ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Методи розв'язування шкільних олімпіадах задач на стратегії

Занік Патрик Валерійович

Студент IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 10 від 27 жовтня 2021 року**

Науковий керівник: **Тилищак Олександр Андрійович**

доктор фізико-математичних наук, професор

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Методи розв’язування шкільних олімпіадах задач на стратегії

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студент ІV-го курсу

Занік Патрик Валерійович

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Тилищак Олександр Андрійович**

доктор фізико-математичних наук, професор

Рецензент: **Тегза Антоніна Михайлівна**

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри теорії ймовірності і математичного аналізу ДВНЗ «УжНУ»

Берегове
2022

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

AZ ISKOLAI STRATÉGIAI VERSENYFELADATOK MEGOLDÁSÁNAK MÓDSZEREI

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Zányik Patrik

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Tilistyák Sándor

a fizika és matematika tudományok doktora, professzor

Recenzens: Tegza Antónia

a fizika és matematika tudományok doktora, docens

Beregszász – 2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikának a játékelmélet egy igen fiatal területe, de az érdeklődés iránta elég magas mint a matematikusok mint akárcsak a nem matematikusok körében is. Az egésznek a megalapozója a magyar származású matematikus Neumann János volt, akinek az első dolgozata 1928-ban jelent meg. Ezután részletesebb leírás pedig 1944-ben jelent meg Oskar Morgenstern - John von Neumann: Theory of Games and Economic Behavior néven. Neumann előtt csak pszichológiailag vizsgálták a játékokat, és az ő érdemében állt hogy a bonyolult eltéréseket mutató játékokat matematikai struktúrába foglalja.

Évfolyammunkám célja a játékelmélet alapjainak és a stratégiai játékok megoldásáinak módszereinek elsajátítása,bemutatása.

1. A matematikai játék elemzése

A matematikai játék - két vagy akár három ember játéka. A játékosok egymás után lépnek, és egyik sem hadhatja ki a lépést - a játékosok becsületesen, a legjobb módon játszanak. Az ilyen játékokban meg lehet határozni a végeredményt, azaz megjósolni valamelyik játékos győzelmét vagy akár a döntetlen végeredményt is. A játék problémájanák megoldásához az egyik játékosnak meg kell fogalmaznia az egyik nyerő stratégiát, és bebizonyítani annak működését hogy ez a stratégia tényleges nyereséghez vezet.
A játékosok bizonyos akciókat (mozdulatokat) felváltva hajtanak végre bizonyos szabályok szerint. A játék minden pontján az állapotot egy pozíció jellemzi, amely csak a játékosok lépéseitől függően változhat. Ezek között az is szerepel hogy a játékos milyen szabályok szerint lesz nyertes vagy vesztes(egyes játékokban akár a döntetlent is). És persze minden játékos célja a győzelem. Ha az egyik játékos tud úgy cselekedni, hogy az ellenfélnek lépéseitől függően is győzni tud, akkor erre azt mondják hogy nyerő stratégiája van. Bármilyen matematikai játékban vagy az egyik vagy a másik játékosnak létezik nyerő stratégiája. Minden matematikai játékban van egy nyerő stratégia az egyik játékos számára, vagy egy döntetlen stratégia. mindkettőre (ha a játék lehetővé teszi a döntetlent). A nyertes stratégia megtalálásához a következő ötletek használhatóak:

- Megfeleltetés: Egy megfelelő sikeres lépés jelenléte.
- Végéről való megoldás: A játékot indító győzelmi és vereségi pozíciók következetesen határozódnak meg. A következő pozíció akkor győztes, ha abból előre meghatározott vereség-pozíciót lehet megszerezni, és vereség, ha ebből bármely lépés előre meghatározott győzelmi pozícióhoz vezet.
- A lépés átadása: Ha használhatjuk az ellenség stratégiáját, akkor a mi ügyeink nem rosszabbak, mint az övé. Például a győzelem (vagy döntetlen) akkor biztosított, ha önként kerülhet valamilyen pozícióba, vagy kényszerítheti az ellenfelet, hogy bejusson abba.

2. Kombinatórikus játékok

2.1. Nyerő stratégia létezése

A játékelmélet a konfliktusos helyzetek résztvevőinek viselkedési szabályainak matematikai elemzésére és értékelésére szolgáló módszerek összessége. Minden konfliktusos helyzet két vagy több résztvevő (játékos) kölcsönhatását jelenti annak érdekében, hogy mindegyikük elérje célját.A játékosok ellentétes érdekei konfliktusos helyzetet teremtenek. A játékos cél elérésének szintje, azaz a játékban való részvételének végeredménye mind az előre nem látható helyzetektől, mind a játék többi résztvevőjének viselkedésétől függ. A játék minden résztvevője természetesen azt akarja, hogy a legnagyobb hasznot magának. Természetesen a játékban résztvevők mindegyike a legtöbb hasznot szeretné elérni. [1]
Megköveteljük a következő tulajdonságokat:

- Szekvenciális és kétszemélyes , tehát a játékosok felváltva lépnek.
- Adott egy (V, E) irányított gráf. Lehetséges pozíciók halmaza(vagy végtelen) a V. Az egy pontból kiinduló élek a lehetséges lépéseknek felelnek meg, és teljesítenie kell a allábiakat:
  - A játék végesfokú: vagyis minden állásból csak véges sok másik állomásba lehet lépni, tehát a gráfunkban minden pont kifoka véges
  - A játék véges: véges sok lépésen belül tetszőleges állásból véget ér a játék, vagyis akárhogyan is játszanak nincs végtelen hosszú irányított séte a gráfban.
- Nagyobbrészt adott egy p_0 kezdőpont(kezdőállás) is, a játék paramétereként, ami előfordulhat hogy egy konkrét állás(például mint a sakknál) vagy egy szabadon választott V [1]
- Két kimenetele van a játéknak: vagy nyer az egyik játékos és veszít a másik, vagy a kimenenetel döntetlen lesz. A játék végállapotai a nyelők: azok az elemei V-nek melyből nem vezet kifelé él. E nyelőkre adott, hogy milyen típusú: N, P, vagy esetleg D. Ha az utolsó lépéssel rendelkező játékos N-beli nyelőbe lép, akkor ő a vesztes, ha P-belibe lép akkor nyer, végül ha D-belibe akkor a játék

végeredménye döntetlen lesz. Amennyiben minden nyelő P-típusú, akkor éles normál játékról beszélünk, és hogyha mindegyik N típusú betli játékról van szó. Ha felveszünk egy új P típusú t nyelőt, és minden eredeti nyelőből huzzunk egy élt t-be, akkor észre lehet venni hogy a betli játékok is modellezhetők normál játékként. [1]

1. Definíció. Személytelennek nevezzük azt a játékot melyben szabadon választott kezdőállást engedünk.

Például partizán játékokban mindkét játékos szerepe eltérő, vagyis adott a pozíciók egy (V_1, V_2) partíciója, ahol a V_i eleme az i játékos helyzetének felel meg. Vagyis a V_1 állásból csak V_2-be lehet haladni,és V_2-ből azonban csak V_1-be. Példaként a sakk is egy partizán játék, mivel ugye egy táblaállásból más láblaállásokban mehetünk át.. Közelebről vizsgálva a sakkot első közelítésben pozíciónak a tábla egy lehetséges állását tekintjük, azzal a plusz információval, hogy melyik játékos következik. (Egyes pozíciókból tehát csak a sötét, a többiből csak a világos játékos számára adott lépési lehetőség.) Ebben az esetben a játék nem lenne véges, mivel ugyanaz az állás végtelen sokszor megismétlődhetne. A sakk végességét két szabály garantálja: a játék döntetlennel végződik, ha háromszor is bekövetkezik ugyanaz a táblaállás, vagy ha ötven lépés során nem történik ütés vagy gyaloglépés. Ezen szabályokat is figyelembe véve, a pozíciónak a táblaálláson és a következő játékos megnevezésén kívül tartalmaznia kell azt az információt, hogy az adott állás hányszor szerepelt, és hogy mikor történt legutóbb ütés vagy gyaloglépés (és még pár további információt, pl. történt-e már sáncolás). [1]
Stratégia alatt egy $V \to V$ függvényt értünk, amely minden V-beli helyzethez, amelyik nem nyelő, hozzárendeli az egyik ki-szomszédját: vagyis tetszőleges álláshoz hozzárendelünk egyet a lehetséges lépések közül. Egy játékos követi az adott stratégiát, ha mindig a stratégia által kijelölt pozícióba lép. Nyerő egy stratégia, ha őt követve mindig nyerni tudunk, akármit is lépjen közben a másik játékos. A következő tétel a kombinatorikus játékelmélet alaptételének tekinthető. A bizonyítás módszere a bevezető gondolatmenet általánosítása, a visszafejtés (angolul backward tracking) [1]

1. Tétel. Minden éles kombinatorikus játékban pontosan az egyik játékosnak van nyerő stratégiája. Minden kombinatorikus játékban vagy az egyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van nem vesztő stratégiája. [1]

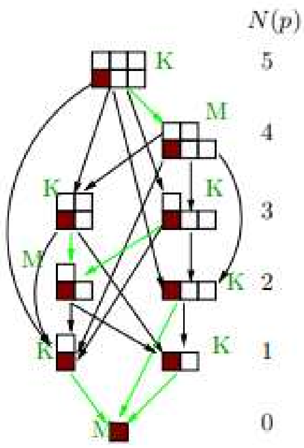
Bizonyítás: Nyilvánvalóan mindkétt játékosnak nem lehet nyerő stratégiája, mivelhogy ekkor ha mindegyikőjük nyerő stratégia szerint játszanak, ebből kifolyólag mindketten nyernek, ami képtelenség. Ezért szükségünk lesz a következő lemmára:

2. Lemma. Véges és végesfokú játékban minden p pozícióra létezik egy $\beta(p)$ szám, hogy p-ből indulva $\beta(p)$ lépésen belül mindenképp véget ér a játék. [1]

Bizonyítás: A végesfokóságot használjuk ki a vegesség mellett. Fel tesszük indirekten, hogy $p_0 := p$-ből indulva, hogy a tehetséges játékok hossza nem korlátos. Ebből következően a i. játékos a végfokuság miatt kizárólag véges sok lépés közül válaszhat. Tehát ezek közt kell legyen egy olyan p_1, ahonnan még tetszőleges hosszú játék lehetséges, és ugyanezzel az érveléssel találunk egy ugyanolyan p_2-t. Ha így folytatva egy $p_1, p_2, p_3, ...$ ellentmondást kapunk a végességgel, mivel végtelen játékmenetet kapunk. Sőt, a különféle p_i-k egybeeshetnek, például lehet, hogy körbe-körbe megyünk egy körön. Válasszunk egy legkisevv értéket, amely a lemma feltételeit teljesíti: $\beta(p)$. Ez tehát a p-ből indulva játszható leghosszabb játék hossza. Minden $pq \in E$ élre $\beta(q) \leq \beta(p) - 1$. Ha p végállás, az épp azt jelenti, hogy a kifoka nulla, vagyis $\beta(p)$. [1]

2. Definíció. A 2. lemmában szereplő tulajdonsággal rendelkező játékot korlátos lépésszámúnak nevezzük.

Lássuk be a tételt először éles normál játékokra. Célunk az, hogy V-t N és P halmazok uniójára bontsuk úgy, hogy pontosan az N-beli állásokból nyerhessen mindig a soron következő játékos. A kívánt tulajdonság ehhez az, hogy N-beli pozícióból menjen él P-belibe, P-beliből viszont csak N-belibe lehessen lépni. Ekkor egy N-beli pozícióban az első játékosank nyerő stratégiája az, hogy N-beliből mindig valamely P-belibe lépünk, P-beliből pedig bárhova; és egy ugyanilyen stratégia egy N-beli pozícióból indulva a második játékosnak nyerő stratégia. A beosztást $\beta(p)$ szerinti indukcióval végezzük. A végállapotokat, vagyis amikre $\beta(p) = 0$, helyezzük P-be. Tegyük fel, hogy minden olyan q-t, amire $\beta(q) < \beta(p)$, már besoroltunk P-be vagy N-be; például minden olyan q-t is, melyre $pq \in E$. Ha létezik legalább egy $pq \in E$ lehetséges lépés, amelyre $pq \in E$, akkor helyezzük p-t N-be. Ha minden $pq \in E$ élre $q \in N$, akkor helyezzük p-t P-be. Ezáltal a teljes V-t két halmazra osztottuk. A bizonyítást a 1. ábra szemlélteti a 2×3-as mérgezett csoki játékra. Nem éles játékok esetén a pozíciókat három osztályba osztjuk: N,P és D. D azon állásokat tartalmazza, ahonnan indulva mindketten garantálni tudják a legalább döntetlen kimenetelt (de nem tudja garantálni a győzelmet). Ismét $\beta(p)$ szerinti indukcióval osztjuk be a pozíciókat. A nyelők már be vannak osztva. Az éles esettel megegyezően, ha létezik legalább egy $pq \in E$ lehetséges lépés, amelyre $q \in P$, akkor helyezzük p-t N-be. Ha nincs ilyen q, de létezik legalább egy olyan, amelyre $q \in D$, akkor helyezzük q-t D-be. Végül ha egyik eset sem teljesül, vagyis minden $pq \in E$ élre $q \in N$, akkor helyezzük p-t P-be. Ezáltal D-beli pozícióból indulva mindenképp D-beli pozícióba érdemes lépni, különben átadjuk a másik játékosnak a nyerési lehetőséget. Éles játékra a bizonyításban szereplő P halmazt a játék magjának nevezzük (vagyis azt az egyértelmű $P \subseteq V$ halmazt, amire P-beliből csak V P-belibe lehet lépni, de V P-beliből lehet P-belibe lépni). Egy állás típusának nevezzük P, N és D közül azt, amelyikben benne van. [1]



1. ábra

1. ábra. Irányított gráf

3. A Nash-egyensuly fogalma

Tegyük fel, hogy valamilyen megfontolás, elmélet, esetleg intuíció vagy konvenció alapján azt gondoljuk, hogy egy adott s stratégiaprofilt tekintünk egy $G = S_1, ..., S_n; f_1, ..., f_n$ játék megoldásának. Ezt a megoldást akkor tekinthetjük "stabilnak" vagy "önmegvalósítónak" (self enforcing), ha tetszőlegesleges i játékos ($i = 1, 2, ..., n$) nem tudja a kifizetését növelni azzal, hogy a saját s_i komponensét s-ből megváltoztatja, feltéve, hogy a többiek az s_{-i} csonka stratégiaprofilt játsszák. A Nash-egyensúly pontosan ezt a "stabilitást" testesíti meg. [9]

3. Definíció. Legyen $G = S_1, ..., S_n; f_1, ..., f_n$ egy n-személyes nem kooperatív játék normál formában. Egy s^* stratégiaprofilt Nash-egyensúlypontnak (NEP) nevezünk, ha a következő egyenlőtlenség fennáll: $f_i({s^*}_i, {s^*}_{-i}) \geq f_i(s_i, {s^*}_{-i})$, minden $s_i \in S_i$ és minden $i = 1$ [9]

A definíció tovább erősíthető (szűkíti az egyensúlypontok halmazát), ha a (gyengén) dominálást is megköveteljük.

4. Definíció. Az $s^* \in S$ stratégiaprofilt domináns Nash-egyensúlynakpontnak ($DNEP$) nevezzük, ha $f_i({s^*}_i, {s^*}_{-i}) \geq f_i(s_i, {s^*}_{-i})$ minden $s_i \in S_i$ stratégiaprofil és minden $i = 1, ..., n$ esetén. [9]

Például a fogolydilemma játékban a (V, V) stratégiapáros egy $DNEP$. Általában nem elég, ha azt tesszük fel, hogy a játékosok csak Nashegyensúlyhoz tartozó stratégiát játszanak. Lehetséges ugyanis, hogy a játékban több NEP is van, ilyenkor elképzelhető, hogy mindegyik játékos egy olyan stratégiát játszik, amely egy NEP része, de a választott stratégiák együttese (a kialakuló stratégiaprol) nem alkot NEP-et. [9]

5. Definíció. Ha $s = (s_1, ...s_n)$ és $t = (t_1, ..., t_n)$ a $G = (S_1, ..., S_n; f_1, ..., f_n)$ játék két NEP-je, és $u = (u_1, ..., u_n)$, ahol $u_i \in (s_i, t_i), i = 1, ..., n$, szintén NEP, akkor azt mondjuk hogy s és t felcserélhetőek. Ha a G játéknak csak egyetlen NEP-je van, vagy bármely két NEP-je felcserélhető, akkor azt mondjuk, hogy G rendelkezik a felcserélhetőségi tulajdonsággal. [9]

6. Definíció. A $G = (S_1, S_2; f_1, f_2)$ kétszemélyes játékot antoganisztikusnak nevezünk, ha bármely $s_1, t_1 \in S_1$ és $s_2, t_2 \in S_2$ stratégiapárosra fenáll, hogy $f_1(s_1, s_2) \geq f_1(t_1, t_2) \iff f_2(s_1, s_2) \geq f_2(t_1, t_2)$ [9]

3. Tétel. Minden antagonisztikus játék rendelkezik a felcserélhetőségi tulajdonsággal és minden NEP-ben mindkét játékos kifizetőfüggvény-értéke azonos. [9]

4. Stratégiái játékok

Az eddig látott kombinatorikus játékok alapvető objektuma a pozíciókat és lépéseket leíró (V, E) irányított gráf volt. Feltételeztük, hogy két játékos van, akik felváltva lépnek. Számos közismert játék nem írható le ebben a keretben: kezdjük a kő-papír-ollóval, ami leírható a következő táblázattal. A győztes egy, a vesztes mínusz egy

	Kő	Papír	Olló
Kő	0, 0	-1,1	1, -1
Papír	1, -1	0, 0	-1,1
Olló	-1,1	1, -1	0, 0

2. ábra. Kő-papír-olló

pontot kap, a döntetlen nulla pontot ér mindkettejüknek. A táblázat sorai az első, oszlopai a második játékos egyes döntési lehetőségeit jelentik; az egyes pozíciókban levő számpárok elemei az első, illetve a második játékos pontszámát adják meg az adott kimenetelnél. Ezt a táblázatos ábrázolási formát a játék normál formájának, nyereségmátrixának vagy kifizetési mátrixának fogjuk nevezni. Ez egy véges, determinisztikus, kétszemélyes, nulla-összegű, szimmetrikus, teljes információs, egylépéses, szinkron játék. Megadunk egy formális modellt, amit a következőkben véges stratégiai játék alatt fogunk érteni. [1]

- Véges sok, n játékos van.
- Az i. játékoshoz adott egy véges S_i halmaz, aminek elemeit a játékos stratégiáinak nevezzük.
- A játék egy lehetséges kimenetele az, hogy minden játékos választ egyszerre egy-egy stratégiát. A kimenetelek halmaza tehát $S := S_1 \times S_2 \times ... S_n$. A kimeneteleket más néven stratégiaválasztásoknak hívjuk.
- Feltesszük, hogy a játékosok a kimenetelekhez hozzá tudnak rendelni egy valós számot, hogy mennyi a nyereségük ebben a helyzetben. Az i. játékos nyereségét az $u_i : S \to R$ nyereségfüggvény írja le. A veszteség negatív értékű nyereség, a nulla kimenetel pedig semlegesnek számít. Minden játékos célja a saját nyereségének maximalizálása.

- A játék egylépéses szinkron: a játékosok egyszerre választják ki egy-egy stratégiájukat, a többiek döntésétől függetlenül.
- A játék teljes információs: minden játékos ismeri az összes S_i halmazt és u_i nyereségfüggvényt.
- A játékelmélet fontos feltételezése a játékosok racionalitása. Ebbe beleértjük egyrészt, hogy a játékosok tisztában vannak a saját preferenciáikkal illetve célfüggvényükkel; tisztában vannak saját lehetséges döntéseikkel; arra törekszenek, hogy a célfüggvényüket maximalizálják, és az ehhez vezető lehetséges legjobb döntéseket hozzák a rendelkezésre álló információk alapján. A racionalitáshoz szorosan kapcsolódó, itt éppen csak érintett fogalom a racionalitás köztudása: amellett, hogy a játékosok racionálisak, tudják egymásról is, hogy racionálisak, tudják azt, hogy mindenki más tudja hogy a többiek racionálisak, és így tovább a végtelenségig [1]

A játék determinisztikussága alatt azt értjük, hogy a játék szabályai közt semmilyen véletlen tényező nem szerepel (ellentétben a kártyajátékokkal); azt viszont meg fogjuk engedni, hogy az egyes játékosok a saját döntésük meghozatalához a véletlent (pl. pénzfeldobás) hívják segítségül. [1]

7. Definíció. Egy stratégiai játék nulla-összegű, ha a játékosok össznyeresége minden kimenetelnél nulla, tehát egymás kárára tudnak nyerni.

Véges stratégiai játék mellett végtelennel is fogunk találkozni, amikor a játékosok száma vagy a stratégiahlamazok mérete végtelen. [1]

4.1. Szimmetrikus stratégia

Vegyünk most egy tetszőleges véges kétszemélyes játékot, amelyikben az első játékosnak n, a másodiknak m különböző stratégiája van. A nyereségeiket az A_1 illetve A_2 $n \times m$-es mátrixokkal írhatjuk le. (0-összegű játéknál $A_1 = -A_1$.)

8. Definíció. Szimmetrikusnak nevezzük a játékot, ha $n = m$ és $A_2 = A^T{}_1$ (vagy lehet úgy permutálni a sorokat és oszlopokat, hogy ez teljesüljön). [1]

Ilyenek voltak például: kő-papírolló, fogolydilemma, héja-galamb. A szimmetrikus stratégiák a kiindulási pozíció szimmetriáján alapulnak. Az ilyen feladatok megoldásának elemzése azt mutatja, hogy a szimmetrikus kiindulási pozícióval rendelkező játékokban leginkább az nyer, aki nem sérti a szimmetriáját, és az ellenfél által megsértett szimmetriát a kiindulási vagy játék pozíciója helyreállíthatja. Vegyük észre, hogy ha ugyanazt az M számot hozzáadjuk A_1 és A_2 minden eleméhez, akkor a stratégiákat illetően semmi nem változik: pontosan ugyanazok lesznek a két játékban a Nash-egyensúlyok. Éppen ezért a továbbiakban azt is feltehetjük (egy kellően nagy szám hozzáadásával), hogy mind A_1, mind A_2 minden eleme szigorúan pozitív. A következő lemma azt mutatja, hogy ha egy szimmetrikus kétszemélyes játékban tudunk szimmetrikus Nash-egyensúlyt találni, akkor tetszőleges kétszemélyes játékban is tudunk. [1]

9. Definíció. Egy kétszemélyes játékot szimmetrikusnak nevezzük, ha a játékosok stratégiahalmaza azonos: $S_1 = S_2$; és hasznosságfüggvényük szimmetrikus egymásra: $u_1(s_1, s_2) \equiv u_2(s_2, s_2)$. [3]

10. Definíció. Egy kétszemélyes játék szimmetrikus, ha a két játékos stratégiáinak a halmaza közt van egy bijekció úgy, hogy felcserélve őket a másik játékos nyereségeit kapjuk.

11. Definíció. Egy Nash-egyensúlyt szimmetrikusnak nevezünk, ha a két játékos egyensúlyi stratégiája azonos: ${s^*}_1 = {s^*}_2$ [3]

4. Tétel. Minden szimmetrikus játéknak van legalább egy szimmetrikus Nash-egyensúlya. [3]

5. Tétel. Kétszemélyes szimmetrikus nullaösszegű játékban [3]

- a játék értéke nulla: $v = 0$;
- a két játékos egyensúlyi stratégiahalmazai azonosak: $E_1 = E_2$.

Bizonyítás:

1) A szimmetrikusság és a nullaösszegűség feltevése szerint $u(s, s)$ = -$u(s, s)$, tehát $u(s, s) = 0$. Indirekt módon bizonyítunk: ha $v = u({s^*}_1, {s^*}_2) > 0$ akkor $0 < u({s^*}_1, {s^*}_2) \leq u({s^*}_1, {s^*}_1) = 0$, elletmondás. A negatív érték hasonló ellentmondáshoz vezet. [3]
2) Legyen $({s^*}_1, {s^*}_2)$ egy Nash-egyensúly. A szimmetria értelmében $({s^*}_2, {s^*}_1)$ is egyensúly. [3]

4.2. Páros stratégia

A páros stratégia alkalmazása munkigényesebb folyamat, ezért a játékelméletben nem terjedt el olyan széles körben, mint a szimmetrikus stratégia. Azonban érdemes megismerni, mert bizonyos típusu feladatoknál enélkül nehéz a siker. A szimmetrikus és páros stratégiák alkalmazása után az interaktív "táblás" játékok során, logikus lenne még néhány példát hozni olyan feladatokra, amelyek nem férnek bele ebbe az elrendezésbe. Ez ismét megmutatja, hogy a játékstratégia megválasztása csak a játékos intuíciójától, képességeitől és gondolkodásától függ, és a különböző típusú stratégiák, mint például a fentebb tárgyalt, csak lehetővé teszik számára, hogy gyorsan és hatékonyan osztályozza a játék típusát és építését ezen az alapon.

5. Feladatok megoldása

1. Feladat. Egy játékhoz szükséges tábla egy ($2 \times$ n) kiterjedésű téglalap, ami (1×1)-es négyzetekre van osztva, n pedig egy természetes szám. Két játékos egymás után befest vagy egy festetlen négyzetet, vagy két (vízszintesen vagy függőlegesen) szomszédos festetlen mezőt. Az a játékos veszít, aki nem tud többet lépni.

Megoldás: Ha egy páratlan szám, akkor a kezdő játékos a nyerő – az első lépése pedig, hogy befesti a két középsőnégyzetet, ami két egyenlő részre osztja a táblát. Ezután már csak szimmetrikusan követnie kell a második játékos lépéseit. n Ha egy páros szám, akkor a második játékos a nyerő – csak a kezdő játékos lépéseit kell követnie szimmetrikusan a tábla középpontjára nézve.

2. Feladat. Két játékos fényszórókat helyez el a: i) k $\times$ k ; ii) 2 $\times$ k kiterjedésű téglalapok egység-négyzetein. Minden fényszóró kivilágít minden négyzetet, ami nem balra vagy nem feljebb van attól. Minden lépésben legalább egy új négyzetet ki kell világítani. Az a játékos veszít, aki a bal felső sarokba tesz egy fényszórót. Melyik játékosnak lehet nyerő stratégiája és hogyan?

Megoldás: A kezdő játékos a nyerő. Az első lépése, hogy kivilágítsa a lehető legnagyobb négyzetet, ami nem egyezik meg a megadottal. Ezután pedig a szimmetrikus stratégiát kell követnie. ii) Itt is a kezdő játékos a nyerő. Itt szükséges, hogy indukciót használjunk. Az első lépése a jobb alsó sarok. Ezután pedig a kivilágított mezőket minden lépésével egy "sarok nélküli téglalappá" egészíti ki.

3. Feladat. Két játékos felváltva tesz filléreket a kerek asztalra, hogy ne fedjék egymást. A vesztes az, aki nem tudja megtenni a következő lépést.

Megoldás: Az első játékos nyer. Az első mozdulattal úgy helyezi el az érmét, hogy az érme közepe egybeesik az asztal közepével. Ezután a második játékos minden lépésénél az első játékos egy érmét helyez el szimmetrikusan a második játékos által az asztal közepére helyezett érmére. Ha lehetséges a második játékos lépése, akkor lehetséges az első lépése is.

4. Feladat. Egy lány és egy fiú felváltva rajzol átlókat egy szabályos 24. szögben, úgy hogy ne metsszék egymást. Az nyer, aki az utolsó ilyen átlót behúzza. Hogyan nyerjen a lány, ha ő kezdi a játékot?

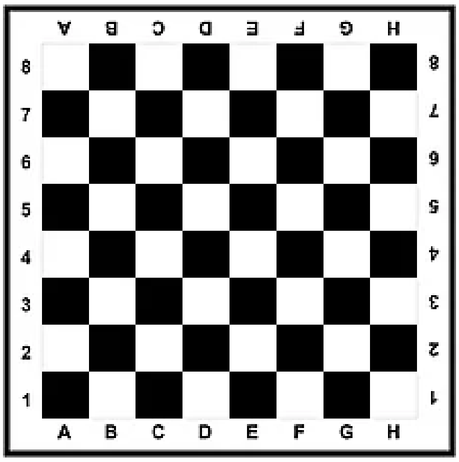
Megoldás: A szabályos 24. szög egy központilag-szimetrikus alakzat. Ezért a lánynak először átlót kell rajzolnia a 24-es szög szimmetriaközéppontján keresztül(azért létezik, mert a 24 páros szám), majd a fiú minden mozdulata után rajzoljon egy átlót, amely középen szimmetrikus a fiú által éppen megrajzolt átlóhoz. Nyilvánvaló, hogy a lány minden mozdulata után a már elhasznált átlók halmaza szimmetrikus. Mivel a lépése során a fiú a kettő közül az egyikbe átlót húz a 24-szög fele, ezért a lánynak mindig lesz lehetősége a második felében szimmetrikus átlót húzni. Tehát akárhogyan játszik a fiú, nem fogja tudni megrajzolni az utolsó átlót, vagyis a lány nyer.

5. Feladat. Két kupacban diók vannak, az egyikben 24. a másikban pedig - 19. Egy lány és egy fiú a következő játékot találták ki: mindketten sorban lépnek, melyben az egyik kupacból el kell venni, a másikat pedig bármely két részre osztani. Az aki nem fogja tudni két részre osztani a kupacot, mert már csak 1 dió maradt, veszíteni fog. Hogyan nyerjen a lány, ha ő kezdi a játékot?

Megoldás: A lánynak páratlan számú diót kell felszednie, azaz 19. diót, és a 24. diós csómót két részre kell osztania, amelyekben páratlan számú dió lesz mivel bármely páros szám megadható két páratlan vagy két páros szám összegeként. A fiú felveszi az egyik kupacot, a második kupacot pedig páratlan számú dióval kettéosztja, az egyik páros számú, a másik páratlan mivel bármely páratlan szám megadható páros és páratlan összegeként. A lány ismét a parátlan számú kupacot veszi el, és egy páros számú csomót újra páratlan mennyiségűre osszt..és így tovább. A lány úgy fog nyerni, ha minden lépés után páratlan számú diót hagy.

6. Feladat. A h8 mezőn a sakktáblán egy bástya áll. Egy lépés alatt csak jobbra vagy balra lehet mozgatni akármennyi mezőn át. Az veszít akinek nincs hova lépnie. Ki nyer a megfelelő stratégiával: a kezdő vagy a társa?

Megoldás: Mindig az második fog nyerni. Mivel a bástyánk h8 mezőn áll, és balra vagy lefele lehet haladni, a második játékos mindig nyerni fog. A stratégiája a következő: minden egyes lépésével a bástyát a sakktábla átlójára kell visszaraknia. Például ha az első játékos lép lefele négyet, ekkor a h4 mezőn lesz. A második játékos a stratégiája alapján az átlóra rakja, ami azt jelenti hogy a d4 mezőn áll. Tovább az első játékos lép hármat ballra, teház a4. A második játékos az átlóra rakja megint, ami pedig az a1 mező lesz. Ebből már látni hogy a második játékos győzött, mivel az első játékos nem tud lépni se lefele, se balra.



3. ábra. Sakktábla

7. Feladat. Az 1×103 szalag egyik végén egy fekete bábú áll, a másikon pedig egy fehér. Ketten felváltva lépnek a bábujukkal 1, 2, 3 vagy 4 cellán bármilyen irányba(a bábun átugrani tilos). Az veszit, aki nem tud hova lépni. Ki nyer a megfelelő stratégiával: a kezdő vagy a társa?

Megoldás: Mindig az első nyerni. Mivelhogy maximum négyet tudunk lépni, ezért az első játékos mindig 5-el oszhatóra egészíti a közöttük lévő cellák számát. Emiatt a közöttük lévő távolság folyamatosan csökkeni fog ameddig a második játékosnak nem lesz lehetősége lépést végezni.

8. Feladat. A táblára 63 és 55 számok vannak írva. Egy lépéssel még egy számot lehet hozzáadni, ami két már felírt szám különbsége. A táblán lévő számokat nem szabad megismételni. Aki nem tud adni ilyen számot, az veszít.

Megoldás: Az összes számot megfogjuk kapni 1-től 63-ig, ez egy páratlan szám ezért a második játékos nem fog tudni felírni új számot. Tehát mindig az első lépő fog nyerni, a második játékos stratégiától függetlenül.

9. Feladat. n darab dobozban, $2n$ darab cukorka van. Két játékos felváltva vesz egy édességet. Ha az utolsó két cukorka különböző dobozokban van, akkor az első nyer, ellenkező esetben a második. Ki nyer a megfelelő stratégiával: a kezdő vagy a társa?

Megoldás: A második játékos fog mindig nyerni, annak a stratégia alapján hogy ugyanabból ládából kiveszi a cukorkát. Tegyük fel van 6. láda, és mindegyik ládában van 2 cukorkat, vagyis összesen 12 cukorka. Az első játékos lépése után az egyik ládában egy cukorka maradt. A második játékos ennek elvétele után nem marad a ládában cukorka. Ezután ezt ismételve a második játékos megfossza az elsőt a nyerés esetétől, azaz hogy a két utolsó cukorka két különböző ládában legyen.

Összegzés

Egy matematikai versenyfeladat - fokozottan összetett probléma, nem szabványos mind a megfogalmazás, mind a megoldási módszerek tekintetében. A versenyfeladatok között akadnak szokatlan ötleteket, speciális módszereket igénylő, illetve standardabb, de ezek egy része eredeti módszerekkel is megoldható.
Véleményem szerint a játékelmélet mint ág a matematikában fontos szerepet tölt be. A problémamegoldó képesség a matematikai fejlettség szintjének, a tananyag mélységének egyik fő mutatója. Az iskolai kurzusban a matematika, a fizika és az informatika képzése sok időt kap, de az ilyen képzés fő módszere, hogy bemutatja bizonyos típusú problémák megoldásának módjait, és nem ad olyan tudást, amelyre nagyon szüksége van, mint például az elemzés és megoldás. Éppen ezért igen fontos ennek a matematikai ágnak a megismerése vagy akár elsajátitása.
Elsajátítottam a stratégiai versenyfeladatok megoldásainak módszereit, illetve konkrét példákon keresztül bemutattam ezek működését. A szakdolgozat megírásakor kitűzött célokat elértem.

Irodalomjegyzék

Hivatkozások

[1] Végh László, Király Tamás, Pap Júlia: Játékelmélet jegyzet. 2022. április 29. http://tkiraly.web.elte.hu/students/jatekelmelet_jegyzet.pdf

[2] Svetoslav Bilchev, Emiliya Velikova: Matematikai játékok. https://www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/matalap/segedletek/matematikai-jatekok.pdf

[3] Simonovics András: Bevezetés a játékelméletbe: vázlat. MTA Közgazdaságtudományi Kutatóközpont Budapest, Budaörsi út 45, 1112 2007. május 6. http://math.bme.hu/~diffe/staff/simonovits_jatek.pdf

[4] В.А. Ясінський: Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль, 2005.

[5] Методи розв'язування олімпіадних задач: https://vseosvita.ua/library/metodi-rozvazuvanna-olimpiadnih-zadac-igrovi-zadaci-37754.html

[6] Саранчук О.В: Ігри для осіб https://naurok.com.ua/zahid-matematichni-igri-dvoh-osib-44848.html

[7] http://alexnaz58.ucoz.ua/news/zadachi_na_vigrashnu_strategiju/2016-10-24-34

[8] Б.В. Рубльова: Математичні олімпіадні змагання школярів україни: 2007-2008 та 2008-2009, Львів 2010.

[9] Forgó Ferenc, Pintér Miklós, Simonovics András, Solymosi Tamás: Játékelmélet. 2005

Ábrák jegyzéke

Резюме

Олімпіадна задача з математики – це задача підвищеної складності, нестандартна як за формулюванням, так і за методами розв’язання. Серед олімпіадних задач зустрічаються такі, для розв’язання яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і задачі більш стандартні, але деякі із них можна розв’язати оригінальними способами.

Теорія ігор відіграє важливу роль в математиці. Здатність вирішувати проблеми є одним з основних показників рівня математичного розвитку та глибини навчального плану. На навчання математики, фізики та інформатики дається багато часу, але основним методом такого навчання є ознайомлення з способами вирішення певних видів проблем і не дає знань, які дуже потрібні, наприклад, аналіз і рішення. Саме тому важливо знати і розуміти цю галузь математики.

Я освоїв методи розв’язування шкільних олімпіадах задач на стратегію, також, показав їхнє функціонування конкретними прикладами. Усі поставлені цілі були досягнуті під час виконання дипломної роботи.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1011109920

Дата перевірки:
09.05.2022 14:12:30 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2022 15:42:21 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Zányik_Patrik

Кількість сторінок: 19 **Кількість слів:** 6681 **Кількість символів:** 31139 **Розмір файлу:** 217.83 KB **ID файлу:** 1011008895

0.79% Схожість

Найбільша схожість: 0.15% з Інтернет-джерелом (https://shrek.unideb.hu/~boros.zoltan/jatek-tetelek-2020_tavasz.pdf)

0.79% Джерела з Інтернету | 9 .... Сторінка 21

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Nyilatkozat

Alulírott, Zányik Patrik, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.