ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3" від „27" квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ОСНОВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ШКОЛАХ

БІРТОК ВАНЕССА ЖОЛТІВНА

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 10 від 27 жовтня 2021 року**

Науковий керівник: **Дзямко Вікторія Йосипівна**

канд. пед. наук, доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ОСНОВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ШКОЛАХ

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-го курсу

Бірток Ванесса Жолтівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Дзямко Вікторія Йосипівна**

канд. пед. наук, доцент

Рецензент: **Петечук Юлія Василівна**

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Берегове
2022

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A DIFFERENCIÁL ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALAPJAINAK OKTATÁSI MÓDSZERTANA KÖZÉPISKOLÁKBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Birtók Vanessza

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Dzamko Viktória

ped. tud. doktora, docens

Recenzens: Petecsuk Júlia

fiz.-mat. tud. doktora, docens

Beregszász – 2022

Tartalomjegyzék

Вступ

Дана робота присвячена дослідженню пов'язаним з методикою навчання основ диференціального та інтегрального числення в загальноосвітніх школах.

Актуальність теми полягає в тому, що в сучасному світі володіння математичними знаннями має велике значення, отже вивчати основи потрібно ще в школі.
За допомогою похідної та диференціального числення можемо досліджувати функції, а користуючись інтегральним численням обчислювати площі та об'єми тіл.
Такі числення використовують для розв'язання різних завдань.

Мета роботи полягає у вивченні методики навчання основ диференціального та інтегрального числення. Опрацьовані матеріали використати для розв'язання практичних завдань.

Для виконання зазначеної мети служать такі завдання як:

1. вивчення методики навчання
2. ознайомлення з формуванням основних компетентностей
3. дослідження методів навчання основ даних числень
4. застосування опрацьованого матеріалу в завданнях

Робота базується на підручниках для загальноосвітніх шкіл десятого та одинадцятого класу.
Дослідження вибраної теми складається з наступних частин:

1. теоретичні основи
2. методика навчання основ диференціального та інтегрального числення
3. практична частина

Bevezető

Szakdolgozatom a differenciál- és integrálszámítás alapjai középiskolai oktatási módszereivel kapcsolatos kutatással foglalkozik.

A téma aktualitása abban rejlik, hogy világunkban nagy jelentőséggel bírnak a matematikai ismerek, tehát az alapok megtanulását már az iskolában el kell kezdeni.

A derivált és differenciálszámítás segítségével függvényeket vizsgálhatunk, az integrálszámítás használatával pedig a testek területét és térfogatát számíthatjuk ki. Ilyen számításokat különböző típusú feladatok megoldásához használhatunk.

A szakdolgozatom célja a differenciál-és integrálszámítás alapjainak valamint oktatási módszereinek tanulmányozása.

A feldolgozott témakörök nagyobb hasznossággal bírnak a gyakorlati feladatok megoldásánál.

A munka céljának teljesítéséhez a következő feladatok szolgálnak:

1. tanítási módszerek tanulmányozása;
2. fő kompetenciák képződéseinek áttekintése;
3. adott számítások alapjai, tanítási módszereinek tanulmányozása;
4. a feldolgozott témakörök felhasználása a különböző feladatok során.

A munkám a 10-11.-es középiskolai tankönyvekre épül.
A témám kutatása a következő részekből áll:

1. elméleti ismeretek (alapok);
2. a differenciál-és integrálszámítás alapjainak tanítási módszerei;
3. gyakorlati rész.

1 Предмет і теоретичні основи дослідження

1.1 Мета освітньої галузі

Математика- своєрідна гімнастика для мозку та спосіб тренування критичного мислення. [21]
Мета навчання-всебічний розвиток особистості дитини.[14]

Основною метою освітньої галузі "Математика" є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції.[19]
Завдання освітньої галузі:

- пізнання та опис процесів та явищ дійсності за допомогою ролі та важливості математики
- забезпечити усвідомлення універсальної мови математики як природничих наук та складової людської культури
- розвити логічне, творче та критичне мислення для формулювання та висловлювання думок
- забезпечити оволодіння математичної мови, математичної символіки, моделей, формул та властивостей
- у процесі розв'язування завдань бути здатним логічно мислити таким чином доводити математичні твердження та вміти застосовувати різні математичні методи[10][14]

Мета навчальної програми (Математика)		
Рівень стандарту	Поглиблений рівень	Профільний рівень
Мета базової загальної середньої освіти: розвиток особистості, яка поєднує в собі творчий потенціал до навчання, ініціативність до саморозвитку та самонавчання в сучасних умовах, здатності ідентифікувати себе як важливу і відповідальну складову українського суспільства, яка готова змінювати і відстоювати національні цінності українського народу. Важливим чинником розвитку такої особистості є формування в учнів умінь застосовувати набуті знання у реальних життєвих ситуаціях, під час розв'язання практичних завдань та здатності визначати і обґрунтовувати власну життєву позицію.	Мета навчання математики на поглибленому рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.	Мета навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Таблиця 1: Мета навчальної програми 10-11 класів [17][15][16]

1.2 Навчання в загальноосвітніх закладах

Нині школи України працюють за навчальними планами, які певною мірою враховують національні особливості нашої держави і нові соціальні вимоги до форм і рівня освіти. Вони відповідають вимогам рівневої і профільної диференціації, потребам індивідуальної та групової роботи з окремими категоріями.[13]

Структура навчальної програми (Математика)		
Рівень стандарту	Поглиблений рівень	Профільний рівень
Програма розрахована на 210 годин. 108 годин навчального часу відведено на вивчення алгебри та початків аналізу, 102 годин на геометрію	Програма розрахована на 630 годин. 420 годин навчального часу, відведеного на вивчення алгебри та початків аналізу, 210 годин на геометрію	Програма розрахована на 630 годин. 420 годин навчального часу, відведеного на вивчення алгебри та початків аналізу, 210 годин на геометрію

Таблиця 2: Навчальні години відведені на вивчення алгебри і початків аналізу [17][15][16]

Засоби навчання -це об'єкти будь-якої природи, які формують навчальне середовище та використовуються вчителем і учнем у процесі навчальної діяльності.
До засобів навчання математики відносять:

- матеріальні (макети, інструменти...)
- матеріалізовані (зображення, схеми...)
- інтелектуальні (підручники, посібники ...)
- технічні (мультимедійна дошка, проектор...)
- інформаційно-комунікаційні[14][20]

До організаційних форм навчальної діяльності відносять:

1. урок
2. факультативні заняття
3. гурткові роботи
4. практичні та лабораторні роботи
5. гурткові, парні та індивідуальні роботи[14]

1.3 Формування ключових компетентностей учнів в процесі вивчення

Ключові компетентності			
	Рівень стандарту	Поглиблений рівень	Профільний рівень
Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами	Уміння: ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в різних формах (у таблицях, діаграмах, на графіках); розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних задач (усно і письмово), грамотно висловлюватися рідною мовою; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати, доводити правильність тверджень; поповнювати свій словниковий запас. Ставлення: розуміння важливості чітких та лаконічних формулювань. Навчальні ресурси: означення понять, формулювання властивостей, доведення теорем, розв'язування задач		
Спілкування іноземними мовами	Уміння: спілкуватися іноземною мовою з використанням числівників, математичних понять і найуживаніших термінів; ставити запитання, формулювати проблему; зіставляти математичний термін чи буквене позначення з його походженням з іноземної мови, правильно використовувати математичні терміни в повсякденному житті. Ставлення: усвідомлення важливості вивчення іноземних мов для розуміння математичних термінів та позначень, пошуку інформації в іншомовних джерелах. Навчальні ресурси: тексти іноземною мовою з використанням статистичних даних, математичних термінів.		
Математична компетентність	Уміння: оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях. Ставлення: усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного і оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін. Навчальні ресурси: розв'язування математичних задач, зокрема таких, що моделюють реальні життєві ситуації		
Основні компетентності у природничих науках і технологіях	Уміння: розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі і які можна розв'язати засобами математики; будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів. Ставлення: усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки, техніки та технологій. Навчальні ресурси: складання графіків та діаграм, які ілюструють функціональні залежності результатів впливу людської діяльності на природу		

<table>
<tr><td>Інформаційно-цифрова компетентність</td><td colspan="2">Уміння: структурувати дані; діяти за алгоритмом та складати алгоритми; визначати достатність даних для розв'язання задачі; використовувати різні знакові системи; знаходити інформацію та оцінювати її достовірність; доводити істинність тверджень. Ставлення: критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості ІКТ для ефективного розв'язування математичних задач. Навчальні ресурси: візуалізація даних; побудова графіків та діаграм, зображень стереометричних фігур за допомогою програмних засобів</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Уміння вчитися впродовж життя</td><td colspan="2">Уміння: визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети; організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість. Ставлення: усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань і вмінь; зацікавленість у пізнанні світу; розуміння важливості вчитися впродовж життя; прагнення до вдосконалення результатів своєї діяльності</td></tr>
<tr><td>Навчальні ресурси: моделювання власної освітньої траєкторії; статистична інформація; історичні задачі; завдання ймовірнісного змісту</td><td>Навчальні ресурси: моделювання власної освітньої траєкторії</td></tr>
<tr><td>Ініціативність і підприємливість</td><td colspan="2">Уміння: генерувати нові ідеї, вирішувати життєві проблеми, аналізувати, прогнозувати, ухвалювати оптимальні рішення; використовувати критерії раціональності, практичності, ефективності та точності, з метою вибору най кращого рішення; аргументувати та захищати свою позицію, дискутувати; використовувати різні стратегії, шукаючи оптимальних способів розв'язання життєвого завдання. Ставлення: ініціативність, відповідальність, упевненість у собі; переконаність, що успіх команди – це й особистий успіх; позитивне оцінювання та підтримка конструктивних ідей інших. Навчальні ресурси: задачі підприємницького змісту (оптимізаційні задачі)</td></tr>
<tr><td>Соціальна та громадянська компетентності</td><td colspan="2">Уміння: аргументувати та відстоювати свою позицію; ухвалювати аргументовані рішення в життєвих ситуаціях; співпрацювати в команді, вносити свою частку в роботу групи для вирішення проблеми; аналізувати власну економічну ситуацію, родинний бюджет, користуючись математичними методами; орієнтуватися в широкому колі послуг і товарів на основі чітких критеріїв, робити споживчий вибір, спираючись, зокрема, і на математичні дані.</td></tr>
</table>

	Ставлення: ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу; налаштованість на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; повага до прав людини, активна позиція щодо боротьби із дискримінацією. Навчальні ресурси: задачі соціального змісту.	Ставлення: ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу. Навчальні ресурси: задачі соціального змісту
Обізнаність та самовираження у сфері культури	Уміння: здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспективи, створення об'ємно-просторових композицій; унаочнювати математичні моделі, зображати фігури, графіки, рисунки, схеми, діаграми. Ставлення: усвідомлення взаємозв'язку математики та культури на прикладах з архітектури, живопису, музики та ін.; розуміння важливості внеску математиків у загальносвітову культуру.	
	Навчальні ресурси: математичні моделі в різних видах мистецтва	Навчальні ресурси: задачі про золотий переріз

Екологічна грамотність і здорове життя	Уміння: аналізувати і критично оцінювати соціально-економічні події в державі на основі статистичних даних; Ставлення: усвідомлення взаємозв'язку математики та екології на основі статистичних даних; ощадне та бережливе відношення до природних ресурсів. Навчальні ресурси: навчальні проекти	Уміння: висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аналізувати і критично оцінювати соціально-економічні події в державі на основі статистичних даних; Ставлення: логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; Навчальні ресурси: задачі соціально-економічного, екологічного змісту;

Таблиця 3: Ключові компетентності учнів [17][15][16]

2 Методика навчання основ диференціального та інтегрального числення в загальноосвітніх школах

2.1 Методика навчання

Методика навчання математики-це наука про математику як навчальний предмет і закономірності процесу навчання математики учнів різних вікових груп.
Об'єктом методики навчання математики є процес навчання математики.[14]
Завдання методики навчання математики-відповісти на чотири основні запитання:

1. Навіщо вчити математику?
2. Що треба вивчати?
3. Як треба начати?
4. Як розвивати і виховувати учнів у процесі навчання математики? [14]

За структурою методика математики як навчальна дисципліна складається з двох частин:
Загальна методика математики(теоретичні й організаційні основи процесу навчання);
Спеціальна методика математики(методика вивчання окремих розділів і тем шкільного курсу).[14]
Навчальний процес у старшій школі потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх використання зумовлена віковими особливостями старшокласників, набутими в основній школі навичками самостійної роботи, рівнем розвинення загальнонавчальних і пізнавальних видів діяльності. [17]
Під методом навчання розуміють способи навчальної роботи вчителя і організаційно навчально-пізнавальної діяльності учнів з розв'язування різних дидактичних задач, спрямованих на оволодіння матеріалом, що вивчається.[14]

Класифікація матодів навчання:

- джерело здобування знань (наочні, словесні, практичні);
- спосіб організації навчальної діяльності(методи здобування нових знань, методи формування умінь і навичок для застосування знань на практиці, методи перевірки й оцінювання);
- характер навчально-пізнавальної діяльності учнів:
  - пояснювально-ілюстративний
  - репродуктивний
  - проблемний виклад
  - частково-пошуковий або евристична бесіда
  - дослідницький метод[14]

Основною формою проведення занять залишається система уроків:

- вивчення нового матеріалу,
- формування вмінь розв'язувати задачі,
- узагальнення та систематизації знань, контролю і корекції знань.

Поряд із цим використовується шкільна лекція, семінарські та практичні заняття, інтегровані уроки математики з профільним предметом тощо. [17]

Сучасне навчання Розвиток математики як науки в сучасності характеризується взаємопроникненням наук один в одного. Особливо спостерігається проникнення математики та фізики в інші галузі знання.[12]

3 Основи диференціального та інтегрального числення в системі вивчення математики в учнів загальноосвітніх шкіл

3.1 Диференціальне та інтегральне числення в системі вивчення математики в учнів загальноосвітніх шкіл

Основи диференціального та інтегрального числення в загальноосвітніх школах складаються з уявлення про похідну, первісну та інтеграл; необхідно вміти знаходити їх за допомогою таблиць та вивчених правил; застосовувати до дослідження функцій і побудови графіків; обчислення площ криволінійних трапецій та об'ємів найпростіших тіл обертання.[10]

Структура навчальної програми (Кількість годин на тему Дифференціальне та інтегральне числення)					
Рівень стандарту		Поглиблений рівень		Профільний рівень	
10 клас	11 клас	10 клас	11 клас	10 клас	11 клас
Похідна та її застосування	Інтеграл та його застосування	Похідна та її застосування	Інтеграл та його застосування	Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування	Інтеграл та його застосування
14 годин	10 годин	50 годин	30 годин	54 годин	30 годин

Таблиця 4: Структура навчальної програми 10-11 класів [17][15][16]

3.1.1 Диференціальне числення в системі вивчення математики в учнів загальноосвітніх шкіл

Похідна та її застосування складається з таких тем, як:

- приріст функції,
- поняття похідної,
- правила обчислення похідних,
- рівняння дотичної,
- теореми Ферма, Ролля, Лагранжа,
- ознаки зростання і спадання функції,
- точки екстремуму функції
- найбільше і найменше значення функції на відрізку
- друга похідна, поняття окуплості функції
- побудова графіків функцій

Основною задачею диференціального числення є задача диференціювання, тобто задача відшукання швидкості змінювання деякої функції. [5]

Означення 3.1. Диференціальне числення- розділ математики, в якому вивчаються поняття похідної і дифференціала, та способи їх застосування до дослідження функцій.[11]

Означення 3.2. Дифференціал- головна (лінійна) частина приросту функції.[11]

Означення 3.3. Диференціювання-операція знаходження похідної.[11]

Означення 3.4 (Границя функції)**.** Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I, який міс- тить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $| f(x) - a | < \varepsilon$.[1]

Означення 3.5 (Арифметичні дії з границями функцій)**.** Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають границю в точці x_0, то функції

$$y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x)g(x)$$

також мають границю в точці x_0, причому

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Якщо, крім цього, границя функції $y = g(x)$ у точці x_0 відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0 і

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

[1]

Означення 3.6 (Неперервність функції)**.** Якщо виконується рівність

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

то функцію f називають неперервною в точці x_0.
Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset R$, то говорять, що вона неперервна на множину . Якщо функція f є неперервною на $D(f)$, то таку функцію називають неперервною.
Якщо функція f є диференційовною в точці x_0 то вона є неперервною в цій точці.[1]
Справедливою є теорема:
Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є й функції

$$y = f(x) + g(x),$$

$$y = f(x) - g(x),$$

$$y = f(x) \cdot g(x),$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ (якщо } g(x) \neq 0).[5]$$

Означення 3.7. Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 фіксована точка з області визначення функції f.
Якщо x-довільна точка області визначення функції $y = f(x)$ така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають *приростом аргументу функції* $y = f(x)$ у точці x_0 і посзначають $\triangle\ x$
Отже, $\triangle\ x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \triangle\ x$. Кажуть, що *аргумент одержав приріст* $\triangle\ x$ у точці x_0.
Якщо аргумент одержав приріст $\triangle\ x$ у точці x_0, то значення функції змінилося на величину $f(x_0 + \triangle\ x) - f(x_0)$. Цю величину називають *приростом функції* $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають $\triangle\ f$[7][5]

Означення 3.8 (Похідна)**.** Одне з оновних понять математичного аналізу. Похідною функції в точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля.[7]

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle\ x) - f(x_0)}{\triangle\ x}.[6]$$

Означення 3.9. Похідну функції позначають y' або $f'(x)$. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну, то функцію називають *диференційованою*. Відшукання похідної f називають *диференціюванням*[5]

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$, C- константа
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(a^x)' = a^x \ln a$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$[9]

Правила диференціювання Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовані, C-деяка константа, то диференційованими будуть також функції

$$y = Cf(x),$$

$$y = f(x) \pm g(x),$$
$$y = f(x) \cdot g(x),$$
$$y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

до тогож справедливими є рівності:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x);$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0.[5]$$

Похідна складеної функції Якщо значенням аргументу функції f є значення функції g , то кажуть, що задано складену функцію $y = f(g(x))$. Похідну складеної функції обчислюють за формулою:

$$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x).[5]$$

Фізичний зміст похідної Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 виражає швидкість зміни функції або процесу, який ця функція описує, у цій точці. Так, якщо функція $S = S(t)$ описує рух матеріальної точки, тобто залежність пройденої відстані s від часу t, то її похідна задає залежність шкидкості v матеріальної точки від часу t: $S'(t) = v(t)$; похідна швидкості $v = v(t)$ за часом є прискоренням: $v'(t) = a(t)$.[7]
Середня швидкість руху на проміжку:

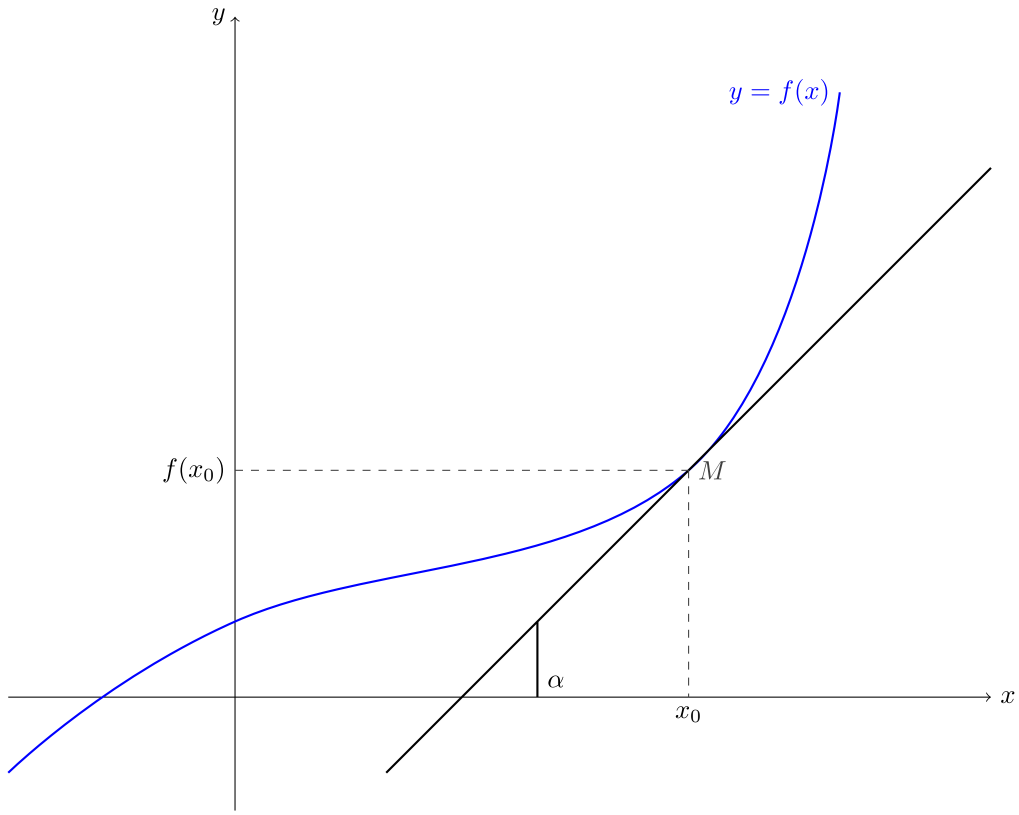
$$v_c = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t}[3]$$

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, у момент часу t_0 називають границю середньої швидкості за умови, що $\triangle t$ наближається до нуля:

$$v_c(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} v_c = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t}[3]$$

Геометричний зміст похідної Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці: [5]

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$



Графік 1: Геометричний зміст похідної

Рівняння дотичної до графіка функції Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді до графіка функції у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну.
Рівняння невертикальної прямої має вигляд

$$y = kx + b$$

Виходячи з геометричного змісту похідної, одержимо:

$$k = f'(x_0).$$

Тоді $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$ тому $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, звідки $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.
Тоді рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).[5]$$

Теорема Ферма Нехай функція f, визначена на проміжку $[a; b]$ у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого(найбільшого) значення. Якщо функціяf є диференційовною в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.[7]

Теорема Ролля Якщо фукнкція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна на інтервалі $(a; b)$ причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$.[7]

Теорема Лагранжа Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то існує така точка $x_0 \in (a;b)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.[7]$$

Ознака сталості функції Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.[7]

Ознака зростання функції Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.[7]

Ознака спадання функції Якщо для всіх x із проміжку Iвиконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.[7]

Властивість зростаючої і спадної функції Якщо диференційовна на проміжку I функція f є зростаючою(спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0(f'(x \leq 0))$.[7]

Окіл Інтервал $(a;b)$, який містить точку x_0 називають околом точки x_0.[7]

Точка максимуму Точку x_0 називають точкою максимуму функції, якщо існує окіл точки x_0, такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.[7]

Точка мінімуму Точку x_0 називають точкою мінімуму функції, якщо існує окіл точки x_0, такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.[7]

Теорема Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0.[7]

Критичні точки Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.[7]

Ознака точки максимуму функції Нехай функція f є диференційовною на кожному з проміжків $(a;x_0)$ і $(x_0;b)$ та неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a;x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх $x \in (x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.[7]

Ознака точки мінімуму функції Нехай функція f є диференційовною на кожному з проміжків $(a;x_0)$ і $(x_0;b)$ та неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a;x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x \in (x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.[7]

Застосування похідної для дослідження функцій Якщо для всіх x з проміжку $(a;b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то на цьому проміжку функція *зростає*.
Якщо ж для всіх x з проміжку $(a;b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то на цьому проміжку функція *спадає*.
Проміжки спадання та зростання функції називають *проміжками монотонності*.[7]
Дослідження функції $f(x)$ на монотонність:

1. знайти її похідну $f'(x)$;

2. знайти критичні точки функції ($f'(x) = 0$ або$f'(x)$ не існує);

3. визначити знак похідної функції на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції;

4. визначити проміжки спадання та зростання функції.[7]

Друга похідна Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_\in M$, то похідну функції f' у точці x_0 називають другою похідною функції $y = f(x)$. Позначають $f"(x_0)$. Саму функцію f називають двічв диференційовною у точці x_0.[7]

Ознака опуклості функції вниз Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f"(x) \geq 0$, то функція f є опуклою вних на проміжку I.[7]

Ознака опуклості функції вгору [7] Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f"(x) \leq 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I.[7]

Теорема Якщо x_0 є точкою перегину функції f і в цій точці функція двічі диференційовна, то $f"(x_0) = 0$.[7]

Нерівність Єнсена. Теорема Якщо функція f є опуклою вгору на проміжку I, то для будь-яких a і b з проміжку I виконується нерівність

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.[7]$$

Нерівність Єнсена. Теорема Якщо функція f є опуклою вгору на проміжку I, то для будь-яких $x_1, x_2, ..., x_n$ з проміжку I виконується нерівність

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)}{n}.[7]$$

Дослідження властивостей функції

1. знайти область визначення функції,

2. дослідити функцію на парність,

3. знайти нулі функції,

4. знайти проміжки знакосталості функції,

5. дослідити функцію на неперервність, знайти вертикальні асимптоти,
6. знайти похилі асимптоти графіка функції,
7. знайти проміжки зростання і спадання,
8. знайти точки екстремуму та значення функції,
9. знайти проміжки опуклості і точки перегину,
10. виявити інші особливості функції (періодичність, поведінка функції в околах) [2][7]

3.1.2 Інтегральне числення в системі вивчення математики в учнів загальноосвітніх шкіл

Інтеграл тайого застосування включає до себе такі теми як:

- первісна
- правила знаходження первісної
- площа криволінійної трапеції, визначений інтеграл
- обчислення об'ємів тіл

Означення 3.10 (Первісна)**.** Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для довільного $x \in X$ справедлива рівність $F'(x) = f(x)$.[5]

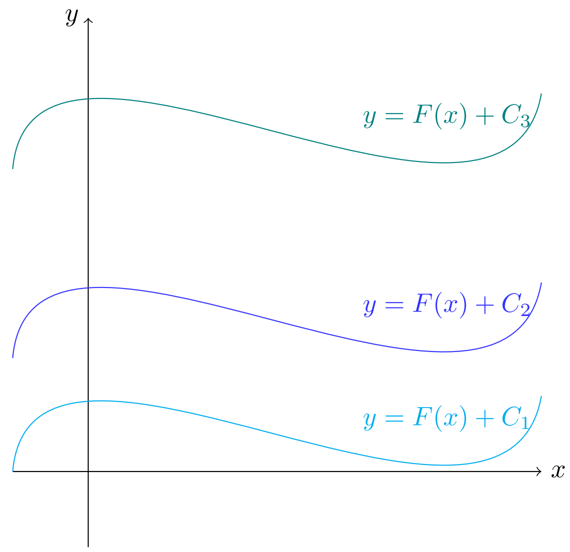
Основна властивість превісної Якщо $F(x)$-первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, то функція $f(x)$ має безліч первісних, і всіх їх можна задати формулою

$$F(x) + C,$$

де C-довільне число. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* функції на йьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C.[8]$$

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двої первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат. [8]
Якщо функція F є первісною функції на проміжку X, то запис $F(x) + C$, де C- довільне число, називають загальним виглядом первісних функцій f на проміжку X.[8]



Графік 2: Загальний вигляд первісної функції

Правила знаходження первісної

Означення 3.11 (Теорема)**.** Якщо функції F і G є відповідно первіними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x)+G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.[8]

Означення 3.12 (Теорема)**.** Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k- деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$. [8]

Означення 3.13 (Теорема)**.** Якщо функція F є первісною функції f на прорміжку I, а k-деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$.[8]

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int F'(x)dx = F(x) + C$
2. $(\int f(x))'dx = f(x)$
3. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
4. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$[4]

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$[1]

При обчисленні інтегралів підінтегральну функцію зводять до однієї з табличних.
Якщо підінтегральна функція $f(x)$ не може бути безпосередньо перетворена до однієї з табличних, то можна використати метод заміни змінної чи інтегрування за частинами.
Згідно методу інтегрування частинами, $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$-диференційовані функції.[5]

Означення 3.14. Площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F-будь-яка первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.[5]

При обчисленні визначеного інтеграла $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)|_a^b$.
Рівність $\int_a^b f(x)dx = F(x) \mid_a^b$ називають *формулою Ньютона-Лейбніца*.
Якщо функції $f = f(x)$ і $y = g(x)$ мають первісні на проміжку $[a; b]$, то справедливі рівності:[5]

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

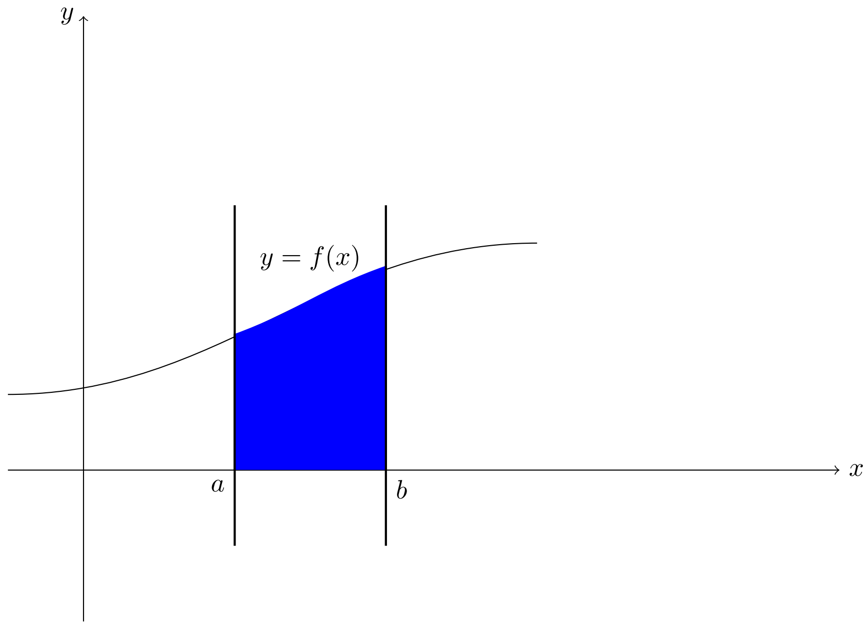
Для обчислення визначного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона-Лейбніца потрібно:

1. знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a; b]$;

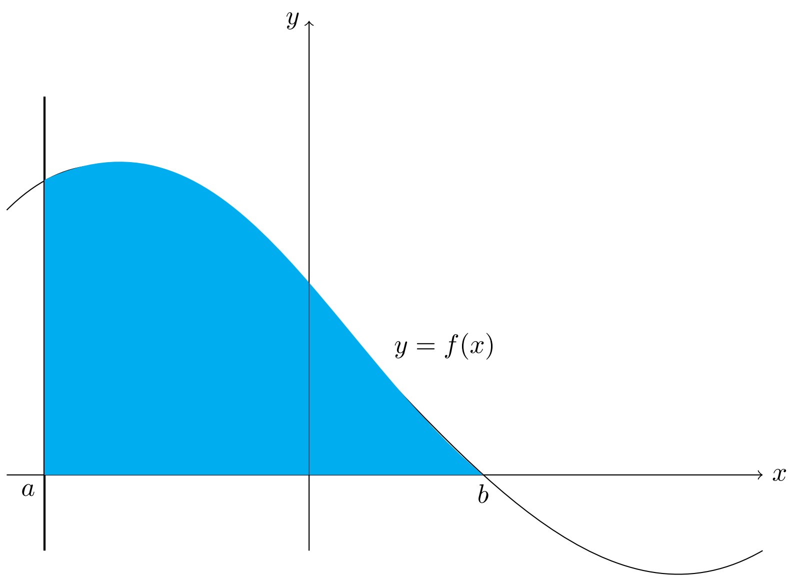
2. обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;

3. знайти різницю $F(b) - F(a)$.[7]

Формула площі криволінійної трапеції: $S = \int_a^b f(x)dx$, якщо $f(x) \geq 0$



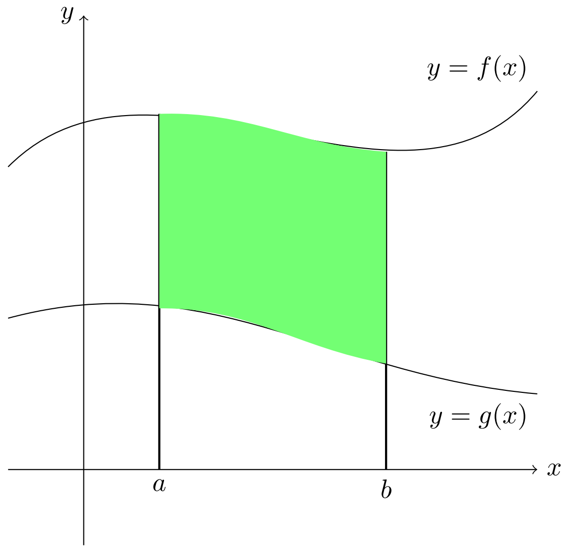
Графік 3: Криволінійна трапеція 1



Графік 4: Криволінійна трапеція 2

Як і у випадку невизначеного інтеграла, при обчисленні визначеного інтеграла використовується безпочереднє інтегрування, а також методи заміни змінної та інтегрування частинами.[5]
Нехай $y = f(x)$ і $y = g(x)$- неперервні на проміжку $[a; b]$ функції і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$. Тоді площу фігури обислюємо за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.[5]$$



Графік 5: Отримана фігура двома функціями на проміжку

Обчислення об'ємів тіл обертання Якщо $y = S(x)$-перерервна на відрізку $[a; b]$ функція, то об'єм тіла Φ можна обчислити за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx.[8]$$

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком наперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції f і прямими $x = a, x = b$ та $y = 0$, утворюється тіло об'єму V, тоді

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.[8]$$

4 Практична частина

В практичній частині завдання взяті з підручників алгебри і початків аналізу десятого та одинадцятого класу [7] [8], а також з підручника математики для комплексної підготовки до ЗНО та ДПА[5] та веб-сторінки завдань ЗНО[18].

1. Знайти приріст функції: $y = x^3$ у точці x_0, який відповідає приросту-аргументу Δx.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 =$$

$$3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

2. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$ за означенням:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Знайти похідну функції $3x^4$:

$$(3x^4)' = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3.$$

4. Знайти похідну функції $x^2 \cdot \sin x$:

$$(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + (\sin x)^2 \cdot x^2 = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x.$$

5. Знайти похідні:

   (a) $(5x^3 + 8x - 11)'$;
   $(5x^3 + 8x - 11)' = (5x^3)' + (8x)' - 11' = 5(x^3)' + 8(x)' - 0 = 15x^2 + 8$;

   (b) $(x^6 + 3x^2 - x + 3)'$;
   $(x^6 + 3x^2 - x + 3)' = 6x^5 + 6x - 1$;

   (c) $(x \sin 3)'$;
   $(x \sin 3)' = x' \cdot sin3 = sin3$;

   (d) $(sin(3x^2))'$;
   $(\sin(3x^2))' = \cos(3x^2) \cdot (3x^2)' = \cos(3x^2) \cdot 6x = 6x\cos(3x^2)$;

(e) $(5\sin 7x - 7x^2 + 7)'$;
$(5\sin 7x - 7x^2 + 7)' = 5\cos 7x \cdot 7 - 14x + 0 = 35cos7x - 14x$;

(f) $(\sqrt{6x^4+1})'$;
$(\sqrt{6x^4+1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{6x^4+1}} \cdot (6x^4+1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{6x^4+1}} \cdot 24x^3 = \dfrac{12x^3}{\sqrt{6x^4+1}}$;

(g) $(x^5 \cdot 7^x)'$;
$(x^5 \cdot 7^x)' = (x^5)' \cdot 7^x + x^5 \cdot (7^x)' = 5x^4 \cdot 7^x + x^5 \cdot 7^x \ln 7$;

(h) $(5e^{4x-3} - 8)'$;
$(5e^{4x-3} - 8)' = 5(e^{4x-3})' = 5 \cdot e^{4x-3} \cdot (4x-3)' = 5 \cdot e^{4x-3} \cdot 4 = 20e^{4x-3}$;

(i) $\left(x - \dfrac{1}{3x^2}\right)'$;
$\left(x - \dfrac{1}{3x^2}\right)' = \left(x - \dfrac{1}{3}x^{-2}\right)' = 1 + \dfrac{2}{3}x^{-3} = 1 + \dfrac{2}{3x^3}$;

(j) $\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{2x^2}\right)'$;
$\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{2x^2}\right)' = (x^4)' \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot (x^{-2})' = 4x^3 \cdot \dfrac{1}{4} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{-3} =$
$= \dfrac{4x^3}{4} + x^{-3} = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$;

6. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 3x - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$
$f(x_0) = f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$;
$f'(x) = 2x + 3$; $f'(x_0) = f'(2) = 2\cot 2 + 3 = 7$;
Рівняння дотичної: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x)$;
Підставляємо знайдені числові значення:
$y = 7(x - 2) + 6$
$y = 7x - 8$

7. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції
$y = 5x^2 - 3x^2 + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$;
$k = y'(x_0)$
$y' = (5x^2 - 3x + 2)' = 10x - 3$
$k = y'(2) = 10 \cdot 2 - 3 = 17$

8. Обчислити тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x - \dfrac{1}{3x^2}$ у точці з абсцисою $x_0 = \dfrac{1}{3}$;
$f'(x) = \left(x - \dfrac{1}{3x^2}\right)' = \left(x - \dfrac{1}{3}x^{-2}\right)' = 1 + \dfrac{2}{3}x^{-3} = 1 + \dfrac{2}{3x^3}$;
$\operatorname{tg}\alpha = f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1 + \dfrac{2}{3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^3} = 1 + \dfrac{2 \cdot 27}{3} = 1 + 18 = 19$;

9. Знайти рівняння дотичної до графіка$f(x) = x^2 + 4x + 7$, яка проходить через точку $A(-1; 0)$.

$f(-1) = 4 \neq 0$, значить точка A не належуть графіку функції.
Нехай $(x_0; f(x_0))$ точка дотику, тоді

$$f(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 7$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f'(x_0) = 2x_0 + 4$$

Рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Підставляємо:

$$y = x_0^2 + 4x_0 + 7 + (2x_0 + 4)(x - x_0)$$

Оскільки точка $A(-1; 0)$ належить дотичній то її координати задовільняють рівняння дотичної:

$$0 = x_0^2 + 4x_0 + 7 + (2x_0 + 4)(-1 - x_0)$$

$$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$$

$$x_0 = 1$$

$$x_0 = -3$$

Якщо $x_0 = 1$ тоді рівняння тодичної

$$y = 1^2 + 4 \cdot 1 + (2 \cdot 1 + 4)(x - 1)$$

$$y = 6x + 6$$

Якщо $x_0 = -3$ тоді рівняння дотичної

$$y = 9 - 12 + 7(2 \cdot (-3) + 4)(x + 3)$$

$$y = -2x - 2$$

10. Обчислити ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до цього графіка паралельна до прямої $y = 3x + 7$;
Дотична до графіка функції паралельна до прямої, значить кутові коефіцієнти дотичної $y = k_1x + b_1$ і функції $y = 3x + 7$ рівні;
$k_1 = 3$, отже $f'(x_0) = k_1 = 3$;
$f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$;
$f'(x_0) = 4x_0 - 3$;
$4x_0 - 3 = 3$
$x_0 = 1.5$
Знайдемо y_0-ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$;
$y_0 = 2 \cdot (1.5)^2 - 3 \cdot 1.5 + 1 = 4.5 - 4.5 + 1 = 1$;

11. Знайти:

    (a) $f'(3)$, якщо $f(x) = (2x + 1)^3$;
    $f'(x) = ((2x+1)^3)' = 3(2x+1)^2 \cdot (2x+1)' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$
    $x = 3, f'(3) = 6(2 \cdot 3 + 1)^2 = 6 \cdot 7^2 = 6 \cdot 49 = 294$;

(b) $f'(0.75)$ якщо $f(x) = 5e^{4x-3} - 8$;
$f'(x) = (5e^{4x-3} - 8)' = 5(e^{4x-3})' = 5 \cdot e^{4x-3} \cdot (4x-3)' == 5 \cdot e^{4x-3} \cdot 4 =$
$= 20e^{4x-3}$;
$x = 0.75, f'(0.75) = 20e^{4 \cdot 0.75 - 3} = 20e^0 = 20$;

(c) $f'(-\frac{\pi}{3})$, якщо $f(x) = 4\cos\frac{5x}{2} - 7x + 3$;
$f'(x) = \left(4\cos\frac{5x}{2} - 7x + 3\right)' = -4\sin\frac{5x}{2} \cdot \left(\frac{5x}{2}\right)' - 7 =$
$= -4\sin\frac{5x}{2} \cdot \frac{5}{2} - 7 = -10\sin\frac{5x}{2} - 7$;
$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -10\sin\left(\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) - 7 = 10\sin\frac{5\pi}{6} - 7 = 10 \cdot \frac{1}{2} - 7 = -2$;

12. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$;

$y' = (\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5)' = x^2 - 6x$;

- $y' = 0; x^2 - 6x = 0$
  $x_1 = 0; x_2 = 6$
- Критичні точки 0 та 6 розбивають область визначення на три проміжки: $(-\infty; 0), (0; 6), (6; +\infty)$;
- Визначимо, який знак має похідна функції на кожному з проміжків. Виберемо довільне число з проміжку $(-\infty; 0)$ і обчислюємо значення похідної функції.
  $y'(-10) = (-10)^2 - 6 \cdot (-10) = 160 > 0$
-

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 6)$	$(6; +\infty)$
y'	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- $x = 0$ - точка максимуму;
  $y_{max} = y(0) = 5$;
- $x = 6$ -точка мінімуму;
  $y_{min} = y(6) = -31$.

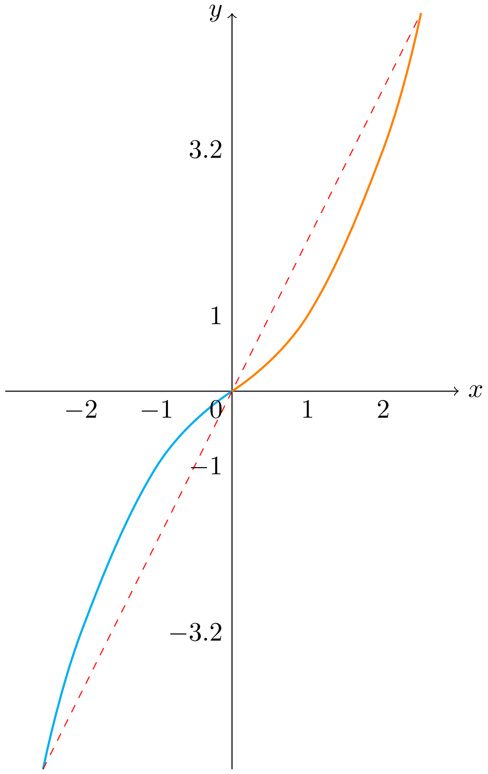
13. Побудувати графік функції $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$;

- Область визначення $D(f) = \mathbf{R}$;
- Функція неперіодична і непарна
  $(y(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = -\frac{2x^3}{x^2 + 1} = -y(x))$;
  Дослідження функції достатньо провести на $x \geq 0$;
- $y' = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$;
  Якщо $x > 0$, то $y' > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$ функція зростає.

- $y(0) = 0$, знайдемо ще декілька точок:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3.2	-1	0	1	3.2

- Будуємо графік на проміжку $[0; +\infty)$;
  Використавши симетрію відносно початку координат, будуємо графік на проміжку $(-\infty; 0)$;



Графік 6: Графік на проміжку $(-\infty; 0)$;

14. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1}$ на відрізку $[-3; 0]$;
$f'(x) = \left(\dfrac{x^2+8}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2+8)' \cdot (x-1) - (x-1)' \cdot (x^2+8)}{(x-1)^2} =$
$= \dfrac{2x \cdot (x-1) - 1 \cdot (x^2+8)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 - 8}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2}$;
$f'(x) = 0$; $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2} = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$x_1 = -2; x_2 = 4$;
Порівняємо значення $f(-3), f(-2), f(0)$;
$f'(-3) = \dfrac{(-3)^2+8}{-3-1} = \dfrac{17}{-4} = -4\dfrac{1}{4}$;
$f'(-2) = \dfrac{(-2)^2+8}{-2-1} = \dfrac{12}{-3} = -4$;
$f'(0) = \dfrac{8}{-1} = -8$;

Найбільше значення $f'(-2) = -4$.

15. Знайти проміжки зростання (спадання) функції $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$;

- Область визначення:
  $x^2 - x - 2 \geq 0; x \in (\infty; -1] \cup [2; +\infty)$;
- Похідна функції $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - x - 2}\right)' = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$;
- Якщо $f'(x) > 0$, тоді функція $f(x)$ - зростає;
  Якщо $f'(x) < 0$, тоді функція $f(x)$ -спадає;

$$\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} > 0,$$

$\begin{cases} 2x - 1 > 0; \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0.5; \\ x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty). \end{cases}$

Отже, функція зростає на проміжку $(2; +\infty)$, значить і на $[2; +\infty]$;

$$\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} < 0,$$

$\begin{cases} 2x - 1 < 0; \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0.5; \\ x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \end{cases}$.

Отже функція спадає на проміжку $(-\infty; -1)$, значить і на $[-\infty; -1]$.

16. Знайти первісну функції:

(a) $f(x) = x^4$
$\int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5} + C$

(b) $f(x) = \sin x$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$

(c) $f(x) = 7^x$
$\int 7^x dx = \dfrac{7^x}{ln7}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
$\int \dfrac{1}{x} dx = ln|x| + C$

17. Знайти невизначений інтеграл:

(a) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(b) $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \dfrac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\dfrac{-1}{3} + 1} + C = \dfrac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = 1.5\sqrt[3]{x^2} + C$;

(c) $\int (3\cos x + \dfrac{10}{x}) dx = 3\int \cos x dx + 10 \int \dfrac{dx}{x} = 3\sin x + 10 \ln|x| + C$;

(d) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos x) dx = \frac{1}{2}(x+\sin x)+C$;

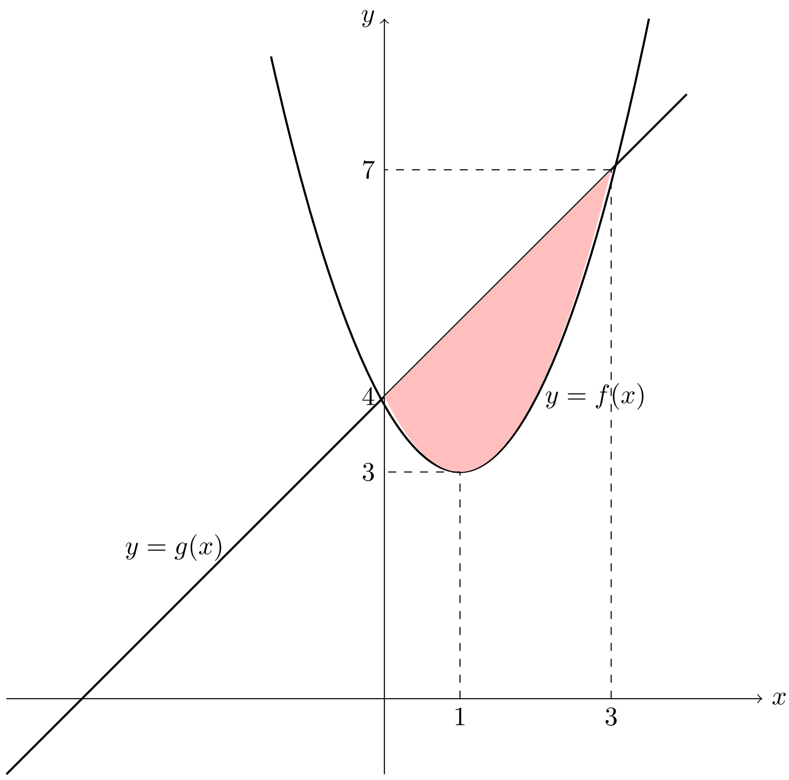
(e) $\int x^3 = \frac{x^4}{4} + C$;

(f) $\int (4x^3-6)dx = 4\int x^3 dx - 6\int dx = 4\cdot \frac{x^4}{4} - 6\cdot x + C = x^4 - 6x + C$;

(g) $\int x \sin x dx$;
$u = x, v' = \sin x$;
$u' = 1, v' = \cos x$;
$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$;

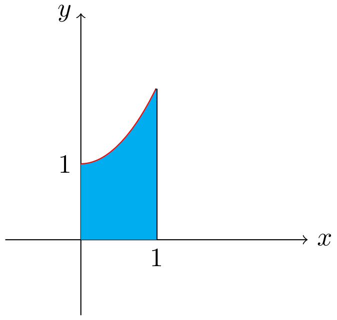
18. Знайти площу фігури обмеженими функціями $f(x) = x^2 - 2x + 4$ та $g(x) = x + 4$;

- Знаходимо точки перетину графіків функцій:
$x^2 - 2x + 4 = x + 4$
$x^2 - 3x = 0$
$x_1 = 0, x_2 = 3$
Точки перетину $x = 0, x = 3$;
- $g(x) > f(x)$, значить площа фігури:
$S = \int_0^3 (g(x) - f(x))dx = \int_0^3 (x+4-x^2+2x-4)dx = \int_0^3 (-x^2+3x)dx =$
$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \left(\frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 0 - \frac{0}{3}\right) = 4.5$

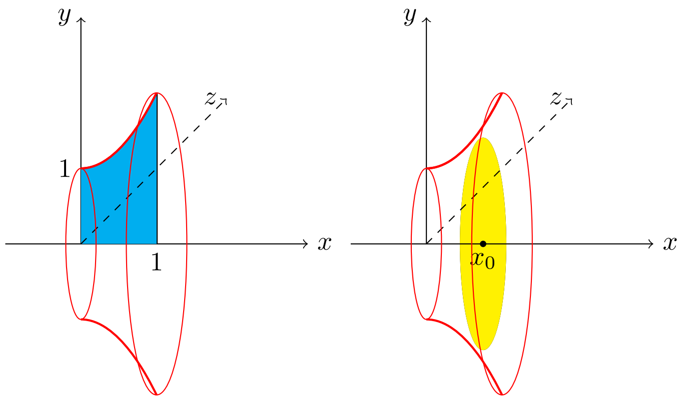


Графік 7: Фігура обмежена функціями

19. Фігура обмежена графіком функції $f(x) = x^2 + 1$ і прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ обертається навколо осі абсцис, утворюючи тіло об'єму V. Знайти V.



Графік 8: Фігура обертання



Графік 9: Тіло об'єму V

$x = x_0$, де $x_0 \in [0, 1]$, утворюється круг радіус якого дорівнює $f(x_0)$. Площа цього круга:

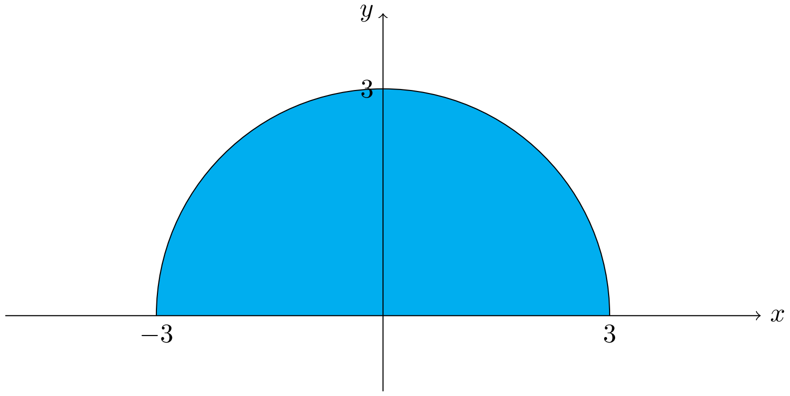
$$S(x_0) = \pi f^2(x_0) = \pi(x_0^2 + 1)^2 = \pi(x_0^4 + 2x_0^2 + 1).$$

Тому:

$$V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28\pi}{15}$$

20. Обчислити значення визначеного інтеграла $\int_{-3}^{3}\sqrt{9 - x^2}dx$;
Значення визначеного інтеграла можна розглядати як площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{9 - x^2}, x = -3, x = 3$;
$y \geq 0$
$-3 \leq x \leq 3$
Піднесемо обидві частини до квадрату

$y^2 = 9 - x^2$
$x^2 - y^2 = 9$
Отримали рівняння півкола з центром $(0,0)$ та радіусом $R = 3$
Отже знаходимо площу відповідного півкруга:
$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}dx$; $S = \dfrac{1}{2}\pi r^2 = \dfrac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 4.5\pi$;



Графік 10: Графік півкола

Висновки

Опрацьовуючи зібрані матеріали пов'язані з методикою навчання основ диференціального та інтегрального числення в загальноосвітніх школах , висновки наступні.

В теоретичній частині опрацьовано матеріали повязані диференціальним та інтегральним численням в загальноовітній школі.
По-перше, розглянуто мету освітньої галузі, навчання в загальноосвітніх закладах, засоби навчання, а також формування ключевих компетентностей учнів.

По-друге, одним з важливіших пунктів роботи є основи диференціального та інтегрального числення в системі вивчення математики в учнів загальноосвітніх шкіл.
У шкільному курсі алебри і початків аналізу "Диференціальне та інтегральне числення"спрямовані на вивчення певних тем.
Диференціальне числення поглиблює матеріали в десятому класі, інтегральне числення в одинадцятому класі.
Основний розділ полягає в перегляді основ диференціального та інтегрального числення в загальноосвітніх школах. Основи складаються з уявлень матеріалу про похідну, первісну та інтеграл.

По-третє, практична частина фокусується на застосуванні дослідженого матеріалу:

- за даними таблицями та правилами знаходження похідної, первісної, інтеграла;
- застосування умінь до дослідження функцій;
- побудова графіку;
- обчислювання площі криволінійної трапеції ;
- обчислювання об'ємів тіл обертання.

Завдання з моєї роботи можуть бути використані вчителями математики при викладанні даних тем.

Список використаних джерел

[1] Бусарова Т. М., Кравець В. В., Міхєєва Н. В., Петренко В. О.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. Кравця В. В. Модульне навчання. Інтегральне числення: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 5 «Невизначений інтеграл» /Дніпропетр.нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д.; 2006. - 56 с.

[2] Гайдей В. О., Федорова Л. Б., Алєксєєва І. В., Диховичний О. О. .Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (I курс I семестр). — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

[3] Галак Марія-Олена О. Похідна функції та її застосування при розв'язуванні задач прикладного характеру. -Чернівці, 2021

[4] Довгай В. В., Мельник А. Ф. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів. Рекомендовано методичною радою НТУУ "КПІ".- Київ, 2011.-51 с.

[5] Капіносов А. М. [та ін.] /Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / .-Тернопіль: Підручники і посібники, 2019.-512 с.

[6] Клименко І. В., Кравець В. В., Наріус Н. Г., Русу С. П.; За заг. ред. д-ра техн. найк, проф. Кравця В. В.. Диференціальне числення: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи №4 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. імені акад. В. Лазаряна; .-Д.,2008.-53 с.

[7] Мерзляк А. Г. , Номіровський Д. А. , Полонський В. Б. ,Якір М. С./Алгебра і початки аналізу:початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ .-Х.:Гімназія, 2018.-512 с.: іл.

[8] Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. /Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти /.-Х.: Гімназія, 2019.-352 с.: іл.

[9] Птиця О. А. .Розвиток умінь учнів застосовувати похідну на факультативних заняттях з математики в профільній школі..-Кривий ріг, 2021

[10] Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів.-К.,2000-512 с.

[11] Вища математика. Л. В. Соколова: веб-сайт URL: https://org2.knuba.edu.ua/mod/glossary/view.php?id=7822

[12] Методика викладання. Г. С. Медвідь: веб-сайт URL: https://naurok.com.ua/metodika-vikladannya-matematiki-89741.html

[13] Математика в школі як навчальний предмет. Цілі навчання математики в загальноосвітній школі. "Методика навчання математики". З. І. Слепкань: веб-сайт URL: http://ukped.com/matematyka/126-.html

[14] Методика навчання математики, як наука і навчальна дисципліна. В. Г. Листопад: веб-сайт URL: https://vseosvita.ua/library/metodika-navcanna-matematiki-ak-nauka-i-navcalna-disciplina-345370.html

[15] Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень: веб-сайт URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

[16] Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень: веб-сайт URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

[17] Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту: веб-сайт URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

[18] Онлайн завдання для підготовки до ЗНО: веб-сайт URL: https://zno.osvita.ua

[19] Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти :веб-сайт URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text

[20] Як зробити навчання математики цікавим і продуктивним. Дарина Васильєва: веб-сайт URL:https://nus.org.ua/view/yak-zrobyty-navchannya-matematyky-tsikavym-i-produktyvnym

[21] Як урятувати викладання математики в Україні. М. Скиба: веб-сайт URL: https://zn.ua/ukr/EDUCATION/jak-urjatuvati-vikladannja-matematiki-v-ukrajini.html

Додаток

Összefoglaló

A differenciál- és integrálszámítás alapjainak középiskolai oktatásának módszertanához kapcsolódó összegyűjtött anyagokat feldolgozva a következtetések az alábbiak.

Az elméleti részben a középiskolai differenciál- és integrálszámítással kapcsolatos fontosabb részeket dolgoztam fel.

Elsősorban az oktatási terület célját, a középiskolai oktatást, a taneszközöket és a tanulók kulcskompetenciáinak kialakítását tanulmányoztam át.

Másodsorban, a munkám egyik legfontosabb része a differenciál- és integrálszámítás alapjai a középiskolások matematika tanításának rendszerében.
Az algebra és analízis kezdete iskolai kurzusban a „Differenciál- és integrálszámítás" bizonyos témák tanulmányozására irányul. A differenciálszámítás a tízedikben az integrálszámítás a tizenegyedik osztályban jelenik meg mélyrehatóbban.

A fő részben a középiskolai differenciál- és integrálszámítás alapjait tanulmányoztam át. Az alapismeretek a derivált, primitív és integrál képzelet kialakulásáról tevődnek össze.

Harmadszor, a gyakorlati rész a tanulmányozott anyagok felhasználásán alapszik feladatok megoldásához:

1. derivált, primitív és integrálszámítás adott táblázatok és szabályok által
2. készségek alkalmazása függvény vizsgálathoz;
3. grafikonok szerkesztése;
4. görbe vonal trapéz területének kiszámítása;
5. forgótestek térfogatának kiszámítása.

Szakdolgozatomban megoldott feladatok felhasználhatóak matematika tanárok által az adott témák oktatása során.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1011109919

Дата перевірки:
09.05.2022 14:11:29 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2022 15:39:45 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Birtok_Vanessza

Кількість сторінок: 38 **Кількість слів:** 7871 **Кількість символів:** 47450 **Розмір файлу:** 324.56 KB **ID файлу:** 1011008897

11.8% Схожість

Найбільша схожість: 7.11% з Інтернет-джерелом (https://mmk.edu.vn.ua/uploads/images/articles/matem/2018-2019/Se...

11.8% Джерела з Інтернету | 185 .... Сторінка 40

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 1889

Nyilatkozat

Alulírott, Birtók Vanessza, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.