ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3" від „27" квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Полінскі Георгіна Степанівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма014 «Середня освіта(Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 10 від 27 жовтня 2021 року**

Науковий керівник: **Жигуц Юрій Юрійович**

док. техн. наук, професор, завідувач кафедри технології машинобудування, УжНУ

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-гокурсу

Полінскі Георгіна Степанівна

Освітня програма 014 «Середня освіта(Математика)»

Науковий керівник: **Жигуц Юрій Юрійович**

док. техн. наук, професор, завідувач кафедри технології машинобудування, УжНУ

Рецензент: **Мич Ігор Андрійович**

канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики Державного вищого навчального закладу УжНУ

Берегове
2022

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSI MÓDSZEREINEK VIZSGÁLATA ÉS ELEMZÉSE A MATEMATIKA OKTATÁSBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Palinszky Georgina

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program:014„Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Zsiguc György

techn. tud. doktora, prof., tanszékvezető építőgépészeti technológiák tanszék, UNE

Recenzens: Mics Igor

fiz.-mat. tud. kandidátusa, az UNE kibernetika és alkalmazott matematika tanszékének docense

Beregszász – 2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A lineáris algebra alkalmazási területe igen széles a természettudományok körében. Találkozhatunk vele nem csak a matematikai problémák megoldásánál, de például a kémia egyes területein, gazdasági feladatok megoldásakor, de akár a mindennapi életünk során is.

Segítséget a lineáris algebrai egyenletrendszerek felírása és megoldása nyújt számunkra a problémák megértéséhez és megoldásához.

Diplomamunkámban áttekintjük a lineáris egyenletrendszerek definícióját, majd megoldásának módszereit. Az első fejezetben a megoldási módszerek algoritmusát mutatom be példákon keresztül illetve összefoglalva áttekinthetjük a módszerek lépéseit.

A második fejezetben az általános iskolákban használatos matematikakönyvekben szereplő meghatározásokat vizsgáltam meg. Melyik osztályban milyen szinten magyarázzák az egyenletrendszerek megoldási módszereit különböző szerzők.

A következő fejezetben a felsőoktatásban megjelenő, két, a diákok számára új módszer lépéseit tanulmányoztam át.

Ezen módszerek mellett ne feledkezzünk meg, hogy az egyenletrendszerek egyszerűbb megoldását segíthetik egyes programok is, ilyen például a MATLAB.

A felsőfokú matematika tanulási folyamatában a hallgatók matematikai kompetenciájának kialakítása érdekében javasolt a lineáris egyenletrendszerek megoldása a programok segítségével is.

Kutatásom célja, hogy áttekintést kapjunk a diákok számára ismertetett egyenletrendszerek megoldási módszereiről és miként vezetjük be ezen fontos témakört a tanulók tudáshálójába. Továbbá milyen visszajelzéseket kaphatunk a tanulóktól, milyen szinten sajátították el a módszerek lépéseit, hogyan alkalmazzák példákon a kapott elméleti tudásukat, illetve milyen gyakori hibákat vétenek.

1. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

Két vagy több lineáris egyenlet lineáris egyenletrendszert alkot. Például:

$$x - 3y = -5$$

$$2x + 4y = 10$$

Definíció. *Lineáris egyenletrendszeren ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja* m *egyenlet és* n *ismeretlen esetén*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

ahol $x_1, x_2, \ldots x_n$ *az ismeretlenek,* a_{ij} *az* i*-edik egyenletben az* x_j *ismeretlen együtthatóját jelöli, és* b_i *az* i*-edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja* 0*, a lineáris egyenletrendszer homogén, ha csak egy is különbözik* 0*-tól inhomogén.*

A lineáris egyenletrendszer megoldása egy rendezett pár, amely minden egyes lineáris egyenlet megoldása.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a rendezett* $(u1, u2, \ldots, u_n)$ *szám-n-es megoldása az előző egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz minden egyenletet kielégít az* $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \ldots x_n = u_n$ *helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak* *tekintjük, megoldásvektorról beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer megoldáshalmazának nevezzük. Egy egyenletrendszert megoldhatónak vagy konzisztensnek nevezünk, ha van megoldása, azaz ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer nem megoldható vagy inkonzisztens.*

Az egyenletrendszerek megoldási módszerei közül tekintsük át a 3 legismertebb módszert.

1.1. Lineáris egyenletrendszerek megoldása grafikusan

1. Feladat. *Oldjuk meg az egyenletrendszert mindkét lineáris egyenlet ábrázolásával és a metszéspont(ok) megkeresésével.*

$$4x = 8$$

$$6y = -3x + 6$$

Megoldás. *Az első* $4x = 8$ *egyenlet felírható mint* $x = 2$. *Ez egy függőleges egyenes egyenlete. A második egyenlet ábrázolásához írja fel az egyenletet olyan alakban, hogy meg tudjuk állapítani a meredekséget. Első egyenlet:*

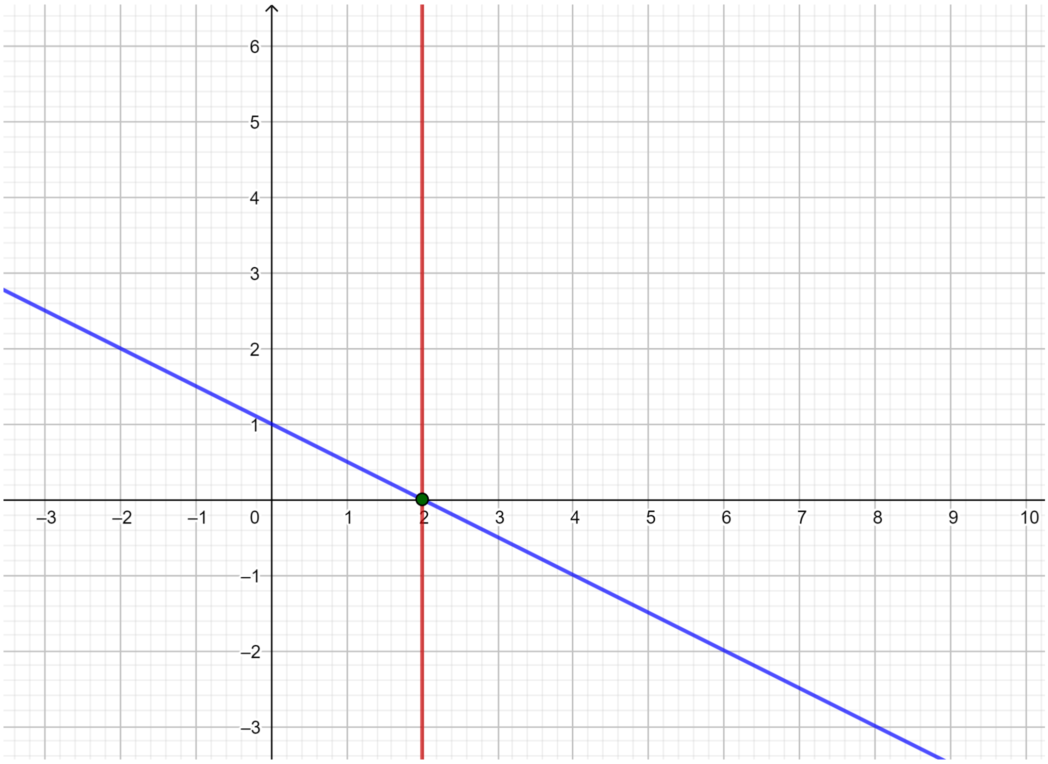
$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Második egyenlet:

$$6y = -3x + 6$$
$$\frac{6y}{6} = \frac{-3x}{6} + \frac{6}{6}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Az egyenletek grafikonjait az 1.1 ábra mutatja. A metszéspont $(2, 0)$. *Ezt megerősíthetjük, ha mindkét egyenletbe behelyettesítjük a* $(2, 0)$*-t.*



1.1. ábra. Grafikus módszer

$$4(2) = 8$$

$$8 = 8$$

$$6(0) = -3(2) + 6$$

$$0 = 0$$

Mindkét esetben igaz egyenlőséget kapunk. Tehát a megoldás $(2,0)$

A feladatban az egyeneseket az x és y metszéspontok vagy táblázat segítségével is lehetett volna ábrázolni. Az egyenletek ilyen alakban történő felírásának azonban az az előnye, hogy össze tudjuk hasonlítani az egyes egyenesek meredekségét és y tengelymetszetét.

1. Ha a meredekségek különböznek, a vonalak különbözőek, nem párhuzamosak, és pontosan egy pontban kell metszeniük egymást.

2. Ha a meredekségek azonosak és az y tengelymetszetek eltérőek, az egyenesek párhuzamosak és nem metszik egymást.

3. Ha a meredekségek azonosak és az y metszéspontok azonosak, akkor a két egyenlethez ugyanaz az egyenes tartozik.

1.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

Ez a módszer különösen fontos, mert fejlettebb problémák megoldására is használható, beleértve a nemlineáris egyenletrendszereket is.

2. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert behelyettesítő módszer alkalmazásával.*

$$x - y = 4$$

$$x + y = 16$$

Megoldás. *A módszer első lépése, hogy az egyik változót kifejezzük az egyik egyenletből. Az első egyenlet megoldása x-re $x = 4 + y$. Ekkor, mivel x egyenlő $4 + y$-al, a kifejezés helyettesítheti x-et a második egyenletben. Így a második egyenletben csak y marad.*

$$(4 + y) + y = 16$$

$$4 + 2y = 16$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

Az x megtalálásához az $y = 6$ értéket behelyettesítjük az $x = 4 + y$ egyenletbe

$$x = 4 + (6)$$

$$x = 10$$

Visszahelyettesítjük a kapot x és y értékeket az egyenletrendszerbe

$$(10) - (6) = 4$$

$$4 = 4$$

$$(10) + (6) = 16$$

$$16 = 16$$

Igaz egyenlőségeket kaptunk, a megoldás tehát $(10, 6)$

A behelyettesítő módszer lépései:

1. Fejezzük ki az egyik változót egy egyenletből.
2. Helyettesítsük be az 1. lépésben kapott egyenlőséget a másik egyenletbe.
3. Oldjuk meg a kapott egyenletet!
4. Helyettesítsük vissza a 3. lépésben talált értéket az 1. lépésben szereplő egyenletbe, és keressük meg a fennmaradó változó értékét.
5. Ellenőrizzük mindkét egyenlet esetében, hogy a kapott értékekkel igaz egyenlőséget kapunk, és írjuk le a megoldást rendezett párként!

1.3. Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

Az egyenletrendszerek egyenlő együtthatók módszerével történő megoldását úgy kezdjük, hogy mindkét egyenletet szabványos $Ax + By = C$ formában írjuk fel. Ezután egy ekvivalens rendszert hozunk létre úgy, hogy az egyik vagy mindkét egyenletet megszorozzuk a megfelelő állandókkal, hogy ellentétes együtthatókat hozzunk létre az x vagy az y változón. Ezután az egyenleteket összeadhatjuk, hogy kiküszöböljük az ellentétes együtthatójú változót. Ezt a folyamatot a következő feladat megoldásán mutatjuk be.

3. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert egyenlő együtthatók módszerének alkalmazásával.*

$$4x + 5y = 2$$

$$3x = 1 - 4y$$

Megoldás. *Írjuk fel mindkét egyenletet szabványos formában*

$$4x + 5y = 2$$

$$3x + 4y = 1$$

Az x kiküszöböléséhez megváltoztatjuk az együtthatóit 12-re és -12-re. Az első egyenletet szorozzuk 3-al, a második egyenletet -4-el

$$12x + 15y = 6$$

$$-12x - 16y = -4$$

Összeadjuk a kapott egyenleteket

$$-y = 2$$

$$y = -2$$

Behelyettesítjük az $y = -2$ *értéket az egyik eredeti egyenletünkbe és meghatározzuk az* x *értékét*

$$3x = 1 - 4y$$

$$3x = 1 - 4(-2)$$

$$3x = 1 + 8$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Ellenőrizzük, hogy a kapott értékek mellett igazak lesznek az eredeti egyenletek

$$4x + 5y = 2$$

$$4(3) + 5(-2) = 2$$

$$2 = 2$$

$$3x = 1 - 4y$$

$$3(3) = 1 - 4(-2)$$

$$9 = 9$$

A megoldás tehát $(3, -2)$

Az egyenlő együtthatók módszerének lépései:

1. Írjuk fel mindkét egyenletet szabványos $Ax + By = C$ formában.
2. Tört vagy tizedes tört törlése.
3. Szorozzuk meg az egyik vagy mindkét egyenletet nem nulla állandókkal, hogy ellentétes együtthatókat hozzunk létre az egyik változóhoz.
4. Adjuk össze a 3. lépés egyenleteit egy változó kiküszöböléséhez.

5. Oldjuk meg a fennmaradó egyenletet.

6. Behelyettesítjük az 5. lépésben talált ismert értéket az egyik eredeti egyenletbe, hogy megtaláljuk a másik változót.

7. Ellenőrizzük a rendezett párt mindkét egyenletben.

A lineáris egyenletrendszereknek az említett három módszeren kívül léteznek más megoldási módszerei, melyekkel a diákok a felsőoktatásban találkoznak, ilyen például a Gauss-módszer vagy a Cramer-szabály.
Léteznek ezeken kívül a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldását segítő programok is, ilyen például a MATLAB. A Matlabban igen egyszerűen oldhatók meg a rendszerek. Első lépésben megpróbálja előállítani a Cholesky-felbontást (chol), ha ez nem sikerül, akkor az LU-felbontással határozza meg a megoldást (Gauss-módszer). Ha az egyenlet túlhatározott, akkor először meghatározza a QR-felbontást, majd ebből a legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő megoldást. Az ilyen programok nagyban megkönnyítik egy rendszer megoldását.
A MATLAB-ban a lineáris egyenletrendszerek megoldásának két különböző módja van:
Ha a lineáris egyenletrendszer két egyenletet tartalmaz, és ezek egyszerű kifejezések, akkor az egyenletrendszer grafikusan megoldható.
További esetekben a MATLAB-ban van egy speciális megoldási funkció a lineáris egyenletrendszerek megoldására.

Példa.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Beviteli eljárás:

$symsx1x2$

$[x1, x2] = solve('2 * x1 - x2 = 4', '5 * x1 + 2 * x2 = 3')$

$vpa(x1, 4)$

$vpa(x2, 4)$

Ennek eredményeként kapjuk: x1=1,222, x2=-1,556

2. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei általános iskolában

Az egyenletrendszerek megoldási módszereivel a tanulók 7. osztályban találokznak. Tekintsük át, hogy az oktatást segítő tankönyvek hogyan vezetik be a megoldási módszereket a 7. osztályos tanulók számára.
H.P.Bevz és V.H.Bevz a következőképpen magyarázza ezt a témakört:

4. Feladat. *4 kg csokoládé és 3 kg mézeskeksz 26 hrivnyába kerül, miközben 6 kg csokoládé és 2 kg mézeskeksz éra 34 hrivnya. Mennyibe kerül 1 kg csokoládé és 1 kg mézeskeksz?[2]*

A feladat egyváltozós egyenlet felállításával oldható meg. (Állítsuk fel az egyenletet!) De megoldható más módszerrel is.[2]
Legyen 1 kg csokoládé ára x hrivnya, 1 kg mézeskekszé pedig y hrivnya.[2]
Ekkor

$$4x + 3y = 26$$

és

$$6x + 2y = 34$$

Két kétváltozós egyenletet kapunk. Az x és y olyan értékeit kell meghatároznunk, amelyek egyidejűleg mindkét egyenletet kielégítik, azaz az egyenletek mindegyikét

igaz egyenlőséggé alakítják át. Másként fogalmazva: meg kell találni mindkét egyenlet közös megoldását, vagy meg kell oldani az adott egyenletrendszert.[2]
Ha a két vagy több egyenlet közös megoldását kell megtalálni, akkor azt mondjuk, hogy ezek az egyenletek egyenletrendszert alkotnak. Az egyenletrendszert kapcsos zárójellel fogjuk össze:[2]

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 6x + 2y = 34. \end{cases}$$

Definíció. *Az egyenletrendszer megoldása - valamennyi egyenletének közös megoldását jelenti.*

Például a $(3; 2)$ számpár az

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

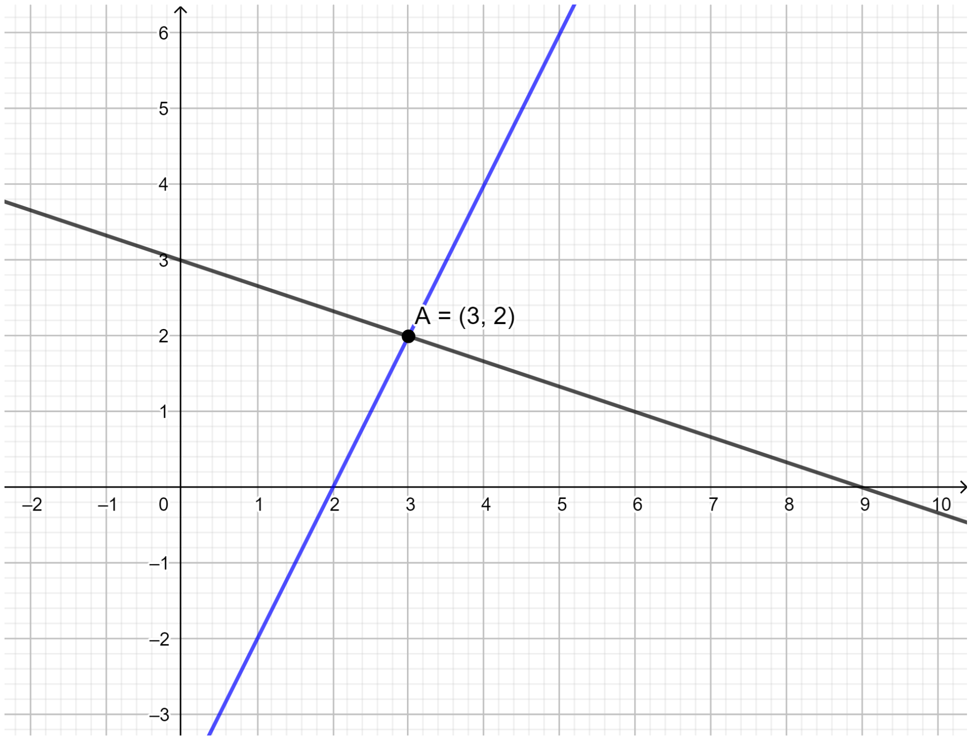
egyenletrendszer megoldása, mivel $3 + 3 \cdot 2$ és $2 \cdot 3 - 2 = 4$.[2]

Definíció. *Megoldani az egyenletrendszert annyit jelent, mint meghatározni valamennyi megoldásának halmazát.*

Az egyenletrendszer grafikus módszerrel is megoldható. Oldjuk meg például az előző egyenletrendszert. Közös koordinátasíkban megszerkesztjük a rendszer mindkét egyenletének görbéjét (2.1 ábra).[2]
Az $x+3y = 9$ egyenlet görbéje minden pontjának koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. A $2x - y = 4$ egyenlet görbéje minden pontjának koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. A megszerkesztett görbék az $A(3; 2)$ pontban metszik egymást. Ezért a $(3; 2)$ számpár az adott rendszer egyetlen megoldása.[2]
Grafikus módszerrel természetesen csak megközelítő megoldásokat kapunk. De ha behelyettesítjük az $x = 3$ és $y = 2$ értékeket az adott egyenletrendszerbe, akkor meggyőződhetünk arról, hogy a $(3; 2)$ számpár pontos megoldás.[2]
Vajon a két egyenletből álló mindegyik egyenletrendszernek csak egy megoldása van? Nem. Például a

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

egyenletrendszernek végtelen számú megoldása van. Mindkét egyenlet görbéje ugyanis egyazon egyenes. Tehát ezen egyenes minden pontjának koordinátái, például a



2.1. ábra. Grafikus módszer

$(-2;-6), (-1;-4,5), (0;-3), (1;-1,5), (2;0), \dots$ - az adott rendszer megoldása.[2]
Vannak olyan egyenletrendszerek, melyeknek nincs egyetlen megoldásuk sem. Ezeknek az egyenleteknek a görbéi párhuzamos egyenesek.[2]

Behelyettesítő módszer

Az egyenletek megoldásának grafikus módszere terjedelmes, és általában megközelítő megoldást ad. Ezért az egyenletrendszereket gyakran más módon oldják meg. Ezek egyike a behelyettesítő módszer.[2]
Kezdjük egy példával, oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + 3y = 9. \end{cases}$$

Fejezzük ki a második egyenletből az x változót[2]

$$x = 9 - 3y.$$

Mivel a rendszer első egyenletét a változók ugyanazon értékeinek kell kielégíteniük mint a másodikat, ezért az első egyenletben az x változót a kapott $9-3y$ kifejezéssel helyettesítjük. Ekkor egyváltozós egyenletet kapunk:[2]

$$2(9 - 3y) - y = 4,$$

ahonnan

$$18 - 6y - y = 4$$

$$y = 2.$$

A kapott $y = 2$ értéket visszahelyettesítjük az $x = 9 - 3y$ egyenletbe, akkor

$$x = 9 - 3 \cdot 2 = 3$$

értéket kapjuk. Tehát az egyenletrendszer megoldása a $(3; 2)$ számpár.[2]
Az egyenletrendszer behelyettesítő módszerrel való megoldásához a következőket kell elvégezni:[2]

1. az egyenletrendszer valamelyik egyenletéből kifejezni az egyik ismeretlent;
2. a kapott kifejezést behelyettesíteni a másik egyenletbe;
3. megoldani a kapott egyváltozós egyenletet;
4. kiszámítani a másik ismeretlen értékét.[2]

Ezzel a módszerrel megoldható bármely lineáris kétváltozós egyenletrendszer. A behelyettesítő módszert akkor legcélszerűbb alkalmazni, amikor az egyenletben bármelyik változó együtthatója 1.[2]

Példa. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!*

$$\begin{cases} 3x = 2(y + 6), \\ 6x + 3y = 1 + x. \end{cases}$$

Megoldás. *Az adott egyenletek lineáris egyenletekre cserélésével a következő egyenletrendszert kapjuk:*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 5x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$3x = 2y + 12$$

$$x = \frac{2}{3}y + 4,$$

$$5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1$$

$$\frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1$$

$$\frac{19}{3}y = -19$$

$$y = -3$$

$$x = \frac{2}{3}(-3) + 4 = 2.$$

$Felelet$: $(2; -3)$.*[2]*

Néha egyik egyenletrendszerből a másikba nem csak egyes változók, hanem egy egész kifejezés értéke behelyettesíthető. Például az alábbi egyenleltrendszer

$$\begin{cases} 3 \cdot (2x - 4y) - y = 44, \\ 2x - 4y = 14 \end{cases}$$

megoldása során a $2x - 4y$ kifejezés értéke a második egyenletből az elsőbe helyettesíthető:[2]

$$3 \cdot 14 - y = 44,$$

$$y = 42 - 44,$$

$$y = -2.$$

Akkor

$$2x - 4 \cdot (-2) = 14,$$

$$2x = 14 - 8,$$

$$x = 3.$$

$Felelet$: $x = 3, y = -2$.[2] Ellenőrzés:

$$3 \cdot (6 + 8) + 2 = 42 + 2 = 44$$

$$2 \cdot 3 - 4(-2) = 6 + 8 = 14$$

A meghatározott $(3; -2)$ számpár kielégíti az adott egyenletrendszert.[2]

Egyenlő együtthatók módszere

Adva van a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31 \end{cases}$$

Először behelyettesítő módszerrel oldjuk meg a rendszert. Az első egyenletből kifejezzük az y változót, s a kapott kifejezéssel helyettesítjük az y változót a második egyenletben:[2]

$$y = \frac{1}{3}(8x - 34)$$

$$5x + 3 \cdot \frac{1}{3}(8x - 34) = 31$$

$$5x + 8x = 34 + 31.$$

Ezután már könnyen befejezhető az egyenletrendszer megoldása.[2]

Megkaphatjuk-e az $5x + 8x = 34 + 31$ egyenletet más módszerrel? Igen, ehhez elegendő összeadni az egyenletek jobb és bal oldalát. Mivel az y együtthatói ellentétes előjelű számok, ezért az y változót tartalmazó tagok megsemmisülnek. Ezért ezzel a módszerrel bármilyen hasonló egyenletrendszerek megoldhatók: a behelyettesítő módszer helyett az egyenleteket tagonként összeadjuk. A megoldás a következőképpen írható le:[2]

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31 \end{cases}$$

$$13x = 64,$$

$$x = 5.$$

$$8 \cdot 5 - 3y = 34,$$

$$40 - 3y = 34,$$

$$3y = 6,$$

$$y = 2.$$

Felelet : $(5; 2)$.[2] Ezzel a módszerrel oldjuk meg azokat az egyenletrendszereket, amelyekben bármilyen változó együtthatói ellentétes előjelű számok. Ilyen alakúvá tehető bármilyen lineáris kétváltozós egyenletrendszer.[2] Például adva van az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 31, \\ 2x + 9y = 12. \end{cases}$$

Megszorozzuk az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel, és a másodikat pedig -3-mal. Ekkor olyan rendszert kapunk, amelyben az x változó együtthatói ellentétes

előjelű számok. A kapott rendszer egyenletei egyenértékűek az eredeti rendszer egyenleteivel, tehát ennek is ugyanolyan megoldásai lesznek, mint az eredetinek.[2]
A megoldást a következőképpen írhatjuk le: az 1. egyenletet szorozzuk 2-vel, a 2. egyenletet pedig -3-al.

$$\begin{cases} 6x + 14y = 62, \\ -6x - 27y = -36. \end{cases}$$

$$-13y = 26,$$

$$y = -2.$$

$$2x + 9 \cdot (-2) = 12,$$

$$2x = 30$$

$$x = 15.$$

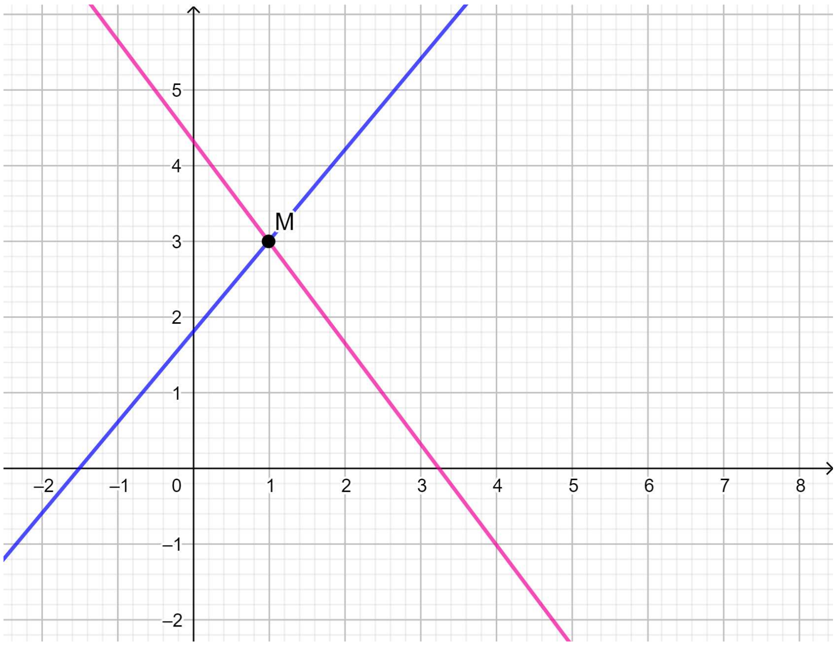
$Felelet: (15; -2)$.[2]

A továbbiakban nézzük meg, hogy az egyenletrendszerek megoldási módszereit hogyan vezeti be A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij és M. Sz. Jakir a 7. osztályos tanulók számára:
A 2.2 ábrán a $-6x + 5y = 9$ és a $4x + 3y = 13$ egyenletek grafikonjai láthatók. Az $M(1; 3)$ pontban metszik egymást. A pont mindkét grafikonhoz hozzátartozik. Tehát az $(1; 3)$ számpár a két egyenlet közös megoldása.[3]
Hogy meghatározhassuk a 12 cm^2 területű és 14 cm kerületű téglalap oldalait, meg kell találnunk az $xy = 12$ és $2x + 2y = 14$ egyenletek közös megoldásait, ahol x cm és y cm a téglalap szomszédos oldalainak hossza.[3]
Ahhoz, hogy megtaláljuk néhány egyenlet közös megoldását, meg kell oldani az egyenletrendszert.[3]
Az egyenletrendszert kapcsos zárójel segítségével írják fel. Az

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

kifejezés például a 12 cm^2 területű és 14 cm kerületű téglalap oldalainak a meghatározásáról szóló feladat matematikai modellje. A

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$



2.2. ábra. Grafikus módszer

egyenletrendszer a két egyenes közös pontjai koordinátáinak a meghatározásáról szóló feladat matematikai modellje.[3]
A rendszer mindkét egyenlete lineáris. Ezért ezt a rendszert két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszernek nevezzük.[3]

Definíció. *A kétváltozós lineáris egyenletrendszer megoldásának azt a számpárt nevezzük, amely mindegyik egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja.*

Definíció. *Az egyenletrendszer megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását, vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.*

Az előző rendszerben az egyenletek grafikonjai az $M(1;3)$ pontban metszik egymást (2.2 ábra). A pont koordinátái mindkét egyenletnek megoldása, tehát megoldása az egyenletrendszernek is. Mivel a grafikonoknak nincs több közös pontjuk, ezért az egyenletrendszernek sincs több megoldása. Tehát az $(1;3)$ számpár az adott rendszer egyetlen megoldása.[3]
Az egyenletrendszerek megoldásának fentebb leírt módszerét grafikus módszernek nevezzük. A módszer lényege a következő:[3]

1. ábrázolni közös koordináta-rendszerben az összes egyenlet grafikonját;

2. meghatározni a grafikonok összes metszéspontjának koordinátáját;

3. a kapott számpárok lesznek az egyenletrendszer megoldásai.[3]

Nem minden egyenletrendszert célszerű grafikusan megoldani. Például, ha az $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ számpár valamilyen egyenletrendszer megoldása, akkor érthető, hogy ezt grafikusan nehéz megállapítani. Ezért a grafikus módszert abban az esetben használják, ha a megoldást elég hozzávetőlegesen meghatározni.[3]

A grafikus módszer használata abban az esetben is célszerű, ha meg kell tudni a megoldások számát. Tisztázzuk, hány megoldása lehet a két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszernek.[3]

Ha a rendszer egyik egyenletének nincs megoldása, akkor nyilvánvaló, hogy a rendszer sem rendelkezik megoldással. Például a

$$\begin{cases} 0x + 0y = 7, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása.[3]

Az egyenletrendszer megoldásainak száma a két egyenes kölcsönös elhelyezkedésétől függ:

1. ha az egyenesek metszik egymást, a rendszernek egy megoldása van;
2. ha az egyenesek egybeesnek, a rendszer végtelen számú megoldással rendelkezik;
3. ha az egyenesek párhuzamosak, a rendszernek nincs megoldása.[3]

A grafikus módszer alapján állapították meg, hogy nem létezik olyan lineáris egyenletrendszer, amelyik pontosan két vagy három, illetve pontosan 100 megoldással rendelkezik.[3]

Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

Ha a matematikusok új feladattal találkoznak, akkor igyekeznek annak megoldását a már ismert feladatok megoldására visszavezetni.[3]

Megmutatjuk, hogyan lehet a kétváltozós lineáris egyenletrendszer megoldását visszavezetni az egyváltozós lineáris egyenlet megoldására. Megoldjuk a

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert.[3]

Az első egyenletből kifejezzük az y változót az x-en keresztül:

$$y = 2x - 8$$

Behelyettesítjük a második egyenletbe az y helyett a kapott $2x - 8$ kifejezést:

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5 \end{cases}$$

[3] Ennek az egyenletrendszernek ugyanazok a megoldásai, mint az eredeti rendszernek. Ezt a tényt indoklás nélkül fogadjuk el.[3] Az utóbbi rendszer második egyenlete már egyváltozós. Megoldjuk:

$$3x + 2(2x - 8) = 5$$

$$3x + 4x - 16 = 5$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Az x változó megkapott értékét behelyettesítjük az $y = 2x - 8$ kifejezésbe:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$

$$y = -2$$

A $(3; -2)$ számpár a keresett megoldás.[3]

Az egyenletrendszer megoldásának imént leírt módszerét behelyettesítő módszernek nevezzük.[3]

Tehát, hogy behelyettesítő módszerrel oldhassuk meg a lineáris egyenletrendszert, a következő lépéseket kell megtenni:[3]

1. az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót a másikon keresztül;
2. a kifejezett változó helyett kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe;
3. megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;
4. a változó megkapott értékét behelyettesítjük az első lépésben kapott kifejezésbe;

5. kiszámítjuk a másik változó értékét.[3]

A felsorolt lépések sorát a két lineáris egyenletet tartalmazó kétváltozós egyenletrendszer behelyettesítő módszerrel való megoldása algoritmusának nevezzük.[3]

Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

Megvizsgálunk még egy módszert, amely lehetőséget ad a két lineáris egyenletből álló kétváltozós egyenletrendszer megoldását viszszavezetni az egyváltozós lineáris egyenlet megoldására.[3] Megoldjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5 \end{cases}$$

Mivel a rendszerben az y együtthatói ellenkező előjelű számok, ezért ahhoz, hogy egyváltozós egyenletet kapjunk, elegendő tagonként összeadni az egyenletek jobb és bal oldalát. A következőt kapjuk:[3]

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

Az x értékét a rendszer bármelyik egyenletébe behelyettesíthetjük. Helyettesítjük be az elsőbe. Ekkor:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$

$$-5y = 3;$$

$$y = -0,6$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása a $(2; -0,6)$ számpár.[3]

A leírt megoldási módot az egyenlő együtthatók módszerének nevezzük.[3]

Ez a módszer a következő kijelentésen alapszik: ha a rendszer egyik egyenletét felcseréljük az egyenletek jobb és bal oldalának öszszeadása után kapott egyenlettel, akkor az így létrejött egyenletrendszernek ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti rendszernek (bizonyítás nélkül fogadjuk el).[3]

Megoldunk még egy egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19 \end{cases}$$

Ha tagonként összeadjuk az egyenletek jobb és bal oldalát, akkor újból kétváltozós egyenletet kapunk. A kapott rendszernél még nem alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét.[3]

Az első egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk -3-mal. A követ- kező rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19 \end{cases}$$

melynek megoldásai azonosak az első rendszer megoldásaival. Erre a rendszerre már alkalmas az egyenlő együtthatók módszere:[3]

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$

$$14y = -14;$$

$$y = -1.$$

Az y értékét behelyettesítjük az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$

$$2x = 8;$$

$$x = 4.$$

A $(4; -1)$ számpár a keresett megoldás.[3]

Megoldunk egy olyan egyenletrendszert, amelyben mindkét egyenletet elő kell készíteni a módszer alkalmazására:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$$

[3] Hogy megszabaduljunk az y változótól, az első egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk 5-tel, a második egyenlet mindkét oldalát pedig -8-cal, majd összeadjuk az egyenleteket:[3]

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45 \\ -24x - 40y = -56 \end{cases}$$

$$35x + 40y\breve{\ }24x - 40y = 45 - 56;$$

$$11x = -11;$$

$$x = -1.$$

Behelyettesítve az x értékét az első egyenletbe:

$$-7 + 8y = 9;$$

$$y = 2.$$

Tehát a $(-1; 2)$ számpár az adott egyenletrendszer megoldása.[3]
Hogy az egyenlő együtthatók módszerével oldhassuk meg a lineáris egyenletrendszert, a következő lépéseket kell megtennünk:[3]

1. kiválasztva a megfelelő együtthatókat, átalakítjuk az egyik, esetleg mindkét egyenletet úgy, hogy az azonos változók melletti együtthatók ellenkező előjelűek legyenek;

2. tagonként összeadjuk az első lépésben kapott egyenletek jobb és bal oldalát;

3. megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;

4. a harmadik lépésben kapott értéket behelyettesítjük az eredeti rendszer valamelyik egyenletébe;

5. kiszámítjuk a másik változó értékét.[3]

Megvizsgálva a két könyv ezen fejezeteit, melyek az egyenletrendszerek megoldási módszereit dolgozzák fel, elmondhatjuk, hogy az A. H. Merzljak által szerkesztett tankönyv részletesebben taglalja a módszereket. Azon kívül, hogy feladatokon, példákon keresztül szemlélteti a lépéseket, külön pontokba szedi minden módszer algoritmusát. Valamint ebben a könyvben a H.P.Bevz és V.H.Bevz által szerkesztett tankönyvvel ellentétben a megoldások számáról is kapunk meghatározást, melyek ismerete elengedhetetlen a témakör teljes megértéséhez.
A tanulók tudatába való egyszerűbb berögződés szempontjából az A. H. Merzljak készítette tankönyv nagyobb segítséget nyújt a tanulóknak és a tanároknak egyaránt.

Az egyenletrendszerek megoldási módszerei a 9. osztály tananyagában kerül ismétlésre. A tankönyvek példákon keresztül ismétlik meg a módszerek lényegét és algoritmusát, viszont nem lineáris, hanem másodfokú egyenletrendszerek megoldási metódusának elsajátítása van előtérben.

3. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei a felsőoktatásban

A felsöoktatásban a diákok új módszerekkel ismerkednek meg a lineáris egyenletrendszerek megoldására. Most ezeket a módszereket tekintjük át részletesebben.

Gauss-módszer

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\cdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\
&\cdots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + a_{s3}x_3 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Az alábbiakban az egyenletrendszer megoldásainak elméletével és a megoldások gyakorlati megkeresésével foglalkozunk. Kezdjük a legegyszerűbb módszerrel, az úgynevezett ismeretlenek kiküszöbölésével.[6]

A (3.1) egyenletrendszer következő átalakítását elemi átalakításnak szokás nevezni:[6]

Az egyenletrendszer valamely egyenletének mindkét oldalát ugyanazon számmal megszorozva, a kapott egyenletet kivonjuk vagy hozzáadjuk az egyenletrendszer valamely másik egyenletének a megfelelő oldalaihoz.[6]

A (3.1) egyenletrendszeren végzett véges sok elemi átalakítás után kapott új egyen-

letrendszerre azt mondjuk, hogy ekvivalens (azaz egyenértékű) a (3.1) egyenletrendszerrel. Ez alatt azt értjük, hogy mindkét egyenletrendszerre igaz, hogy: vagy mindkettő ellentmondó, vagy mindkettő megoldható, és a megoldásaik ugyanazok.[6]
Kezdjük a Gauss módszer ismertetését. Adva van a (3.1) egyenletrendszer és legyen a_{11} együttható nem nulla (ellenkező esetben egy másik, nullától különböző együtthatóval kell kezdenünk az első sorból, ez az ismeretlenek átszámozásával mindig elérhető).[6]
1. lépés: Alakítsuk át a (3.1) egyenletrendszert, kiküszöbölve az x_1 ismeretlent valamennyi egyenletből, kivéve az elsőt. Ez alatt azt értjük, hogy az első egyenlet mindkét oldalát az $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ számmal megszorozva, kivonjuk a második egyenlet megfelelő oldalából, majd ezt követően az első egyenlet mindkét oldalát az $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ számmal megszorozva, kivonjuk a harmadik egyenlet megfelelő oldalából. Így tovább haladva egy új, az adottal ekvivalens egyenletrendszert kapunk:[6]

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)} \\ &\cdots \\ a_{s2}^{(1)}x_2 + a_{s3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{sn}^{(1)}x_n &= b_s^{(1)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Az új (3.2) egyenletrendszer $a_{ij}^{(1)}$ együtthatóinak és b_k szabad tagjainak a kiszámítása könnyen elvégezhető, de az elmélet szempontjából számunkra az egyenletrendszer alakja fontos. Lehetséges, hogy a (3.2) egyenletrendszer valamely egyenletének bal oldalán minden együttható nulla. Ha ennek az egyenletnek a szabad tagja nem nulla, akkor az ellentmondás, tehát a (3.1) egyenletrendszernek nincs megoldása. Ellenkező esetben, ha ennek az egyenletnek a szabad tagja is nulla, akkor ezt az egyenletet az ismeretlenek bármely értéke kielégíti, s ezért az egyenletet a rendszerből elhagyva, az eredetivel ekvivalens rendszert nyerünk és az eljárást tovább folytatjuk.[6]
2. lépés. Alakítsuk át a (3.2) egyenletrendszert változatlanul hagyva az első és a második egyenletet, kiküszöbölve az x_2 ismeretlent, a harmadik egyenlettől kezdve az $a_{22}^{(1)} \neq 0$ feltétel mellett (ellenkező esetben egy másik nullától különböző együtthatóval kell kezdenünk a második sorból); azaz a második egyenlet mindkét oldalát az $\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ számmal megszorozva kivonjuk a harmadik egyenlet megfelelő oldalairól; majd a második egyenlet mindkét oldalát az $\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ számmal megszorozva ki-

vonjuk a negyedik egyenlet megfelelő oldalaiból, és így tovább. Egy új, az előbbivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk:[6]

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ \cdots \\ a_{l3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{ln}^{(2)}x_n &= b_l^{(2)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ha valamely egyenlet bal oldalán minden együttható nulla és a szabad tag nem nulla, akkor ez ellentmondás, és az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ellenkező esetben folytatjuk az eljárást, elhagyva azokat az egyenleteket a rendszerből, amelyek együtthatói nullával egyenlők és szabad tagjuk is nulla.[6] Véges sok k lépés után a (3.1) egyenletrendszer az alábbi egyenletrendszerrel ekvivalens:[6]

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \cdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Lehetséges, hogy az egyenletrendszer csak k ($k \leq s$) egyenletet tartalmaz, mivel egyes egyenleteket el kellett hagyni; továbbá a k-adik egyenlet bal oldalán minden együttható nulla, de a $b_k^{(k-1)}$ szabad tag nem nulla, akkor a (3.4) egyenletrendszer ellentmondó, tehát a (3.1) egyenletrendszernek nincs megoldása. Ellenkező esetben az

$$a_{11}, a_{22}^1, a_{33}^2 \ldots, a_{k-1k-1}^{(k-2)}, a_{kk}^{(k-1)}$$

együtthatók nullától különbözők és $k \leq n$. Két eset lehetséges:[6]

1. A (3.4) egyenletrendszer alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \cdots \\ a_{k-1n-1}^{(k-2)}x_{n-1} + a_{k-1n}^{(k-2)}x_n &= b_{k-1}^{(k-2)} \\ a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Mivel $a_{kn}^{(k-1)} \neq 0$, tehát $x_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kn}^{(k-1)}}$ és ez az utolsó egyenlet megoldása. Ezt behelyettesítve az utolsó előtti egyenletbe, innen az x_{k-1}-et egyértelműen határozzuk meg. Folytatva ezt az eljárást, felfelé haladva, látjuk, hogy az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.[6]

2. Az $n > k$ és (3.4) egyenletrendszer alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k &= b_1 - a_{k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}xn \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k &= b_2^{(1)} - a_{2k+1}^{(1)}x_{k+1} - \cdots - a_{2n}^{(1)}xn \\ &\cdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k &= b_k^{(k-1)} - a_{kk+1}^{(k-1)}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}^{(k-1)}x_n \end{aligned} \tag{3.6}$$

Az $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ismeretlenek most „szabad" ismeretlenek és tetszőleges számértékeket vehetnek fel. Például, ha

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1}, x_{k+2} = \alpha_{k+2}, \ldots, x_n = \alpha_n$$

akkor az utolsó egyenletből egyértelműen határozzuk meg az x_k ismeretlent:

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} - \frac{a_{kk+1}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\alpha_{k+1} - \cdots - \frac{a_{kn}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\alpha_n$$

Behelyettesítve az utolsó előtti egyenletbe az $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ értékeit, az x_{k-1}-et egyértelműen határozzuk meg. Ugyanígy tovább folytatva, felfelé haladva, határozzuk meg az egyenletrendszer megoldását. Mivel a szabad ismeretlenek értékeit végtelen sok különböző módon választhatjuk meg, az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.[6]

Az egyenletrendszer Gauss-módszerrel történő megoldása nem más, mint az egyenletrendszeren egy sorozat úgynevezett elemi átalakítás végrehajtása.[6]

Az egyszerűség céljából a gyakorlatban felírjuk az egyenletrendszer mátrixát, csatoljuk hozzá a szabad tagok oszlopát, és az összes elemi átalakítást a bővített mátrix sorain végezzük el.[6]

Az egyenletrendszer Gauss-módszerrel történő megoldása rendkívül egyszerű. Mivel azonos típusú számításokat végzünk, ezért az egyenletrendszer megoldására számítógép is alkalmazható. Elméleti szempontból e módszernek sok a hiányossága, nem ad választ az egyenletrendszer megoldási feltételének a megfogalmazására az együtthatók és szabad tagok segítségével, ami nélkülözhetetlen az elméleti vizsgálatokban. Az alábbiakban erre a kérdésre adunk választ és képletet vezetünk be az egyenletrendszer megoldására.[6]

Cramer-szabály

Kezdjük a vizsgálatot a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszerrel:[6]

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Az ismeretlenek együtthatóiból szerkesztett

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrixhoz rendeljük hozzá azt a számot, amely egyenlő a mátrix főátlójában levő számok szorzatának és a mellékátlójában levő számok szorzatának a különbségével. Ezt a számot a mátrix determinánsának nevezzük, s erre a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

jelölést használjuk.[6]

A (3.7)-re alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{22}b_2 - a_{21}b_1.$$

Innen a determináns segítségével kifejezhető az x_1 és x_2, ha az egyenletrendszer mátrixának a determinánsa nullától különböző:

$$x1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a21 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Ez az úgynevezett Cramer-szabály az egyenletrendszer megoldására.[6]

4. fejezet

Saját eredmények

Az elvégzett kutatásom arra irányult, hogy az általános iskolák végzős diákjai körében feladatok segírségével felmérjem, milyen szinten sajátították el az egyenletrendszerek 3 megoldási módszerének algoritmusát, valamint melyik módszer az amelyiket legszívesebben alkalmazzák, ha lehetőségük adódik választani a megoldási algoritmusok között.
A 9. osztály tanulóinak a következő feladatlapot kellett megoldani:

Feladatlap

1. Old meg az alábbi egyenletrendszert grafikus módszer alkalmazásával!

$$\begin{cases} 2y - 4x = 8, \\ 5y + 7x = 3 \end{cases}$$

2. Old meg az alábbi egyenletrendszert behelyettesítő módszer alkalmazásával!

$$\begin{cases} x - 10y = 5, \\ 3y + 2x = 10 \end{cases}$$

3. Old meg az alábbi egyenletrendszert egyenlő együtthatók módszerének alkalmazásával!

$$\begin{cases} 5x - 6y = 15, \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

4. Old meg az alábbi egyenletrendszert az előző 3 módszer egyikével!

$$\begin{cases} 3x - 9y = 12, \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

A tanulók munkáinak ellenőrzése és összegzése után a következőket lehet megállapítani:
A tanulók többsége minden módszert ismert, viszont a legkevesebb hibát a behelyettesítő módszer alkalmazásakor követték el. A hibák jellege azonban nem a módszer ismeretének hiányát bizonyítja, mivel csak számítási hibát vétettek.
A grafikus módszer alkalmazásánál a leggyakoribb hibaát az x és y pont koordinátáinak leolvasásakor követték el. Felcserélték az x és y ismeretleneknek megfelelő értékeket. A második leggyakoribb hibát ezen módszer alkalmazásánál az egyenletek grafikonjainak megrajzolásakor vétették.
Az egyenlő együtthatók módszerének alkalmazásakor a tanulók a számítások során tévedtek, valamit olyan eset fordult elő, hogy a tanulónak nem jutott eszébe a módszer algoritmusa.
Amennyiben a tanulóra van bízva a döntés a módszer kiválasztásánál, a legtöbben a behelyettesítő módszert alkalmazták, a második helyen a választásnál az egyenlő együtthatók módszere szerepel és a legkevesebben a grafikus módszert választották. Ez azzal magyarázható, hogy a tanulók nem túl magabiztosak a grafikus módszer alkalmazásakor, illetve tudják, hogy a módszer nem minden egyenletrendszer esetében ad vissza pontos eredményt.
A kutatás eredményei nem sokban tértek el a vártnál. Összességében elmondható, hogy a tanulók többsége megfelelően sajátítja el a módszerek metódusát és megfelelően alkalmazzák azt a különböző feladatok megoldásakor. A kutatásom pozitív visszajelzést adott mind a tanulók, mind a tanárok munkájáról.
Az általam végzett kutatás sikeresnek mondható a módszerek ismeretének és alkalmazásának szempontjából.

Összegzés

A munkám elkészítéséhez áttanulmányoztam a lineáris egyenletek, illetve lineáris egyenletrendszerek definícióját. Ezt követően a lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei kaptak főszerepet, ezek közül is a tanulók számára legismertebbek. Első fejezetem alapjául a 3 legismertebb megoldási metódus szolgált, melyekkel a tanulók általános iskolai tanulmányaik során megismerkednek. Ezek a következők: grafikus módszer, behelyettesítő módszer és egyenlő együtthatók módszere.
Példákon keresztül bemutattam a módszerek alkalmazását valamint vázlatpontokba foglaltam a módszerek algoritmusát.
A munkám során az általános iskolák tankönyveit vizsgáltam meg, hogy hogyan magyarázzák különböző szerzők az egyenletrendszerek megoldási módszereit, milyen példák segítségével teszik érthetőbbé a tanulók számára az algebrának ezen fontos témakörét.
Tanulmányoztam a felsőoktatásban ismertetett módszereket is, ezek közül a két legismertebbet, a Gauss-módszert és a Cramer-szabályt.
Kutatásom célja, hogy ismereteket szerezzek a módszerek elsajátításának hatékonyságáról. Továbbá a tanulók szempontjából felmérjem, melyik módszer számít a legkönnyebbnek és melyek a leggyakrabban vétett hibák az algoritmusok alkalmazásakor.

Irodalomjegyzék

[1] WETTL FERENC *Lineáris algebra.* Wettl Ferenc, BME TTK, 2011.

[2] БЕВЗ Г. П., БЕВЗ В. Г. *Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою.* К.: Зодіак-ЕКО, 2007. Переклад угорською мовою Є. Є. Ґулачі.-Львів: Світ, 2007.-304 с.:іл.

[3] МЕРЗЛЯК А. Г. *Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. угорською мовою.* А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. І. Й. Берегі, А. А. Буркуш. – Львів : Світ, 2015. – 256 с. : іл.

[4] МЕРЗЛЯК А. Г. *А лгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою* А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Я к ір ; пер. Ю. І. Кулін. - Львів : Світ, 2017. - 272 с. : іл

[5] БЕВЗ Г. П. *Алгебра: Підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою* Г. П. Бевз, В. Г. Бевз // Переклад угорською мовою А. А. Варга. – Львів : Світ, 2009. – 288 с. : іл.

[6] BÓDI BÉLA *Az algebra alapjai.* – 2010.

[7] РУСЬКА Р.В., АЛІЛУЙКО А.М., МАРТИНЮК О.М., НОВОСАД І.*Прикладна математика Частина І.* Навчальний посібник. Тернопіль. – 2020.- с.98

[8] О. С. ГРИЦЮК*Системи комп'ютерної математики як засіб формування математичної компетентності студентів у процесі навчання вищої математики* Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. Випуск 3/2019 (116)

Ábrák jegyzéke

Висновки

Для виконання роботи я вивчив визначення лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь. Згодом основну роль відіграли найвідоміші серед учнів методи розв'язування систем лінійних рівнянь.

Основою першого розділу є 3 найвідоміші вирішення проблеми, з якими учні знайомляться під час навчання у початковій школі. Це графічний метод, метод підстановки та метод рівних коефіцієнтів.

Я представила застосування методів на прикладах і розділила на пункти алгоритм вирішення різних методів.

Під час моєї роботи я розглянула підручники початкових класів, як різні автори пояснюють методи розв'язування системи рівнянь, якими прикладами автори намагаються зробити зрозумілішим для учнів цю важливу тему алгебри.

Досліджувала методи, які описані у вищих навчальних закладах, два найвідоміші з яких – метод Гауса та правило Крамера.

Мета дослідження – отримати інформацію про ефективність оволодіння методами. Крім того, з точки зору студентів, оцінити який метод є найпростішим і які помилки є найбільш поширеними при застосуванні алгоритмів.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1011109917

Дата перевірки:
09.05.2022 14:11:58 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2022 14:27:16 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Palinszky_Georgina

Кількість сторінок: 35 **Кількість слів:** 7651 **Кількість символів:** 38585 **Розмір файлу:** 922.39 KB **ID файлу:** 1011008905

4.73% Схожість

Найбільша схожість: 2.65% з Інтернет-джерелом (https://math.bme.hu/~wettl/okt/linalg/2011/00la.0.73.2.pdf)

4.73% Джерела з Інтернету 144 .... Сторінка 37

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи 5

Nyilatkozat

Alulírott,Palinszky Georgina, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.