

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II
Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний № _____

Кваліфікаційна робота
АНАЛІЗ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ОСНОВ КОМБІНАТОРИКИ ТА
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ШКОЛАХ УКРАЇНИ ТА УГОРЩИНИ

Мозговой Іштван Степанович

Студент II-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: магістр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 3 від 17 жовтня 2022 року

Науковий керівник:

Дзямко Вікторія Йосипівна
кандидат педагогічних наук, доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики :

Кучінка Каталін Йозефівна
к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _____, «__» _____ 202_ року

Протокол № _____ / 202_

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

**АНАЛІЗ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ОСНОВ КОМБІНАТОРИКИ ТА
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ШКОЛАХ УКРАЇНИ ТА УГОРЩИНИ**

Ступінь вищої освіти: магістр

Виконав: студент II-го курсу

Мозговой Іштван Степанович

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Дзямко Вікторія Йосипівна**

кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: **Глебена Мирослава Іванівна**

к.ф.-м.н, доцент

Берегове
2023

ЗМІСТ

ВСТУП	6
ВСТУП УГОРСЬКОЮ	8
I. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА КОМБІНАТОРИКА В УКРАЇНІ	10
1.1. Мета і завдання освітньої галузі “Математика”	11
1.2. Модельні навчальні програми	15
1.2.1. За програмою НУШ.....	15
1.2.2. За програмою 2011 року.....	16
1.3. Теорія ймовірності і комбінаторика в контексті модельних навчальних програм.....	21
II. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА КОМБІНАТОРИКА В УГОРЩИНІ	23
2.1. Мета і завдання освітньої галузі “Математика”	23
2.2. Роль комбінаторики й теорії ймовірностей в NAT Угорщини	25
2.2.1. За NAT 2012 року	25
2.2.2. За NAT 2020 року	25
2.3. Теорія ймовірності і комбінаторика в навчальних планах Угорщини	27
2.3.1. За NAT 2020 року	27
2.3.2. За NAT 2012 року	28
III. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА	34
3.1. Формування вмінь та навичок учнів розв’язувати практичні завдання з теми «Теорія ймовірності та комбінаторика»	34
3.2. Контроль та оцінювання навчальних досягнень учнів з теми «Теорія ймовірності та комбінаторика».....	35
3.3. Експертна оцінка доцільності використання методики вивчення теми «Теорії ймовірностей та комбінаторики»	37
РЕЗЮМЕ	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	40
ВИСНОВКИ	43

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A KOMBINATORIKA ALAPJAINAK ÉS A VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ELMÉLETÉNEK MÓDSZERTANI ELEMZÉSE UKRAJNA ÉS MAGYARORSZÁG ISKOLÁIBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: mesterképzés

Készítette: Mozgovoj István

II. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Dzjámkó Viktória

docens

Recenzens: Hlebena Miroszláva

docens

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS (UKRÁN)	6
BEVEZETÉS (MAGYAR)	8
I. VALÓSZÍNŰGÁSZÁMÍTÁS ÉS KOMBINATORIKA UKRAJNÁBAN	10
1.1. A „Matematika” oktatási terület célja és feladatai.....	11
1.2. Mintatantervek.....	15
1.2.1. A NUS program alapján.....	15
1.2.2. A 2011-es program alapján	16
1.3. A kombinatorika és a valószínűségszámítás témakörök a mintatantervek kontextusában	21
II. VALÓSZÍNŰGÁSZÁMÍTÁS ÉS KOMBINATORIKA UKRAJNÁBAN MAGYARORSZÁGBAN	23
2.1. A „Matematika” oktatási terület célja és feladatai.....	23
2.2. A kombinatorika és a valószínűségszámítás szerepe a Nemzeti alaptantervekben.....	25
2.2.1. A 2012-es Nemzeti alaptanterv alapján	25
2.2.2. A 2020-as Nemzeti alaptanterv alapján	25
2.3. A kombinatorika és a valószínűségszámítás Magyarország tanterveiben...27	
2.3.1. A 2020-as Nemzeti alaptanterv alapján	27
2.3.2. A 2012-es Nemzeti alaptanterv alapján	28
III. GYAKORLATI RÉSZ	34
3.1. A tanulók gyakorlati feladatok megoldására való képességeinek, készségeinek formálása a "Valószínűségszámítás és kombinatorika" témakörből.....	34
3.2. A tanulók oktatási eredményeinek ellenőrzése és értékelése a "Valószínűségszámítás és kombinatorika" témában	35
3.3. Szakértői értékelés a "Valószínűségszámítás és kombinatorika" témakör tanulmányozására szolgáló módszertan alkalmazásának célszerűségéről	37
REZÜME	39
FELHASZNÁLT IRODALOM	40
ÖSSZEGZÉS	43

ВСТУП

Обрана тема є актуальною з кількох причин. По-перше, комбінаторика та теорія ймовірностей є важливими складовими математичної освіти і є необхідними для розв'язання багатьох прикладних завдань в науці, технології та бізнесі. Ці теми мають широкий діапазон застосування, від прогнозування погоди до криптографії та електронної комерції. По-друге, методика навчання цих тем може суттєво вплинути на якість освіти та розвиток математичних навичок учнів. Якщо методика не є достатньо ефективною, то це відобразиться на результатах учнів. По-третє, аналіз вивчення конкретних тем в різних країнах допомагає виявити різниці в підходах і найефективніші методи.

Метою роботи є проаналізувати методичні особливості основ комбінаторики та теорії ймовірностей в школах України та Угорщини. Відповідно до мети були поставлені завдання дослідження:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну та науково-педагогічну літературу з теми дослідження
2. Дослідити специфіку навчання комбінаторики та теорії ймовірностей учнями України та Угорщини
3. Проаналізувати діючі програми та розглянути підручники з теми дослідження
4. Виявити методичні особливості вивчення теми «Теорія ймовірності і комбінаторика» у школах України та Угорщини
5. Надати практичні розробки з теми дослідження.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики у молодшій ланці та алгебри і початків аналізу учнів старшої ланки загальноосвітніх шкіл України та Угорщини.

Предмет дослідження – методика вивчення комбінаторики та теорії ймовірностей.

Методи дослідження:

- Теоретичні – системний аналіз психолого-педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми, що вивчається моделювання педагогічних процесів.
- Емпіричні – спостереження за учнями, бесіди з вчителями і викладачами, вивчення передового досвіду учителів математики України та Угорщини, експертна оцінка.

Наукова новизна і теоретичне узагальнення роботи полягає в узагальненні та удосконаленні методичних схем вивчення змістових складових теми «Теорія ймовірності і комбінаторика» та обґрунтуванні доцільності їх упровадження, починаючи з молодшої школи.

Практична цінність. Робота може використовуватись вчителями математики та студентами під час проведення уроків, позакласних заходів у класах різних профілів. Робота складається з вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

BEVEZETÉS

A választott téma több okból is aktuális. Először is, a kombinatorika és a valószínűség-számítás fontos elemei a matematika oktatásnak, és szükségesek a tudomány, a technológia és az üzleti élet számos problémájának megoldásához. Ezek a témák széleskörűen alkalmazhatók, az időjárás-előrejelzéstől kezdve a kriptográfián át az e-kereskedelemig. Az, ahogyan az említett témákat tanítják, jelentős hatással lehet az oktatás minőségére és a diákok matematikai készségeinek fejlődésére. Ha a módszertan nem elég hatékony, az kihat a diákok eredményeire. Továbbá az egyes témák különböző országokban történő tanításának elemzése segít azonosítani a megközelítések közötti különbségeket és a leghatékonyabb módszereket.

A munka célja, a kombinatorika és a valószínűszámítás módszertani sajátosságainak elemzése az ukrainai és magyarországi iskolákban. A kutatási feladatokat a céllal összhangban határoztuk meg:

1. A kutatási témával kapcsolatos pszichológiai, pedagógiai és tudományos szakirodalom elemzése.
2. A kombinatorika és a valószínűségelmélet oktatásának specifikájának tanulmányozása az ukrainai és magyarországi iskolákban.
3. A meglévő programok elemzése és tankönyvek áttekintése
4. Meghatározni a "Valószínűszámítás és kombinatorika" tantárgy oktatásának módszertani jellemzőit az ukrainai és magyarországi iskolákban.
5. A kutatott témakörben óravázlatok kidolgozása

A kutatás objektuma: a matematika tanítása az általános iskolában, valamint az algebra és az analízis kezdetei tanítása a középiskolák felső tagozatos diákjai számára Ukrajnában és Magyarországon.

A kutatás tárgya: a kombinatorika és a valószínűség-számítás tanításának módszertana.

Kutatási módszerek:

- Elméleti - a pedagógiai folyamatok modellezésének problémájával foglalkozó pszichológiai, pedagógiai és oktatási szakirodalom szisztematikus elemzése.

- Empirikus - tanulók megfigyelése, interjúk tanárokkal és oktatókkal, az ukrainai és magyarországi matematikatanárok tapasztalatainak tanulmányozása, szakértői véleménykutatás.

A munka tudományos újdonsága és elméleti általánosítása a "Valószínűségszámítás és kombinatorika" tantárgy tartalmi összetevőinek tanulására szolgáló módszertani sémák összefoglalása és továbbfejlesztése, valamint megvalósíthatóságuk igazolása az általános iskolától kezdve.

A munka felhasználható a matematikatanárok és a hallgatók által a tanórákon, tanórán kívüli foglalkozásokon különböző profilú osztályokban. A dolgozat bevezetésből, 3 fejezetből, következtetésekből, irodalomjegyzékből és melléletekből áll.

I. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА КОМБІНАТОРИКА В УКРАЇНІ

Для повноцінного аналізу навчальних програм і процесів в українській освіті необхідно з'ясувати, яка саме база їх регулює. В першу чергу, це державний стандарт. Він містить вимоги до обов'язкових результатів навчання та компетентностей здобувача загальної середньої освіти відповідного рівня. Документи визначають загальний обсяг навчального навантаження та форми державної атестації здобувачів освіти на відповідному рівні загальної середньої освіти, характеристики змісту навчання, принципи організації освітнього процесу, систему управління змістом освіти, змістові лінії та очікувані результати навчання за освітніми галузями [11]. Державний стандарт загальної середньої освіти також є основою для розроблення освітніх програм.

Освітня програма – це єдиний комплекс освітніх компонентів, спланованих і організованих закладом загальної середньої освіти для досягнення учнями результатів навчання. Міністерство освіти і науки України затверджує типові освітні програми, які спрямовані на реалізацію мети та завдань освітньої галузі.

Заклади загальної середньої освіти можуть використовувати типові або інші освітні програми. Проте програми, що розробляються не на основі типових, потребують окремого затвердження центральним органом забезпечення якості освіти. На основі освітньої програми заклад освіти складає та затверджує навчальний план, який конкретизує організацію освітнього процесу.

Навчальні програми предметів та курсів створюють вчителі на основі Стандарту, або за зразком модельної навчальної програми. [1]

На даний момент, українські освітні програми для середньої та старшої школи складені на основі одного з двох державних стандартів – 2011 року [2] та 2020 року [3]. У даному розділі ми будемо розглядати типові навчальні програми у контексті вивчення окремих розділів математики, а саме теорії ймовірності і комбінаторики.

Слід зазначити, що програми не тільки передбачають інший підхід в навчально-виховному процесі, а й різну тривалість (11 і 12 років відповідно). На сьогоднішній день актуальним для 5-х класів є програма НУШ, яка поступово

вводиться в середній школі з 2022 року. Для 6-11 класів дійсною є попередня освітня програма.

1.1 Мета і завдання освітньої галузі “Математика”

Спершу розглянемо що є завданням математичної галузі в цілому та, зокрема, в основній і старшій школах. Відповідно до постанови “Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти” [2], основною метою освітньої галузі “Математика” є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам’яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

Завданнями освітньої галузі є:

- розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури; [2]
- розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження; [2]
- забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об’єктів, процесів та явищ; [2]
- формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв’язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів; [2]
- розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати го-

ловне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті; [2]

- формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язання математичних задач, обґрунтовувати твердження, розпізнавати логічно некоректні міркування, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації. [2]

Основна школа

Завданнями освітньої галузі, що визначають зміст математичної освіти в основній школі, є:

- розширення знань про число (від вивчених у початковій школі натуральних чисел до дійсних), формування культури усних, письмових, інструментальних, точних і наближених обчислень;[2]
- формування системи функціональних понять, умінь використовувати функції та їх графіки для характеристики залежностей між величинами явищ і процесів;[2]
- забезпечення оволодіння учнями мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебричних виразів, розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи, моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати;[2]
- формування уявлень про математичну статистику і теорію ймовірності як окремі науки, про особливості організації статистичних досліджень, наочне подання статистичних даних, визначення числових характеристик статистичного ряду, понять випадкової події та її ймовірності;
- забезпечення оволодіння учнями мовою геометрії, розвиток просторового уявлення, умінь виконувати геометричні побудови;[2]
- формування знань про геометричні фігури на площині, їх властивості, а також умінь застосовувати вивчене у процесі розв'язування геометричних задач;

- ознайомлення із способами і методами математичних доведень, формування умінь використовувати їх у процесі навчання;[2]
- формування знань про основні геометричні величини (довжина, площа, об'єм, міра кута), способи їх знаходження серед плоских і просторових фігур, формування умінь застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях.[2]

Старша школа

Завданнями освітньої галузі, що визначають зміст математичної освіти у старшій школі, є:

- розширення компетентностей учнів щодо тотожних перетворень виразів (степеневих, логарифмічних, ірраціональних, тригонометричних), розв'язування відповідних рівнянь і нерівностей;[2]
- завершення формування поняття числової функції у результаті вивчення степеневих, показникових, тригонометричних класів функцій, формування вміння їх досліджувати і використовувати для опису і вивчення явищ і процесів;[2]
- ознайомлення з ідеями і методами диференціального та інтегрального обчислення, формування елементарних умінь їх практичного застосування;[2]
- формування практичної компетентності щодо розпізнавання випадкових подій, обчислення їх ймовірності, застосування базових статистико-ймовірнісних моделей під час розв'язування навчальних і практичних задач та опрацювання експериментальних даних у процесі вивчення предметів природничого циклу;[2]
- формування системи знань про просторові фігури та їх основні властивості, способи обчислення площ їх поверхонь і об'ємів, а також умінь застосовувати здобуті знання під час розв'язування навчальних і практичних задач;[2]
- формування уявлення про аксіоматичну побудову математичних теорій.[2]

Зазначені завдання виконуються у процесі опанування навчального змісту освітньої галузі “Математика”, в якому виокремлюються такі змістові лінії: числа, вирази, рівняння і нерівності, функції, елементи комбінаторики, теорії ймовірності та математичної статистики, геометричні фігури і геометричні величини. [2]

Очевидно, теорія ймовірності і комбінаторика, що є окремими змістовими лініями освітньої галузі, є її невід’ємною частиною. Серед завдань освітньої галузі, що визначають зміст математичної освіти в основній школі, помітимо формування уявлень про математичну статистику і теорію ймовірності як окремі науки, про особливості організації статистичних досліджень, наочне подання статистичних даних, визначення числових характеристик статистичного ряду, понять випадкової події та її ймовірності.

У старшій школі цікавим для нас є формування практичної компетентності щодо розпізнавання випадкових подій, обчислення їх ймовірності, застосування базових статистико-ймовірнісних моделей під час розв’язування навчальних і практичних задач та опрацювання експериментальних даних у процесі вивчення предметів природничого циклу.

Згідно з Державним Стандартом Нової Української Школи [3], метою математичної галузі є розвиток особистості учня через формування математичної компетентності у взаємозв’язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв’язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті.

Серед компетентнісних вимог НУШ важче віднайти ті, які вимагають виключно знання теорії ймовірності й комбінаторики, адже компетентності зазвичай більш комплексні, поєднують багато видів знань і умінь. Проте серед базових знань, наведених в додатку 7 Державного Стандарту [3], можна знайти пункт «Дані, статистика та ймовірність», де перелічені наступні ключові елементи: «... дані, їх види, представлення та перетворення; статистичне до-

слідження та його основні етапи; числові характеристики вибірки; елементи комбінаторики; ймовірність випадкової події».

Отже, знання теорії ймовірності й комбінаторики вимагаються і новим стандартом, їх актуальність незмінна.

1.2 Модельні навчальні програми

Модельна навчальна програма - документ, що визначає орієнтовну послідовність досягнення очікуваних результатів навчання учнів, зміст навчального предмета, інтегрованого курсу та види навчальної діяльності учнів, рекомендований для використання в освітньому процесі в порядку, визначеному законодавством. [5]

Розглянемо модельні навчальні програми, на основі яких, як правило, складають календарні планування.

1.2.1 За програмою НУШ

Відповідно до Типової освітньої програми [5], загальне рекомендоване навантаження з математики в 5 класі сягає 175 годин на рік.

Назва освітньої галузі	5 клас			
	Навчальне навантаження	5 клас		
		рекомендоване	мінімальне	максимальне
Математична	на тиждень	5	4	6
	на рік	175	140	210

Табл. 1.1: Загальне навантаження з математики в 5 класі [5]

На сайті МОН України можна знайти низку модельних навчальних програм для математичної освітньої галузі від різних авторів: Беденко та ін.; Бурда, Васильєва; Васишин та ін.; Істер; Мерзляк та ін.; Радченко, Зайцева; Скворцова, Тарасенкова.

На відміну від типових програм на основі попередньої освітньої програми, рекомендована кількість годин до окремої теми не вказана.

Порівняймо теми трьох програм серед вище наведених за допомогою таблиці 1.2.

	Програми		
	Мерзляк та ін.	Істер	Скворцова С.О., Тарасенкова Н.А
Теми	Числа і дії з ними	Узагальнення та систематизація знань за курс початкової школи	Узагальнення та систематизація вивченого в початковій школі
	Рівняння. Вирази	Натуральні числа і дії з ними. Геометричні фігури і величини	Натуральні числа
	Геометричні фігури і величини	Подільність натуральних чисел	Звичайні дроби
	Математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій	Дробові числа і дії з ними	Десяткові дроби
			Відсотки. Середнє арифметичне
			Повторення вивченого

Табл. 1.2: Теми з математики для 5-го класу в модельних навчальних програмах різних авторів [8], [22], [23]

Розглянувши пропонований матеріал до кожної з наведених у таблиці 1.2 змістових ліній ми помітили, що тема «Найпростіші комбінаторні задачі» присутня у розділі «Математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій» [23]. Цю тему також можна віднайти в модельній програмі від Істер [8] у графі додаткові теми. У модельній програмі [22] така тема відсутня.

1.2.2 За програмою 2011 року

Розглянемо загальну кількість уроків в середній і вищій школі за освітньою програмою 2011 року. Як видно з таблиць 1.3 та 1.4, в середній школі щоти-

жневе навантаження в середньому 4 години на тиждень, а в старшій (рівень стандарту) – 3 години.

Освітня галузь	Предмети	Кількість годин на тиждень у класах				
		5	6	7	8	9
Математика	Математика	4	4	-	-	-
	Алгебра	-	-	2	2	2
	Геометрія	-	-	2	2	2

Табл. 1.3: Щотижневе навантаження з математики в 5-9 класах [6]

Предмет	Кількість годин на тиждень у класах	
	10	11
Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія)	3	3

Табл. 1.4: Щотижневе навантаження з математики в 10-11 класах [7]

Розглянувши пропонований матеріал до кожної з наведених у таблиці 1.2 змістових ліній ми помітили, що тема «Найпростіші комбінаторні задачі» присутня у розділі «Математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій» [23]. Цю тему також можна віднайти в модельній програмі від Істер [8] у графі додаткові теми. У модельній програмі [22] така тема відсутня.

Розглянемо, які ж саме теми пропонуються навчальною програмою на основі таблиць 1.5.-1.10. Особливо цікавими для нас є таблиці 1.8 та 1.10., з яких слідує, що в 9 класі учні вивчають тему «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики», а в 11 класі – «Елементи комбінаторики, теорії ймовірності і математичної статистики».

Тема	Пропонована кількість годин
Подільність натуральних чисел	10
Звичайні дроби	26
Відношення і пропорції	24
Раціональні числа та дії з ними	40

Табл. 1.5: Теми з математики в 6 класі [9]

Предмет	Тема	Пропонована кількість годин
Алгебра	Цілі вирази	30
	Функції	10
	Лінійні рівняння та їх системи	18
Геометрія	Елементарні геометричні фігури та їх властивості	8
	Взаємне розміщення прямих на площині	12
	Трикутники, ознаки рівності трикутників	22
	Коло і круг	8

Табл. 1.6: Теми з алгебри та геометрії в 7 класі [9]

Предмет	Тема	Пропонована кількість годин
Алгебра	Раціональні вирази	24
	Квадратні корені, дійсні числа	10
	Квадратні рівняння	16
Геометрія	Чотирикутники	22
	Подібність трикутників	10
	Розв'язування прямокутних трикутників	14
	Многокутники. Площі многокутників	12

Табл. 1.7: Теми з алгебри та геометрії в 8 класі [9]

Предмет	Тема	Пропонована кількість годин
Алгебра	Нерівності	14
	Квадратична функція	20
	Числові послідовності	10
	Основи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики	8
Геометрія	Координати на площині	8
	Вектори на площині	12
	Розв'язування трикутників	10
	Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга	10
	Геометричні переміщення	6

Табл. 1.8: Теми з алгебри та геометрії в 9 класі [9]

Предмет	Тема	Пропонована кількість годин
Алгебра і початки аналізу	Функції, їхні властивості та графіки	15
	Тригонометричні функції	18
	Похідна та її застосування	14
Геометрія	Паралельність прямих і площин у просторі	17
	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	17
	Координати і вектори	10

Табл. 1.9: Теми з алгебри та геометрії в 10 класі [10]

Предмет	Тема	Пропонована кількість годин
Алгебра і початки аналізу	Показникова та логарифмічна функції	16
	Інтеграл та його застосування	10
	Елементи комбінаторики, теорії ймовірності і математичної статистики	10
Геометрія	Многогранники	14
	Тіла обертання	12
	Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл	11

Табл. 1.10: Теми з алгебри та геометрії в 11 класі [10]

1.3. Теорія ймовірності і комбінаторика в контексті модельних навчальних програм

На основі попередньо наведених таблиць можемо зробити висновок, що модельні навчальні програми передбачають вивчення теорії ймовірності та комбінаторики в 5 класі, як додаткової теми, а також в 9 і 11 класах. Проте не слід відкидати й інші класи, адже, як показує аналіз підручників, тему з теорії ймовірності можна знайти і в підручнику для 6 класу.

Якщо слідувати навчальній програмі, то в 5 класі учнів знайомляться з комбінаторними задачами. Потім, в 9 класі вивченню комбінаторики, теорії ймовірності і статистики відводиться цілий розділ з наступними темами: «Основні правила комбінаторики», «Частота та ймовірність випадкової події», «Початкові відомості про статистику», «Способи подання даних та їх обробки». Засвоївши матеріал, учень:

1. наводить приклади: випадкових подій, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, застосування правил комбінаторики
2. пояснює, що таке: частота випадкової події, ймовірність випадкової події
3. знаходить, відбирає і впорядковує інформацію з доступних джерел
4. розв'язує задачі, що передбачають:
 - використання комбінаторних правил суми та добутку;
 - знаходження ймовірності випадкової події;
 - обчислення частоти випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків
5. розв'язує сюжетні задачі на
 - розрахунок та аналіз фінансової спроможності родини;
 - розрахунок обсягу сплачених податків;
 - прийняття рішень стосовно особистих та колективних фінансових питань тощо

В 11 класі розділ «Елементи комбінаторики, теорії ймовірності і математичної статистики» містить наступні теми: «Елементи комбінаторики. Перестановки, розміщення, комбінації (без повторень)», «Класичне визначення ймовірності випадкової події», «Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку».

Засвоївши даний матеріал, учень:

1. розуміє що таке перестановки, розміщення, комбінації (без повторень), класичне визначення поняття ймовірності, що таке генеральна сукупність та вибірка, означення середнього значення, моди та медіани вибірки
2. обчислює відносну частоту події; кількість перестановок, розміщень, комбінацій; ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами;
3. пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки;
4. знаходить числові характеристики вибірки даних.
5. застосовує ймовірнісні характеристики навколишніх явищ для прийняття рішень

II. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ ТА КОМБІНАТОРИКА В УГОРЩИНІ

Ознайомившись з структурою української законодавчої бази щодо державних стандартів і освітніх програм, можна помітити певні паралелі в процесі дослідження угорських реалій.

В Угорщині існує аналог державних стандартів - національна базова освітня програма (з угор. *Nemzeti Alaptanterv, NAT*). Цей комплексний документ публікується в “*Magyar Közlöny*” - офіційному державному виданні - у вигляді наказу, що прийнятий урядом. В Угорщині на сьогодні дійсні два таких документи - 2012 та 2020 року видання.

В угорській системі немає прямого аналогу освітньої програми, навчальні програми з окремих предметів (угор. *kerettanterv*) складаються на базі NAT. На основі навчальних програм публікуються рекомендовані календарні планування.

2.1 Мета і завдання освітньої галузі “Математика”

Відповідно до NAT 2012 року [12], найважливішою метою навчання математики є те, щоб учень:

- відчув цінності, корисність і красу математики;
- пізнав природу математичного мислення та основні характеристики математики;
- розвинув навички розуміння тексту, створення тексту та абстрагування під час усного та письмового застосування мови та символів математики;
- розвивати навички розрахунків, моделювання, розв’язування задач і прийняття рішень;
- розвивати своє логічне, точне, креативне, дискусійне, стратегічне та організаторське мислення;
- отримати практичні знання.

Згідно з NAT 2020 року [13], метою навчання математики в школі є створення достовірного уявлення про математику як систему знань і як специфічну пізнавальну, мисленнєву та інтелектуальну діяльність людини. Вивчення математики також формує та збагачує особистість в емоційному та мотиваційному аспектах, розвиває незалежне, організоване мислення та створює знання, які можна застосувати. Розвиток математичного мислення підвищує загальну культуру мислення.

Структура завдань з розвитку учня:

1. Орієнтування

1.1 Орієнтування в просторі

1.2 Орієнтування в часі

1.3 Орієнтування в світових метриках

2. Пізнання

2.1 Набуття досвіду: усвідомлення, збереження, ділення, виділення, інтерпретація, розуміння досвіду

2.2 Уява (слідuje, створює)

2.3 Пам'ять

2.4 Мислення

2.5 Структуризація знань

2.6 Використання носіїв знань

3. Використання здобутих знань

4. Вирішення проблем і задач

5. Творчість і креативність: самостійна творчість, на базі власних планів; творчість в рамках певних правил; зміна структури

6. Вольова та емоційна регуляція, здатність до самовдосконалення і цінності, пов'язані зі співпрацею з іншими

6.1 Комунікація

6.2 Співпраця

6.3 Мотивованість

6.4 Самопізнання, самооцінка, рефлексія, саморегулювання

7. Набуття математичного досвіду, принципи побудови математики [13]

2.2. Роль комбінаторики й теорії ймовірностей в NAT Угорщини

2.2.1. За NAT 2012 року

Угорська програма 2012 наголошує на вивченні теорії ймовірності і комбінаторики в кількох місцях. Наприклад, серед математичних компетентностей блоку “Пізнання”: “Перебирання всіх випадків, аргументація на базі особисто обраних і змінених умов, параметрів, бачень. (Наприклад, комбінаторика, рівняння, побудови). Блок “Мислення” передбачає розвиток “ймовірнісного і статистичного” мислення. [12]

Також, серед тем для вивчення у 5-8 класах можемо знайти:

1. Комбінаторика: завдання на перестановки і вибір елемента переліченням всіх можливих випадків.
2. Теорія ймовірностей: Експерименти на ймовірність випадкових подій, запис результатів. Частота події. Обчислення відносної частоти події. [12]

У 9-12 класах:

1. Комбінаторика: перестановки і вибір елементів скінченої вибірки.
2. Елементи теорії ймовірностей:
 - Випадкова подія, експеримент
 - Відносна частота і ймовірність
 - Обчислення класичної ймовірності [12]

2.2.2. За NAT 2020 року

Тут серед основних тем як в 5-8 класах, так і в 9-12, присутні “Методики мислення - комбінаторика, графи” і “Статистика і теорія ймовірності”. [13] Відповідні

результати, які очікуються програмою по завершенню навчально-виховної роботи у 5-8 класах, наступні:

1. Сортування

- виконує експерименти і грає в ігри на теорію ймовірностей, плано-мірно збираючи дані, сортує їх і зображає в електронному вигляді.

2. Ймовірнісне мислення

- в іграх на теорію ймовірностей розуміє можливі результати, у процесі гри слідує стратегії
- знає поняття частоти і відносної частоти випадкової події. Ці знання використовує для
- формування тверджень про “неможливе”, “вірогідне”, “більш/менш вірогідне”. [13]

В 9-12 класах:

1. Комбінаторика

- Розв'язує завдання на перестановки і вибір елементів [13]

2. Обчислення ймовірностей

- Учень за власним досвідом, розмірковуючи, “вгадує” результат випадкової події
- Знає і використовує класичну вірогіднісну модель і формулу Лапласа
- Сортує дані випадкових експериментів, рахує відносну частоту подій, при великій кількості даних використовує компютер.
- Розглядаючи конкретне випробування, учень розрізняє і використовує поняття події, елементарної події, простору елементарних подій, відносної частоти, ймовірності, несумісних подій та незалежних подій.
- Знає і в простих випадках використовує геометричну модель ймовірності

- Знаходить ймовірність події, розрізняючи де слід використати розміщення, а де комбінацію [13]

Можемо зробити висновок, що тематика розділів теорії ймовірностей і комбінаторики широко представлена в обох стандартах НАТ Угорщини.

2.3. Теорія ймовірності і комбінаторика в навчальних планах Угорщини

Спершу слід зазначити, що в 2022-23 навчальному році, 5-7 класи Угорщини навчаються за НАТ 2020 року, а старші класи за попереднім стандартом.

2.3.1. За НАТ 2020 року

У 5-6 класах кількість уроків математики в Угорщині – 272 годин. Наведена кількість уроків до кожної теми є рекомендацією. Для засвоєння нових знань з передбачених тем для більшості учнів достатньо 4/5 наданих годин, тому решту уроків можна присвятити повторенню, практичному застосуванню знань, роботі з обдарованими учнями і перевірці знань. [14] Це твердження є дійсним і для наступних таблиць, які вказують на пропоновану кількість уроків до тем згідно з НАТ 2020 року.

Тема	К-сть годин
Сукупності	10
Математична логіка, комбінаторика	10
Натуральні числа, відомості з теорії чисел	20
Дії з натуральними числами	16
Цілі числа; дії з цілими числами	18
Звичайні дроби, десяткові дроби, раціональні числа	18
Дії з звичайними дробами	18
Дії з десятковими дробами	14
Відношення, відсотки	20
Прості текстові задачі	20
Підготовка до вводу поняття функції	10

Тема	К-сть годин
Послідовності	8
Вимірювання та одиниці вимірювання	16
Геометричні фігури на площині	18
Трансформації, побудови	20
Просторова геометрія	16
Описова статистика	10
Теорія ймовірностей	10
Всього:	272

Табл. 2.1: Теми для вивчення в 5-6 класах [14]

Тема	К-сть годин
Сукупності, числові сукупності	12
Математична логіка, комбінаторика, графи	18
Відомості з теорії чисел, степінь, квадратний корінь	18
Відношення, відсотки	22
Підготовка до текстових задач	16
Текстові задачі	22
Підготовка до вводу поняття функції	12
Фігури на площині	20
Трансформації, побудови	20
Просторова геометрія	20
Описова статистика	12
Теорія ймовірностей	12
Всього:	204

Табл. 2.2: Теми для вивчення в 7-8 класах [14]

2.3.2 За NAT 2012 року

У 7-8 класах, крім наведених у таблиці 2.3 годин, додатково передбачається 12 годин для перевірки знань і 6 уроків для повторення і систематизації.

Тема	К-сть годин
Методи мислення, множини, математична логіка, комбінаторика, графи	7
Алгебра і теорія чисел	81
Функції, елементи аналізу	25
Геометрія	50
Статистика, теорія ймовірності	13
Всього:	176

Табл. 2.3: Теми для вивчення в 7-8 класах [15]

У 9-10 класах, крім наведених у таблиці 2.4 годин, додатково передбачається 10 годин для перевірки знань і 12 уроків для повторення і систематизації.

Тема	К-сть годин
Методи мислення і пізнання	20
Арифметика, алгебра	66
Тотожності, функції, послідовності	16
Геометрія	60
Статистика, теорія ймовірності	10
Всього:	172

Табл. 2.4: Теми для вивчення в 9-10 класах [16]

У 11-12 класах, крім наведених у таблиці 2.5 годин, додатково передбачається 12 годин для перевірки знань і 5 уроків для повторення і систематизації в 11 класі.

Тема	К-сть годин
Методи мислення і пізнання	11
Арифметика, алгебра	23
Тотожності, функції, послідовності	28
Геометрія	42

Тема	К-сть годин
Статистика, теорія ймовірності	20
Повторення і систематизація	40
Всього:	164

Табл. 2.5: Теми для вивчення в 11-12 класах [16]

На основі наведених таблиць можемо зробити висновок, що теорія ймовірності і комбінаторика є невідомою частиною вивчення математики на протяжці всього шляху учня. Згідно з програмою, учні вивчають ці розділи математики в кожному класі середньої і вищої школи. Комбінаторика часто групується з математичною логікою, множинами, “методами мислення”, а теорія ймовірностей зі статистикою. Школяр, що закінчив навчання в 6 класі, згідно з модельною навчальною програмою: Опанувавши розділ «Математична логіка і комбінаторика» вміє:

- Визначити істинність логічного твердження
- Впорядкувати елементи невеликих сукупностей, які базуються на прикладах з життя
- Перебирання всіх можливих випадків за допомогою таблиць, графів, систематичного списку.
- Грати в ігри на стратегію, логіку, фінанси, настільні ігри. [14, ст. 5]

Опанувавши розділ «Теорія ймовірностей» вміє:

- Грати в ігри на теорію ймовірностей і робити експерименти, під час яких школяр планомірно збирає, аналізує і відображає дані за допомогою електронних програм.
- В іграх на теорію ймовірностей розуміє можливі результати й слідує деякій стратегії
- Знайомий з поняттям частота і відносна частота. При формуванні тверджень використовує вирази «достовірне», «неможливе» і «більш вірогідне». [14]

Після 8 класу, закінчивши середню школу: Опанувавши розділ «Математична логіка, комбінаторикаю, графи» вміє:

- Формулювати істинні і хибні твердження
- На основі вивчених шаблонів розуміє і може скласти доведення з кількох кроків
- Для переконання товаришів правильно використовує математичні терміни, формулюючи логічні аргументи
- Розв'язуючи завдання на обчислення використовує методи для розгляду всіх можливих випадків [14]

Опанувавши розділ «Теорія ймовірностей» вміє:

- Грати в ігри на теорію ймовірностей і робити експерименти, під час яких школяр планомірно збирає, аналізує і відображає дані за допомогою електронних програм.
- В іграх на теорію ймовірностей розуміє можливі результати й слідує деякій стратегії
- Знайомий з поняттям частота і відносна частота. При формуванні тверджень використовує вирази «достовірне», «неможливе» і «більш вірогідне». [14]

В 9-10 класах завданням розділу «Статистика, теорія ймовірності» є:

- Поглиблення знання ймовірності:
 - Систематизація знань, здобуття нового досвіду завдяки експериментам
 - Оцінка експерименту (відносна частота, розподіл). Висновки
- Діаграми. Створення діаграм. Читання і створення таблиць
- Використання комп'ютеру для обробки даних [16]

Також завдання цього циклу демонструє таблиця 2.6.

Знання	Вимоги до розвитку	Інтердисциплінарний зв'язок
Випадкова подія. Вірогідність випадкової події	Подання вірогідності випадкової події на основі симетрії, логіки чи експерименту. Експерименти, ігри в групах.	Біологія: спадковість, мутації

Табл. 2.6: Завдання до теми “Статистика, теорія ймовірності” в 9-10 класах [16]

В 11-12 класах завданням розділу “Статистика, теорія ймовірності” є:

- Введення поняття операцій над подіями
- Математична абстракція: розвиток математичного поняття ймовірності

Завдання цього циклу яскраво демонструє таблиця 2.7.

Знання	Вимоги до розвитку	Інтердисциплінарний зв'язок
Операції над подіями. Приклади суми, добутку, знаходження протилежної подій. Елементарні події. Складання подій у вигляді суми елементарних подій. Приклади залежних і незалежних подій.	Усвідомлення зв'язків між різними розділами математики. Зв'язати логічні операції, операції із множинами та операції між подіями.	Інформатика: опис процесів і зв'язків логічними схемами

Знання	Вимоги до розвитку	Інтердисциплінарний зв'язок
Випадкова подія. Ймовірність. Демонстрація на прикладах математичного означення ймовірності	Зв'язок між відносною частотою та ймовірністю, обчисленою за допомогою випадкових експериментів.	
Класична ймовірність. Історія математики: Альфред Реньї	Зв'язок між моделлю і дійсністю	
Прості ймовірнісні задачі.	Застосування вивчених комбінаторних методів у розв'язуванні задач	Фізика: вплив дослідження космосу на нашу буденність, ймовірність зустрічі

Табл. 2.7: Завдання до теми “Статистика, теорія ймовірності” в 11-12 класах [16]

Можна також помітити різкий скачок вимог між 5-8 і 9-12 класами, де вже недостатньо будувати стратегії в іграх на вірогідність, а потрібно мати певні академічні пізнання, такі як знання понять і формул. При вивченні теорії ймовірностей і статистики й надалі ставиться яскравий акцент на експериментах і здобутті досвіду, таким чином створюючи в учня зв'язок між теорією і звичайними явищами, задачами з життя.

III. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

3.1 Формування вмінь та навичок учнів розв'язувати практичні завдання з теми «Теорія ймовірності та комбінаторика»

Наведемо кілька розробок до української та угорської програми. Розробки складені на основі матеріалу і пропозицій з діючих підручників, оскільки вони є основним обладнанням кожного уроку. Розроблені плани уроків для 5-6 і 11 класів українських та угорських шкіл, про які йде мова в наступних абзацах, розміщені в додатках А-Г.

Проаналізувавши матеріали з відповідних підручників ми прийшли до висновку, що тема «Комбінаторні задачі» пропонується для 5-х класів українських шкіл, в угорських підручниках вона пропонується лише з 6 класу. Проте з поняттям шансу, вірогідності угорські школярі зустрічаються ще в 5 класі, в той час як в Україні це відбувається лише в 6 класі. Легко помітити закономірність: темі з поняттям вірогідності завжди передують вивчення дробів. Пропоноване підручниками введення понять сильно різняться, що покажуть розробки.

Оскільки в українській мережі доступно чимало розробок від вчителів, то для наочності ми вирішили взяти одну з таких [17], складену на основі матеріалу з підручника з математики для 6-го класу [18], і доповнити її, зокрема інтерактивним введенням поняття за допомогою експерименту (Додаток А). Як ми попередньо з'ясували, угорська програма передбачає ймовірнісні ігри. На основі матеріалу з підручника [19] складено розробку в додатку Б.

Оскільки учні як українських, так і угорських шкіл зустрічаються з поняттям перестановок, розміщень та комбінацій до закінчення базової середньої освіти, то можна розглянути комбінований урок, де пригадаємо вищезазначені поняття через розв'язання відповідних задач, виводячи математичні формули після успішного рішення завдань. Хоча учні вже в якійсь мірі знайомі з темою, проте доцільно не присвячувати перший урок одразу всім трьом групам задач, зосередившись на одній або двох типах. Основним матеріалом для розробок з додатків В та Г слугували підручники [20] та [21].

3.2 Контроль та оцінювання навчальних досягнень учнів з теми «Теорія ймовірності та комбінаторика»

Основну роль у системі контролю за якістю навчання виконує тематичний контроль. Найефективнішим засобом контролю результатів навчання з теми «Теорія ймовірності та комбінаторика» є система завдань, які відображають основні види математичної діяльності учнів з теми: знаходження ймовірності за класичним означенням, використання відповідних комбінаторних сполук і правил суми та добутку. Такі контрольні роботи значною мірою характеризують оволодіння учнями і теоретичним матеріалом, а саме поняттям події та їх видами, властивостями подій, простором елементарних подій. Контрольна робота також має забезпечити якісну диференціацію результатів навчання з теми.

На основі опрацьованих матеріалів наведемо критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з теми «Теорія ймовірності та комбінаторика» (табл. 3.2.1. та 3.2.2.).

Рівні навчальних досягнень	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень
Початковий	1	Знає поняття події
	2	Знає види подій (вірогідна, неможлива, випадкова)
	3	Вміє наводити приклади вірогідних, неможливих, випадкових подій.
Середній	4	Знає поняття частоти і відносної частоти події.
	5	Знає класичне означення ймовірності.
	6	Вміє обчислювати ймовірність випадкової події за класичною формулою ймовірності.
Достатній	7	Обчислює кількість можливих елементарних подій, якщо в задачі це явно не вказується.
	8	Розуміє що таке перестановки, розміщення, комбінації
	9	Знає і використовує комбінаторні правила суми і добутку
Високий	10	Вміє обчислювати кількість перестановок, комбінацій, розміщень, обирати відповідну сполуку.

Рівні навчальних досягнень	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень
	11	Розв'язує задачі (в тому числі інтердисциплінарні), використовуючи елементи комбінаторики і теорії ймовірності.
	12	Розв'язує олімпіадні задачі та завдання підвищеної складності

Табл. 3.1: Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів України

Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень
1	Знає поняття події, види подій. Вміє наводити приклади вірогідних, неможливих, випадкових подій.
2	Знає поняття частоти і відносної частоти події. Знає класичне означення ймовірності. Вміє обчислювати ймовірність випадкової події за класичною формулою ймовірності. Грає в ймовірнісні ігри.
3	У ймовірнісних іграх розуміє можливі результати, слідує стратегії. Обчислює кількість можливих елементарних подій, якщо в задачі це явно не вказується.
4	Знає і використовує комбінаторні правила суми і добутку. Використовує формулу Лапласа. Розуміє що таке перестановки, розміщення, комбінації і вміє обчислювати їх кількість.
5	Обирає правильну сполуку для розв'язування задачі. Розв'язує задачі (в тому числі інтердисциплінарні), використовуючи елементи комбінаторики і теорії ймовірності. Розв'язує завдання підвищеної складності

Табл. 3.2: Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів Угорщини

3.3. Експертна оцінка доцільності використання методики вивчення теми «Теорії ймовірностей та комбінаторики»

З метою перевірки доцільності впровадження у процес навчання теми «Теорії ймовірностей та комбінаторики» та визначення раціональності і ефективності, було проведене експертне опитування (Додаток Д). Нами опитано 10 експертів, які мають педагогічний стаж 10 і більше років, досвід вчителями математики та виявили бажання взяти участь у дослідженні. Результати опитування узагальнені у таблиці 3.3.

Методична схема	Відповіді експертів	
	Так	Ні
Введення теорії ймовірностей в молодших класах	70%	30%
Введення комбінаторики в молодших класах	70%	30%
Проведення експериментів, випробувань на уроках	100%	0%
Проведення ймовірнісних ігор в процесі уроку	80%	20%
Використання допоміжного обладнання при вивченні комбінаторики (різнокольорові палички, карти, кубики)	90%	10%
Використання цифрових матеріалів при вивченні теорії ймовірностей (відео- та інтерактивні матеріали)	90%	10%

Табл. 3.3: Результати опитування

Також результати ілюструє діаграма на рис. 1.

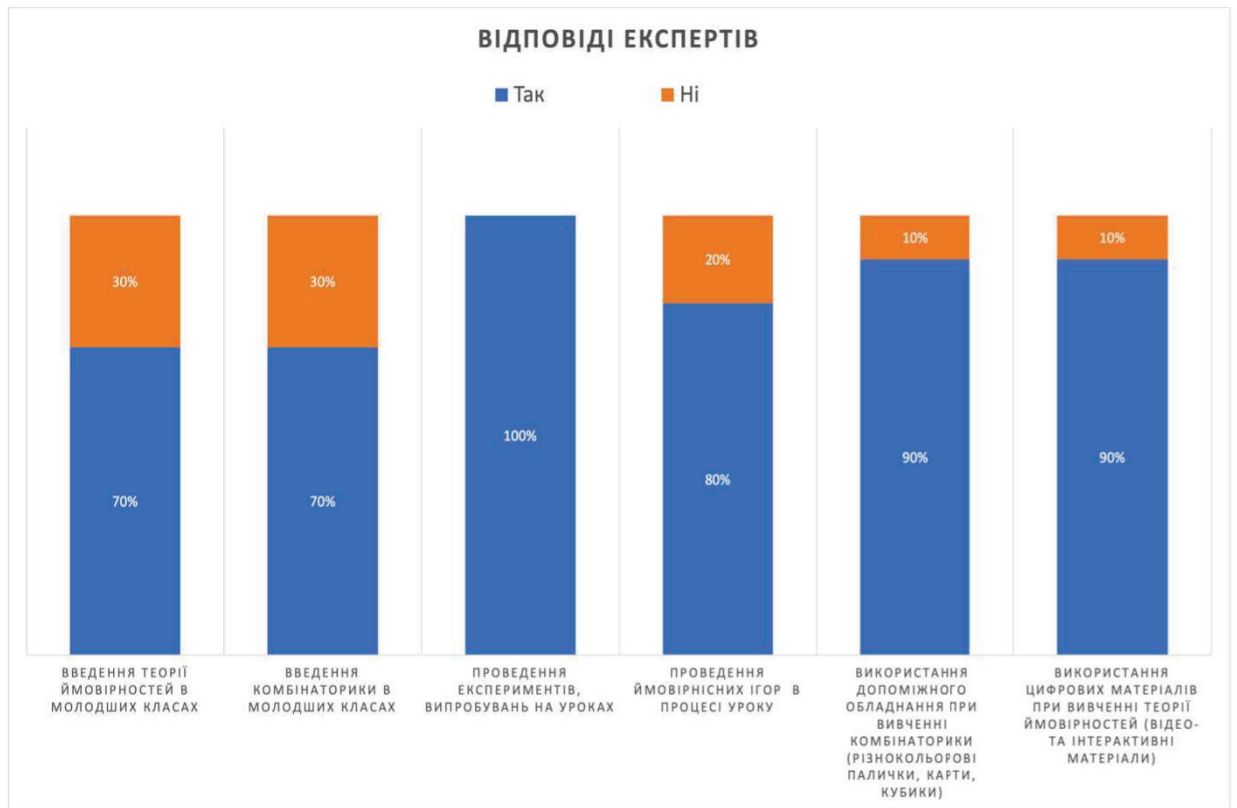


Рис. 1: Відповіді експертів

Отже, робимо висновок про доцільність впровадження запропонованих у роботі методичних схем до вивчення теми «Теорія ймовірності та комбінаторика».

РЕЗЮМЕ

Таким чином, теорія ймовірності і комбінаторика – важливі розділи математики, які мають чимало застосувань у різних сферах нашого життя. Тому ефективніше вивчення даних тем допомагає виховати кращих спеціалістів у різних галузях.

У даній роботі ми проаналізували методики навчання основ комбінаторики та теорії ймовірностей в школах України та Угорщини. Для цього ми проаналізували відповідну психолого-педагогічну та науково-педагогічну літературу, навчальні програми, а також розглянули шкільні підручники.

На базі опрацьованого матеріалу, а також спираючись на досвід колег, ми склали практичні розробки, критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з даних тем, а також розробили анкету з питаннями до експертів. На основі проведеного дослідження були надані практичні рекомендації з теми дослідження, а саме: введення по можливості цих тем в молодшій школі, використання наочних і цифрових засобів, проведення випробувань задля конкретно-індуктивного введення відповідних понять, гра в ймовірнісні ігри.

Отже, проведений аналіз методики навчання основ комбінаторики та теорії ймовірностей в школах України та Угорщини дозволив виявити різноманітні методичні особливості та зробити відповідні практичні рекомендації, що будуть корисні студентам та починаючим вчителям математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Навчальні програми – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>
- [2] Державний стандарт 2011 року – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text>
- [3] Державний стандарт 2020 року – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#n16>
- [4] Про нову українську школу – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola>
- [5] Типова освітня програма для 5-9 класів закладів загальної середньої освіти (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/uploads/public/602/fd3/0bc/602fd30bccb01131290234.pdf>
- [6] Типова освітня програма закладів загальної середньої освіти II ступеня (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/typovi-programu-2-11/20180420-tipov-osvitnya-programa-5-9-nmo-405.docx>
- [7] Типова освітня програма закладів загальної середньої освіти III ступеня (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/typovi-programu-2-11/Typova.osv.prohr.ZZSO-III.stupenya.pdf>
- [8] Істер, Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Ister.14.07.pdf>
- [9] Типова навчальна програма з математики для 5-9 класів – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx>

- [10] Типова навчальна програма з математики для 10-11 класів (Рівень стандарту) (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx>
- [11] Про Державні стандарти – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
- [12] NAT 2012 - “Державний стандарт” Угорщини 2012 року – Режим доступу: <http://www.magyarkozlony.hu/pdf/13006>
- [13] NAT 2020 - “Державний стандарт” Угорщини 2020 року – Режим доступу: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiP3en_3Pb9AhUNIMUKHSLzANEQFnoECAkQAQ&url=https%3A%2F%2Fmagyarkozlony.hu%2Fdokumentumok%2F3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f%2Fletoltes&usq=AOvVaw2c-mB7gFb0YcgEbt1iQ2Qx
- [14] Модельна навчальна програма з математики для 5-8 класів загальноосвітніх шкіл за NAT 2020 року – Режим доступу: – Режим доступу: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx
- [15] Модельна навчальна програма з математики для 5-8 класів загальноосвітніх шкіл за NAT 2012 року – Режим доступу: https://kerettanterv.oh.gov.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html
- [16] Модельна навчальна програма з математики для 9-12 класів гімназій за NAT 2012 року – Режим доступу: https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html
- [17] Розробка уроку для 6 класу на тему "Випадкові події. Ймовірність випадкової події" – Режим доступу: <https://naurok.com.ua/vipadkovi-podi-ymovirnist-vipadkovo-podi-91339.html>
- [18] Мерзляк А.Г., Поллогський В.Б., Якір М.С, Математика: підручник для 6 класу загальноосвіт. навч. закладів – Х.: Гімназія, 2014 р. – 400 с.

- [19] Підручник з математики для 5-го класу угорських шкіл – Режим доступу:
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/ОН-МАТ05ТВ__teljes.pdf
- [20] Мерзляк А.Г. та ін., Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту, підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти – Х.: Гімназія, 2019 р. – 208 с.
- [21] Підручник з математики для 11-го класу угорських шкіл – Режим доступу:
https://www.tankonyvkatalogus.hu/site/kiadvany/FI-503011101_1
- [22] Скворцова С.О., Тарасенкова Н.А., Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetar.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Skvortsova.Tarasenkova.14.07.pdf>
- [23] Мерзляк А.Г. та ін., Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» (Державний стандарт базової середньої освіти, 2020 рік) – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetar.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Merzlyak.ta.in.14.07.pdf>

ÖSSZEGZÉS

A valószínűszámítás elmélete és a kombinatorika tehát a matematika fontos ágai, amelyeknek számos alkalmazása van az életünk különböző részein. Ezért e témakörök hatékonyabb oktatása hozzájárul ahhoz, hogy még jobb szakembereket képezzünk a tudomány és ipár számos területein.

A munkában elemeztük a kombinatorika és a valószínűszámítás alapjainak tanítási módszereit az ukrajnai és magyarországi iskolákban. Ehhez megvizsgáltuk a vonatkozó pszichológiai- és tudományos pedagógiai szakirodalmat, tanterveket és iskolai tankönyveket.

Az elemzett anyag, valamint kollégáink tapasztalatai alapján készítettünk óravázlatokat, kritériumokat dolgoztunk ki a diákok tanulmányi eredményeinek értékelése céljából e témakörökben, továbbá kérdőívvel is készültünk, amely segítségével a szakértők véleményét mértük fel. A kutatás alapján gyakorlati tanácsokat fogalmaztunk meg, amelyek elősegíthetik az említett témakörök oktatását. Elsősorban az említett témakörök alsó tagozatba való bevezetését, továbbá kísérletek, próbák végrehajtása az induktív fogalombevezetés érdekében, valószínűségi játékok alkalmazását találtuk célszerűnek.

Így az ukrajnai és magyarországi iskolákban a kombinatorika és a valószínűszámítás elmélete tanítási módszereinek elemzése lehetővé tette, hogy azonosítsuk a különböző módszertani jellemzőket, és megfelelő gyakorlati javaslatokat fogalmazzunk meg, amelyek a továbbiakban hasznosak lehetnek a hallgatók és a kezdő matematikatanárok számára.

Ім'я користувача:
Пап Габрієлла

Дата перевірки:
29.05.2023 15:45:39 CEST

Дата звіту:
29.05.2023 15:55:35 CEST

ID перевірки:
1015301823

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
100011749

Назва документа: Mozgovej_István

Кількість сторінок: 51 Кількість слів: 8689 Кількість символів: 61184 Розмір файлу: 2.41 MB ID файлу: 1014973508

19.9% Схожість

Найбільша схожість: 4.03% з Інтернет-джерелом (<http://kropivnitsky.maup.com.ua/assets/files/11-klas-matematika-me...>)

19.4% Джерела з Інтернету

867

Сторінка 53

2.54% Джерела з Бібліотеки

30

Сторінка 59

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

4.2% Вилучень

Деякі джерела вилучено автоматично (фільтри вилучення: кількість знайдених слів є меншою за 8 слів та 0%)

4.2% Вилучення з Інтернету

34

Сторінка 60

Немає вилучених бібліотечних джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи

1887

Nyilatkozat

Alulírott, Mozgovoj István, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

ДОДАТКИ

Розробка для 6 класу української школи

Тема: Випадкові події. Ймовірність випадкової події

Мета: ввести поняття про випадкову, вірогідну і неможливу події; ймовірність випадкової події; навчити учнів класифікувати події за ступенем ймовірності їх настання, розвивати пізнавальний інтерес та логічне мислення.

Тип уроку: формування компетентностей

Обладнання: підручник, монети (справжня і з двома орлами / решками)

Хід уроку

I. Організаційний момент. Перевірка домашнього завдання

II. Мотивація навчальної діяльності

У повсякденному житті нас оточують події. Восени падають листя, вранці автобус привозить нас до школи, улюблений футбольний клуб стає чемпіоном цього сезону.

Що спільного в наведених подіях? Чим вони відрізняються? Спробуйте навести приклади подій!

Наводимо приклади подій і говоримо про шанси того, що вони відбудуться:

- 1) Після зими настає літо.
- 2) Влітку у школярів канікули.
- 3) У результаті кидання грального кубика випаде число, що більше за 7.
- 4) Чи викличуть вас завтра на уроці математики до дошки.
- 5) Чи можна з мішечка з білими кульками дістати червону.

III. Формування нових знань

1. Класифікація подій

Усі події (тобто явища, про які можна сказати, що вони відбудуться або не відбуваються) поділяються на:

- 1) вірогідні (достовірні) — події, які обов'язково відбудуться за певних умов;
- 2) неможливі — події, які не відбудуться за жодних умов;
- 3) випадкові — події, які можуть відбутися або не відбутися за певних умов.

2. Експеримент

Беремо до рук монету і питаємо у класу, якою подією є випадання орла чи решки.

Після відповіді підкидуємо монету кілька разів і запевняємось у цьому. Потім беремо

іншу монету (несправжню) і повторюємо експеримент. Спільно доходимо до висновку, що з монетою щось не те і у випадку нестандартної монети випадання однієї сторони завжди вірогідна подія, а іншої – неможлива.

3. Ймовірність події

Ймовірністю події називають відношення числа сприятливих для цієї події результатів випробувань до числа всіх випробувань.

$$P = \frac{m}{n},$$

де n — кількість усіх випробувань, m — кількість сприятливих умов.

4. Властивості

Якщо подія вірогідна, то $P = 1$. Якщо подія неможлива, то $P = 0$.

IV. Закріплення нових вмінь

Усні вправи

- 1) Які з наведених подій є достовірними, а які неможливими:
 1. з кошика, у якому лежать яблука, дістати банан;
 2. вода кипить при 100° ;
 3. вночі світить сонце;
 4. влітку йде сніг;
 5. після весни настає літо.
- 2) У коробці лежать 6 синіх і 9 зелених куль. Навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля виявиться: а) синьою; б) зеленою; в) синьою або жовтою; г) жовтою.

Письмові вправи

Задача 1. У лотереї розігрується 16 грошових призів по 5000 грн, 20 призів по 1000 грн, 30 призів по 500 грн. Усього випущено 2000 лотерейних білетів. Яка ймовірність, купивши один білет:

- 1) виграти 5000 грн;
- 2) виграти який-небудь приз;
- 3) не виграти жодного призу.

Задача 2. У коробці було 28 карток, пронумерованих числами від 1 до 28. Із коробки взяли навмання одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

- 1) кратне 4;
- 2) яке є дільником числа 42;
- 3) при діленні якого на 9 остача дорівнює 1.

Задача 3. (№ 808) Яка ймовірність того, що при киданні грального кубика випаде кількість очок, що дорівнює: 1) двом; 2) п'яти; 3) непарному числу; 4) числу, яке кратне 6?

Задача 4. (№ 810) Щоб скласти іспит з математики, треба вивчити 30 білетів. Учень вивчив 25 білетів. Яка ймовірність того, що він витягне білет, відповідь на який знає?

Задача 5. (№ 816) З коробки шахів випадково випала одна фігура. Яка ймовірність того, що ця фігура:

- | | |
|-----------------|------------------------|
| 1) білий король | 6) біла фігура |
| 2) король | 7) не пішак |
| 3) кінь | 8) не король |
| 4) білий кінь | 9) не білий ферзь |
| 5) пішак | 10) не слон і не ферзь |

Задача 6. (№ 818) У коробці лежать 5 червоних і 3 жовтих кулі. Яка ймовірність того, що вибрана навмання куля виявиться: 1) жовтою; 2) червоною; 3) синьою?

V. Підсумок уроку

На сьогоднішньому уроці ми познайомилися з поняттям події. Ми з'ясували, що події бувають трьох видів: (учні називають) вірогідні, неможливі, випадкові. (просимо учнів навести кілька прикладів з кожної групи). Також ми ввели поняття ймовірності, під яким розуміємо (учень називає) відношення числа сприятливих для цієї події результатів випробувань до числа всіх випробувань.

VI. Домашнє завдання

§ 3 п. 28 № 809, 811, 813

Розробка для 5 класу угорської школи

Тема: Випадкові події. Ймовірність випадкової події. Частота і відносна частота

Мета: ввести поняття про випадкову, вірогідну і неможливу події; ймовірність випадкової події; навчити учнів класифікувати події за ступенем ймовірності їх настання, розвивати пізнавальний інтерес та логічне мислення.

Тип уроку: формування компетентностей

Обладнання: підручник, гральні кубики та монети (по одному на двох учнів)

I. Організаційний момент.

II. Мотивація навчальної діяльності

У повсякденному житті ми можемо бути впевнені у багатьох речах. Наприклад, якщо ви кинете звичайний кубик, він обов'язково впаде вниз. Такі події називають достовірними подіями. (підкидуємо кубик)

Немає шансів, що кубик стане на одній зі своїх вершин, якщо він впаде на плоску стільницю. Таку подію називають неможливою. Шанс того, що впаде парне чи непарне число становить половину до половини. (кидаємо кубик кілька разів)

Існує ймовірність кинути шістку за допомогою кубика, але це не гарантовано вдасться. Ми говоримо, що такі події є випадковими, адже вони можуть як відбутися, так і ні. (кидаємо кубик).

III. Формування нових знань

Робота в парах, вчитель на дошці фіксує результат однієї команди.

Кожна пара кидає кубик і підраховує, скільки разів за задану кількість кидків впаде деяке число. Завдання – заповнити наступну таблицю подібним чином:

Зі стількох кидків	Випало стільки 5-рок	У такій частині випадків ми отримали 5
10	2	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
20	4	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
30	6	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

40	6	$\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$
50	8	$\frac{8}{50} = \frac{4}{25}$

З таблиці ми можемо прочитати, що частота події «випала 5-ка» з 50 кидків дорівнює 8. Цифра 8 сама по собі не дає нам достатню інформацію, адже ми не знаємо, отримано 8 після 8, 10, 50 або 100 кидків.

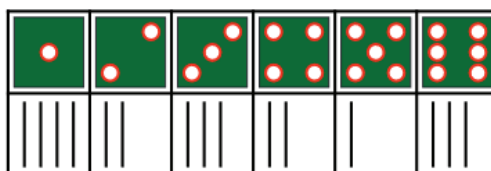
Завжди потрібно знати кількість проведених експериментів, і ми повинні пов'язати з цим частоту події. Тому кажемо, що відносна частота події «випала 5-ка» становить 8 із 50 кидків, тобто ми отримали п'ятірку в $\frac{8}{50}$ усіх спроб. Таким чином ми заповнили третій стовбець нашої таблиці значеннями відносної частоти.

Чим більше ми робимо кидків, тим ближче значення відносної частоти буде коливатись навколо $\frac{1}{6}$. Це не випадково, адже в кубика 6 граней. Число, навколо якого коливається відносна частота, називається ймовірністю. Ми кажемо, що ймовірність події «випала 5-ка» дорівнює $\frac{1}{6}$. Ймовірність часто подається у вигляді дроби.

IV. Закріплення нових вмінь

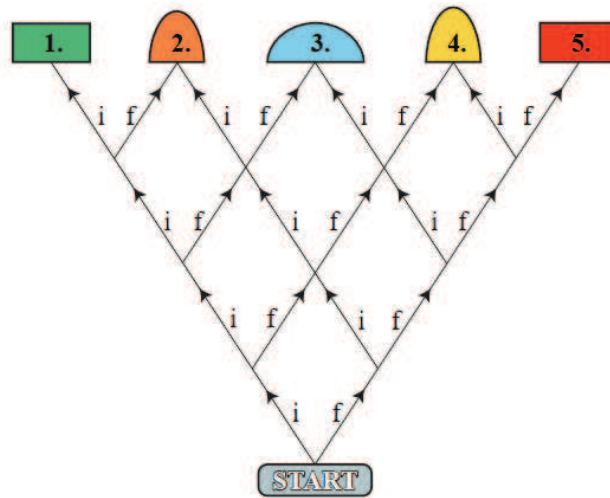
(Завдання з підручника)

1. Андрій кинув кубик 15 разів і отримав наступні результати:



Спробуй кинути кубик 35 раз і запиши результати!


- Запиши дробом, яка частина кидків: А) 1-ця Б) 6-ка В) Парне число Г) Непарне число
 - Що вище: шанс кинути 1 чи кинути 6?
2. Замалюй поле для гри в зошит і спробуй зіграти, використавши гумку у якості фішки.



Правила гри: грайте удвох! По черзі підкидуйте монету. Той, хто викине орел – йде вправо, той, хто решку – наліво. Перед початком вибери ворота, в які хочеш потрапити. Якщо в кінці потрапиш до обраних воріт – можеш записати бал. Запишіть результати в наступну таблицю:

Номер гри	До яких воріт хочеш потрапити?	Я потрапив до цих воріт (запиши число)	Якщо вгадав, запиши сюди бал
1			
2			
І тд.			

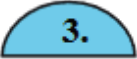
3. Завдання до попередньої гри. Обчисли, скількома способами можна потрапити:


А) у ці  ворота

Г) У ворота такої  форми

Б) у ці  ворота

Д) У ворота такої  форми

В) у ці  ворота

Е) У ворота такої  форми

V. Підсумок уроку

На сьогоднішньому уроці ми познайомилися з поняттям події. Ми з'ясували, що події бувають трьох видів: (учні називають) вірогідні, неможливі, випадкові. (просимо учнів навести кілька прикладів з кожної групи). Також ми спробували виконати кілька експериментів. Ми кидали кубики і монети. Ми подивилися, з якою частотою (і

відносною частотою) отримуємо деякий результат. Що це нам дає? (число, навколо якого коливається відносна частота, називаємо ймовірністю). Яке мінімальне і максимальне значення ймовірності? (0 і 1). Що вони означають? (неможливу і вірогідну подію відповідно).

VI. Домашнє завдання

Навести по 5 прикладів випадкових, вірогідних і неможливих подій. Зробити стовпчасту діаграму відносної частоти подій з першого завдання.

Розробка для 11 класу української школи

Тема: Перестановки. Розміщення

Мета: поглибити знання з теми;

- пригадати вивчене у попередніх класах, навчити краще встановлювати вид сполуки, знаходити кількість сполук за відповідними формулами;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях;
- формувати навички взаємоконтролю і самоконтролю, уміння об'єктивно оцінювати результати індивідуальної роботи.

Тип уроку: комбінований

Хід уроку

I. Організаційний момент. Перевірка домашнього завдання

II. Мотивація навчальної діяльності

III. Спільне розв'язування задач, повторення

Розглянемо наступні задачі:

Задача 1. Зоя, Оля та Ян зайшли до шкільного буфету. Скількома способами вони можуть вишикуватися в чергу? Зрозуміло, що існує 6 варіантів. (Якщо це не очевидно, то маюємо граф або просто перераховуємо всі варіанти, як це зроблено нижче)

Зоя, Оля, Ян

Ян, Зоя, Оля

Оля, Зоя, Ян

Оля, Ян, Зоя

Зоя, Ян, Оля

Ян, Оля, Зоя

Задача 2. Денний розклад містить 7 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 7 уроків були різними? Іншими словами, скільки існує перестановок із 7 уроків?

Подібні задачі називають задачами на знаходження кількості перестановок. Кількість перестановок із n елементів позначають символом P_n . Для будь-якого натурального n

справедлива формула $P_n = n!$. Отже, троє дітей можуть вишикуватися в чергу $3! = 6$ способами, а кількість розкладів із 7 уроків дорівнює $7! = 5040$.

Задача 3. Скількома способами 5 машин можуть вишикуватися в колону?

Розв'язання. У даній задачі треба обчислити кількість перестановок із 5 елементів. Використовуючи відповідну формулу, маємо: $P_5 = 5! = 120$.

Задача 4. За правилами FIFA у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призових місця) між командами?

Розв'язання. Перше місце може посісти будь-яка з 32 команд, друге місце — будь-яка з решти 31 команди, третє — будь-яка з 30 команд, що залишилися. За правилом добутку кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$.

Розв'язавши цю задачу, ми з'ясували, скільки існує способів розмістити на призовому п'єдесталі 3 команди, вибравши їх із 32 учасників. Говорять, що ми знайшли кількість розміщень із 32 елементів по 3 елементи. Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k елементів позначають символом A_n^k і обчислюють за формулою $A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$. Результат, отриманий у задачі про розподіл призових місць, дає змогу зробити висновок, що $A^{32}_3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$.

IV. Закріплення здобутих вмінь

Задача 1. (13.1) Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

Задача 2. (13.2) У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

Задача 3. (13.4) У футбольній команді, яка складається з 11 гравців, потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами можна це зробити?

Задача 4. (13.6) У 9 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?

Задача 5. (13.9) У класі з поглибленим вивченням математики 29 учнів та учениць. Скількома способами можна сформувати команду з 5 осіб для участі в математичній олімпіаді?

Задача 6. (13.12) Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися, а крайні цифри були парними?

V. Підсумок уроку

Сьогодні ми пригадали і попрацювали з перестановками і розміщеннями. Коли ми використовуємо перестановки і як обчислюємо їх? А коли розміщення? Які вони бувають? За якими формулами їх обчислюємо). (учні відповідають своїми словами, з прикладами)

VI. Домашнє завдання

№ 13.3, 13.5, 13.7

Розробка для 11 класу угорської школи

Тема: Перестановки. Розміщення

Мета: поглибити знання з теми;

- пригадати вивчене у попередніх класах, навчити краще встановлювати вид сполуки, знаходити кількість сполук;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях;
- формувати навички взаємоконтролю і самоконтролю, уміння об'єктивно оцінювати результати індивідуальної роботи.

Тип уроку: комбінований

Хід уроку

I. Організаційний момент. Перевірка домашнього завдання

II. Мотивація навчальної діяльності

III. Спільне розв'язування задач, повторення

Перестановки.

Задача 1. У цирку 5 тварин крокують один за одним: тигр, лев, пантера, крокодил і слон.

- 1) Скількома існує різних послідовностей, в яких вони можуть крокувати?
- 2) Скільки існує послідовностей, у яких тигр і лев стоять безпосередньо один за одним?
- 3) Скільки існує послідовностей, у яких тигр і лев не стоять один за одним?
- 4) Скільки існує різних послідовностей, в яких вони можуть крокувати по колу, якщо жоден із них не вважається «першим»?

Розв'язання

- 1) Кількість різних послідовностей $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Якщо це не очевидно, то спростуємо задачу до трьох звірів і маємо граф, перебираємо разом всі варіанти і повертаємося до оригінальної умови. Добуток $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ позначимо як

«5!» і нагадаємо, що називаємо його факторіалом. Також звернемо увагу учнів на те, що у розв'язку ми використали формулу перестановки: $P_n = n!$

- 2) Якщо лев стоїть безпосередньо після тигра, то їх обох можна вважати одним «об'єктом». Крім них, є ще 3 «об'єкти», тому всього в ряд потрібно розташувати 4 «об'єкти». Це $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ можливих послідовностей. У черзі лев може стояти як перед тигром, так і після, тому маємо ще $4!$ можливих послідовностей. Отже, існує всього $2 \cdot 4! = 48$ можливих випадків, в яких 5 тварин можуть марширувати в послідовності, в якій тигр і лев стоять поруч один з одним.
- 3) Якщо ми віднімемо з усіх можливих послідовностей кількість послідовностей, у яких тигр і лев йдуть один за одним безпосередньо, ми отримаємо кількість послідовностей, у яких це не виконується, тобто між тигром і левом є ще інша тварина (або кілька тварин). Отже, кількість послідовностей, що задовольняють умовам задачі: $5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72$.
- 4) Тварини можуть рухатися один за одним у 120 різних послідовностях. Однак варіант Т, Л, П, К, С у такому випадку збігається з наступними варіантами: а) Л, П, К, С, Т; б) П, К, С, Т, Л; в) К, С, Т, Л, П; г) С, Т, О, П, К. Подібним чином можна побачити, що в кожному випадку є чотири додаткові пари, які нічим не відрізняються. Відповідно, ми порахували кожен випадок п'ять разів, обчисливши всі можливі варіанти. Отже, кількість унікальних випадків $120 : 5 = 24$.

Розміщення.

Створення паролів необхідно не тільки для захисту квартир і сейфів, а й при взаємодії з комп'ютером. Через велику кількість паролів існує ймовірність їх забути.

Задача 2. Паролі до усіх акаунтів Бенді складаються з елементів сукупності $\{B; e; n; 1; 7\}$. Бенді захистив один із документів паролем із трьох символів, але забув його. Яка максимальна кількість спроб, яку потрібну зробити, щоб віднайти пароль, якщо

- 1) хлопець знає, що всі символи унікальні;
- 2) хлопець знає, що символи можуть повторюватися?

Розв'язання

- 1) Перший символ можна обрати з п'яти варіантів, другий тільки з чотирьох. Тому Бенді міг вибрати перші два символи $5 \cdot 4 = 20$ різними способами. Обрати третій символ можемо трьома різними способами, тобто можете створити загалом $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ різних паролів. Таким чином, можемо знайти пароль максимум за 60 спроб (за умови, що програма дозволяє таку кількість спроб).
- 2) Перший і другий символи можемо обрати п'ятьма способами, адже вони можуть повторюватись. Таким чином, перші два символи можна обрати $5 \cdot 5 = 25$ різними способами (як і третій), тож можна створити загалом $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ різних паролів. Отже, можна вгадати пароль зі 125 спроб.

Нагадаємо, що в першому випадку ми розглядали завдання на розміщення без повторень, а в другому – з повторенням. У першому випадку формула $A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$, у другому $\overline{A_n^k} = n^k$.

IV. Закріплення здобутих вмінь

Задача (№1, ст. 80)

На уроці фізкультури 10 учнів сидять на спортивній лаві.

- 1) У скількох різних послідовностях це можливо?
- 2) Скількома способами це можливо, якщо Таня і Оксана хочуть сидіти поруч?
- 3) Скількома способами це можливо, якщо Василь і Денис не хочуть сидіти поруч?
- 4) Скількома способами це можливо, якщо Таня і Оксана хочуть сидіти поруч, а Василь і Денис – ні.

Задача (№1, ст. 78)

Таня створює 4-символьні паролі з елементів сукупності $\{H; a; j; n; i; 1; 9\}$. Скільки паролів можна створити, якщо

- а) із 4 символів немає двох однакових;
- б) символи можуть бути однаковими?

Задача (№2, ст. 78)

Оксана вибрала інший метод: її паролі складається з 10 символів, які вона обирає з елементів сукупності {С; а}. Скільки різних паролів може створити Таня?

V. Підсумок уроку

Сьогодні ми пригадали і попрацювали з перестановками і розміщеннями. Коли ми використовуємо перестановки і як обчислюємо їх? А коли розміщення? Які вони бувають? За якими формулами їх обчислюємо). (учні відповідають своїми словами, з прикладами). Яке застосування розміщень ми сьогодні побачили?

VI. Домашнє завдання

№2 ст. 81, №3 ст. 78.

Анкета

1.* Mit gondol, érdemes-e tanítani a valószínűségyszámítást az alsó tagozatban (akár első osztályban)? (pl. a biztos és lehetetlen eseményeket) / Як Ви вважаєте, чи варто вивчати теорію ймовірностей дітям в молодшій школі (навіть в першому класі)? (Наприклад, вірогідну і неможливу події)

a) igen / так b) nem / ні c) egyéb / інше:

2.* Mit gondol, érdemes-e tanítani a kombinatorikát az alsó tagozatban (akár első osztályban)? (1-2 elem sorba rendezése) / Як Ви вважаєте, чи варто вивчати комбінаторику дітям в молодшій школі (навіть в першому класі)? (впорядкування 1-2 елементів)

a) igen / так b) nem / ні c) egyéb / інше:

3.* Hogyan véli, érdemes-e kísérleteket végezni a valószínűség órakon? (érmé- és kockadobás stb.) / Як Ви вважаєте, чи варто проводити випробування (експерименти) при вивченні теорії ймовірностей? (кидання монети, кубика і т.д.)

a) igen / так b) nem / ні c) egyéb / інше:

4.* Hogyan véli, hasznosak-e a valószínűségi játékok az említett témakörök tanításakor? / Як Ви вважаєте, чи варто грати в ймовірнісні ігри на уроках при вивченні відповідних тем?

a) igen / так b) nem / ні c) egyéb / інше:

5.* Hogyan véli, hasznosak-e a kellékek a kombinatorika oktatásában? (színes pálcikák, kártyák stb.) / Як ви вважаєте, чи варто використовувати обладнання для демонстрацій при вивченні комбінаторики? (різнокольорові палички, карти і т.д.)

a) igen / так b) nem / ні c) egyéb / інше:

6.* Hogyan véli, hasznosak-e a számítógépes anyagok a valószínűségyszámítás oktatásában? (interaktív anyag, videók stb.) / Як ви вважаєте, чи варто використовувати цифрові допоміжні матеріали під час вивчення теорії ймовірностей? (відео та інтерактивні матеріали)

a) igen / так b) nem / ні c) egyéb / інше:

7. Egyéb észrevétel/megjegyzés/hasznos tanács az adott témakörök oktatásához / Зауваження чи корисні поради для викладання даної теми: