóló tételnek a bizonyítására kerül a sor úgy a hazai Bolyai Farkas bizonyítását vegyük alapul. Amennyiben nem kerül sor az órán vagy iskolán kívüli foglalkozásokon a matematika tételek bizonyítására, úgy legalább említésként érdemes időt szánni Bolyai Farkas nevére. Nyílván ez csak egy példa a sok közül.

Pedagógusként gyakran találkozom és mondhatni küzdöm azzal a jelenséggel, hogy a diákjaim tudása egy témában pár órát követően kifakul, vagy teljes mértékben elfelejti. Szerintem ezzel a jelenséggel minden tanár találkozik praxisa alatt. Így nyílván minden pedagógus fejében felmerül az a kérdés, hogy : "Mivel tudnánk segíteni a tananyag hosszú távú rögzülését a tanulók memóriájában?". Ebben is segítséget nyújt a matematika történet. A gyerekek sokszor könnyebben tudnak megjegyezni egy adott fogalmat, műveletet, ha ahhoz tudnak kapcsolni egy másik fogalmat, élményt történést. Így ha egy új témánál matematika történeti elemeket használunk úgy a diák a matematika történeti elemekbe kapaszkodva könnyebben megjegyezheti az adott tananyagot. Szendrei Julianna egy másik jelentőségét is megfogalmazta a matematika történet tananyagba való beépítésének:

„Érdekes korban élünk. Most találkozik össze a pedagógia sok gyakorlati tanácsa az agykutatás konkrét kutatási eredményeivel. A hosszú távú memóriába való bevésés folyamatáról már igen sok bizonyított eredmény látott napvilágot. Az egyik legkiemeltebb kutatási terület a megértés közben történő ismétlés és a már tanultak más oldalról való megvilágításának fontossága. Az ezzel kapcsolatos kísérleteket ausztriai egyetemek végezték. Azt találták, hogy ismétlésen kívül a több szempontú megközelí-tés segítette leginkább a hosszú távú memóriába való rögzítést, valamint a tanultaknak problémaszituációkban való alkalmazását.” [9]

A matematika története során számtalan probléma, feladat merült fel. Az akkori kor matematikusainak viszont még nem álltak rendelkezésükre azok az eszközök és módszerek, amelyeket mi ma már a létezését egyértelműnek vesszük és használjuk őket. Ebből kifolyólag a kor matematikusai elemi módszerek segítségével adtak választ a problémáikra. Ezeknek a módszereknek az iskolai tananyagba való beépítése lehetőséget ad egy adott probléma/feladat több oldalról való megközelítésének.

2.2. Példa. *Példaként maradjuk a jól ismert Pitagorasz-tételnél az említett tételnek számtalan bizonyítása elérhető. Sok bizonyítást a diákok is könnyűszerrel megértenek. Többek között ilyen Garfield 1870-es években felfedezett bizonyítása. Szerintem mondani sem kell, hogy a diákok azonnal felfigyelnek a név hallatán, hiszen azonnal párhuzamot tudnak vonni egy közkedvelt mese figurával, így amikor meghallják Garfield nevét jó esetben már nem csak egy mese figura, hanem egy matematikus is társul a névhez, ezáltal pedig a Pitagorasz-tétele.*

Garfield a következőképpen bizonyította a tételt:

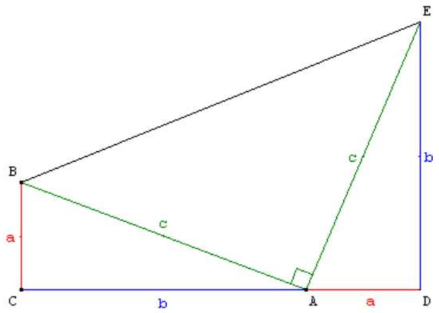
Az ábrán látható a és b magasságú trapéz területét megadjuk a trapéz terület képletével.

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot c}{2}$$

Itt ha elvégezzük ekvivalens átalakítások sorát,megkapjuk a tétel állítását.

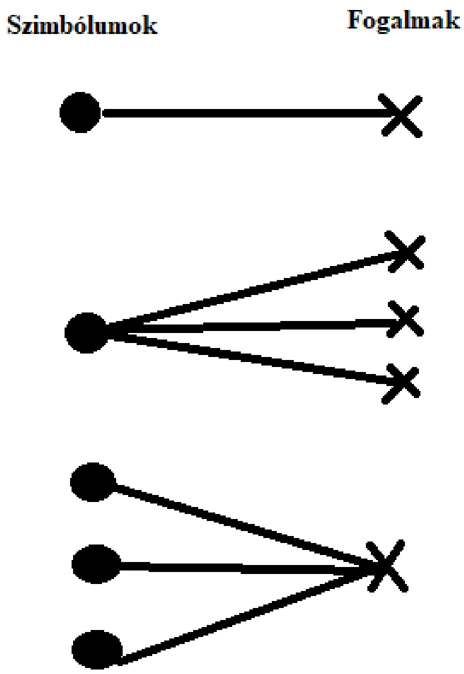
Így amikor a trapéz terület képletének tanítására kerül, a sor egyszerre adódik lehetőségünk a Pitagorasz-tétel bizonyítására vagy megismétlésére. Tehát a matematika történet segíti egy matematikai tétel, fogalom mélyebb megértését.

[9] Szendrei Julianna - Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról.



2.3. ábra. Trapéz

Egy tétel/fogalom megértésének több szintje lehetséges. Egy amerikai kutató Usiskin a megértés 5 különféle szintjét különbözteti meg többek között a történeti perspektívát. Szerinte a megértés különböző szintjei összekapcsolódnak és hatással vannak egymásra, amely nagyban segíti a mélyebb szintű megértést. Például a számrendszerek tanításánál hasznos, ha ellenpéldákat is mutatunk a diákoknak a helyiértékes írásmódra (tízes alapú, de nem helyiértékes az egyiptomi, nem tízes alapú és nem helyiértékes a római számírás). Skemp a fogalmak és az őket jelölő szimbólumok kapcsolatát vizsgálta. Ezeket a kapcsolatokat a következőképpen írja le:



2.4. ábra. Skemp kapcsolatok

Skemp az utolsó módot tartja a legjobbnak, ezt így indokolja:

> „Ha egyszer megtanulunk valamit megfelelően osztályba sorolni, akkor az út nagy részét megtettük afelé, hogy elsajátítsuk, hogyan is bánunk vele. [...] A »megfelelő« olyan módot vagy módokat jelent, amelyek segítenek számunkra az éppen felmerülő probléma megoldásában, és így minél több módon tudunk osztályba sorolni, annál nagyobb azoknak a problémáknak a változatossága, amelyeket képesek vagyunk megoldani. És minél több szimbólumot tudunk ugyanahhoz a fogalomhoz hozzákapcsolni, annál több-féle módon tudjuk a kérdéses fogalmat osztályba sorolni."[10]

Sok olyan matematikai fogalom létezik, amely jelölésére a matematika története során számtalan szimbólumot használtak. Viszont ezek valamilyen ok folytán kikoptak, eltűntek. Az oka a szimbólumok eltűnésének gyakran az adott fogalom valamely tulajdonságából adódott, amely megfelelő megjelenítésére az adott szimbólum vagy szimbólumrendszer alkalmatlan volt.

A tanárok által tapasztalt jelenségek közé tartozik az is, hogy a diákok egy része egy adott ismeretet csak egy bizonyos tantárgy óráin tud használni. Például egy diák, aki a matematika órán probléma nélkül old egyenleteket, már fizika vagy kémia órán problémába ütközik, ha egyenletekből egy elemet kell kifejeznie. A tanárok igyekeznek ezt a jelenséget orvosolni viszont a probléma kezelése komplex módszert igényel, aminek egyik összetevője lehet az, ha a tanulót a „tantárgyak között mozgatjuk". Ez azt jelenti, hogy matematika órán előkerülő fogalom kapcsán beszélünk például nyelvészetről, történelemről, földrajzról, vagy fizikáról. Ha a tanuló megtapasztalja, hogy egy adott tantárgy által hozott probléma milyen matematikai eszközrendszer megjelenését, fejlődését segítette elő egy másik komponense lehet az említett probléma kezelésének.

És talán a leggyakrabban előforduló probléma, amellyel a pedagógusok találkoznak a munkájuk során azaz, hogy a gyerekek egyre motiválatlanabban. Egy tanár számára a legjobb fegyelmezési eszköz a figyelem fenntartása. Ezáltal a tanár számára minden, amivel a figyelmet fel tudja kelteni és fenn tudja tartani hasznos

[10] Skemp, R.R. - A matematikatanulás pszichológiája.

segítség lehet. Különösen jelentős ez olyan gyerekek esetében, akik számára a matematika önmagában sem bír figyelemfelkeltő erővel. Az ilyen tanulóknak érdekes lehet a korábbi korok matematikusainak furcsaságai, érdekességei. Például amikor a gyerekek először hallanak Pithagoraszról meglehet említeni, hogy a Pithagorasz tanait követő pithagoreusok tartózkodtak a lóbabtól. Nyílván a tanárnak itt különösen fontos odafigyelnie, hogy az ilyen pót információk ne vegyék el a tanulók figyelmét a tananyagról, és ne vegye át az uralmat a tanítás felett, hanem csak egy figyelemfelkeltő, motiváló funkciót lásson el, amely következtében a tanulók figyelme tartósabb lesz. A problémamegoldásban fontos szerepet játszik a tanulói motiváltságok, hozzáálláson kívül a tananyagról és magáról a matematikáról alkotott véleménye. Így ha a néhány mondattal előbb említett matematika történeti érdekességek figyelemfelkeltő erővel bírnak úgy az-az idő, amelyet rá fordítottunk nem vész kárba, sőt többszörösen megtérül s talán könnyebb lesz a feladatok megoldására rávenni a diákokat. A motiváltság hiánya abból is fakadhat, hogy a gyerekek nem látják, az értelmét annak miért kell nekik a matematikát tanulni. Véleményem szerint nincs olyan gimnáziumi matematika tanár, aki pályafutása során legalább egyszer ne hallotta volna a következő mondatokat a diákjai szájából:" Miért kell ezt tanulni? Mikor fogjuk ennek hasznát venni az életben?". Sajnos legtöbbször ezek a kérdések nem érdeklődően tevődnek fel, hanem dacosan a tanulni nem akarásból kifolyólag. Ezt a következő módokon kezelhetjük, ha egy probléma felmerülésének történeti okaira, és/vagy egy fogalom és összefüggés korábbi alkalmazásaira világítunk rá a tanórákon. Dienes Zoltán úgy nyilatkozik:

> „[a gyerek] sosem kérdezi meg, hogy ami érdekes, egyúttal hasznos-e” [11]

Egy 11 évig iskolai keretben matematikát tanuló olyan diákban, aki tökéletes felépítésben a matematikának csak az eredményeit kapja meg készen, önkéntelenül is kialakulhat az a torzkép, miszerint a matematika egy lezárt tudomány. Hajlamosak lehetünk természetesnek venni az általunk használt matematikai szaknyelvet, bár az egy hosszú és nem lezárt kialakulási folyamat terméke. A tanulók tanulását segíti az, ha a pedagógus felhívja erre a figyelmet. Találkozhatunk azzal is, hogy a gyerek megkérdi a tanárától, hogy ha ő más betűkkel jelöli a háromszöget vagy a természetes számokat egy felsorolásban, és stb. akkor hiba-e. Ezért érdemes

[11] Dienes Zoltán - Építsük fel a matematikát.

néhány percet szánni és tudatosítani a diákjainkban, hogy a matematikai jelölések esetében is jelen van a „hagyományőrző írásmód”. Ezt úgy magyarázhatjuk meg a gyerekeknek, ha néhány példán keresztül megmutatjuk nekik. Például hagyományos írásmódot őrzünk a következő esetekben is:

1. bizonyos betűk bizonyos fogalmakra történő használata (pl. a, b, c: egész számok);

2. megszokott sorrend tartása (pl. $5x$: együttható – ismeretlen);

3. „idegennek” jelölési mód(α, ξ, ϵ stb.)

3. fejezet

A matematikatörténet megjelenése az ukrajnai gimnáziumi matematika tankönyvekben

A kárpátaljai magyar tannyelvű iskolák a Kárpátaljai Magyar Kulturális Szövetség által lefordított ukrajnai szerzők matematika könyveit használják. A továbbiakban e tankönyveket vizsgáljuk a gimnazista korosztályban. Alapjáraton azért mindegyikről elmondható, hogy nem sok történelmi vonatkoztatást tartalmaz.

3.1. A matematikatörténet az 5.-6. osztályos matematika tankönyvekben

Az 5. évfolyamosok A.H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir[12] által szerzett tankönyvből tanulnak. A tankönyv két részből és 38 témából áll. Mindegyik téma az elméleti anyag bemutatásával kezdődik. Jól kiválasztott matematikai kifejezések, szabályok és matematikai állítások találhatóak benne a gyorsabb tanulás érdekében.

Általában az elméleti anyag bemutatása a tankönyvben problémamegoldási példákkal zárul.

[12] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Matematika 5

Minden témának megvannak a maga önálló megoldási feladatai, amelyeket csak az elméleti anyag elsajátítása után javasolnak elkezdeni. A feladatok között vannak egyszerű és közepesen nehéz gyakorlatok, valamint nehéz feladatok is.

A témák egy speciális feladattal, a "Bölcs Bagoly" feladattal zárulnak. Leleményesség és találékonyság kell azok megoldásához. A történeti anyag is A "Bölcs Bagoly" rész után található nyomokban.
Az első történeti visszacsatolás a tízes számrendszer bevezetése után található. A tankönyv ismerteti a diákokat a számolás és a számok történetéről.

Bemutatja, hogy már az ősemberek is képesek voltak számolásra, és számításaikat rovások segítségével rögzíteni. De mivel az olyan primitív módszerek, mint a rovások számlálása a boton vagy a kavicsok megszámolása nem elégítette ki a kereskedelem és a termelés szükségleteit, ezért a társadalom fejlődésével a számolási módszerek is tökéletesedtek.

Kr. e. 3000 körül már megtörtént a legfontosabb felfedezés: az emberek különleges jeleket találtak egy bizonyos számú tárgy megjelölésére. Megismerkedhetünk az egyiptomiaknál és Rómában használt számrendszerekkel. Ezekre példákat is hoz fel a tankönyv. Utóbbi számrendszerrel nyílván a gyerekek gyakrabban találkoznak a mindennapokban nem csak a matematika órán, hanem irodalom történelem órán akár. Beláthatjuk, hogy a római számírás tartalmaz azért némi hiányosságokat. A római számjegyekkel leírt számokat nem egyszerű még elolvasni sem. Annál inkább bonyolult az ilyen számokkal számításokat végezni. Ezenkívül, ha elég nagy számokat kell leírni (millió, milliárd stb.), akkor új számjegyeket is ki kellene találni.
egyiptomi és a római számírást követően szó esik a Kijevi Ruszban alkalmazott számrendszerről. Ezek a számok nagyban szűkítették a római számok alkalmazását. A Kijevi Ruszban a számok leírására nem találtak ki különleges jeleket, hanem az ábécé betűit használták erre. A betűk felé hullámos vonalkákat húztak. Jellegzetessége volt ennek az írásmódnak, hogy a számokat 1-től 900-ig jelölték Külön az egyeseket, tízeseket és százasokat. A többi szám e számok kombinációja alapján tevődött össze. Szó esik még a maja indián törzsek húszas rendszeréről, és az ókori sumér nép hatvanas számrendszeréről. Végül eljutunk a ma is használt 10-es számrendszerig. Megismerkedünk létrejöttének okaival, a helyi érték fogalmával, vi-

szont nem feledkezünk meg arról sem, hogy a 20-as illetve 60-as számrendszer nyoma a mai társadalomban, és néhány nép nyelvében még megtalálható.
következő történeti áttekintéssel akkor találkozunk, amikor elérkezünk az egyenes és sík fogalmához. A tankönyv leírja nekünk a metrikus rendszerek megalkotásának történetét. A kezdetekkor az emberek a lépést használták a hosszúság mértékegységéül. De több nép is a nyílvessző repülési távolságát használta. A nagy távolságokat 1 napi járásban mérték. Azon kívül alkalmazták a kéznél lévő végtagokat is: arasz, könyök, lépés, tenyér, hüvelyk, ferdén mért öl.

Ezek a mértékegységek kényelmesek voltak az emberek számára, viszont nagyon pontatlanok voltak, és ami talán még jelentősebb nem voltak egységesek. Ennek következtében majdnem minden német város és a mai Olaszország területén található ország a XVIII. században saját mértékegységeket hozott létre. Előfordult, hogy bár egy-egy mértékegységnek több városban is ugyan az volt a neve viszont korántsem voltak egyenlők. Ebből kifolyólag 1790-ben a francia nemzetgyűlés javaslatot tett egy új mértékegységrendszer megalkotására. Ezáltal 1791-ben bevezették a hosszúság mértékegységét, a métert. A méter a görög metron szóból ered, amely mérést jelent. 1799-ben elkészítették a méter szabványát, ami egy platina rúd volt. De csak 100 év elteltével terjedt el egész Európában a metrikus mértékegységrendszer. Ezt a mértékegységrendszer ma más szinte az egész világon használják, viszont vannak országok ahol megtalálható ezen kívül a mérföld, a yard, a láb, a hüvelyk is. 1889-ben elkészítették platina-irídium ötvözetből a méter nemzetközi etalonját. A történeti áttekintésben találhatunk képeket is a leírás mellett, amelyek még jobban felkelthetik a diákok érdeklődését.

Jelentősebb történeti momentumra egy nagyobb ugrás után találunk az "egyenletek" téma előtt. Ez a rész a matematika nyelvének bevezetéséről és történetéről szól. Szemlélteti példákon keresztül, hogy merőben mennyivel egyszerűbb és rövidebb egy kifejezést a matematika nyelvén a matematika szimbólumaival leírni, mintsem szavakkal. Tehát, mint minden nyelvnek a matematika nyelvének is van ábécéje. Szó esik a matematika nyelvének fejlődéséről. Prezentálja a matematika műveleti jeleinek fejlődését, alakulást a XIV. századtól egészen a XVII. századik ahol René Descartes francia tudós nevével is találkozunk.

Egy újabb nagyobb oldalbeli ugrást követően találkozunk a tankönyv utolsó jelentősnek mondható történeti visszacsatolásával. Ezzel az ugrással már átlépünk a tankönyv II. részébe. Ez a fejezet a törtek és a velük végzett műveltekről szól. Így a matematikatörténeti áttekintés is a törtek alakulásához kapcsolódik. Megtudhatjuk azt az információt miszerint a közönséges törtek kialakulásától a tizedes törtek megjelenéséig évezredek teltek el, valamint, hogy a tizedes törtek felfedezése a reneszánsz kor egyik legjelentősebb eseménye volt. A történelemben egy nagyobb visszaugrással az időszámításunk előtt a III. század Babilonjában találjuk magunkat ahol az emberek olyan törteket használtak, melyeknek a nevezői 60 hatványai voltak. Majd ezeket a hatvanas nevezőjű törteket később a görög- és az arab matematikusok is használták. Jamshid ibn Masud al-Kashi, szamarkandi matematikus és csillagász alkalmazta először a tizedes törteket a XV. században. Érdekesen hathat a gyerekek számára, az, hogy mivel helyettesítette az említett matematikus a tizedes vesszőt, ugyanis azt ebben a korban még nem vezették be. A vessző helyett függőleges vonalakat használt, vagy különböző színnel írta a szám egész részét és a szám törtrészét. Láthatjuk, hogy az 1592-ben megjelent vessző használata mennyivel leegyszerűsíti a mai írásmódot. 1585-ben Simon Stevin flamand tudós egy mindössze 7 oldalas, "A tizedes egység" című könyvében a tizedes törtek használatáról értekezett. A mai világban elterjedt még a tizedespont használata is, számos ország pontot használ vessző helyett. A számítástechnika rohamos fejlődésének következtében a pont használata egyre elterjedtebb.

Összefoglalva, az 5. osztáyos matematika tankönyv nagyon kevés matematikatörténeti részt tartalmaz, viszont az a néhány történeti rész rövid,tömör a gyerekek számára könnyen értelmezhető módon van közölve.

Kárpátalján a 6. osztályos gyerekek N. A. Taraszenkova, I. M. Bohatirjova, O. M. Kolomijec és Z.O. Szergyuk által írt matematika könyvből[13] tanulnak. A tankönyv 5 részből áll. Mindegyik téma elméleti bevezetővel kezdődik. A tankönyv részei témákra vannak osztva. Minden téma tartalmazza: a fő oktatási anyagot - további információkat a témáról a „További tudnivalók” részben; kérdések a tanultak megismétléséhez az „Idézd fel a lényeget" bekezdésben. Különböző nehézségű feladatok - az „Oldd meg a feladatokat ” részben, amely külön feladatblokkokkal zárul: „A tananyag gyakorlati alkalmazása” és „Ismétlési feladatok”.

[13]N.A. Taraszenkova, I.M. Bohatirjova, O.M. Kolomijec, Z.O. Szergyuk -Matematika 6

A matematika történeti áttekintés ebben a könyvben gyakrabban előfordul, viszont kevésbé részletesen, mint az előző évfolyam tankönyvében. Nagyjából minden témánál találunk egy-egy mondatnyi történelmi vonatkoztatást a „További tudnivalók” részben.

A tankönyv elején megismerkedhetünk Eratoszthenésszel, mivel az ő neve szorosan kapcsolóik a prímszámokhoz. Eratoszthenész görög származású matematikus, csillagász, földrajztudós, és költő volt. Kirénében született kr. e. 276-ban. Ahhoz, hogy feltudjuk sorolni a prímszámokat Eratosztenész megalkotott egy módszert, később ezt az ő tiszteletére Eratosztenész szitájának nevezték el. A tankönyv szemlélteti is a szita lényegért illetve Eratosztenészről is láthatunk képet. Ez a gyerekek figyelemfelkeltése szempontjából pozitív.

Nem sokkal később egy újabb kiemelkedő személyiséggel találkozunk, mégpedig Euklidésszel. Neve a "Legnagyobb közös osztó" c. téma végén kerül megemlítésre ugyanis az ógörög matematikus az "Elemek" c. művében egy eljárást ír le a legnagyobb közös osztó meghatározására, amelyet később a tiszteletére " euklideszi algoritmus"-nak neveztek el.

A könyv második fejezet a közönséges törteket s a rajtuk végzett műveleteket tárgyalja. Az ókori Rómában a törtek egy eléggé érdekes rendszerét alkalmazták. Ugyanis a törtek alapjának a tömegegység 12-ed részét választották. Ezt asnak vagy librának nevezték el- meséli a tankönyv. Az as 12-edét pedig uniciának. A rómaiak a tömeghez viszonyítottak más mértékegységeket is, mint például az utat és az időt is. Ha maradunk a könyv második fejezeténél, akkor olvashatunk a Rhind-papiruszról. A Rhind- papirusz a Középbirodalom idejéből származó ókori egyiptomi útmutató, amely számtanból és mértanból áll. Ahmesz Kr. e. 160 körül egy 5,25 m hosszú és 33 cm széles papirusztekercsre másolt le egy kétszáz évvel korábban keletkezett művet. A tekercset egész 1858-ban találták meg, de a rajta található írást még később, csak 1870-ben fejtették meg és fordították le. Napjainkban a papirusz egy nagyobb része Londonban a további része pedig New Yourkban van. Ez a máig fennmaradt legjelentősebbfeladatgyűjtemény. A rövid cikk mellé egy kép is társul az említett papiruszról.

A harmadik fejezet az arányokat tanulmányozza. Ebben a fejezetben elsőként Pithagorász nevével találkozhatunk. Pithagorász ógörög matematikus és tanítványai a csillagötszöget választották szövetségük jelképeként. Napjainkban is sok nemzet zászlajában és címerében is megtalálható az ötágú csillag. A szabályos csillagötszög más néven pentagram mindig is a tökéletességet sugallta. A csillagötszög különlegessége, hogy az őt alkotó szakaszok aránya egyenlő. Az arányok egy másik megnevezésével is találkozunk, hiszen vannak nyelvek ahol az arányt a latin eredetű proporció szóval fejezik ki. Megismerkedünk a köznyelvben is használt aranymetszés aritematikai hátterével. Az aranymetszés egy arányosság, amelyet úgy kapunk, hogy egy szakaszt felosztunk két részre. A kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobbik rész magához az egész szakaszhoz. Ennek az aránynak van egy megközelítő értéke, ami 0,618-el egyenlő. Az aranymetszés nem egy új keletű dolog, már az Ókori Egyiptomban is alkalmazták. Ugyan is az ebből a korból előkerült ékszerek, használati tárgyak, mind azt mutatják, hogy a mesterek alkalmazták az aranymetszés szabályait. Az aranymetszés történetével közvetve összeköthető pisai Leonardo, aki egy 1180-ban született olasz matematikus és szerzetes volt. Viszont ez a név nem feltétlen lehet ismert sokak számára ugyanis ő Fibonacci néven vált ismerté. Élete során bejárta Keletet. Utazásai során megismertette Európával az indiai arab számjegyeket. Fibonacci összegyűjtötte az addig ismert összes feladatot egy könyvbe, amely 1202-ben jelent meg " Az abakusz könyve " címmel.A könyv egyik feladatából származik a ma már csak Fibonacci sorozatként ismert számsor. A sorozat lényege, hogy a harmadik tagtól kezdődően minden tag az előtte lévő kettő tag összege. Ezt a tankönyv egyszerű példával szemléleti, valamit láthatunk Fibonacciról is egy képet. A számarányban való felosztásánál gyakran találkozunk az "együttható" megnevezéssel, amelyet más névvel koefficiens-ként is szoktunk nevezni. A megnevezés a latin *Coefficiens* szóból ered, jelentése együtt hatékony. A koefficiens meghatározását a francia matematikus Viéte adta meg elsőként. Ez a fejezet sorra tartalmazza a matematika történetében jelentős neveket. Viéte után a következő kiemelkedő személy William Jones. Nevéhez a π általánosan elfogadott jelölése köthető. A π-ről fennmaradt legrégebbi írásos emlék egészen Kr. e. 1900-ból származik Egyiptomból és Babilonból. A π szám matematikai kiszámítását azonban Arkhimédeszhez kötik. A harmadik fejezet utolsó témája a valószínűség számítást taglalja. A téma végén szó esik Jakob Bernulli-ról, illetve a valószínűség számítás történetéről. A sztochasztikus szó görög eredetű melynek jelentése cél feltevés. A valószínűség számítás nem csak egy téma a matematikán belül, hanem a matematika egy külön ága. Ez az ág a XVII. század közepén alakult ki és a véletlen eseményekkel foglalkozik. Kialakulásának oka, hogy ebben az időben terjedtek el a hazárd játékok, amelynek eredménye a szerencsétől függött. Sokan úgy tartják, hogy a valószínűség számítás kezdete Jakob Bernoulli "Ars Conjectandi" c. munkájának megjelenésével kezdődött 1713-ban. Maga a P(A) jelölés pedig a francia *probabilite* szó első betűjéből ered.

Elérkezünk a tankönyv negyedik fejezetéhez. Ez a rész a racionális számokkal foglalkozik. A történeti részből megtudhatjuk, hogy már az ókorban is ismerték a negatív számokat. Ugyanis piros színű pálcikákkal ábrázolták a pozitív- feketével pedig a negatív számokat. Indiában az emberek negatív számokkal az adósságot jelölték, pozitív számokkal pedig a jövedelmet. Azonban sok matematikus nem tudta elfogadni a tényt, hogy lehetséges a semminél kisebb szám. Ezért sokáig ezeket a számokat hibás számoknak tartották. Egészen csak a XVIII. században kezdték el a pozitív számokkal egyenrangú számként kezelni ezeket a számokat. Amint ez megtörtént elkezdődhetett a negatív számokkal való műveletek tanulmányozása. Ugye azt senkinek nem kell bizonygatni, hogy a legrégebbi matematikai művelet a számolás. Viszont ebből a számolásból kihagyták a nullát ugyanis semmit nem tudtak róla. A kínaiak a nulla helyét üresen hagyták. Elsőként a maja indiánok használtak külön jelet a nullára, számukra a nulla a kezdetet jelentette. Tehát a ma is használt nulla számjegy Indiából terjedt el. Az indiai matematikusok tekintettek elsőként a nullára úgy, mint egy számra és egy kis körrel jelölték. Az első feljegyzés a nulláról a 876-os évről maradt ránk. Később az indiai Brahmagupta a VII. században fogalmazta meg a negatív és pozitív számok összeadásának szabályait, amit ma is ismerünk és használunk. A természetes számok és a nem negatív törtek feladatok megoldásakor keletkeztek az ókorban. A negatív számok bevezetése elkerülhetetlen esemény volt a matematika fejlődése miatt. Ezért volt szükség a természetes számok bővítésére, amelyet az egész számok megjelenése jelentette. A negatív számok elméletét legrészletesebben Michael Stifel(1487-1567) német matematikus fejtette ki, " Teljes aritmetika" c. műve 1544-ben jelent meg. A racionális számok szorzásának és osztásának ma ismert szabályait pedig szintén az indiai matematikusok fogalmazták meg.

Az ötödik és egyben a tankönyv utolsó fejezete a matematikai kifejezésekkel és egyenletekkel foglalkozik. A ma egyértelműnek vett "+" és "-" jeleket Johannes Widmann vezette be a " Gyors és szép számolás minden kereskedő számára" c. munkájával 1489-ben. Az alexandriai Diophantos "Aritmetika" c. könyvét, amely a IV. század közepén jelent meg tekintjük az első műnek, amely az algebrai kifejezésekkel foglalkozik. A 13 kötetes műből csak 6 kötet maradt fenn. Az algebrai kifejezések után áttérünk az egyenesek kölcsönös helyzetére. Megtudjuk, hogy a "perpendikuláris" szó latin eredetű melynek jelentése függőleges, és a jelölését egy francia matematikus Pierre Hérigonius vezette be. A párhuzamos szó a görög " paralelos" szóbol ered, amelynek jelentése " egymás mellett halad". A ma is használt jelölése egészen az ókorig nyúlik vissza, mivel már Heron és Alexandriai Paposz is használta. Az eredeti párhuzamosság jelölése nagyon hasonlított az egyenlőség jelre ezért 1677-ben William Ougthred függőlegesre ajánlotta fordítani.

Összefoglalva a hatodik osztályos matematika tankönyv számos fontos matematikatörténeti információval szolgál a tanár és a gyerekek számára is. Az információk az előző évfolyam tankönyvével ellentétben nem nagy tömbökben, hanem elhintet mondatokban található. Viszont pozitívum, hogy szinte minden témában találunk matematikatörténeti információval.

3.2. A matematikatörténet az 7.-9. osztályos algebra tankönyvekben

A gimnáziumokban használt algebra könyvek úgy,mint az 5. osztályos matematika tankönyv is A.H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir tollából származik. Mivel egyazon szerzőktől származnak a könyvek íyg azok felépítése és szerkezete is roppant hasonló. Tekintsük végig osztályról osztályra ezeket a könyveket.

A hetedik osztályos tankönyv[14] négy fő fejezetre oszlik, amely további altémákra tagolódik. Mindegyik téma elméleti bevezetővel kezdődik, amelyet különböző nehézsé-gű feladatok követnek. A gyakorlatok és az elméleti áttekintés kötött ismétlő kérdése-ket találhatunk. A gyakorlatok végén ismétlő gyakorlatokkal találkozunk és valamint olyan gyakorlatokkal, amelyek segítenek felkészülni az új témára. Ezt

[14] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Algebra 7

követően találhatunk matematikatörténeti elemeket

Mivel az első téma a lineáris egyenleteket elemzi így az első történeti áttekintés is az egyenletekről szól. A IX. században az ismert tudós, Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi aki Perzsiában született írt egy értekezést az egyenletek megoldásának módszereiről. Ebben az időben, mint ahogy a hatodik osztályban megtanulhattuk a negatív számokat még nem ismerték el. Ezért amikor negatív eredményt kaptak egy egyenlet megoldásánál akkor azt minden esetben átvitték az egyenlet másik oldalra ugyan is ekkor a szám előjelet váltott. Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi az ilyen átalakításokat al-Hvárizmi helyrerakásnak, az egyenlet két oldalán lévő azonos tagok összevonását pedig rövidítésnek nevezte. Tanulmányának címe "Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról" amely arabul – Hiszáb al-dzsabr walmukába. Később az al-dzsabr szóból alakult ki az algebra kifejezés. A XVII. században a műveit lefordították latinra.. A középkori Európában nevét Algorizmi-nek írták át. Műve által kialakult az algoritmus kifejezés, amelyen azt az eljárást értjük, amikor véges számú lépések végrehajtása a feladat megoldásához vezet. Azt gondolhatnánk, hogy nem nehéz felírnunk azt, hogy $3x = 9$ viszont ezt még a nagy al-Hárizmi1 is jóval hosszabban írta fel: Három gyök 9 dirhammal. A dirham ókori arab ezüstpénz volt. Ennek a felírásnak az volt az oka, hogy a tudós idejében még nem léteztek matematikai szimbólumok. Ám ez nem jelenti azt, hogy a IX. század előtt élt tudósok nem kísérelték meg a matematikai nyelv létrehozását. Alexandriai Héron görög matematikus az I. században az ismeretlent a σ(szigma) betűvel jelölte. A szimbólumok megalkotásában jelentős lépést egész a III. században élt Alexandriai Diophantosz tette meg, ugyanis az "Aritmetika" című híres művében nemcsak az ismeretlen jelölését vezette be, hanem annak néhány hatványát is. Diophantosz szimbólumainak nem egyszerű a használata, mivel az összeadás és szorzás műveleteire nem vezetett be semmilyen külön jelet és az összes ismeretlen egyetlen betűvel való jelölése megnehezítette a több ismeretlenes egyenletek megoldását. Ezért a Diophantosz által bevezetett algebrai szimbólumok feledésbe merültek. Az algebrai szimbólumok sok idő elteltével a XIII. században újultak meg Jordanus Nemorarius munkáinak jóvoltából. Ő kezdeményezte a betűszimbólumok bevezetését. Azonban a neves olasz matematikus, Luca Pacioli által használt szimbólumok terjedtek el széles körben a XV. században. Az említett matematikusokon kívül még sokan járultak hozzá a matematikai szimbólumok tökéletesítéséhez többek között a XVI. században élt Johannes Widman és Adam Riese német matematikusok is. A XVI. században élt Francois Viéte az egyik leghíresebb francia matematikus tekinthető a betűszimbólumok megalkotójának. Most először találkozhatunk ukrán matematikusok neveivel. Az ukrán matematikai szaknyelv fejlesztésében és rendszerezésében nagy szerepe volt Volodimir Levickijnek, a lvivi (lembergi) egyetem fizika-matematika szakos professzorának. Az ukrán matematikai kultúra megalapítójának egyértelműen az európai hírű tudóst, a filozófia doktorát, Miron Zarickij professzort tekintik. Az említett tudósokról képeket is találunk a tankönyvben.

A matematika könyv második felében a függvényekkel találkozhatunk. Földrajzból természetrajzból már tanulhatták a gyerekek, hogy az embereket mindig is érdekelte a Föld. Tanulmányozták és megfigyelték a Földet és a csillagokat is. Megfigyeléseiket pedig legtöbbször papírra vetették, ez által a rajzok által elkészültek a ma használt térképek elődei. A koordinátákat elsőként az i. e. II. században Hipparkhosz görög csillagász használta helymegállapításhoz a Föld felszínén. Nicole Oresme (1323–1392) francia tudós a XIV. században alkalmazta először a matematikában Hipparkhosz ötletét. Hipparkhosz a síkot négyzetrácsosra osztotta fel és egy objektumot hosszúság és szélesség alapján adott meg. A koordinátákban rejlő lehetőségekre azonban csak Pierre Fermat és René Descartes francia matematikusok figyeltek fel a XVII. században. Ők bemutatták, hogy a koordináta-rendszer segítségével hogyan juthatunk el az algebrától a mértanig. Bár Fermat hamarabb publikálta eredményeit, mi ma mégis Descartes-féle koordináta-rendszerként ismerjük és használjuk.

Szemmel láthatóan a hetedikes algebra tankönyv kevés matematika történeti anyagot tartalmaz. A megtalálható történeti áttekintések, rövidek, könnyű nyelvezetűek, és képeket is tartalmaznak, ami külön pozitív hiszen a gyerekeknek érdekesebb ha nem csak tömör szöveget olvasnak.

A nyolcadik osztályos tankönyv[16] 3 fő fejezetre, azon belül pedig 23 témára osztódik. A témák szerkezeti felépítése ugyanolyan, mint az előző évfolyam algebra tankönyvénél láthattuk.

Az első fejezet a racionális kifejezések vizsgálatával foglalkozik 10 témán ke-

[16] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Algebra 8

resztül. Ez a fejezet, néhány lábjegyzeten kívül nem tartalmaz történelmi áttekintést. Azonban a második rész, amely a négyzetgyök és a valós szám fogalmát vezeti be, már az elején is tartalmaz történeti részt. A gyökvonást az ókori görögökig vezeti vissza, és megemlíti Descartes nevét is. Leírja, hogy az ókori görögök a gyökvonást egy adott területű négyzet oldalának kiszámításával azonosították, így nem gyöknek, hanem oldalnak nevezték a kezdetekben. Megemlíti, hogy a hindi nyelvben más jelentése is volt, például a „nulla" szó eredetet, alapot és a fa gyökerét is jelentette, valamint ezt a szót használták a négyzet oldalára is. De nem csak a hindi nyelvvel hozza kapcsolatba, hanem a latinnal is. Ugyanis a latin nyelvben is egy szó, a „radix" jelentette az oldalt és a gyökeret is amelytől ered a szláv „ radikál" szakkifejezés. Ezt követően ugrunk az időben és a XIII–XV. századi Európában találjuk magunkat ahol a matematikusok az említett radix szó rövidítésével jelölték a négyzetgyököt. Megtudjuk, hogy a mai gyökjelre hasonlító jelet a XVI. században kezdték el használni, viszont csak a XVII. században René Descartes használta először. Mindezek mellett említés kerül az első ukrajnai matematika olimpiáról ezzel is buzdítva a gyerekeket arra, hogy vegyenek részt ők is hasonló versenyeken. Ebben a fejezetben a diákok megismerkednek a számhalmazokkal. A számhalmazok közül pedig az irracionális számhalmaz megjelenésének történetét is megtanulhatják. A könyv szemlélteti, hogy léteznek olyan szakaszok, melynek a hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni, tehát a szakaszok mérésére nem elegendők a racionális számok. Ezt a tényt az ókori Görögországban, Püthagorasz iskolájában fedezték fel. Először a püthagoreusok úgy vélték, bármilyen szakaszhoz lelhető olyan szakasz, amely maradék nélkül néhányszor rámérhető az adott szakaszokra. Az ókori görögök úgy tekintették, hogy bármely két szakasz összemérhető, és ez lehetőséget adott arra, hogy bármely szakasz hosszát racionális számmal fejezzék ki. A püthagoreusok fedezték fel, hogy a négyzet átlója és oldala összemérhetetlen, „asszümetron". Tehát ha a négyzet oldalát vesszük egységnek, akkor az átló hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni. Az ókori tudósok egyik posztulátuma azt mondta ki, hogy bármelyik két mennyiség aránya kifejezhető két egész szám hányadosaként, a püthagoreusok ezen felfedezése ezt a posztulátumot megváltoztatta. Egy legenda szerint ezt a felfedezést a püthagoreusok a legnagyobb titokban tartották, és azt az embert, aki elmondta, azt az istenek megbüntették. Hajókatasztrófában halt meg.

A harmadik és egyben az utolsó fejezet a másodfokú egyenletekkel foglalkozik. Ebben a fejezetben több fontos nevével is találkozhatunk. Az első M. A. Csajkovszkij. A matematika tanárok több nemzedéke és tanítványaik is Mikola Andrijovics Csajkovszkij (1887–1970) híres ukrán pedagógus és matematikus Másodfokú egyenletek című könyvéből merítették pedagógiai tapasztalataikat és bővítették tudásukat. M. A. Csajkovszkijnak óriási pedagógiai és tudományos hagyatéka van. Munkásságát Ukrajna határain túl is jól ismerik. Nem sokkal később megismerkedhetünk François Viète francia matematikussal. Viéte 1591-ben lehetővé tette az egyenletek általános alakjának és gyökeinek vizsgálatát azzal, hogy nem csak a változókat, hanem a változók előtti együtthatókat is betűkkel jelölte. Bevallása szerint különösen nagyra értékelte saját munkái közül az egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés felfedezését, amelyet ma már csak Viéte- tételeként emlegetünk. A másodfokú egyenleteken kívül betekintést nyerhetünk a harmadfokú egyenletek megoldásának történetébe. A harmadfokú egyenlet megoldó képletének felfedezését a XVI. század egyik kiemelkedő matematikai felfedezésének. Először Scipione del Ferro (1465–1526) olasz matematikus vezette le az $x^3 + px = q$ egyenletet, ahol p és q pozitív szám, ezt a felfedezését azonban először titokban tartotta. Abban a korban egy tudós érvényesülése sokban függött a matematika versenyeken elért eredményeitől. Ezért volt számára kifizetődő, hogy titokban tartsa felfedezését, mert titkos fegyverként tudta alkalmazni. Halála után egyik tanítványa, Fiore, aki ismerte a titkos képletet, kihívta Niccolo Tartagliát, aki egy velencei számolómester volt (1499–1557) egy tudományos párbajra. Ám a párbaj előtt Tartaglia is felfedezte a harmadfokú egyenletek megoldásának eljárását és 1535. november 20-án fölényes győzelmet aratott. A titkos megoldó képlet elsőként a "A nagy művészet, avagy az algebrai szabályokról" c. könyvben jelent meg Girolamo Cardano olasz matematikus jóvoltából. Az említett műben nem csak a harmadfokú egyenlet megoldó képletével találkozhatunk, hanem a negyedfokú egyenletével is. A negyedfokú egyenlet megoldási eljárását Ludoviko Ferrari (1522–1565) dolgozta ki. Az ötödfokú egyenlet megoldásába a XVII – XVIII. század matematikusai sok energiát fektettek bele. Az elért eredményekhez sokban hozzájárultak Paolo Ruffini (1765–1822), és Niels Henrik Abel (1802–1829) fiatalon elhunyt norvég matematikus. Bebizonyították, hogy az ötöd- és annál nagyobb fokú egyenletek véges számú algebrai művelettel nem oldhatók meg.

A matematikatörténetének fejlődése nagy szerepet játszott a számítástechnika, a számítógépek megjelenésében. Az első elektronikus számológépet, az ENIAC-ot az USA-ban készítették el a XX. század 40-es éveiben. Európa első számítógépét Kijevben készítették. 1947 végén Szerhij Olekszijovics Lebegyev irányításával az Ukrán Tudományos Akadémia Elektrotechnikai Intézetének elektrotechnikai és speciális modellezés laboratóriumában megkezdődött az úgynevezett elektronikus számológép modellek programja. 1957-ben hozták létre az Ukrán Tudományos Akadémia számító-központját, amit 1962-ben Kibernetikai Kutatóintézetté szerveztek át. Az intézet alapítója és 1982-ig igazgatója Viktor Mihajlovics Hluskov volt. Ma is úgy tekintik, hogy a számítástechnika alapjai, a matematikai modellezés, az automaták elmélete, a robotirányítású szerkezetek és más számítástechnikai szakterület részben az ukrán tudósok munkásságán alapszik.

A nyolcadik osztályos algebra tankönyv jóval kevesebb történeti anyaggal szolgál. A megtalálható történeti anyag azonban jól értelmezhető módon van közölve gyakran szemléletes képekkel társítva.

A kilencedikes tankönyv[18] hasonlóan a 8. osztályoshoz 3 fő fejezetre azon belül pedig 24 témára oszlik. A témák szerkezeti felépítése azonos a korábbi évfolyamok könyveiben tapasztaltakkal.

Az első fejezet az egyenlőtlenségek fogalmával és megoldásával ismerteti meg a diákokat. Az első és egyben az egyetlen jelentős történeti rész az egyenlőtlenségek bizonyításának néhány módszeréről beszél, az áttekintés közben a több matematikusok nevével találkozhatunk. Az első Cauchy Augustin Louis(1789-1857) francia matematikus Őt követi Viktor Jakovics Bunyakovszkij (1804-1889) híres XIX. századi matematikus. Vinnica megyében született. Több éven át a Szentpétervári Tudományos Akadémia alelnöke.

A második fejezet a másodfokú függvényekkel foglalkozik. A fejezet elején nagyobb betekintést kaphatunk a függvények fogalmának fejlődéséről. A ma is használt függvény meghatározás viszonylag nem is olyan rész a XIX. század első felében jelent meg. Már az ókorban is vizsgálták az emberek a mennyiségek közötti összefüggéseket. Ez alapján fogalmazták meg néhány síkidom területképletét és

[18] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Algebra 9

egyes testek térfogatképletét. A táblázattal megadott függvények elődeinek az ókori babilóniaiak, görögök és arabok csillagászati táblázatai tekinthetjük. Pierre de Fermat és René Descartes a XVII. század első felében tett felfedezése, a koordinátarendszer új utat nyitott a függvény fogalmának meghatározásához. Ezen kívül fontos szerepet játszottak a függvény fogalmának kialakulásában Isaac Newton munkái. A függvény szakkifejezést (latin eredetű, functio, jelentése: eljárás, végrehajtás) először Gottfried Wilhelm Leibniz német matematikus használta. Leibniz és tanítványa, a svájci Johann Bemoulli a függvényen azt a képletet értették, amely összekötötte a két változó mennyiséget, a függvényt azonossá tették egyik megadási módjával. A függvény fogalmának további fejlődését továbbá elősegítette Leonhard Euler és Jean le Rond d 'Alamber. A XIX. század 30-as éveiben Euler elméletét több híres tudós is továbbfej lesztette: Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikus, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet német matematikus. Pontosan ekkor jelent meg az a meghatározás hogy az y mennyiség az x változó mennyiség függvénye, ha minden x értéknek pontosan egy y érték felel meg. A XIX.-XX. század fordulóján megalkották a halmazelméletet, nyilvánvaló lett, hogy a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete nem feltétlenül csak számokkal adható meg, ezért a függvényen azt a leképezést kezdték érteni, amely az X halmaz miden eleméhez hozzárendeli az Y halmaz egyetlen elemét. Ezen részletes leíráshoz az említett matematikusokról képet is találhatunk.

Jó pár oldallal előrébb olvashatunk az ifjú matematikusok első országos olimpiájáról. Ukrajnában a matematikai olimpiák nagy hagyománnyal rendelkeznek. Az ifjú matematikusok első városi versenyét 1935-ben tartották meg Kijevben. A leírásban szó esik azok neveiről, akik a történelem során megnyerték az említett matematika versenyt, róluk képeket is találunk a cikkben. A két ismeretlenes egyenletrendszerek, mint alkalmazott matematikai modellek témánál megismerkedhetünk Dmitro Oiekszandrovics Grave (1863-1939) nevével. Fizikusok és kémikusok, csillagászok és biológusok, földrajzosok és közgazdászok, sőt még a nyelvészek és a történészek is alkalmaznak matematikai fogásokat. De miben is rejlik a „matematika eszközének" univerzitása? „Sok tudományos feladat megoldásának kulcsa a jó fordítás a matematika nyelvére." Ezt a választ adta az előbb feltett kérdésre Ukrajna Tudományos Akadémiája Matematikai Főiskolájának egyik alapítója és első igazgatója, D. O. Grave.

A másodfokú függvények után elérkezünk a tankönyv utolsó fejezetéhez, amely a számsorozatokról szól. Ha számsorozatokról beszélünk, akkor nem hagyhatjuk ki megemlíteni Fibonacci nevét. Ezt a tankönyv sem tette meg. Pizzái Leonardo (Fibonacci) (XII.-XIII. század) Itáliai matematikus volt. Utazásai során bejárta a keleti országokat, ahol megismerkedett az arab matematikusok eredményeivel és eldöntötte, hogy ezt a tudást elterjeszti Európában is. A Fibonacci féle sorozatot nagyon jól szemlélteti leírással és ábrával is. Az alsóbb évfolyamos tankönyvekben már volt szó ugyan a Fibonacci féle számsorozatról és az aranymetszésről azonban ezen tankönyv jóval részletesebben mutatja be az említett fogalmakat. Ha a Fibonacci sorozat minden tagjára kiszámoljuk u_{n+1}/u_n arányt akkor egy újabb számsorozatot kapunk, amelynek értékei egyre közelítenek az 1,618 értékhez. Már az ókorban élő emberek is ezzel a számmal kötötték össze a szépséget és a harmóniát. A görög szobrászok jól tudták, hogy az emberi test arányai megfelelnek ennek a mágikus számnak. Az ókori építészek is ezt az arányt alkalmazták maradandó alkotásaikban. így például a Parthenon szélességének és magasságának az aránya 1,618. A reneszánsz kor egyik kiemelkedő személyisége, Leonardo Da Vinci is úgy gondolta, hogy a Teremtő által használt arányok között létezik egy, ami egyetlen és megismételhetetlen. Ezt az arányt nevezte ő „aranymetszésnek”. Majd Jacques Philippe Marié Binet (1786-1856) francia matematikus általánosította az eddig megfogalmazottakat és megadta a Fibonacci sorozat általános tagjának képletét.

Mindezen leírtakon kívül számos helyen találhatunk a könyvben elszórva matematikusok neveit, valamint 1-2 mondatos matematikatörténeti lábjegyzeteket.

3.3. A matematikatörténet az 7.-9. osztályos mértan tankönyvekben

Hasonlóan a gimnáziumi algebra könyvekhez a mértan könyvek is A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij és M. SZ. Jakir közös munkája. Így szerkezetük nagyon hasonló.

A hetedikes mértan tankönyv[15] 4 paragrafusból áll, amely tovább bomlik 23

[15] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Mértan 7

témára.

Az első fejezet megismerteti a tanulókat a legegyszerűbb mértani alakzatokkal. A tankönyv első 50 oldalán csak a témákon belül találkozhatunk némi történelmi utalással. Az első történeti rész magáról a mértan kialakulásának történetéről szól. Ezt a gyerekek számára könnyen megemészthető módon bemutatja kellő részletességgel és érdekességgel. Leírja, hogy mai napig sem tudjuk pontosan, hogy hol és mikor keletkeztek az első mértani ismeretek, viszont az egyesek úgy gondolják, hogy az úttörők az egyiptomi és babiloni földmérők voltak, akik i. e. 4000 évvel ezelőtt éltek, mások azt feltételezik, hogy a geometria az ókori Egyiptomban született 5000 évvel ezelőtt. A történészek közös véleményre jutottak, hogy a mértan i. e. VI. században alakulhatott. A geometria akkor vált tudománnyá, amikor az igazságait bizonyítás útján kezdték megállapítani. A bizonyításos mértan megjelenése összefügg a hét bölcs első tagja nevével - a milétoszi Thalészével (i. e. közel 625-547), - aki filozófus, tudós, kereskedő és államférfi is volt. Az i. e. V I-III. században az ókori Görögország tudósainak köszönhetően (közöttük: Püthagorasz, Eudoxosz, Arkhütasz, Theaitétosz, Eukleidész, Arkhimédész) a mértan alkalmazott tudományból matematikai elméletté változott. Szó esik Eukleidész "Elemek" c. művéről és az abban elfogadott posztulátumairól.

A második fejezet a háromszögekről szól. Ehhez a témakörhöz nem társul jelentős történeti anyag.

A harmadik fejezet a párhuzamos egyenesekről és a háromszög szögeinek összegéről szól. Ebben a fejezetben Eukleidész ötödik posztulátumáról is olvashatunk részletesebben. Több mint húsz évszázadon keresztül nagyon sok tudós próbálkozott az ötödik posztulátum bebizonyításával. De csak a XIX. század elején jutott el egymástól függetlenül néhány matematikusa következő megállapításra: az-az állítás, hogy az adott egyeneshez egy külső ponton át egyetlen párhuzamos húzható — axióma. Ha az ötödik posztulátum egy elfogadott szabály, és nem tétel, akkor azt helyettesíthetjük egy másik definícióval. Mikola Ivanovics Lobacsevszkij (1792-1856) orosz matematikus is ez által lett híres. Ő csak egy szabályt - az egyenesek párhuzamosságának axiómáját - helyettesítette egy másikkal: A z egyeneshez egy külső pontból legalább két olyan egyenes húzható, amely nem metszi az adott egyenest. Az új axióma segítségével építette fel a matematikus a nem euklideszi geometriát. Bolyai János (1802-1860) magyar matematikus is hasonló felfedezésre jutott.

Az utolsó fejezet egy újabb mértani alakzattal ismerteti meg a gyerekeket, amely nem más, mint a kör és a körlap. A tankönyv utolsó matematikatörténeti leírása a mértani szerkesztések történetéről szól. Egy eredmény elérése érdekében a lehető legkevesebb eszközt felhasználni mindig is magasabb képzettséget igényelt. Az ókori Görögországban nagyon fejlett volt a mértani szerkesztés. A szerkesztéshez mindössze 2 eszközt használtak fel, egy olyan lécet, amelynek a széle egyenes volt és két kihegyezett pálcát, amelyek egyik végükön össze voltak kapcsolva. Ez a két eszköz a ma használt vonalzók és körzők elődei. Annak, hogy miért pont ezeket az eszközöket használták roppant egyszerű az oka ugyanis az ókori görögök a legharmonikusabb alakzatoknak tekintették az egyenest és a kört. Eukleidész az "Elemek" című könyvében leírja azokat a mértani alakzatokat, amelyeket körzővel és vonalzóval meg lehet rajzolni. Ezen a ponton szó esik arról a három szerkesztési feladatról, amelyeknek nagy szerepe volt a matematikatörténet fejlődésében. Ez a három feladat a kör négyszögesítése, szögharmadolás és a kocka megkettőzése. Az ókori idők olyan híres tudósai próbálták megoldani ezeket, mint kószi Hippokratész, knidoszi Eudoxosz, Eukleidész, Eratoszthenész Pentatlosz, Pergai Apollóniosz, Hérón, Papposz, Platón, Arkhimédész, továbbá az újkor olyan kimagasló tudósai, mint René Descartes, Francois Viéte, Isaac Newton. Azonban csak a XIX. században nyert bizonyítást az, hogy ezeket csupán körző és vonalzó segítségével nem lehet megoldani. A XX. században Abu l-Vafá Muhammad ibn Muhammad al-Búzdzsáni perzsa matematikus, olyan feladatok megoldását írta le, amelyben a szerkesztést vonalzóval és körzővel úgy is el lehet végezni, hogy a szerkesztés közben a körző szárainak nyílását nem változtatjuk meg. Georg Mohr (1640-1697) dán tudós XX. században megtalált könyvében is leírja a csak körzővel való szerkesztéseket.

A nyolcadik osztályos mértan tankönyv[17] hasonlóan a hetedikeshez 4 fejezetből áll azon belül pedig 23 témából.

Az első paragrafus a négyszögeké. A tankönyv elején találkozhatunk az ismert ukrán mértantudós és pedagógus, Mikola Ivanovics Kovancov nevével és munkásságának rövid leírásával. Megismerkedhet a diák a szükséges és elégséges

[17]A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Mértan 8

fogalmával. Ebben a könyvben is szó esik az összukrajnai ifjú matematikusok olimpiájáról. Nagyjából ugyan azokat az információkat olvashatjuk az említett matematikaversenyről, mint az alsóbb évfolyamok tankönyveiben.

A második részben megismerkedhetünk a háromszögek hasonlóságának szabályaival, tételeivel és a hozzá kapcsolódó fogalmakkal. A paragrafus első témájánál azonnal Thalész nevével találkozunk. A Milétoszi Thalész (Kr. e. 624 körül – Kr. e. 546 körül) a matematika és filozófia atyja, a materialista milétoszi filozófiai iskola első képviselője, a legkorábbi görög természetfilozófus. Milétoszban, az Égei-tenger partján, Kis-Ázsiában tevékenykedett. Thaleszt követi a híres német matematikus Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).A munkásságában egyesítette az elméleti és a gyakorlati matematikai kutatásokat. Gauss munkái nagy befolyással voltak az algebra, a számelmélet, a geometria, az elektronika és mágnesesség elméletfejlődésére. A Ptolemaiosz-tétel kapcsán rövid leírást kapunk az ókori görög matematikus és csillagászról Klaudiosz Ptolemaioszról (kb. 100 – kb.178). Ő volt a geocentrikus világkép megalkotója, valamint olyan matematikai elméletet dolgozott ki, amely a bolygók helyének meghatározását szolgálja. Ezen kívül ő a korszerű koordinátarendszer alapjainak megteremtője. Szó esik még Leonard Euler-ről(1707–1783) is.

A harmadik paragrafus még mindig a háromszögekkel foglalkozik, azon belül is a derékszögű háromszögekkel. Nyílván, ha derékszögű háromszögekről beszélünk, akkor nagy hiba lenne nem megemlíteni Püthagorasz nevét, hiszen hozzá fűződik egy nagyon fontos tétel. A Pitagorasz-tétel állítása már jóval Püthagorasz előtt is ismert volt, azonban ő bizonyította be elsőként a tételt, ezért is viseli az ő nevét.

Az utolsó fejezet a sokszögekről szól. Ebben a részben nagyon kevés történeti anyag található. Csupán a fejezet közepén esik szó pár mondat erejéig Giovanni Benedetto Ceva (1648–1734) olasz mérnökről és matematikusról.

A kilencedikes mértan tankönyv [19]5 paragrafusból azon belül pedig 20 témából áll. Az első paragrafus a háromszögek megoldását tanítja. Ebben a fejezetben találkozunk elsőként a trigonometria történetével. A trigonometriát egészen az ókortól vezeti be. Ugyanis az ókori utazók a csillagok és más égitestek állásából tájékozódtak, és viszonylag pontosan meg tudták határozni a hajók tartózkodási helyét a tengereken, illetve a sivatagban. A mérésekben nagy szerepe volt a ma-

[19]A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir -Mértan 9

gasságnak, azonban ezek a magasságok közvetlenül nem mérhetők, ezért közvetett méréseket használtak. Ebben jentős szerepet kapott a háromszögek megoldása, amelynek két csúcsa a földfelszínen helyezkedett el, a harmadik pedig egy csillag volt. Ezért az ókori csillagászoknak választ kellett adniuk arra a kérdésre, hogy milyen összefüggés van a háromszög elemei között. Ezáltal alakult ki a trigonometria, mint tudományág. A trigonometria a matematikának azon tudományága, amely a háromszögek oldalai és szögei közötti kapcsolatokat vizsgálja. Szó esik Hippokratész ógörög csillagászról (i. e. II. sz.) is, aki összeállította az első trigonometrikus táblázatot. A ma használt szinusz, koszinusz azonban csak a IV–V. században alkotó indiai tudósok tanulmányaiban fordulnak elő először. A tangens fogalma még később csak a X. században élő arab tudósok alkalmazták. Európában az "Öt könyv mindenfajta háromszögéről" c. tanulmány említi először 1533-ban a trigonometriát önálló tudományként. Rövid leírást kapunk Leonard Euler (1707–1783) svájci matematikusról is, mivel a ma használt trigonometria megalakulása az ő nevéhez fűződik.

A második fejezet a szabályos sokszögeké. Megtudhatjuk, hogy a szabályos sokszög szerkesztését körző és vonalzó segítségével, már az ókori görög geo méterek is tanulmányozták. Szó esik a német Carl Friedrich Gauss (1777–1855) matematikusról, aki körző és vonalzó alkalmazásával szerkesztett szabályos 17-szöget 1796-ban. 1801-ben Gauss bebizonyította, hogy mikor lehet csupán körző és vonalzó felhasználásával szabályos n-szöget szerkeszteni. Gauss olyan nagy jelentőséget tulajdonított a felfedezésének, hogy végrendeletében azt kérte, 17 szög legyen a sírkövén. A sírkövére nem került fel ez a rajz, azonban a braunschweigi Gauss-emlékmű egy tizenhét szögű talapzaton áll. Gauss neve mellett szó esik még Pierre de Fermat(1601–1665) francia matematikusról aki a számelmélet egyik megalapítója.

A harmadik rész bevezeti a Descartes koordinátákat a síkon. Ahogy azt az alsóbb évfolyamok könyvében is már olvashattuk, az emberek már az őskorban elkezdték a Föld tanulmányozását, rajzokat készítettek, amelyek a ma használt térképek elődei. A koordinátákat elsőként i. e. II. században Hipparkhosz görög csillagász használta helymegállapításhoz. Hipparkhosz a síkot négyzetrácsokra osztotta majd a pontok helyzetét szélesség és hosszúság alapján adta meg. A matematikában Nicole Oresme (1323–1382) francia tudós XIV. században alkalmazta először Hipparkhosz megközelítését. A koordinátákban rejlő nagy lehetőségeket viszont csak a XVII. században fedezte fel Pierre Fermat és René Descartes francia matematikusok, ők kapcsolták először össze az algebrát a mértannal. Az említett matematikusokról képeket is láthatunk a történeti részben.

A negyedik paragrafus egy új témakörrel ismerteti meg a diákokat ez pedig a vektorok. A paragrafus elején azonnal megtudhatjuk, hogy a vektor kifejezést először W. R. Hamilton ír matematikus és csillagász vezette be 1845-ben, de több történeti információval a fejezet nem szolgál a vektorokról.

Az utolsó fejezet a geometriai transzformációkról szól. Ebben a fejezetben is meg van egy rövid történeti rész keretében említve az Összukrajnai Ifjú Matematikusok olimpiája azonban magáról a geometriai transzformációk fejlődésének történetéről nem kapunk információt.

Az ukrajnai gimnáziumi tankönyvekről elmondható az, hogy a tananyagot a gyerekek számára érthető módon tárja fel, sok feladatot nyújt a begyakorláshoz, de matematikatörténeti információkban nem gazdagak. Sok helyen találkozhatunk a könyvekben matematikatörténeti cikkel, lábjegyzettel, de sok témánál ahol egyértelműnek vehetnénk, hogy történeti említést is tartalmaz, mégsem találunk. Viszont saját és a környeztemben élők pedagógusi tapasztalatából kiindulva, ha a matematikatanár nem hívja, fel a gyerekek figyelmét ezekre a meg vélő történelmi cikkekre a diákok egyszerűen figyelmen kívül hagyják, vagy csak a képekre vetnek egy-két pillantást. Ezért fontos a matematikatanároknak, hogy amikor a tanulókkal a tankönyvet használják rávezesse a figyelmet ezekre a részekre és megbeszéljék a leírtakat. Ha csak néhány diák figyelmét is, de felkelti, akkor az erre fordított idő nem elpazarolt.

4. fejezet

Matematikatörténet felhasználásának tapasztalatai

Pedagógusi munkámban jelenleg az 5. és a 6. évfolyamosokkal dolgozom. Ahogyan a tankönyv leírásokból is kiderülhetett számos témánál beilleszthető a matematikatörténet a tananyagba. Az Ukrajnában zajló események illetve a korona vírus járvány következtében az iskolák online oktatásra kényszerültek. Ez egyértelműen megnehezítette, mint a tanárok úgy a gyerekek munkáját is. A rövid online órákba nehezebb belecsempészni a megszokott tananyag mellé a matematikatörténetet. Azonban úgy gondolom a lehetőségekhez mérten jól sikerült a kiválasztott matematikatörténeti elemeket beilleszteni a matematika órákba.

A matematikatörténeti elemek véleményem szerint a nagyobb évfolyamok óráiba könnyebben beilleszthetők, de nem kizárt a kisebbeknél sem.

Az 5. osztály második félévének matematika tananyaga a tizedes törtek körül forog. A gyerekek számára a tizedes tört egy teljesen új dolog. Mivel azt tapasztaltam, hogy az osztály nagy részének az egész számokkal is problémát okoz a számolás így úgy határoztam, hogy a matematikatörténetet a tizedes törtek témakörénél vezetem be. Azon elgondolás alapján, hogy a gyerekek, ha nem szárazan a műveleteket és szabályokat kapják meg akkor jobban tudnak azonosulni a témával ez által jobb eredményeket érnek el.

A tizedes törtek bevezetésénél elmondtam a gyerekeknek, hogy volt idő, amikor ezeket a számokat nem a ma használt módon jelölték, és érdekességként megemlítettem, hogy a tizedes törteket már több mint 500 éve használja az emberiség.

Ugyan milyen egy 10-11 éves gyerek? Az ő szemükben 10 év is rengeteg időnek számít, így mondanom sem kell, hogy elcsodálkoztak ezen. A tört számok használata nem okozott gondot egészen addig ameddig nem kellett velük példákat és feladatokat megoldani. A legnehezebb pont számukra annak a megjegyzése volt, hogy mikor hány darab számot vágunk le a vesszővel. Ennek a problémának a kiküszöbölése érdekében ismét a matematikatörténethez nyúltam. Jamshid ibn Masud al-Kashi, szamarkandi matematikus módszerét használtam fel az órákon. Tehát a tizedes jegyeket és az egész részt más színnel írtam fel a táblára (online tábla). Az egészrészt feketével, a szám törtrészét pedig pírossal. Ez segítette a gyerekek figyelmét is felkelteni, valamint, gyorsabban választ tudtak adni arra a kérdésre, hogy hová kerül a vessző. Szorzásnál ez jóval megkönnyítette a helyzetet, hiszen számukra csak össze kellett számolni a pirossal írt elemeket. Azonban ugye ez manapság nem kivitelezhető, hogy mindig színessel írjunk illetve hosszútávon nem jó, ha a gyerek, csak akkor tud tizedes jegyekkel számolni, ha azok más színűek. Így a témakör negyedétől kezdve fokozatosan hagytam el az említett módszert. Úgy, mintha a pótkerék nélküli kerékpározást tanítanánk, hisz ott is először minkét pótkerék a helyén van, aztán az egyiket levesszük, aztán a másikat is végül a gyermek már nem érzi hiányát a pótkerekeknek. Így volt ez a tizedes törtek jelölésénél is.

Véleményem szerint a matematikatörténeti elemek beillesztése a témába hasznos volt ugyanis a gyerekek az önálló munkákon és dolgozaton pozitív eredményeket értek el. Ez főkén úgy tűnt fel számomra, hogy az osztály gyengébb diákjai is magukhoz mérten jelentősen jobban teljesítettek.

A hatodik osztálynál az egyenletek témakörét választottam, ugyanis ennél a témakörnél beilleszthetünk elemeket a jelölések fejlődésének történetéről. Bár hatodik osztályban még nincs külön tantárgyként algebra, azonban mivel ez a témakör tanév végén szerepel így beleillesztetjük valamilyen szinten az algebra történetének fejlődését is ugyanis szeptembertől már a mindennapjaik része lesz az algebra tantárgy.

Számomra meglepően hatott az a tény, hogy a diákjaim az egyenleteket csupán "x-es példaként" emlegetik. Elsődleges célom volt az, hogy elérjem a gyerekeknél a helyes megnevezés használatát, és hogy megértsék, megszokják, hogy az egyenletekben használhatunk más betűket is az "x"-en kívül. Ezt azért tartottam fontosnak mivel a kisebb rossz megnevezések rögzülése későbbiekben nagyobb problémákhoz vezethetnek. A jelenlegi fő probléma az volt, hogy amint a gyerekek más betűvel találkoztak az egyenletekben pl. y, z stb. megtorpantak és feltették a kérdést, hogy " Ez olyan, mint egy x-es példa? Úgy kell megoldani, mint egy x-es példát?"

Az egyenletekkel 2 hétig foglalkoztunk. A tananyagba pedig beintegráltam a betűk és jelölések használatának fejlődését, amely szorosan összefügg magával az algebra fejlődésével.

Amikor elkezdtük az egyenleteket tanulni a téma bevezetésénél szót ejtettem a betűk használatának fejlődéséről. Ez a momentum minden korosztály számára aktuális és fontos lehet, ugyanis sokszor találkozhatunk azzal, hogy a gyerekek nem szeretik azokat a feladatokat ahol változókkal, vagy jelölésekkel kell dolgozniuk. Célom az volt, hogy megértessék a tanulók azt, hogy a betűk nem ellenük hanem értük vannak, tehát megkönnyítik a munkájukat.

Kezdésként így a magyarázatot az "algebra" kifejezés bevezetésével kezdtem. Csak annyira belemenve amennyire éppen szükség volt.

4.1. Definíció. ***Algebra*** *A matematikai műveletek általános tudománya, amely betűkkel, mint általános számjegyekkel és az alapműveletek véges számú alkalmazásával oldja meg a feladatait.*

Megemlítettem ebből kifolyólag, hogy volt idő amikor elődeint az algebrát betűvetésnek is próbálták nevezni. Kezdetben a matematika úgynevezett retorikus korszakába mindent szóban, és írássos köznyelvben fejeztek ki. Ez a közlés mód azonban nagyon bonyolultá teheti a legegyszerübb feladatokat is. Itt a gyerekeknek több példát is hozhatam fel szemléltetésként. az egyik a következő volt

4.1. Példa. *Melyik az a szám amelyet huszonötből kivonva a hetvenháromszorosát majd ehhez hozzáadva a huszonhat és a szám harminckilencszeresét egyenlő lesz az adott szám és kilencvenhét összegéből kivonva a szám nyolcvanegyszeresét és végül hozzáadva a negyvenegynek és a számnak a tizenhétszeresét.*

Ezáltal a gyerekek is láthatták, hogy a ma használt írásmód mennyivel rövidebb és átláthatóbb.

Ez után szó esett arról, hogy a retorikus matematika korszakát a szinkópált matematika követte. Ebben a korszakban már szórövidítéseket használtak. Nicolas

Chuquet (1445 – 1488) után Estienne La Roche (1470 – 1530) a következőjelöléseket használta: a francia plus (több, plusz) és moins (kevesebb, mínusz) szavak kezdőbetűjéből az összeadást $\tilde{p}$-t és a kivonást $\tilde{m}$-mel jelölte. Az ismeretlenekre nem vezettek be külön jelölés. Azt ismeretlenek fokszámát egyszerűen a szám felső indexébe írták. Egyenlőségjel helyett az egaulx szót használták.

4.2. Példa. *A leírtak alapján egy egyszerű egyenlet így nézett ki abban az időben:* $2x - 12x + 7 = -3 \Rightarrow 2^1\tilde{m}12^1\tilde{p}egaulx\tilde{m}3^0$

Láthatjuk, hogy ezek a jelölések sem a legszemléletesebbek és legkényelmesebbek. A gyerekeknek ez nem is igazán nyerte el a tetszésüket mivel ők is bonyolultnak ítélték meg.

Hasonló indokok miatt a matematikusok tovább fejlesztették a jelölések rendszerét. A jelölések megreformálásának jelentős személyisége François de Viète (1540 – 1603). Viéte nevét a későbbiekben még fogják hallani a másodfokú egyenletek kapcsán. Így ezen a ponton csak a legfontosabbakat láttam jónak megemlíteni a tanulóknak. Viéte foglalkozását tekintve jogász volt, és csak a csillagászati érdeklődése kedvéért kezdett matematikával foglalkozni. Ő volt az aki már nem csak a változókat hanem a változók előtt álló együtthatókat is betűvel jelölte. Amikor a jelek elszakadtak az őket eredetileg jelentő szavaktól, s önálló jelentéssel bíró szimbólumokká alakultak. Ezáltal jött létre a ma is használt formális matematika.

De, mi is az a változó és az együttható? A változó, vagy másnévvel ismeretlen a latin incognitus szó szerinti lefordításából keletkezett, s kortól függően volt ismeretlen (1693), esmeretlen (1784), ösmeretlen (1839). Itt véltem jobban felfedezni, azt hogy ezek a matematikatörténeti kitekintések tényleg felkeltik nem csak a jobb tanulók figyelmét, hanem a kevésbé jó tanulókét is, ugyanis többször ismételték az "esmeretlen", "ösmeretlen" szavakat. Számukra ez viccesen hatott.

Miután a gyerekekkel átbeszéltük a betűk használatának történetét, már ők is valamilyen szinten beláthatták, hogy tényleg könnyebb dolguk van a betűkkel. Viszont az még mindig problémát okozott, hogy megszokják azt, hogy nem csak "x-eket" használhatunk egyenletekben. Azt sok gyakorlással és odafigyeléssel próbáltam orvosolni. Odafigyeltem arra, hogy a feladatokban ne csak egy féle változó jelölés jelenjen meg. Majd amikor elérkeztünk a szöveges feladatokhoz előhívtam a néhány órával ezelőtt említett matematikatörténeti elemeket ezzel is elmélyítve tudásukban.

A szöveges feladatok megoldásához egyenletek használata volt szükséges. Bár néha nehezen tudták értelmezi a feladat szövegét (sokaknál a szövegértő készség fejlesztése szükséges lehet), de pozitívan láttam azt, hogy amikor állították fel az egyenleteket már nem csak a megszokott "x" változót használták, hanem bátran nyúltak más betűkhöz is. A témazáró dolgozat írása, nem fér bele a szakdolgozat kereteibe azonban az eddig tapasztaltak alapján úgy gondolom pozitív eredményeket fognak elérni a diákok.

A matematika történettel való oktatás az egyszerű megszokott tanítási módszerhez viszonyítva azért mondható eredményesebbnek, mivel olyan elemeket tartalmaz, amely felkelti és fel is keltette azon diákok figyelmét, akik alapesetben nem érdeklődnek a matematika iránt. Továbbá segítette a tananyag rögzítését a gyerekek hosszú távú memóriájában. Felnőttként is tapasztalhatjuk, hogy vannak bizonyos dolgok, amelyeket könnyebben megjegyzünk, ha más momentumokhoz kapcsoljuk az elménkben, nincs ez másként a gyerekeknél sem. Ha a gyerek egy adott információt hozzá tud kapcsolni egy másik, számára könnyebb adathoz, vagy a tanórán átélt élményhez könnyebben fogja előhívni a későbbiekben a tudását.

Összegzés

A szakdolgozat négy fő fejezetből áll, amelyek tovább tagolódnak alfejezetekre.

A munka első fejezete a matematikatörténetre, mint a nevelés egyik eszközére tekint. Vizsgálja annak pedagógiai és pszichológiai vonatkozatásait. Szemlélteti, hogy a matematikatörténet, hogyan tudja aktivizálni a kognitív képességeket, ezt követően pedig szó esik az óraszervezés formáira immár történeti anyag felhasználásával.

A második fejezet, már, konkrétan azokról az elemekről számol be amelyek beépíthetőek az oktatás folyamatába. Leírja a különböző matematikatörténeti elemek előnyeit, és lehetséges hatását a gyerekekre és az oktatásra. Példákkal szemlélteti a módszer hatásosságát.

A dolgozat harmadik fejezete a hazai matematika tankönyvek vizsgálatáról szól. Sorra veszi minden évfolyam tankönyveit. Rövid általános szerkezeti leírás után matematikatörténeti szempontból vizsgálja a könyveket. Minden olyan matematikatörténeti elemet kiemel és közöl, amellyel a tanulók is találkozhatnak az oktatási folyamat során. Felhívja a figyelmet arra, hogy bár a jelenlegi tankönyvek nem tartalmaznak sok történelmi rész, viszont fontos, hogy felhívjuk ezekre is a gyerekek figyelmét és szó essen róla az oktatási folyamat során.

A negyedik és egyben az utolsó fejezet a gyakorlatban is felhasznált matematikatörténeti elemek eredményeiről számol be. A gyakorlatban két évfolyam az 5. ill. a 6. osztály vett részt 1-1 témakör keretén belül. A munka eredményes, a matematikatörténet felhasználása pedig sikeres volt. Következtetésül leszűrhetjük, hogy a matematikatörténeti elemeknek van helye az iskolai matematikaoktatásban. Azonban a matematikatörténeti komponensekkel való oktatás komoly szervezést és felkészülést kíván a tanár oldaláról, mégis úgy vélem megéri az időbeli befektetést ha a diákjaink ezáltal fejlődnek.

Irodalomjegyzék

[1] Дробышев, Ю.А *Историко-математический аспект в методической подготовке учителя. Монография / Ю. А. Дробышев. – Калуга* – Издво КГПУ

[2] Бобынин, В. В. *Цели, формы и средства введения исторических элементов в курсе математики средней школы Текст. / В. В. Бобынин // труды 1-го Всерос. съезда преп. матем.* СПб., 1913.

[3] Малаховой Н. А. *Элементы истории математики как средство воспитания школьников / Н. А.Малаховой* БЕЛГОРОД 2019

[4] Бобынин, В. В. *Философское, научное и педа- гогическое значение истории математики. / В. В. Бобынин // "Физико-математи- ческие науки в их настоящем и прошедшем", 1886.*

[5] Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. / Б. В. Гнеденко// Просвещение, 1982.

[6] Evelyne Barbin ,Uffe Thomas Jankvist ,Tinne Hoff Kjeldsen *History and Epistemology in Mathematics Education / Printed in Denmark by Danish School of Education, Aarhus University 1st edition 2015*

[7] Pólya György. A gondolkodás iskolája. / György Pólya// Budapest, Akkord Kiadó Kft.2000.

[8] Vincze Szilvia. *A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával. / Szilvia Vincze //Magyar Pedagógia, 2, 2003.*

[9] Szendrei Julianna Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról. / Julianna Szendrei //Budapest, Typotex,2005.

[10] Skemp, R.R. *A matematikatanulás pszichológiája / R. R. Skemp //Budapest, Edge 2000 Kiadó,2005.*

[11] Dienes Zoltán. Építsük fel a matematikát / Zoltán Dienes //Budapest, Gondolat Kiadó,1973.

[12] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir Matematika 5 //Львів Видавництво „Світ" 2018

[13] N.A. Taraszenkova, I.M. Bohatirjova, O.M. Kolomijec, Z.O. Szergyuk Matematika 6 // Csernyivci "Bukrek",2014

[14] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir *Algebra 7 // Львів Видавництво „Світ"2015*

[15] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir Mértan 7 // Львів Видавництво „Світ" 2015

[16] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir *Algebra 8 // Львів Видавництво „Світ" 2016*

[17] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir Mértan 8 // Львів Видавництво „Світ" 2016

[18] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir *Algebra 9 // Львів Видавництво „Світ" 2017*

[19] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir Mértan 9 // Львів Видавництво „Світ" 2017

[20] `https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics`

(Hozzáférés időpontja: 2021.11.29.)

[21] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics`

(Hozzáférés időpontja: 2021.11.05.)

Ábrák jegyzéke

Резюме

Бакалаврська робота складається з чотирьох основних розділів, які дані поділяються на підрозділи.

У першому розділі роботи розглядається історія математики як один із інструментів освіти. Розглядається її педагогічна та психологічна сторони. Вона ілюструє, як історія математики може активізувати пізнавальні здібності, а потім на історичному матеріалі обговорюються форми організації уроку.

У другому розділі вже йдеться про елементи, які можна включити в навчальний процес. Він описує переваги різних елементів в історії математики та їх потенційний вплив на дітей та освіту. Ефективність методу ілюструє прикладами.

У третьому розділі дисертації йдеться про експертизу угорських підручників з математики. Він бере підручники кожного класу по порядку. Після короткого загального структурного опису він розглядає книги з точки зору математичної історії. У ньому висвітлюються та передаються всі елементи історії математики, з якими учні можуть зіткнутися під час навчального процесу. Він звертає увагу на те, що, хоча нинішні підручники не містять багато історичних розділів, важливо привертати увагу дітей і до них під час навчального процесу.

У четвертій і заключній главі розповідається про результати використання елементів історії математики на практиці. На практиці в 1-1 темах брали участь два класи, 5 та 6 класи. Робота вдалася і використання історії математики вдало. На закінчення можна відфільтрувати, що елементи історії математики мають місце в шкільній математичному навчанні. Проте викладання з компонентами історії математики вимагає серйозної організації та підготовки з боку вчителя, але я вважаю, що це варте вкладення часу, якщо наші учні хочуть розвиватися таким чином.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
09.05.2022 14:14:40 EEST

Дата звіту:
09.05.2022 15:51:09 EEST

ID перевірки:
1011109923

Тип перевірки:
Doc vs Internet

ID користувача:
100006701

Назва документа: Kelemen_Dominika

Кількість сторінок: 53 **Кількість слів:** 13743 **Кількість символів:** 109339 **Розмір файлу:** 625.28 KB **ID файлу:** 1011008891

1.01% Схожість

Найбільша схожість: 0.63% з Інтернет-джерелом (http://www.karpatalja.com.ua/kmksz/tankonyvek/8/Algebra%20(2008..

1.01% Джерела з Інтернету 9 .... Сторінка 55

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи 40

Nyilatkozat

Alulírott, Kelemen Dominika, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.