ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ**

**Кафедра математики та інформатики**

Реєстраційний №___________

**Кваліфікаційна робота**

# Поверхні ІІ порядку в шкільному курсі математики

**Шера Томаш Золтанович**

Студент IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 10 від 27 жовтня 2021 року**

Науковий керівник: **Тилищак Олександр Андрійович**
**доктор фіз.-мат. наук, доцент,**
**професор кафедри математики та інформатики**

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**
**к. ф.-м. н**

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

**Кафедра математики та інформатики**

**Кваліфікаційна робота**

# Поверхні II порядку в шкільному курсі математики

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

**Шера Томаш золтаещвич**

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Тилищак Олександр Андрійович**

**доктор фіз.-мат. наук, доцент,**

**професор кафедри математики та інформатики**

Рецензент: **Тегза Антоніна Михайлівна**

**кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри теорії ймовірності і математичного аналізу ДВНЗ 《УжНУ》**

Берегове
2022

# Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

**II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Matematika és Informatika Tanszék**

# MÁSODRENDÜ FELÜLETEK A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKÁBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

**Készítette: ______Séra Tamás__________**

IV. évfolyamos hallgató

**Képzési program:** 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

**Témavezető:** Tilistyák Sándor

**a fizikai és matematikai tudományok doktora,**

**egyetemi docens, matematika-informatika professzor**

**Recenzens:** Tegza Antonyina

**A fizikai és matematikai tudományok kandidátusa,**

**Valószínűségelméleti és Matematikai Elemzés Tanszék docense,**

**Ungvári Nemzeti Egyetem**

Beregszász – 2022

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Ezt a diplomamunka témát azért választottam hogy mélyebb rálátást tudjak biztosítani a másodrendü felületek és mikéntjük lényegébe.Ebben a diplomamunkában átnézzük a másodrendü felületek alkotásának modszerét.És ezen kívül tipusaikat vagyis különböző fajtáik sajátosságait és különbségeiket. Valamint példafeladatokkal demonstráljuk a sajátosságaik különböző nyuánszait.

# 1. fejezet

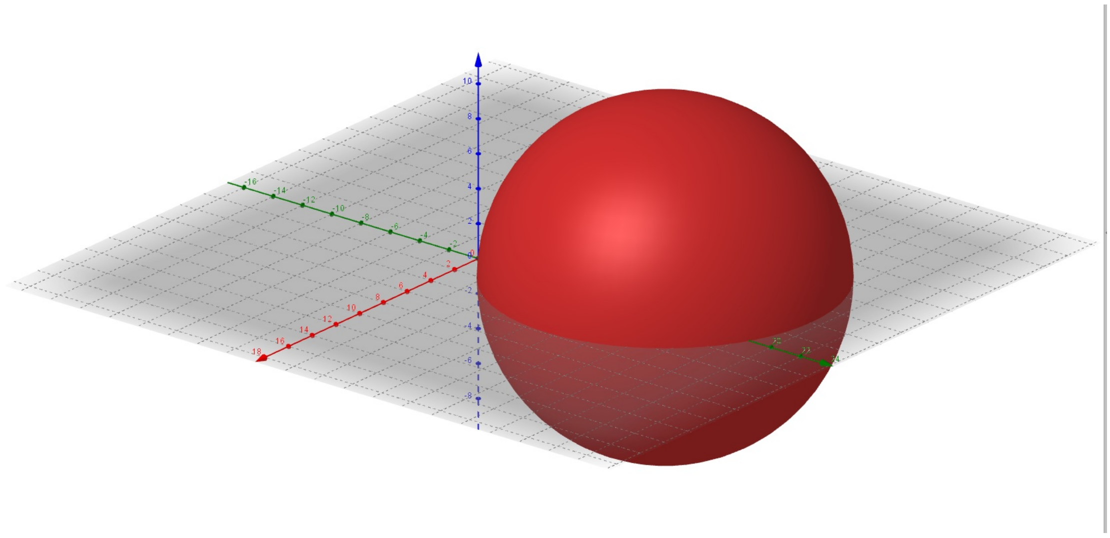
# Definiciok

A másodrendű felületek olyan felületek, amelyeknek a térbeli derékszögű koordinátarendszerben szereplő pontok kielégítik a másodrendű egyenletet.
$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0$
Ezeknek a felületeknek olyan tulajdonságuk van, hogy tetszőleges sík metszése következtében valamilyen kupszeletet fogunk kapni. A másodrendű felületek azok a felületek, amelyek lapos keresztmetszete másodrendű görbék. Vegyük figyelembe a másodrendű felületek különböző típusait.

# 2. fejezet

# Gömb

**1. Definició.** *A térben egy fix ponttól egyenlő távolságra lévő pontok helyét gömbnek nevezzük. Ezt a fix pontot a gömb középpontjának nevezzük. A gömb középpontját a gömbön lévő ponttal összekötő szakaszt a gömb sugarának nevezzük.*



2.1. ábra. Gömb

Vállasszunk egy tetszöleges $O(a, b, c)$ pontot és egy $R$ sugarat. Bármelyik $M(x, y, z)$ igaz az, hogy akkor és csakis akkor lessz a gömb felületi pontja ha

$$\left|\overline{OM}\right| = R \tag{2.1}$$

Ha átirjuk koordináta alakba a (2.1) egyenletünket akkor:
$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$
Ezutáni négyzetreemelés zárojelek felbontása és csoportosítás után kapjuk:
$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 + R^2 = 0$
Eggyenletünket melyen látszik hogy a (2.1)-es egyenletünk egy másodrendü felületet ir le. Vagyis a gömb egy másodrendü felület.

**1. Állítás.** *Az eggyenlet mely egy derékszögü(Descartes) koordinátarendszerben felirható:*

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + F = 0 \tag{2.2}$$

*egyenlet formájában az egy gömb felszinét irja le (ha egyáltalán leir valamilyen felszint vagyis ha van megoldása)*

A (2.2) egyenlet felirható mint:

$$(x + \frac{B}{2A})^2 + (y + \frac{C}{2A})^2 + (z + \frac{D}{2A})^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}. \tag{2.3}$$

Ezután ha megjelöljük az $R$-t mint:

$$R = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 + D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}}. \tag{2.4}$$

És ha ez az $R$ pozitív (valós) szám létezik és nem nulla ($R \neq 0$),akkor a (2.2) és a (2.3) egyenletek mindegyike egy gömböt ír le melynek középpontja a : $O(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A})$,pontban $R$ sugárral. Ha megfigyeljük a (2.3) egyenletünket ez a tetszöleges $M(x, y, z)$ pont és a $O(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A})$ pontok közötti távolság négyzetével eggyenlö. Ezen kívűl az eset mikoris az $R = 0$ akkor a (2.3) valamint a (2.2) egyenleteink is egyetlen pontot irnak le mivelis ebben az esetben csak az $O(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A})$ pont az egyetlen valós megoldás.

**1. Példák.** *1. Határozd meg a felszin tipusát*

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 5 = 0$

*csoportosítva a tagokat kiemelhetünk teljes négyzeteket evvel egyszerüsítve az egyenletünket*

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$

*Ezzel megkaptuk a* (2.3) *egyenletünket vagyis ez egy gömb* $O(2, 3, -1)$ *középponttal és* $R = 3$ *sugárral.*

*2. Felirni a tetraéder köré írt gömb egyenletét ha tudjuk hogy a tetraéder egyok csucsa egybeesik az origóval a másik három pedig:* $A(2, 0, 0)B(0, 5, 0)C(0, 0, 3)$ *koordinátákkal rendelkezik.*

*A keresett gömb egyenlete*

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2)$.

*Annak köszönhetöen hogy a gömb áthalad a tetraéder csucspontjain sorba behelyettesítjük öket az egyenletünkbe mivel mind megoldásai lesznek.És kapunk 4 egyenletet az ismeretlen* $a, b, c$ *és* $R$ *meghatározására*

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ (2 - a)^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + (5 - b)^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + b^2 + (3 - c)^2 = R^2 \end{cases}$$

*Ezen egyenletrendszerek megoldása után kapjuk:*

$a = 1, b = \frac{5}{2}, c = \frac{3}{2}, R^2 = \frac{38}{4}$

*3. Felirni a gömb egyenletét ha tudjuk hogy áthalad a* $(0, -3, 1)$ *ponton és metszi az* $OXY$ *síkot egy körben melynek egyenlete:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

*Ebből kifojolag e gömbnek a középpontja a $OZ$ tengely része vagyis a keresett eggyenletünk ilyen alakot fog ölteni:*

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2. \tag{2.6}$$

*Ezután megkeressük az ismeretlen $c$ és $R$ változoinkat. Ehez a (2.6) egyenletünket vizsgáljuk a $z = 0$ esetünkre vagyis megvizsgáljuk a gömbünk keresztmetszetét az $OXY$ síkkal*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

*Összerakva a rendszerünket a (2.5) rendszerrel kaphatjuk az összefüggést az $R$ ismeretlenünk és $c$ ismeretlenünk között:*

$R^2 = c^2 + 16$

*Ezek után átirhatjuk a (2.6) egyenletünket ilyen alakba:*

$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2 + 16$

*Ez már csak 1 változot tartalmaz amelyet meglelhetünk annak köszönhetöen hogy a gömb áthalad a $(0, -3, 1)$ ponton:*

$(-3)^2 + (1 - c)^2 = c^2 + 16,$

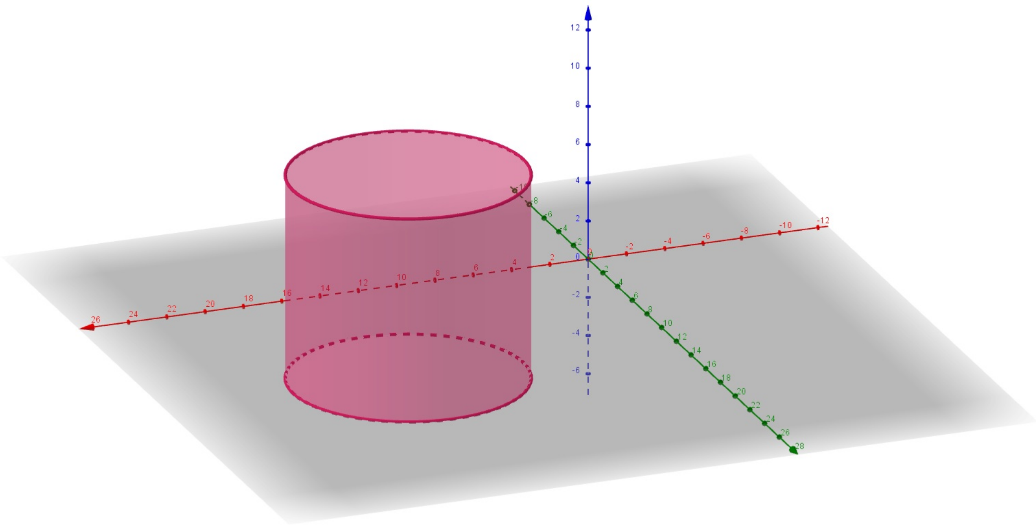
$c = -3.$ *vagyis megleltük a keresett gömb egyenletét:*

$x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$

# 3. fejezet

# Hengeres felület

**2. Definició.** *Hengeres felületek azok olyan felületek, amelyeket egy egyenes (alkotó) mozgása képez, amely a térben való mozgás során állandó irányt tart fenn (például párhuzamosan valamilyen $\vec{U}(l, m, n)$ vektorral). És minden alkalommal keresztez valamilyen rögzített $\gamma$ görbét amit még vezérgörbének is hívnak. Nyilvánvaló, hogy a $\gamma$ görbe nem tartozhat a generátorokkal párhuzamos síkhoz.*



3.1. ábra. Henger

Tekintsünk olyan hengeres felületeket, amelyek vezetői az egyik koordinátasíkban vannak, és a alkotók párhuzamosak az erre a síkra merőleges koordinátatengellyel.

**2. Állítás.** *Egy henger felület egyenletének megszerzéséhez, melynek útmutatását a következö egyenletek adják*

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

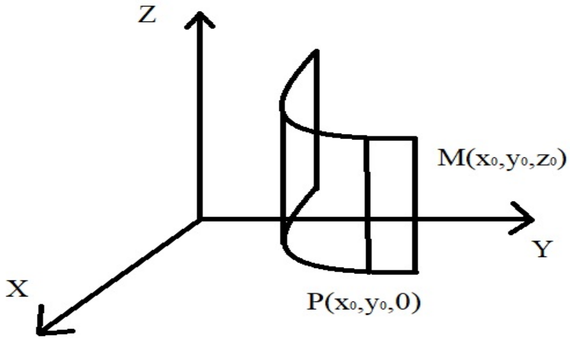
*és az egyenes vonalú alkotók párhuzamosak valamelyik koordinátatengellyel, akkor elegendő a* (3.1)*-ből kizárni azt a változót, amely annak a koordinátatengelynek felel meg, amellynek párhuzamosak a henger felület egyenes alkotói.*

Bizonyítsuk be, hogy egy olyan hengerfelület egyenletei, amelyek alkotói párhuzamosak az $OZ$ tengellyel, $f(x,y)=0$ alakúak lesznek, azaz nem fognak tartalmazni a $z$ koordinátát.

Legyen a $\gamma$ vezetö az ilyen hengerfelületnek része az $OXY$ síknak és a $(rajz1)$ -en szereplő egyenletekkel van megadva

$f(x,y)=0, z=0$

Bebizonyítjuk, hogy ezen egyenletek közül az elsőt egy adott hengerfelülethez tartozó tetszőleges $M(x_0,y_0,z_0)$ pont kielégiti. Vegyük a $P(x_0,y_0,0)$ pontot az $OXY$ síkon . Nyilvánvaló, hogy a $P$ pont ugyanahhoz a alkotóhoz tartozik, mint az $M$ pont. Ezért




3.2. ábra. Rajz 1

a $P$ pont koordinátái kielégítik az $f(x0, y0) = 0$ alkotó egyenletét. Ez az azonosság pedig azt jelenti, hogy az $M$ pont koordinátái kielégítik az $f(x, y) = 0$ egyenletet. Az állítás bebizonyosodott.

Ezért bármely hengeres felület egyenlete, amelynek alkotoi párhuzamosak az $OZ$ tengellyel, a következő alakot öltik:

$f(x, y) = 0$

Hasonlóképpen igazolható, hogy az OY vagy az OX tengellyel párhuzamos alkotokkal rendelkező hengeres felületek egyenletei a következő alakúak.

$f(x, z) = 0, f(z, y) = 0$

**2. Példák.** *1. Állítsd össze egy hengeres felület egyenletét, amelynek alkotoi párhuzamosak a következö egyenessel:*

$$x = y = z \tag{3.2}$$

*a vezető pedig egy egyenes mely:*

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

*Felírjuk az alkotó kanonikus egyenletét*

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} \tag{3.4}$$

*(az hogy $l = m = n = 1$ a (3.2)-es egyenletböl van véve).Megjelöljük öket*

$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1} = t$

*Innen kapjuk hogy:*

$x_0 = x - t,$

$y_0 = y - t,$

$z_0 = z - t,$

*Ezeket az értékeket behelyettesítve a* (3.3)*-ban (mivel a*$(x_0, y_0, z_0)$ *pont az vezetőhez tartozik) kapjuk:*

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

*és t kizárva azt találjuk*

$2y - 2z = 1$

*Ezért megkapjuk az adott vezetőn az* $x = y = z$ *egyenessel párhuzamosan átmenő sík egyenletét.*

2. *Állítsa össze a henger egyenletét, ha alkotoi párhuzamosak az* $U(1, 2, 3)$ *vektorral, és az vezetö a következő képpen van megadva*

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

*A alkotok kanonikus egyenletei a következőképpen irjuk fel:*

$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{3}$

*Megjelöljük az utolso egyenletet t vel és felirjuk*

$x_0 = x - t$

$y_0 = y - 2t$

$z_0 = z - 3t$

*Ezeket behelyettesítjük a* (3.4)*es egyenletrendszerünkbe és kapjuk*

$$\begin{cases} (y - 2t)^2 = 4(x - t) \\ z - 3t = 0 \end{cases}$$

*az utolso egyenletböl megkeressük a t-t:*

$t = \frac{z}{3}$

*Ha az első egyenletben t-t helyettesítünk, megkapjuk a hengeres felület egyenletét*

$(3y - 2z)^2 = 12(3x - z)$

## 3.1. Másodrendű hengerek

A hengeres felület nevét általában annak a görbének a nevétől függően adjuk meg, amelyen az egyenes vonalú alkotó felületekre merőleges sík metszi a hengeres felületet. Ha ezeknek a felületeknek az $XOY$ síkban elhelyezkedő másodrendű görbéit veszik vezérvonalakra, és az $OZ$ tengely irányát e hengerek generátorainak irányára, megkapjuk az ilyen hengeres felületek egyenletét.

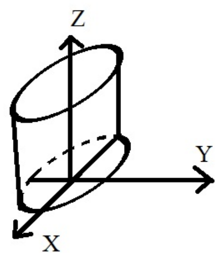
1. Elliptikus henger

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

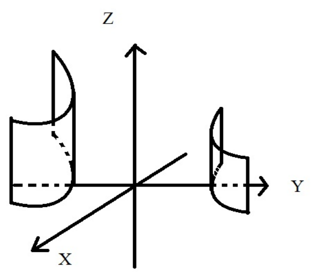
   A henger tengelye az OZ tengely lesz (2. rajz) Az elliptikus henger speciális esete egy körhenger, amelynek egyenlete a következő:

   $x^2 + y^2 = R^2$

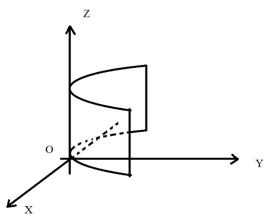
   (ha tengelye az $OZ$ tengely) vagy a $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$egyenlet. Ennek a




(a) rajz 2




(b) rajz 3




(c) rajz 4

   hengernek a tengelye az $OZ$ tengellyel párhuzamos egyenes

   $x = a, y = b$

2. Hiperbolikus henger

   $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

   A henger tengelye az $OZ$ tengely lesz (3. rajz).

3. Parabolikus henger (4. rajz).

   Mindezeket a felületeket másodrendű hengereknek nevezzük, mert az $x, y, z$ koordinátákhoz képest másodfokú egyenletek írják le őket.

## 3.2. Bomló felületek

Ha egy $F(x, y, z)$ másodfokú polinom két elsőfokú polinom szorzata

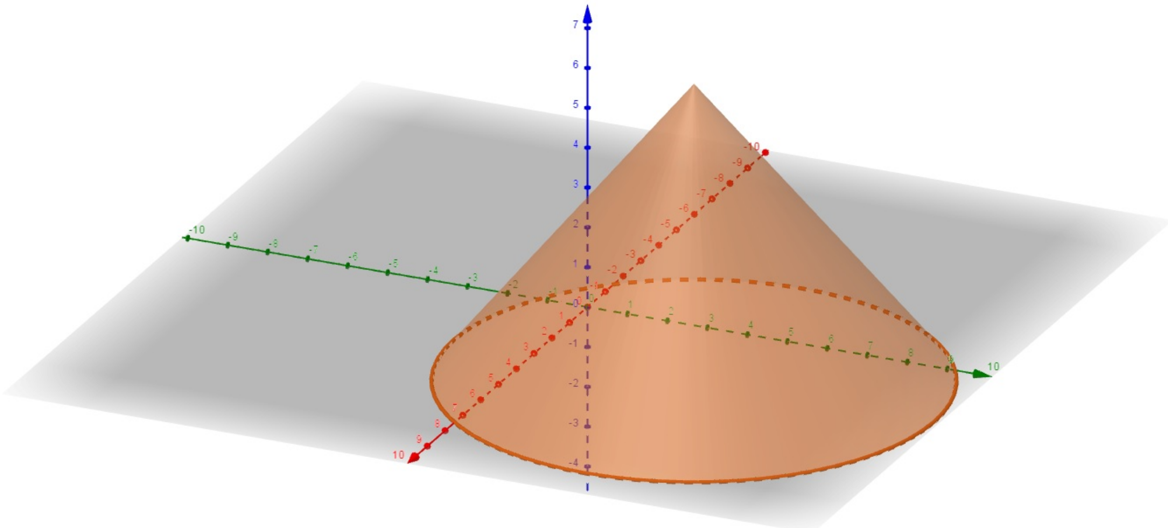
$F(x, y, z) \equiv (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$,

akkor az $F(x, y, z) = 0$ felület $\prod_1$ és $\prod_2$ síkpárra hasad:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

# 4. fejezet

# Kúpos felületek



4.1. ábra. Kúp

**3. Definició.** *Tegyük fel, hogy adott $I$ fix pont és $\gamma$ görbe. A $\gamma$ egyenest keresztező és* *egy $I$ ponton átmenő egyenes folytonos mozgásával kialakított felületet kúpos felületnek, a $I$ pontot és az $\gamma$ egyenest a kúpos felület csúcsának és vezetőjének nevezzük. A kúpos felület egyenletének összeállításához olyan derékszögű koordinátarendszert választunk, hogy a kúpos felület vezetőjét ebben a koordinátarendszerben a következő egyenletrendszer határozza meg:*

$$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0 \tag{4.1}$$

Legyen a $I$ csúcsnak $a, b, c$ koordinátái. A $I$ pontba írjuk fel a középpontú egyenesek kapcsolódási egyenletét

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \tag{4.2}$$

ahol $l, m, n$ a kötés vezetővektorának koordinátái. $l, m, n$ egyszerre nem egyenlő nullával, ezért behelyesthetünk $n = 1$-et. Válassza ki a (4.2) vonalak közül azokat, amelyek metszik a görbét (. Ahhoz, hogy a (4.2) egyenesek metsszék a $\gamma$ -át, szükséges és elegendő, hogy a $(4.1), (4.2)$ egyenletrendszer kompatibilis legyen. A $(4.1), (4.2)$egyenletekből meghatározva $x, y, z$-t, behelyettesítve a negyedikbe (4.2) kapjuk

$$\varphi(l, m) = 0 \tag{4.3}$$

A (4.3) reláció az $I$ ponton átmenő összes egyenes közül választ (azokat az egyeneseket, amelyek metszik $\gamma$-t, azaz alkotják a kúpos felületünket. Egy kúpos felület egyenletének összeállításához elegendő a (4.2) ből $l$ és $m$-t $x, y, z$-n keresztül keresni, és behelyettesíteni a (4.3)-ban.
A $I$ pontban csúcsos kúpos felület egyenlete homogén $x-a, y-b, z-c$ vonatkozásában. Ez a tulajdonság a kúpos felületek egyenleteire jellemző.

**4. Definició.** *Az $F(x, y, z)$ függvényt homogén függvénynek nevezzük a $K$ fokú változók $(x, y, z)$ vonatkozásában, ha teljesíti a következő feltételt:*
$F(tx, ty, tz) = t^k * F(x, y, z)$

Van egy ilyen tételünk

**1. Tétel.** *Bármely homogén egyenlet az $x-a, y-b, z-c$ változókra, ha valós felületet ír le, egy kúpos felület egyenlete, amelynek csúcsa $I(a, b, c)$ pontban van.*

Ha egy kúpos felület egyenlete másodrendű egyenlet, akkor az ilyen felületet másodrendű kúpos felületnek nevezzük, amelynek csúcsa $\rho(a, b, c)$. Írjunk egy általános képet a másodrendű kúpos felület egyenletéről:

$a_{11}(x-a)^2+a_{22}(y-b)^2+a_{33}(z-c)^2+2a_{12}(x-a)(y-b)+2a_{13}(x-a)(z-c)+$
$2a_{23}(y-b)(z-c)=0$

**3. Példák.** *1. Állítsa össze a kúp egyenletét az origó csúcsával és a következő alkotóval:*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases} \tag{4.4}$$

*Ebben a példában az $I$ pont koordinátái$(0,0,0)$, a $\gamma$ vezető pedig egy ellipszis. A kúp $(0,0,0)$ csúcsán áthaladó alkotók kanonikus egyenletei így fognak kinézni (lásd (4.2)):*

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{c}{n} \tag{4.5}$$

*Kizárjuk az $x, y, z$ -et ezekből az egyenletekből és Innen kapjuk:*

$x=\frac{l}{n}c, y=\frac{m}{n}c$

*Ha behelyettesítjük $x$-et és $y$-t az első (4.4) egyenletben, a következőt kapjuk:*

$\frac{c^2}{a^2}*\frac{l^2}{n^2}+\frac{c^2}{b^2}*\frac{m^2}{n^2}=1$

*Tekintettel arra, hogy $\frac{l}{n}=\frac{x}{z}, \frac{m}{n}=\frac{y}{z}$ (lásd (4.5)), végül megkapjuk az egyenletét a kívánt kúpnak*

$\frac{c^2}{a^2}*\frac{x^2}{z^2}+\frac{c^2}{b^2}*\frac{y^2}{z^2}=1$

*vagy*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

*Az $a=b$ esetén a kúpos felület vezetője egy kör lesz, és egy körkúpot kapunk.*

*2. Állítsa össze egy kúp egyenletét, ha a csúcsának koordinátái adottak $I(0;-a;0)$ és a vezető egyenlete*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y+z=a \end{cases} \tag{4.6}$$

*A (4.2) miatt a alkotók kanonikus egyenletei a következő alakúak:*

$$\frac{x}{l}=\frac{y+a}{m}=\frac{z}{n} \tag{4.7}$$

*Meghatározzuk az x, y, z értékeket az l, m, n -eken keresztül. Az utolsó (4.6) egyenletből*

$z=a-y$

*Akkor* $\frac{y+a}{m}=\frac{a-y}{n}$*,vagy* $y=a\frac{m-n}{m+n}$

*A* (4.7)*-ből azt találjuk*

$\frac{x}{l} = \frac{y+a}{m}, x = 2a * \frac{l}{m+n}, z = 2a * \frac{n}{m+n}$

*A kapott* $x, y, z$ *kifejezéseket behelyettesítjük az első* (4.6) *egyenletbe.*

$4a^2\frac{l^2}{(m+n)^2} + a^2\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} + 4a^2\frac{n^2}{(m+n)^2} = a^2$

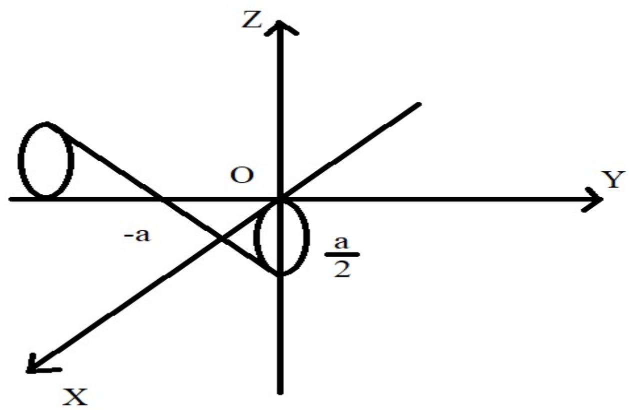
*vagy átirva*

$l^2 - mn + n^2 = 0$

*Ebben az egyenletben* $l, m, n$*(a* (4.7)*-böl) helyett a kifejezéseiket* $x, y, z$*-be írjuk át. Ennek eredményeként a következő kúpegyenletet kapjuk:*

$x^2 + z^2 = (y + a)z$

*Az 5. rajz ezt a kúpot mutatja.*



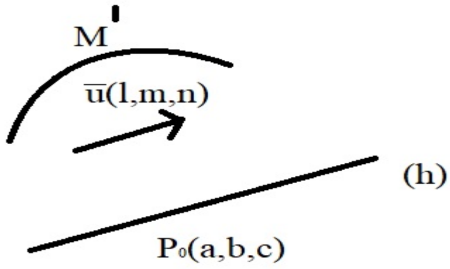

4.2. ábra. Kúp

# 5. fejezet

# Forgástestek

**5. Definició.** *Tegyük fel, hogy adott egy h egyenes és egy tetszőleges* $\gamma$ *görbe. A h* $\gamma$ *körüli forgás által alkotott felületet forgásfelületnek nevezzük. A h egyenest a forgásfelület tengelyének, a* $\gamma$ *görbét - a forgás alkotó felületének nevezzük (6. rajz).*

Válasszunk egy derékszögű descartes koordináta-rendszert. Tegyük fel, hogy eb-




5.1. ábra. Rajz.6

ben a koordinátarendszerben a $\gamma$görbét a következő egyenletrendszer adja (mint két felület metszéspontjaként):

$$F_1(x, y, z) = 0F_2(x, y, z) = 0 \tag{5.1}$$

Adja meg a h tengelyt a kanonikus egyenlet mint
$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$
ahol $\vec{U}(l, m, n)$ a $h$ tengely vezetővektora, $a, b, c$ a $h$ tengelyhez tartozó tetszőleges $P_0$ pont koordinátái. A $\gamma$ görbe minden pontja egy olyan kört ír le, amelynek középpontja a $h$ tengelyen van, síkja pedig merőleges a $h$ tengelyre.
A forgás felülete a következőképpen is meghatározható: a forgásfelület azon körök geometriai helye, amelyek síkjai merőlegesek a forgástengelyre, a középpontok a tengelyen helyezkednek el, ezek a körök mindegyike metszi a $\gamma$ egyenest.
Határozzuk hát meg a forgásfelület egyenletét! Ehhez felírjuk az összes olyan kör egyenletét, amelyek síkjai merőlegesek a $h$ egyenesre, és középpontja $h$-n van. Nyilvánvalóan az egyenleteik a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ bx + my + nz - q = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Ezekből a körökből választjuk ki azokat, amelyek metszik $\gamma$-t, vagyis azokat, amelyek a forgásfelületet alkotják. Ahhoz, hogy (5.4) metszi (5.1), szükséges és elégséges, hogy (5.2) és (5.1) kompatibilisek legyenek. Hadd

$$f(R, q) = 0 \tag{5.3}$$

legyen két rendszer kompatibilitásának feltétele. Nyilvánvalóan a kívánt forgási felület egyenletének megszerzéséhez elegendő az (5.3)-ban $R$ és $q$ helyett az értékeiket az (5.2)-ből helyettesíteni.

$$f(\pm\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, lx + my + nz) = 0 \tag{5.4}$$

Ez a forgásfelület egyenlete. Az $\vec{U}(l, m, n)$ tengely irányvektora egy $P_0(a, b, c)$ koordinátájú pont - a tengely valamely pontja.

**4. Példák.** *1. Állítsa össze annak a felületnek az egyenletét, amely az $x-1=y-1=z$ egyenes $OZ$ tengely körüli elforgatása következtében keletkezik!*

*Az adott egyenes nem metszi és nem lesz párhuzamos $OZ$-val, a $P_0$ pont koordinátái a következők: $P_0(0, 0, 0)$. A tengely irányvektora $\vec{U}(0, 0, 1)$. Írjuk fel az összes olyan kör egyenletét, amelyek síkjai merőlegesek $OZ$-ra, és középpontja $OZ$-n van:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = q \end{cases} \tag{5.5}$$

*ahol $R$ a gömb sugara. Ebből a rendszerből és az egyenes adott egyenletéből kapjuk a $(f(R, q) = 0)$*

$z = q, x = 1 + q, y = q - 1$

$(1 + q)^2 + (q - 1)^2 + q^2 - R^2 = 0$

*Ezt továbbá leegyszerűsítve a következőt kapjuk:*

$3q^2 - R^2 + 2 = 0$

*A felületi egyenlet megtalálásához az (5.5) rendszer kifejezéseit beszúrjuk az utolsó egyenletbe. És ez jön ki:*

$3z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2 = 0$

*vagy másképp*

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 0$

*ez egy együregű rotációs hiperboloid.*

*2. Az $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ egyenes az $OX$ tengelye körül forog. Keresse meg az általa leírt felület egyenletét!*

*A megadott egyenes a $P_0(2, 0, 0)$ pontban metszi az $OX$ tengelyt. Ebből következik, hogy a kívánt felület egy kúp, amelynek ezen a ponton van egy csúcsa. Keressük meg a kúp egyenletét! Az $OX$ tengely irányított vektora az $\vec{U}(1, 0, 0)$. Az (5.2) alapján egyenlete a következő formában jelenik meg:*

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x = q \end{cases} \tag{5.6}$$

*Ebből a rendszerből és az adott egyenes egyenletéből kapjuk*

$\frac{q-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$

*innen:*

$y = \frac{2(q-2)}{3}, z = 2q - 4$

*Helyettesítsük be a kapott* $y, z$ *értékeit az* (5.6)*rendszerbe:*

$(q-2)^2 + \frac{4}{9}(q-2)^2 + 2(q-2)^2 = R^2$

*Egyszerüsítve kapjuk:*

$49q^2 - 196q + 196 = 9R^2$

*A* $q$ *és* $R$ *értékét behelyettesítve* (5.6)*-al a kúpegyenlethez jutunk:*

$40(x-2)^2 + 9y^2 - 9z^2 = 0$

A forgási felületnek a forgástengelyen áthaladó sík keresztmetszetét meridiánnak nevezzük. Azokat az egyeneseket, amelyeket akkor kapunk, amikor a forgásfelület a forgástengelyre merőleges síkokkal metszi, párhuzamosnak nevezzük. (Ezek körök lesznek.)

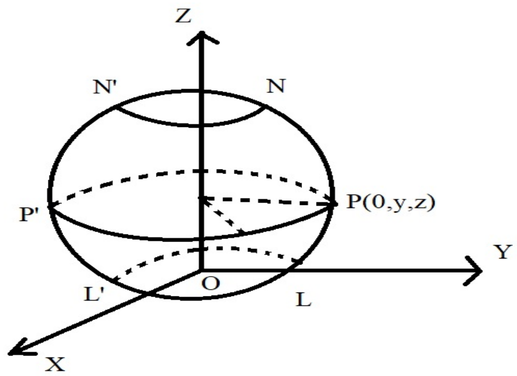
## 5.1. Felületek melyek a $\gamma$ alkotó forgatásával képzünk, miközben egy síkban helyezkedik a $h$ forgatási tengelyel

Válasszunk egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a forgásfelület tengelye egybeessen az OZ tengellyel. A $\gamma$ görbe az $OYZ$ félsíkban van elhelyezve, ahol $y > 0$. Ennek a görbének az egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

A 7. rajzon ez volt az $LN$ görbe. Az $OZ$ tengely körül forogva a görbe $LL'N'N$ felületet képez. Vegyünk az $LN$ görbén egy tetszőleges $P(0, y_0, z_0)$ pontot, amely az $OZ$ tengely körüli forgatáskor egy $PP'$ kört ír le, amely az $OZ$ tengelyre merőleges $z = z_0$ síkban fekszik, és ennek a tengelynek a középpontja a pont $K$ és sugár $R = y_0$. Ezen feltételek miatt egy ilyen kör egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = y_0^2 \\ z = z_0 \end{cases} \tag{5.8}$$




5.2. ábra. Rajz.7

Ezt egy tetszőleges, ezen a körön fekvő $M(x, y, z)$ pont elégíti ki. A $P$ pont koordinátái kielégítik az $LN$ görbe egyenletét

$$f(y_0, z_0) = 0 \tag{5.9}$$

Az (5.8), (5.9) egyenletekből kizárva a $P$ pont $y_0, z_0$ koordinátáit, a következő egyenlethez jutunk

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{5.10}$$

Mely a keresett forgásfelület egyenlete, mert ennek a felületnek bármely tetszöleges $M$ pont koordinátái kielégitik.

Megjegyzendő, hogy a görbe (5.7) egyenlete és az általa alkotott forgásfelület (5.10) egyenlete között nagyon egyszerű a kapcsolat: a $z$ koordinátát (azaz a forgástengely koordinátája) változatlanul hagyjuk, és az $y$ koordinátát (azaz az $f(y, z) = 0$ egyenlet második koordinátáját) a következőre cseréljük $\sqrt{x^2 + y^2}$

Ez a szabály általános karakterisztikákkal rendelkezik. Ugyanis, ha meg lenne adva egy $OXY$ síkban fekvő görbe, annak egyenleteit $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

és meg kellene találni az OY tengely körüli elforgatásával alkotott felület egyenletét, akkor ez az egyenlet így nézne ki:

$$f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0 \tag{5.11}$$

A fentiek mindegyikének hasznos következménye az a tulajdonság, amely azonnal megkülönbözteti bármely forgásfelület felületi egyenletét, amelynek tengelye az egyik koordinátatengely: a három koordináta közül kettő csak úgy szerepel egy ilyen felület egyenletében, mint négyzetük összege; a forgástengely az a tengely, amelynek koordinátája külön szerepel az egyenletben; például az $y^2 + z^2 = 4x$ egyenlet annak a forgásfelületnek az egyenlete, amelynek tengelye az $OX$.

# 6. fejezet

# Másodrendű forgásfelületek

Határozzuk meg a másodrendű görbék szimmetriatengelyük körüli elforgatásával alkotott felületek egyenleteit! A forgástengelyt $OZ$ tengelynek vesszük, a görbék a $OYZ$ síkban helyezkednek el. A felületi egyenletet az (5.11) szerint találjuk.

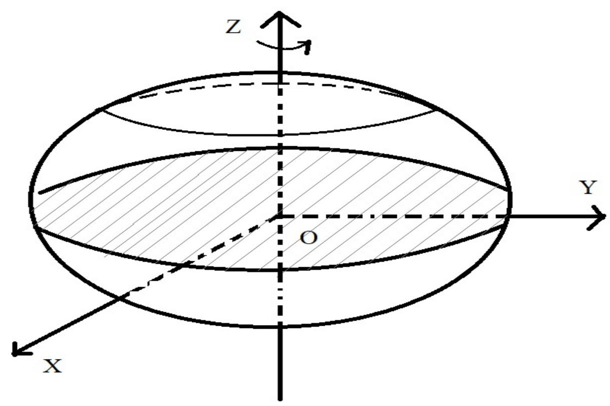
## 6.1. Ellipszoid forgása

Rendezzük el az ellipszist az 8 rajzon látható módon.

Ennek az ellipszisnek az egyenlete a $OYZ$ síkban a következő lesz

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6.1}$$

Ezt az ellipszist az OZ tengely körül elforgatva egy felületet kapunk, amelynek egyen-




6.1. ábra. Rajz.8

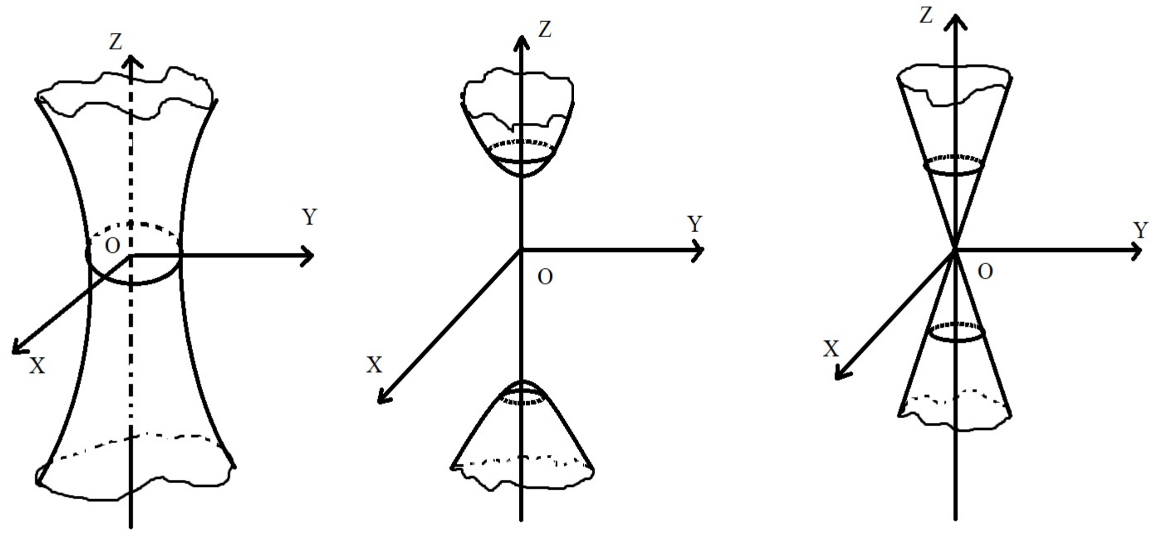
lete a következő:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6.2}$$

Ezt a felületet forgásellipszoidnak nevezzük.

## 6.2. Hiperboloid forgása

Vegyünk az $OYZ$ síkban két konjugált hiperbolát, amelyek tengelye az $OZ$ tengely:
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Az $OZ$ tengely körül elforgatva a következő két forgásfelülethez jutunk:
$\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Ezek közül az elsőt együregű rotációs hiperboloidnak nevezik. Az OZ tengely körül ezeknek a hiperboláknak a közös aszimptotapárját elforgatva egy forgáskúpot kapunk (9. rajz). Mivel az aszimptotapár egyenlete lesz az egyenlet: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

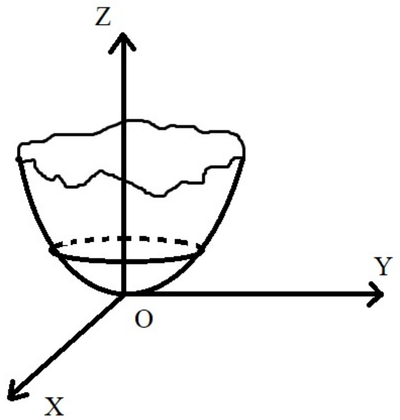



6.2. ábra. Rajz.9

ezért a forgáskúp egyenlete a következő formában írható fel
$\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
Ezt a kúpot mindkét hiperboloid aszimptotikus kúpjának nevezik.

## 6.3. Paraboloid forgatása

A $OYZ$ síkban fekvő parabola egyenlete, melynek tengelye az $OZ$ tengely, a következő lesz az egyenlet
$y^2 = 2qz$
Ezt a parabolát az OZ tengely körül elforgatva egy forgási paraboloidot kapunk (10. rajz), melynek egyenlete a következőképpen írható fel:
$x^2 + y^2 = 2qz$




6.3. ábra. Rajz.10

**5. Példák.**

1. Állítsa össze a görbe elforgatásával képzett felület egyenletét, $z = x^2, y = 0$ a) az $OZ$ tengely körül; b) az $OX$ tengely körül.

   Használjuk a fenti szabályt. Ebben a példában a görbe általános egyenlete a következőképpen van felírva:

   $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

   a). A görbe az $OZ$ tengely körül forog. Ezért az egyenlet szabálya miatt az eredményül kapott felület alakja a következő:

   $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

   vagyis

   $\sqrt{z^2 + y^2} = x^2$

2. Állítsd össze a felületi egyenletet, amely a $z = e^{-x^2}, y = 0$ görbe elforgatásával képzett az $OZ$ tengely körül.

   A görbe általános egyenletét írjuk fel

   $\begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

   Ekkor az adott forgásfelület kívánt egyenlete így fog kinézni:

   $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

   vagyis

   $z = e^{-(\sqrt{x^2+y^2})^2}$

   egyszerüsítés után

   $z = e^{-(x^2+y^2)}$

# 7. fejezet

# A másodrendű felületek kanonikus egyenletei

Az előző részben általunk vizsgált másodrendű felületek, amelyek keresztmetszetében a forgástengelyre merőleges síkok körök, olyan másodrendű felületek részleges esetei, amelyek keresztmetszetében a megfelelő síkok nem. körök, hanem ellipszisek.

1. Elipszoid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{7.1}$$
2. Együreges hiperboloid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{7.2}$$
3. Kétüreges hiperboloid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{7.3}$$
4. Kúp:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{7.4}$$
5. Eliptikus hiperboloid:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{7.5}$$

Ezeknek a felületeknek az általános megjelenését a $7, 10, 11$ rajz mutatja. Vegyük észre, hogy a gömb nem lesz a tizedik másodrendű felület, mert a kör az egy ellipszoid részesete.

# 8. fejezet

# Hiperbolikus paraboloid

Tegyük fel, hogy van két $\gamma_1$ és $\gamma_2$ parabolánk, amelyek síkjai merőlegesek, tengelyei pedig ellentétes irányúak. Ha a $\gamma_2$ görbét úgy mozgatjuk a térben, hogy a $\gamma_2$ görbe csúcsa egy rögzített $\gamma_1$ parabolán csúszik, és a $\gamma_2$ sík párhuzamos marad a kiindulási helyzetének síkjával, akkor a leírandó felületet hiperbolikusnak paraboloidnak nevezzük.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$
Válasszunk egy derékszögű descartes koordinátarendszert a következőképpen: az $OZ$ tengelyt úgy helyezzük el, hogy egybeessen az $\gamma_1$ szimmetriatengellyével. Legyen az OX tengely érintője egy rögzített parabolának a csúcsán. Legyen az így kiválasztott koordinátarendszerben az $\gamma_1$ egyenlet alakja

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

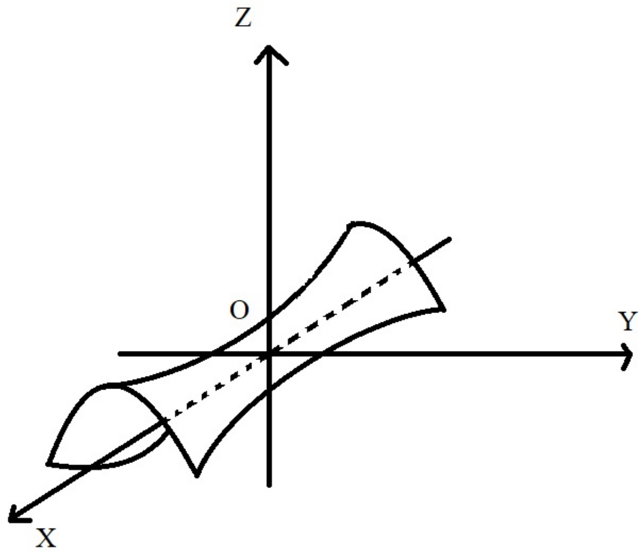
Felírjuk az összes olyan parabola egyenletét, amelyek síkjai merőlegesek az $OXZ$ síkra, a csúcsok az $OXZ$ koordinátasíkban vannak és a megnyúlásuk ellentétes az $OZ$ pozitív iránnyal. Az ilyen parabolák egyenletei a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{cases} y^2 = 2q(h - z) \\ x = d \end{cases} \tag{8.2}$$

Ha a $h$ és $d$ paramétereket egymástól függetlenül változtatjuk, akkor a parabolák csúcsainak koordinátái $P(d, 0, h)$ képpen fognak változni, mivel ezeknek a parabolák a csúcsainak egy rögzített parabolán kell feküdniük, ezért

$$d^2 = 2ph \tag{8.3}$$

Ez az egyenlőség lehetővé teszi, hogy az összes parabolából (8.2) kiválasszuk azokat, és csak azokat, amelyek a felszínünkön helyezkednek el. Ahhoz, hogy a hiperbolikus paraboloid egyenletét megkapjuk, elegendő a (8.3)-ban d és h helyett a kifejezéseiket $x, y, z$ kifejezésekkel helyettesíteni a (8.2)-ben. Ezt követően a következőket kapjuk:
$x^2 = 2p(\frac{y^2}{q} + z)$
Ez az egyenlet a következőképpen írható át:
$\frac{x^2}{p} - 2\frac{y^2}{q} = 2z$
És ez lesz a hiperbolikus paraboloid egyenlete (11. rajz).




8.1. ábra. Rajz.11

# 9. fejezet

# A másodrendű felületi egyenletek kanonikus alakra hozása

Bizonyítható, hogy az előző pontokban említett másodrendű felülettípusokon kívül nincs más felülettípus. A legáltalánosabb másodrendű felületi egyenlet a következő:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \quad (9.1)$$

Ha ez az egyenlet nem tartalmaz kifejezéseket a koordináták szorzatával, azaz a következő alakja van

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \quad (9.2)$$

majd a $x, y, z$ tagokat külön-külön kiegészítve teljess négyzetekké a (8.2) egyenletet olyan alakra hozható, amelyben könnyen meghatározható a felület típusa és ez a felület megépíthető.

**6. Példák.**

1. Határozza meg a felületek típusát:
   $4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 16x + 18y - 18z + 34 = 0$
   Ha kiegészítjük a $x, y, z$ tagokat teljes négyzetekké az egyenletünk ily modon fog módosulni
   $4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 - 9(z+1)^2 = -36$
   Ha ezt az egyenletet elosztjuk a szabad taggal, a következőt kapjuk:
   $\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$ Ez pedig egy együregű forgáshiperboloid egyenlete lesz, amelynek középpontja az $O'(2, 1, -1)$ pontban van, és a forgástengely párhuzamos az $OX$ tengellyel.

2. Határozza meg a felületek típusát:
   $3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0$
   Ezt az egyenletet a következő alakra hozzuk
   $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{15} - \frac{x^2}{10} = -1$
   Van egy kétüregű hiperboloidunk (triaxiális). Az $OX$ tengely mentén irányított és értéke $\sqrt{10}$, az egyik keresztirányú tengely értéke $\sqrt{6}$ és az $OY$ tengely mentén halad, a másik $\sqrt{15}$ és az $OZ$ tengely mentén van irányítva.

3. Határozza meg, melyik felület írja le az egyenletet!
   $16x^2 + 3y^2 + 16z^2 - 48 = 0$
   Ezt az egyenletet a következő alakra hozhatjuk
   $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{3} = 1$
   Vagyis a felületünk egy forgáselipszoid

$a = c = \sqrt{3}, b = 4$

A forgatás tengelye az $OY$

4. Határozza meg a felületek típusát:

   $x^2 - 6x + 4y^2 + 9z^2 + 36z - 99 = 0$

   Kiegészítjük az x,y,z tagokat teljes négyzet alakura és kapjuk

   $(x-3)^2 + 4y^2 + 9(z+2)^2 = 144$

   vagy másképp

   $\frac{(x-3)^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{(z+2)^2}{16} = 1$

   Megvan az $a = 12.b = 6, c = 4$ tengelyű triaxiális ellipszoid egyenlete; középpontja a $(3, 0, -2)$ pontban van, a tengelyek párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

5. Határozd meg a felület kinézetét

   $x^2 + 4x - y + z = 0$

   Az x et tartalmazó tagok teljes négyzetre hozása után kapjuk

   $$(x+2)^2 = y - z + 4 \tag{9.3}$$

   Ez egy parabolikus henger egyenlete. Győződjünk meg erről.Forgassa el az $OY$ és $OZ$ tengelyeket a síkjaiban az óramutató járásával megegyező 45°-os szögben a $OX$tengelyhez képest. Jelöljük az új koordinátákat $y'$ és $z'$-vel. Írjunk fel a képleteket a tengelyek elforgatására:

   $y = y'cos(-45°) - z'sin(-45°) = \frac{y'+z'}{\sqrt{2}}$

   $z = y'sin(-45°) + z'cos(-45°) = -\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}$

   Figyelembe véve a tengelyek forgatását a (9.3) a következő alakú lessz

   $(x+2)^2 = \sqrt{2}(y' + 2\sqrt{2})$

   ami bizonyítja kiinduló állításunkat, miszerint a henger alkotói párhuzamosak az új $OZ'$ tengellyel.

Tekintsük a másodrendű felületet általános alakjára (9.1).

A feladat az, hogy ezt az egyenletet a legegyszerűbb (kanonikus) alakra redukáljuk. A térbeli koordináta-rendszer többféleképpen választható meg; minden ilyen koordinátarendszert az O pont - az origó és a lineárisan független vektorok rendezett triója határozza meg. A különböző koordinátarendszerekben lévő különböző koordinátakészletek ugyanahhoz a térbeli ponthoz illeszthetők (ha megváltoztatjuk a koordiná-

tarendszert, a pont koordinátái is megváltoznak). Ha a kezdeti (régi) koordinátarendszert egy speciálisan kiválasztott (új) koordinátarendszerre cseréljük, a (9.1) egyenlet más formát ölt. A (9.1) egyenletet az egyszerűsítés érdekében átalakítjuk.
Szóval a feladatunk abban fekszik hogy leegyszerüsítsük a (9.1) egyenletünket egy szerencsésen megválasztott koordinátarendszer áráért. Ehhez tudni kell, hogy a pont új és régi koordinátái hogyan kapcsolódnak egymáshoz, és hogyan változik a (9.1) egyenlet a koordinátarendszer megváltoztatásakor. Vegyük észre, hogy a (9.1) egyenlet transzformációja szorosan összefügg a másodfokú formák transzformációjával.

**6. Definició.** *A numerikus függvény mely*

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum a_{ij} x_i x_j, ij = 1, 2, 3 \tag{9.4}$$

*formában van felirva ahol* $a_{ij}$ *olyan számok, hogy* $a_{ij} = a_{ji}$*, másodfokú formájának nevezzük a megfelelő numerikus fügvénynek*

Ezért a (9.1) egyenlet idősebb tagjai valamilyen másodfokú formát határoznak meg (például (4.4)).

# Összegzés

Saját véleményem szerint ezt a szakdolgozatom célját teljesítettem vagyis sikerült mélyebb betekintést biztosítanom ebbe a varázslatos világba mely a másodrenü görbéknek a sajátosságairol mesél nekünk. A munka befejezett de lehetséggel lehetne fojtatni vagy ujradefiniálni (felfrisíteni).A munka menetét élveztem a kellendő segédanyagok kutatása felkeresése izgalommal és kalandvágyal teli utazást biztosított számomra

# Felhasznált irodalom

Privalov I. I. Analitikus geometria / I. I. Privalov. - M. : Nauka, 1964.

Pogorelov A. B. Geometria / A. B. Pogorelov. - ?. : Nauka, 1984.

Matematikai feladatgyűjtemény egyetemek számára, I. rész. / V. A. Bolgov, B. P. Demidovich [és mások] - M. : Nauka, 1981.

Manturov O. ?. Felsőfokú matematika szak. Ch. ? / Manturov O. V., Matvejev N. M. - M. : Középiskola, 1986.

Kurosh A. G. Kurzus a magasabb algebrából / A. G. Kurosh. - M. : Nauka, 1971.

# Ábrák jegyzéke

# Резюме

На мою думку, я досяг мети моєї дисертації, тобто зумів глибше проникнути в цей чарівний світ, який розповідає про особливості вторинних кривих. Робота завершена, але може бути продовжиною чи оновленою або переозначеною. Мені сподобався процес роботи з пошуку необхідних ресурсів, щоб забезпечити мені подорож, повну хвилювання та пригод світа поверхонь другого порядку

UNICHECK

**Ім'я користувача:**
**Моца Андрій Андрійович**

**Дата перевірки:**
**09.05.2022 14:11:48 EEST**

**Дата звіту:**
**09.05.2022 15:44:29 EEST**

**ID перевірки:**
**1011109921**

**Тип перевірки:**
**Doc vs Internet**

**ID користувача:**
**100006701**

---

**Назва документа:** **Séra_Tamás**

**Кількість сторінок:** **31** **Кількість слів:** **5342** **Кількість символів:** **31986** **Розмір файлу:** **1.07 MB** **ID файлу:** **1011008893**

---

# 5.97%
# Схожість

**Найбільша схожість:** **4.46%** з Інтернет-джерелом (http://dspace.univer.kharkov.ua/bitstream/123456789/8957/5/Analit_g...

**5.97% Джерела з Інтернету** | **86** ..................... **Сторінка** 33

**Пошук збігів з Бібліотекою не проводився**

# 0% Цитат

**Вилучення цитат вимкнене**

**Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене**

# 0%
# Вилучень

**Немає вилучених джерел**

# Модифікації

**Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.**

**Замінені символи** | **14**

**Nyilatkozat**

Alulírott, Séra Tamás, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.