ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Викладання задач, що розв’язуються з кінця, у 6-му класі

Пінте Едіна Іванівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **Козлакова Галина Олексіївна**

професор;

доктор педагогічних наук , професор

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Викладання задач, що розв’язуються з кінця, у 6-му класів

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-го курсу

Пінте Едіна Іванівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Козлакова Галина Олексіївна**

професор;
доктор педагогічних наук , професор

Рецензент: **Кучінка Каталін Йожефівна**

зав.каф., доцент;
кандидат фізико-математичних наук

Берегове
2023

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3" від „27" квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

VISSZAFELÉ OKOSKODÁS TANÍTÁSA 6. OSZTÁLYBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Pinte Edina

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)"

Témavezető: Kozlakova Galina

professzor,

a pedagógiai tudományok doktora

Recenzens: Kucsinka Katalin

docens,

fizika és matematika tudományok kandidátusa

Beregszász – 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Pályamunkámban a problémamegoldási stratégiákról, azon belül is a visszafelé gondolkodási (rákmódszer) vagy másnéven fordított irányú gondolkodási problémamegoldó stratégiáról szeretnék beszélni. Kutatásomban, ezt a módszert alkalmaztam az Ungvári 10. Számú Dayka Gábor Magyar Tannyelvű Középiskola 6. osztályában.

A visszafelé gondolkodás a diákokat arra ösztönzi, hogy a célok és a kitűzött eredmények felé haladva dolgozzon, és új megoldásokat találjon a problémákra. A visszafelé gondolkodás segít a diákoknak megtanulni, hogyan kell tervezni és előre gondolkodni a feladataikról.

Ez a problémamegoldási stratégia nemcsak kreatív gondolkodásra ösztönzi a diákokat, hanem az analitikus és logikus gondolkodásra is. A visszafelé gondolkodás egy hatékony problémamegoldási stratégia, amely segít a diákoknak az ok-okozati összefüggések jobb megértésében, az előre tervezésben és a problémamegoldásban.

1. Probléma megoldási stratégiák

1.1. Mi a probléma?

A probléma meghatározásánál figyelni kell arra, hogy a probléma fogalmát nem érdemes leszűkíteni azokra a problémákra, amelyeket még soha senki nem oldott meg. Bár az oktatásban is találkozhatunk ilyen, mindeddig megoldatlan problémákkal, a probléma fogalmát szeretnénk ennél szélesebb körben használni. A probléma szempontjából figyelembe kell venni magát a problémamegoldó személyét. Lehet, ami az egyik ember számára könnyű rutinfeladat, másnak súlyos nehézséget jelent [1].

Weldon szerint akkor kapunk problémát, ha valamely nehézségnek megtaláljuk a „rejtvény" formáját. Nehézséget jelent az olyan helyzet, amikor az egyén tudja, hogy a dolgok nem mennek jól, nem látja a kimenetelét, és ez kellemetlenséget okoz neki. A rejtvénynek már letisztult formája és struktúrája van, és tartozik hozzá ügyes megoldás. A problémának ez a meghatározása két szempontból is érdekes számunkra. Egyrészt magában rejti a problémaalkotás folyamatát, amikor valamely problémaszituáció alapján matematikai problémát fogalmazunk meg, másrészt problémamegoldás közben gyakran használjuk azt a módszert, hogy feltesszük magunknak a kérdést, mi zavar bennünket a problémában, mi az a nehézség, ami a problémát okozza, és ez éppen az, amire Weldon meghatározása épül [1].

A probléma definíciók közös vonása, hogy akkor beszélnek problémáról, ha valamely helyzetben egy cél elérése akadályba ütközik. Az akadály leküzdésének útja a problémamegoldás folyamata, a célratörő okoskodás [18]. Lénárd szerint „Problémának nevezzük a szó legáltalánosabb értelmében azt a helyzetet, amelyben bizonyos célt el akarunk érni, de a cél elérésének útja számunkra rejtve van." [12] Hasonló meghatározást adott a problémára több kutató. A probléma leegyszerűsített sémája ezek alapján: Probléma = Cél + Akadály. A meghatározásban szereplő „akadály" alapján megkülönböztették a feladat és a probléma fogalmát. Feladatról akkor beszélnek, ha a megoldáshoz vezető út ismert a megoldó számára, problémáról pedig akkor, ha a cél elérése gondolkodást kíván. Így az, hogy egy probléma tényleg probléma-e függ a megoldótól, és annak pillanatnyi állapotától. Elképzelhető ugyanis, hogy egy korábban ismeretlen megoldási lépéseket kívánó problématípus tanulás, gyakorlás útján ismert feladattá válik. Ez alapján nehézséget jelentene, hogy egy kitűzött problémáról a megoldó is merete nélkül nem tudnánk eldönteni, hogy feladat vagy probléma. Ezt küszöböli ki a problémák osztályozása oktatási szempontból a megoldás során alkalmazott eszközök alapján [19]:

1. Kézenfekvő szabály: az éppen bemutatott módszer alkalmazása.
2. Alkalmazás választással: több ismert módszer közül kell választani egyet a megoldáshoz.
3. Kombináció választása: több ismert módszer közül többet kell választani, és ezeket együttesen alkalmazni.
4. Kutatás megközelítése: új módszer kidolgozása.

A problémák hasonló szintjeit határozta meg Greeno. Greeno külön közbülső szintnek tekinti azt az esetet, amikor a megoldó éppen megtanulja a megoldási módszert, a kutatás elemének tekinti a probléma újrafogalmazását, és az előbbiekhez hozzátesz egy új szintet, a probléma észlelésének szintjét:[1]

1. szint: Ismert megoldás.
2. szint: Ismert módszerek alkalmazása.
3. szint: A megoldás módszerének megtanulása
4. szint: A módszer kiválasztása és értékelése.
5. szint: Az ismert módszer alkalmazásához a problémát újra kell formálni, vagy új módszert kell taláni.
6. szint: A probléma észlelése.

A szintek egymásutánisága így kérdéses, hiszen ha a tanuló felfedeztető tanítás keretében tanulja egy problématípus megoldási módszerét, ez a tevékenység számára kutatásnak számít, és sokkal hatékonyabb, mintha készen kapja a közölt algoritmust.[1]

A problémákat nem csak szintek szerint osztályozhatjuk, hanem más szempontok alapján is. Pólya szerint célszerű a megoldás típusa alapján elvégezni a csoportosítást. Euklidesz Elemei alapján két fő típust különböztet meg: a meghatározó és a bizonyító problémát. A meghatározó probléma célja a feltételek, adatok alapján az ismeretlen megadása, míg a bizonyító probléma esetén egy matematikai állítás igazságát kell eldönteni és igazolni. [18]

Az iskolai oktatásban szokás a problémákat a szöveges feladatokkal azonosítani. A szöveges feladatok részletes vizsgálata nem célunk, így csak felsorolunk néhány lehetséges csoportosítási szempontot. Ilyenek például a szöveg tartalma, az adatok száma (több, kevesebb, éppen elegendő), a kérdés helye a szövegben (elöl, közben, hátul), a feladat bonyolultsága (egy, két, több lépés), a megoldások száma (nulla, egy vagy több), alkalmazható-e kulcsszó fordítás a megoldáshoz.[1]

1.2. Problémamegoldás folyamata

A következő modell Wallas nevéhez fűződik, aki így határozta meg a problémamegoldás szakaszait:

1. Előkészítés: a problémához kapcsolódó, szükséges információk gyűjtése.
2. Lappangás: tudatos erőfeszítés nélküli tevékenység a problémával kapcsolatban.
3. Megvilágosodás: a megoldás ötletének megszületése, „Aha” – élmény.
4. Igazolás: a megoldás helyességének indoklása, ellenőrzése

Dewey a problémamegoldás folyamatát a következő szakaszokra osztotta:

1. A problémaszituáció meghatározása.
2. A probléma meghatározása.
3. Elemzés, tervezés.
4. Végrehajtás.
5. Az eredmény alapján a problémaszituáció megoldása.
6. Értékelés: visszatekintés: az eredmények megfelelnek a feltételeknek, és előretekintés: az eredmények és a módszerek általánosítása [?].

Pólya György 4 lépéses problémamegoldási modellje [17]:

1. A feladat megértése
2. Tervkészítés
3. Tervünk végrehajtása
4. A megoldás vizsgálata

Az 1. lépés a feladat megértése, amely során meg vizsgáljuk, hogy mi a kérdés, milyen adatok, feltételek szerepelnek a feladatban. Rajzoljunk ábrát és vezessünk be jelöléseket.

A 2. lépésben tervet készítünk, keressük a megoldás módját. A terv elkészítésében segítenek például a következő kérdések, tanácsok: Találkoztunk-e hasonló feladattal? Van-e olyan eredmény, amit felhasználhatnánk? Bontsuk részekre a feladatot! Tekintsünk egyszerűbb problémát az adatok, feltételek változtatásával! Ebben a lépésben alkalmazhatunk heurisztikus stratégiákat, például ábrarajzolást, visszafelé gondolkodást, indirekt bizonyítást, stb.

A 3. lépés a terv végrehajtása és helyességének lépésenkénti bizonyítása.

A 4. lépés a megoldás vizsgálata, amely nemcsak a megoldás ellenőrzését tartalmazza, hanem a megoldási módszer újragondolását is, esetleg másik módszer keresését.

Krulik & Rudnick a 4. lépés jelentőségét hangsúlyozza. Az ellenőrzésen kívül meg kell nézni, hogy az eredmény megfelel-e az elvárásainknak. Foglaljuk össze a tapasztalatainkat a problémáról, a megoldásról! Keressünk más megoldási módokat! Változtassuk meg a feltételeket, így alkossunk új problémákat! Általánosítsunk! [11]

Kersh & McDonald a Pólya-féle 2. és 3. lépés összevonását javasolja, hiszen az iskolai gyakorlatban a gyerekek számára a tervezés és a végrehajtás párhuzamosan zajlik. A szöveges feladatok megoldásánál gyakori hiba, hogy a kisgyerekeket első lépésként tervkészítés gyanánt nyitott mondat felírására ösztönzik, miközben ez nem felel meg az életkori sajátosságaiknak, és háttérbe szorítja a következtetéses megoldások megtanulását. [10]

Schoenfeld kiegészítette Pólya modelljét, ugyanis kutatásai azt bizonyították, hogy a probléma megoldási képesség fejlesztéséhez a lépéseket, stratégiákat kevésbé általánosan, részletesebben, többféle alkalmazási lehetőséget megmutatva kell ismerniük a tanulóknak [21], [22].

A problémamegoldás jellegzetességeire sok kutató a szakértő és a kezdő problémamegoldók közötti különbségekből következtet. A kutatások szerint az egyik legnagyobb különbség az, hogy a sikeresebb problémamegoldók a megoldás kezdetén több időt töltenek el a felfogás, megértés fázissal, a problémák újrafogalmazásával, új reprezentációk alkotásával, így többféle, rugalmas reprezentációval rendelkeznek [1].

A reprezentációk közötti átmenet a központi eleme Mayer információ feldolgozáson alapuló kétlépéses modelljének [**?**]:

1. fázis: Reprezentáció (a probléma megértése): A probléma lefordítása belső mentális reprezentációvá, amely tartalmazza az adott állapotot, a célállapotot, és a megengedett műveleteket. Így a probléma megértésével a problémamegoldó kiépíti a probléma terét.

2. fázis: Keresés a probléma térben (a probléma megoldása): A probléma megoldó megpróbál utat keresni a probléma térben a rendelkezésére álló műveletek alkalmazásával a probléma lehetséges állapotain keresztül a célállapotig.

A reprezentáció ebben az értelemben nem egyszerű fordítás, dekódolása a verbális szimbólumoknak, kódolása a matematikai szimbólumoknak. A belső reprezentációk a belső szemantikus hálózaton (szkéma) jelennek meg, ami biztosítja a kapcsolatokat a probléma elemek között, így ezek kialakítása, gazdagítása, rugalmas működése sikeresebb problémamegoldást tesz lehetővé [20]. Több kutató hangsúlyozza a belső, mentális reprezentációk alkotásának fontosságát, hiszen a problémamegoldás során reprezentációk során át jut a megoldó a kezdeti állapotból a célállapotba. A külső és belső reprezentációk kapcsolatát hangsúlyozza Ambrus. Felhívja a figyelmet a tárgyi és képi reprezentációk fontosságára a szimbolikus reprezentációk előtt, amelyek segítik a megfelelő belső reprezentációk alakulását [4].

A problémamegoldás folyamatában az ötlet megszületésének módját, a Wallas-féle modell „belátás” lépését is többen vizsgálták. Ohlsson leírta a belátással kapcsolatos tevékenységeket és jellemzőiket. Ennek alapját is a reprezentációk változtatása, régi reprezentációk elvetése, új reprezentációk alkotása, a szükséges műveletek aktiválása képezi, amely a holtponttól való elmozdulással a részleges belátáson keresztül jut a teljes belátáshoz. A reprezentációk változásának további funkcióit nevezi meg, amelyek részben tudatos tevékenység nélkül működnek [15].

Lénárd a problémamegoldás lépésekre bontása helyett a gondolkodási fázisok vizsgálatát hangsúlyozza [12].

A problémamegoldás folyamatának lépéseit, a hozzá kapcsolódó reprezentációs tevékenységeket, és gondolkodási fázisokat egyesíti Mason modellje, melynek fázisai [14]:

1. Belépés
2. Támadás
3. Reflexió

Az 1. fázis a reprezentációk létrehozásának fázisa, melynek megfelelő alakításával a 2. fázisban létrejön az akadály legyőzése, a belátás. Az így kialakuló megoldást értékeli a 3. fázisban.

A Pólya-féle modell és kiegészítései a problémamegoldás kognitív folyamataira vonatkoznak, és nem tartalmaznak metakognitív elemeket, mint például a vezérlés, döntések. Kutatók hangsúlyozzák a problémamegoldás folyamatában a metakognitív elemek fontosságát [1].

A metakogníció Flavell alapján: az egyén saját kognitív folyamatairól való tudása. A metakogníció a kognitív folyamatok aktív felügyeletét, szabályozását, vezérlését, ellenőrzését jelenti a konkrét célok érdekében. A metakognitív tevékenység tudatos és aktív. Flavell és Wellmann három metakognitív komponenst különített el [8], [9].

1. A személyre vonatkozó elemek a „belief" rendszerek, az érzelmi hozzáállás, motiváció, önértékelés, stb.
2. A feladat komponens elemei: tartalom, szövegkörnyezet, struktúra (logikai kapcsolatok), nyelvtani kapcsolatok (szintaxis), folyamatok, amelyeket a problémamegoldóban kivált
3. A stratégiai komponens a problémamegoldás lépéseinek tudatosságát jelenti

Ezek a metakognitív komponensek irányítják a kognitív tevékenységet. Lester átnevezte a problémamegoldás lépéseit annak érdekében, hogy hangsúlyozza a metakognitív komponensek szerepét, és megalkotta a problémamegoldás kognitív-metakognitív modelljét [13]:

1. Orientáció: stratégiai viselkedés a probléma értékelésére és megértésére. Elemei: felfogási stratégiák, az információk elemzése, kezdeti és közbülső reprezentációk, a nehézség és sikeresség esélyének értékelése. Metakognitív mozzanatok: keresem a kulcsszavakat, túl nagyok a problémában szereplő számok, keresek ehhez hasonló problémát.

2. Szervezés: a viselkedés tervezése és választás a tevékenységek között.

   Elemei: célok azonosítása, globális és lokális tervezés.

   Metakognitív mozzanatok: azt gondolom, hogy ezt kell keresni, ez az algoritmus segíteni fog, ez nem működik, mást kell keresnem...

3. Végrehajtás: a viselkedés szabályozása a terv érdekében. Elemei: a terv kis lépéseinek végrehajtása, felügyelete, odafigyelés a pontosságra, sebességre, eleganciára.

   Metakognitív mozzanatok: Ezt meg tudom csinálni, jobb lenne lassabban haladnom, ez túl bonyolult, óvatosan kell végrehajtanom a lépéseket, ez a módszer nem működik, mást kell keresnem, le kell írnom a lépéseket.

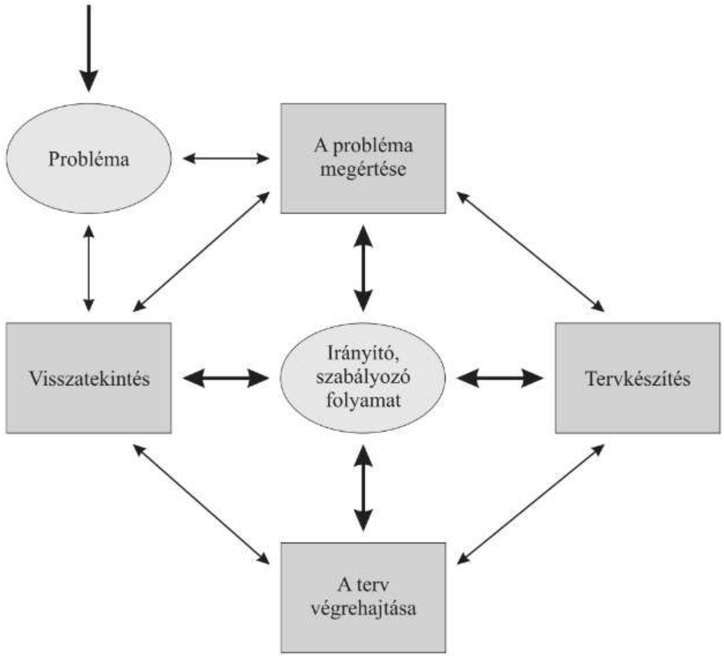
4. Igazolás: a döntések és a végrehajtás eredményének értékelése.

Az orientáció, szervezés és végrehajtás lépéseinek folyamatos vizsgálata, ellenőrzése, igazolása, ezáltal ez a funkció központi szerepet játszik a problémamegoldási folyamatban.

Metakognitív mozzanatok: nem voltam elég óvatos, jobban kell ellenőriznem a lépéseket, nem vagyok biztos benne, hogy értem a feladatot, újra kell olvasnom. Ez az eredmény túl nagynak tűnik, ellenőriznem kell. Azt gondoltam, hogy ez a módszer működni fog, de úgy látom, mégsem.

A metakognitív mozzanatok megfogalmazása, a problémamegoldó párbeszéde önmagával valójában Pólya György modelljében is hasonlóan jelenik meg.

A problémamegoldás folyamatát nem lineáris lépéssorozatnak, hanem ciklikus folyamatnak tekinti. Ezt a jelleget jól kifejezi Wilson ábrája a problémamegoldás folyamatáról [1].



1. ábra. Problémamegoldás folyamata

A verbális és képi kódolás kettőssége alapján Wachsmuth (1981) a matematikai gondolkodás két módját, az „L-Modus”-t és „R-Modus”-t határozta meg:

L-Modus	R-Modus
Koncentrálás a részletekre	A részletek együtt látása
Szisztematikus gondolkodásra törekvés	Asszociációk (szabad is)
Oksági gondolkodás (időben lineáris)	Téri gondolkodás (időtől független)
Megértés, következtetés verbálisan, szimbólumokkal	Kibontakozás ötletekkel, szemléléssel
Szeriális feldolgozás	Párhuzamos információ-feldolgozás
Konvergens gondolkodás (teljesen tudatos)	Divergens gondolkodás (részben tudattalan)

Az ilyen módon meghatározott kritikai és kreatív gondolkodás különböző aspektusai megjelennek a problémamegoldás kognitív és metakognitív folyamataiban. A megoldást előrevivő új reprezentációk kialakulásában a kreatív oldalnak, a folyamatok ellenőrzésében, tudatos irányításában a kritikai oldalnak van nagyobb szerepe. Így a sikeres problémamegoldáshoz szükség van mind a kreatív, mind a kritikai gondolkodás fejlett működésére [1].

Schoenfeld a problémamegoldó tevékenységet négy fő területre osztja: [21]

1. Eredetek (resources).

2. Heurisztika (heuristics).

3. Kontroll (control).

4. Hozzáállás (beliefs).

1. Az eredetek széles spektruma tartalmazza az informális és intuitív ismereteket, tényeket, definíciókat, algoritmusokat, rutinokat, taktikákat, releváns kompetenciákat, és a szabályok működésének ismeretét. Az eredetek vizsgálatának fontos része a következetes hibák, tévhitek felderítése, amelyek csak az okok feltárása után, tudatosan javíthatók.

2. A heurisztikák a problémák megoldását segítő stratégiák, technikák a nehézségek legyőzésére. A stratégiák tanítása akkor lesz hatékony, ha az egyes stratégiákat a lehetséges alkalmazások, működési módok szerint többféle típusra osztjuk, és ezeket részletesen gyakoroljuk. A Schoenfeld által vizsgált legfontosabb stratégiák többek között: az ábra készítése, hasznos problémák keresése, probléma átfogalmazása, visszafelé gondolkodás, speciális esetek vizsgálata, a probléma részproblémákra bontása.

3. A kontroll központi szerepet játszik a problémamegoldás folyamatában, tartalmazza a tervezést, a lehetőségek közötti választást, a stratégiák ellenőrzését, értékelését, a döntéseket a stratégia elfogadásáról vagy elvetéséről.

4. A hozzáállás a problémamegoldó egyéni viselkedéséből, tevékenységeiből, érzéseiből fakadó elemeket tartalmazza. Ide tartozik az önbizalom, a problémamegoldó mit tulajdonít a siker és kudarc okainak, mi a véleménye a matematikáról, a tananyagról, az adott feladatról, mennyire bízik a megoldás sikerességében, mikor és miért adja fel a problémamegoldó tevékenység folytatását.

Az első két terület a problémamegoldás kognitív területére, a harmadik a metakognitív területre, a negyedik pedig az affektív területre vonatkozik.

A kutatásunk alapja a Pólya-féle modell Schoenfeld-féle kiegészítéseinek alábbi változata, amely a kognitív elemek mellett a metakognitív elemeket is tartalmazza

1. lépés: Értsük meg a problémát, határozzuk meg a célt!

- Olvassuk el a szituációt, problémát, fogalmazzuk meg a saját szavainkkal.
- Képzeljük el, játsszuk el a szituációt.
- Válasszuk ki és jegyezzük le az adatokat és a feltételeket, vezessünk be jelöléseket, ha szükséges.
- Tisztázzuk, mit kell meghatározni.
- Rajzoljunk ábrát, diagramot, hogy szemléltessük, rendszerezzük az adatokat.
- Nézzük meg, van-e szükség további adatokra, vannak-e felesleges adatok.
- Ha lehetséges fogalmazzuk át a problémát, hogy világosabb legyen.

2. lépés: Tervezzük meg a problémamegoldási stratégiát.

- Nézzük meg, mi zavar bennünket a problémában, próbáljuk meghatározni a probléma kritikus elemét és fókuszáljunk erre.
- Próbálkozzunk egyszerűbb feladattal (számok csökkentésével, feltételek változtatásával).
- A rendszeres próbálkozások alapján keressünk szabályosságot.
- Próbáljuk részekre, lépésekre bontani a problémát.
- Keressünk hasonló, rokon problémát, és nézzük meg, annak megoldási stratégiája alkalmazható-e.
- Találjunk ki egy elindulást, és próbáljuk folytatni.
- Figyeljük, hogy hol tartunk, és mi a célunk, és próbáljuk közelíteni őket egymáshoz valamelyik irányból (akár a helyzet, akár a cél átfogalmazásával).

3. lépés: Hajtsuk végre a stratégiát, ellenőrizzük és módosítsuk, ha szükséges.

- Írjuk le a megoldás lépéseit, és magyarázzuk őket.
- Határozzuk meg a megoldáshoz szükséges eszközöket (módszereket, eljárásokat).
- Ellenőrizzünk lépésenként, hogy az esetleges hiba ne a végén derüljön ki.
- Ha a terv nem vezet eredményre, keressünk másik tervet.

4. lépés: Ellenőrizzük és járjuk körbe a megoldást.

- Bizonyosodjunk meg arról, hogy a megoldás elfogadható, ésszerű.
- Keressünk a megoldástól független módot az ellenőrzésre.
- Ellenőrizzük a következtetések helyességét.
- Írjuk le világosan a megoldást, értékeljük a megoldási módszert.
- Keressünk másik megoldási módszert.
- Keressünk következményeket, általánosítást.
- Tegyünk fel további kérdéseket, alkossunk új problémát az adatok, a feltételek változtatásával.

  A problémamegoldási lépések (belső párbeszéd), heurisztikus stratégiák tanítása mellett kiemelten foglalkozunk a reprezentációk variálásával, a problémamegoldás metakognitív és affektív elemeivel.[1]

2. Kutatás

2.1. Bemeneti tesztben szereplő feladatok és pontozásuk

Kutatásomat az Ungávri 10. Számú Dayka Gábor Magyar Tannyelvű Középiskolában végeztem el, amelyen a 6. osztályos tanulók vettek részt. Azzal kezdtem a kutatásomat, hogy megirattam a diákokkal egy bemeneti feladatsort, amelyben 4 feladat található. Ennek a feladatsornak a megírására 45 perc állt rendelkezésükre. A következő feladatokat kapták meg a diákok:

1. Gondolok egy számra. Ha hozzáadok 6-ot és az eredményt megszorzom hárommal, akkor 138-at kapok. Melyik számra gondoltam?

2. A békalencse minden nap kettéosztódva szaporodik. Ha az első napon 1 békalencsével kezdünk, akkor a második napon 2, a harmadikon 4, a negyediken 8 békalencse lesz, és így tovább. Ha 1 lencsével kezdünk, 7 nap alatt fogja teljesen befedni a tavat. Mennyi napig tart ugyanennek a tónak a befedése, ha 4 lencsével kezdünk?

3. Gombóc Artúr születésnapjára kapot egy zacskó csokit Pom-Pom barátjától. Aminek az egynegyedét megette, 1 darabot elhagyott, aztán megette a maradék csoki 3/5 részét, majd az így maradt csokik felét eltette másnapra és az így megmaradt tíz csokiját Pom-Pomnak adta. Hány csoki volt eredetileg a zacskóban?

4. A 6. osztály tanulói négy napos gyalogtúrára mentek. Az első nap megtették a teljes út negyed részét, a második napon 9 km, a harmadik napon a megmaradt út felét és így a negyedik napra még megmaradt 6 km. Hány kilométer hosszú a gyalogtúra?

A feladatsorra összesen 12 pontot kaphattak a diákok. Ezen feladatok pontelosztása a következő:

Az első és második feladatban 2-2 pontot szerezhettek a diákok. Ebben a feladatban:

0 pont - ha a feladat egyáltalán nincs megoldva, vagy teljesen rosszul kezdett hozzá a feladathoz;

1 pont - ha a feladatothoz helyesen kezdett hozzá, de nem fejezte be azt vagy elszámolás történt;

2 pont - ha a feladat teljes mértékben helyesen van megoldva.

A harmadik és negyedik feladatban 4-4 pontot szerezhettek, amely a következő képpen volt értékelve:

0 pont - ha a megoldás menete rossz, vagy egyáltalán nincs;

1 pont - ha el tudta kezdeni a feladatot helyesen;

2 pont - ha a legalább a feladat felét helyesen megtudta oldani;

3 pont - ha a feladat menete helyes, de valamilyen elszámolás van benne;

4 pont - ha a feladat helyesen van megoldva.

Ezekből a pontokból szerezhették meg összesen a 12 pontot.

Miután megkapták a feladatlapot, kaptak még hozzá egy tiszta A4-es lapot, amelyre felírták a nevüket és hozzákezdhettek az önálló munkához. A vizsgálati szakasz ezen részében, azt néztük meg ki mennyire tudja saját gondolkodása és logikája alapján megoldani a feladatokat.

Miután megírták a bemeneti tesztet a diákok, megtartottam neki két 45-45 perces órát. Ezeken az órákon visszfelé gondolkodási feladatokat néztünk meg.

Az első órán, olyan tankönyvi feladatokat vittem, amelyek a törtrész meghatározása egész része alapján, valamint az egész rész meghatározása törtrésze alapján témákra tértek ki. Ezekből az ismeretekből kiindulva, majd a második órán tipikus visszafelé gondolkodós feladatokat oldottunk meg, mint amilyenek a bemeneti feladatsorban is láthatók. Ezekhez az órákhoz csatolom mellékletként a két óravázlatot is.

Ezt követően megirattam a diákokkal a záró tesztet is, amely ugyanazon feladatsor volt, mint a bemeneti. A záró feladatsornak a megírása hasonlóan zajlott, mint a bemeneti megírása, azonban itt a diákoknak volt már háttértudásukat, amit alkalmazhattak a feladatok megoldásánál.

A záró feladatsor megoldásánál, már a tanult módszert alkalmazhatták, mint ahogyan azt a következő fejezetben is láthatjuk maj.

2.2. Feladatok várható megoldásai

Ebben a fejezetben kétféleképpen is bemutatom a feladatok megoldását. Az első módszer az amikor visszafelé gondolkodóssal oldom meg a feladatokat. A második módszer pedig az amikor a feladatot megpróbálom felírni valamilyen egyenlet formájában.

1. Gondolok egy számra. Ha hozzáadok 6-ot és az eredményt megszorzom háromnmal, akkor 138-at kapok. Melyik számra gondoltam?

I. módszer

Az összeget megszoroztam 3-mal, és így 138-at kaptam	Összeg $\cdot 3 = 138$ Összeg $= 46$
A gondolt számhoz hozzáadtam 6-ot, és így 46-ot kaptam eredményül	Gondolt szám $+6 = 46$
	A gondolt szám $= 46 - 6$
	A gondolt szám $= 40$;

II. módszer

x	Gondolt szám
$x + 6$	Gondolt számhoz hozzáadunk 6-ot
$(x + 6) \cdot 3$	Az eredményt megszorzom 3-mal
$(x + 6) \cdot 3 = 138$	És így 138-at kapok

A fent kapott egyenletet megoldva:

$$(x + 6) \cdot 3 = 138$$

$$x + 6 = 138 : 3$$

$$x + 6 = 46$$

$$x = 40$$

Felelet: A 40-es számra gondoltam.

2. A békalencse minden nap kettéosztódva szaporodik. Ha az első napon 1 békalencsével kezdünk, akkor a második napon 2, a harmadikon 4, a negyediken

8 békalencse lesz, és így tovább. Ha 1 lencsével kezdünk, 7 nap alatt fogja teljesen befedni a tavat. Mennyi napig tart ugyanennek a tónak a befedése, ha 4 lencsével kezdünk?

Megoldás:

Két táblázatot készítettem. Az első táblázatban, 1 békalencsével itt kiszámoljuk, hogy mennyi békalencse szükséges ahhoz, hogy teljesen befedje a tavat. A feladatban megadottak alapján 7 nap alatt fedi be az egész tavat, amelyhez 64 békalencse szükséges. A másik táblázatban pedig visszafelé haladva jutunk el a 4 békalencséhez. Tudjuk, hogy 64 békalencse fedi be az egész tavat, vagyis ha az előzőekben mindig a dupláját vettük a lencséknek, akkor most mindig a lencsék felét vesszük, amíg el nem jutunk a 4 lencséig. Akkor, ha a 64 békalencse az 1. nap, akkor 32 békalencse a 2.nap, 16 békalencse 3.nap, 8 békalencse 4. nap és 4 békalencse 5.nap. Ebből pedig az következik, hogy 5 nap szükséges ahhoz, hogy befedje a békalencse teljesen a tavat, ha 4 békalencsével kezdünk.

Békalencse	Napok
1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6
64	7

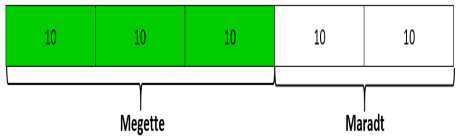
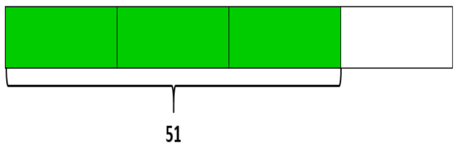
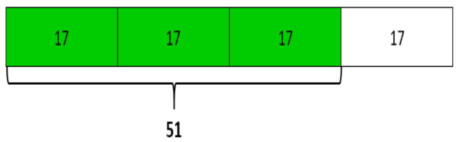
Békalencse	Napok
64	1
32	2
16	3
8	4
4	5

Felelet: 5 napig tart ennek a tónak a befedése, ha 4 lencsével kezdünk.

3. Gombóc Artúr születésnapjára kapott egy zacskó csokit Pom-Pom barátjától. Aminek az egynegyedét megette, 1 darabot elhagyott, aztán megette a maradék csoki $\frac{3}{5}$ részét, majd az így maradt csokik felét eltette másnapra és az így megmaradt tíz csokiját Pom-Pomnak adta. Hány csoki volt eredetileg a zacskóban?

I. módszer

Az első megoldásnál a visszafelé okoskodás (rákmódszer) módszert fogom alkalmazni, a következő megoldásnál pedig egyenletet fogok felállítani.

	Csokik száma
Miután odaadta a 10 csokit Pom-Pom-nak	0 db csoki
Mielőtt odaadta a 10 csokit Pom-Pom barátjának	10 db csoki
Miután eltette a csokik felét	10 db csoki
Mielőtt eltette a csoki felét	20 db csoki
Miután megette a maradék csoki $\frac{3}{5}$ részét	20 db csoki
Mielőtt megette a maradék csoki $\frac{3}{5}$ részét	50 db csoki 
Miután elhagyott 1 darabot	50 db csoki
Mielőtt elhagyott egy darabot	51 db csoki 
Miután megette a zacskó csoki negyedét	51 db csoki 
Mielőtt evett a csokiból	68 db csoki

II. módszer

Az egyenlet felállítása előtt, felbontom a feladatot részekre, hogy így könnyebben értelmezhető legyen. Miután értelmeztük a feladatot lépésről lépésre, azután felállítom az egyismeretlenes egyenletet.

x	Legyen a kapott csokik száma
$x - \frac{1}{4} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x$	Megette a csoki $\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4} \cdot x - 1$	Elhagyott 1 darab csokit
$$\frac{3}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1)$$	A maradék csokik $$\frac{3}{5}$$ része
$(\frac{3}{4} \cdot x - 1) - \frac{3}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1) = \frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1)$	Megette a maradék csoki $\frac{3}{5}$ részét
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1) = \frac{1}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1)$	A megmaradt csokik fele
$\frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1) - \frac{1}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1) = \frac{1}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1)$	Az így megmaradt csokik felét eltette másnapra
$\frac{1}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1) = 10 = 0$	A maradék 10 csoki, amit odaadott Pom-Pom-nak

Ezekből az adatokból a következő egyenlet állítható fel:

$\frac{1}{5} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 1) = 10;$

$(\frac{3}{4} \cdot x - 1) = 10 \cdot 5;$

$(\frac{3}{4} \cdot x - 1) = 50;$

$\frac{3}{4} \cdot x = 51;$

$x = 51 \cdot \frac{4}{3};$

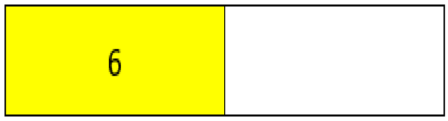
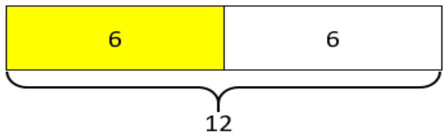
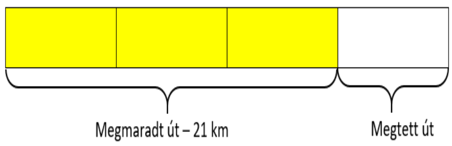
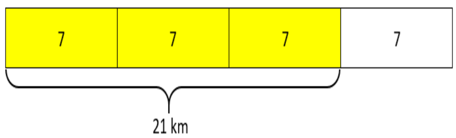
$x = 68.$

Felelet: 68 csoki volt eredetileg a zacskóban.

4. A 6. osztály tanulói négy napos gyalogtúrára mentek. Az első nap megtették a teljes út negyed részét, a második napon 9 km, a harmadik napon a megmaradt út felét és így a negyedik napra még megmaradt 6 km. Hány kilométer hosszú a gyalogtúra?

I. módszer

Ennél a feladatnál is hasonlóképpen jár el. Hasonlóan az előző feladathoz, itt is a visszafelé okoskodás módszerével kezdek.

Napok	Feladat lépésenként	Út hossza (km)
4.nap után	Megtették az egész utat	0 km
4.nap előtt	Maradt 6 km	6 km 
3.nap után	Miután megtették a megmaradt út felét	6 km 
3.nap előtt	Mielőtt megtették a megmaradt út felét	12 km
2.nap után	Miután megtettek még 9 km-et	12 km
2.nap előtt	Mielőtt megtettek még 9 km-et	21 km
1.nap után	Megetették az út negyed részét	21 km 
1.nap előtt	Az egész út hossza	28 km 

II. módszer

x km	Legyen az út hossza
$x - \frac{1}{4} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x$ km	Első nap megtetteék az út negyed részét
$\frac{3}{4} \cdot x - 9$	Második nap megtettek a megmaradt útból még 9 km-t
$\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 9)$	Megmaradt út fele
$(\frac{3}{4} \cdot x - 9) - \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 9) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 9)$	Harmadik nap megtették a megmaradt út felét
$\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 9) = 6$	A negyedik napra megmaradt út, ami 6 km-rel egyenlő

Ezekből az adatokból felállítjuk a következő egyenletet:

$\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 9) - 6 = 0;$

$\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot x - 9) = 6;$

$\frac{3}{4} \cdot x - 9 = 6 : \frac{1}{2};$

$\frac{3}{4} \cdot x - 9 = 12;$

$\frac{3}{4} \cdot x = 12 + 9;$

$\frac{3}{4} \cdot x = 21;$

$x = 21 : \frac{3}{4};$

$x = 28$

Felelet: 28 kilométer hosszú a gyalogtúra.

2.3. Kutatási eredmények

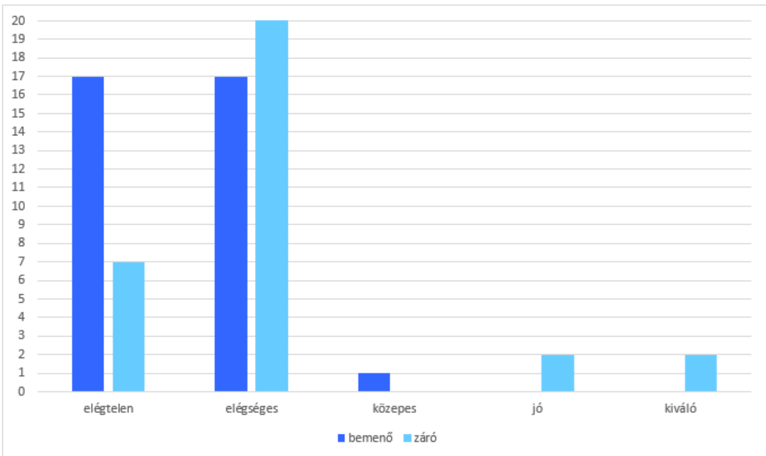
A bemeneti feladatsort 35 diák írta meg az Ungvári 10. Számű Dayka Gábor Magyar Tannyelvű Középsikola 6. osztályából. A szerzett pontok alapján értékelési szinteket hoztam létre, amelyet 5 szintre osztottam a következőképpen:

- Kiváló - 11-12 pont
- Jó - 8-10 pont

- Közepes - 5-7 pont
- Elégséges - 2-4 pont
- Elégtelen - 0-1 pont

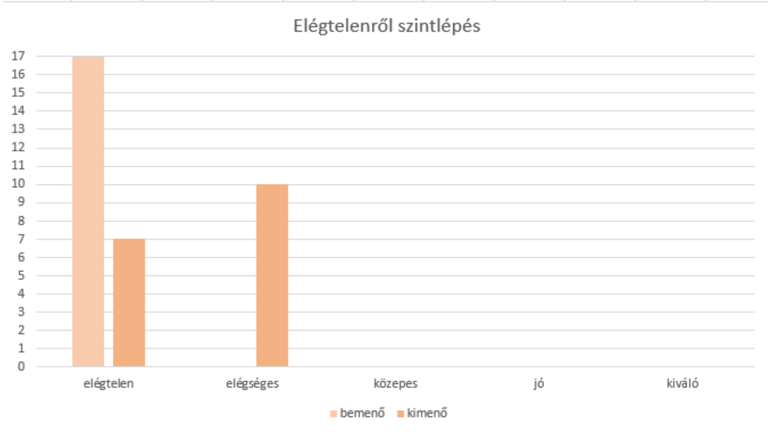
Ezeket a szinteket pedig oszlopdiagrammon ábrázoltam. Az ábrán látható diagramm, azt mutatja meg nekünk, hogy a bemeneti és záró feladatsorok alkalmával a diákok, hogyan oszlottak meg. A vízszintes tengely, azt mutatja milyen szinten voltak a diákok az előbb említett felosztás szerint, míg a függőleges tengely a diákok számát mutatja.

A bemeneti feladatsor megírásakor a legjobb eredmény egy közepes értékelési szintbe esett, míg a másik két szint egyenlően oszlott meg.



2. ábra. A bemeneti és záró feladatsor eredményei

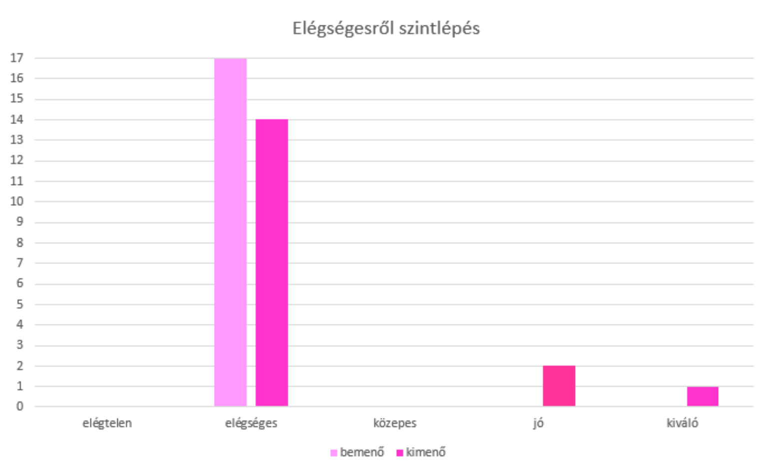
A kutatásban kapott eredményeket szintekre lebontva is tekintsük meg. A következő ábrán azt láthatjuk, hogy az elégtelen értékelési szintről hány diák lépett szintet.



3. ábra. Elégtelen szintről való fejlődések

A bemeneti feladatsor megírásánál összesen 17 diák írta elégtelenre a munkát. A diagramról leolvasható, hogy 7 diák maradt az elégtelen értékelési szinten, a többi diák pedig ugrott egy szintet és így az elégséges értékelési szintre került.

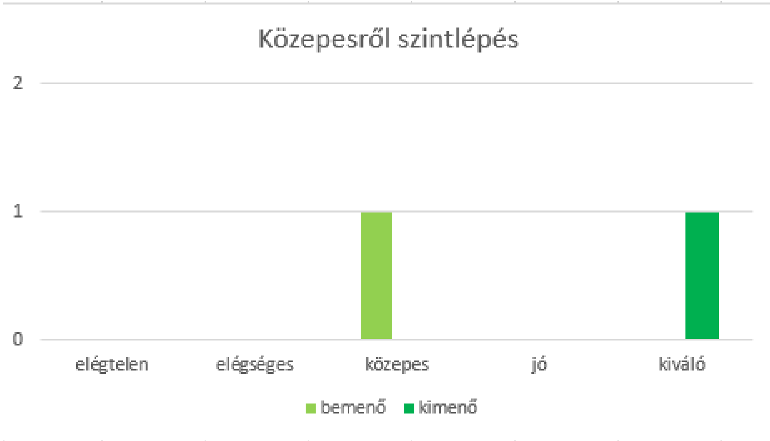
A következő amit vizsgálni fogok az az elégséges szint. Erre az értékelési szintre is a bemeneti feladatok megírásánál 17 diák került. A diákok nagy része maradt ezen az értékelési szinten, számszerint 14. Viszont 3 diáknál is megfigyelhető jelentősebb szintlépés.



4. ábra. Elégséges szintről való fejlődések

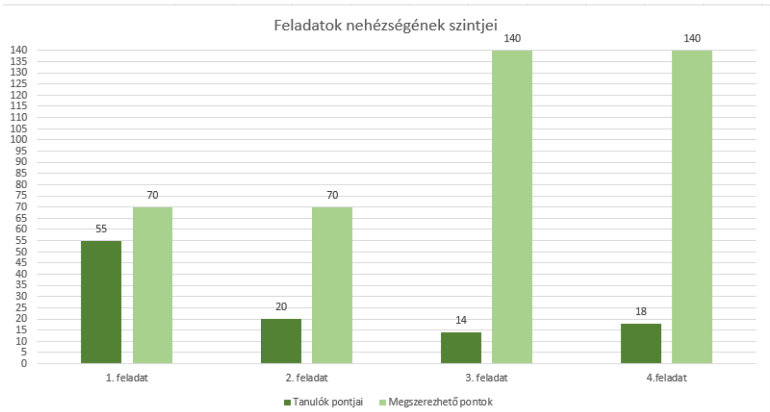
A 3 diák közül két diák két szintet is lépett, tehát eléségesről jó szintre lépett, valamint 1 diák a kiváló szintre került, amely három szintlépés.

Végül pedig a közepes szint vizsgálata következik, ahová egyetlen diákot soroltam be a bemeneti teszt megírása alapján. Ez a diák a kiváló szintre lépett, maximális pontszám elérésével.



5. ábra. Közepes szinten való fejlődésel

A következő ábrán a megszerzett és megszerezhető pontok vannak feltüntetve. Sötét zöld színnel a tanulók által megszerzett pontok, világos zölddel pedig az összesen megszerezhető pontok láthatóak. A kutatás 35 tanulóval zajlot, vagyis mivel az első és második feladatok 2 pontosak, ezért ott maximálisan elérhető 70 pont. A harmadik és negyedik feladatok 4 pontosak, tehát itt a maximálisan megszerezhető pont a 140.



6. ábra. Megszerzett és megszerezhető pontok kapcsolata

Ezeket az adatok százalékokban nézve, akkor a következő eredményeket kapjuk:

1. feladat - 79%

2. feladat - 29%

3. feladat - 10%

4. feladat - 13%

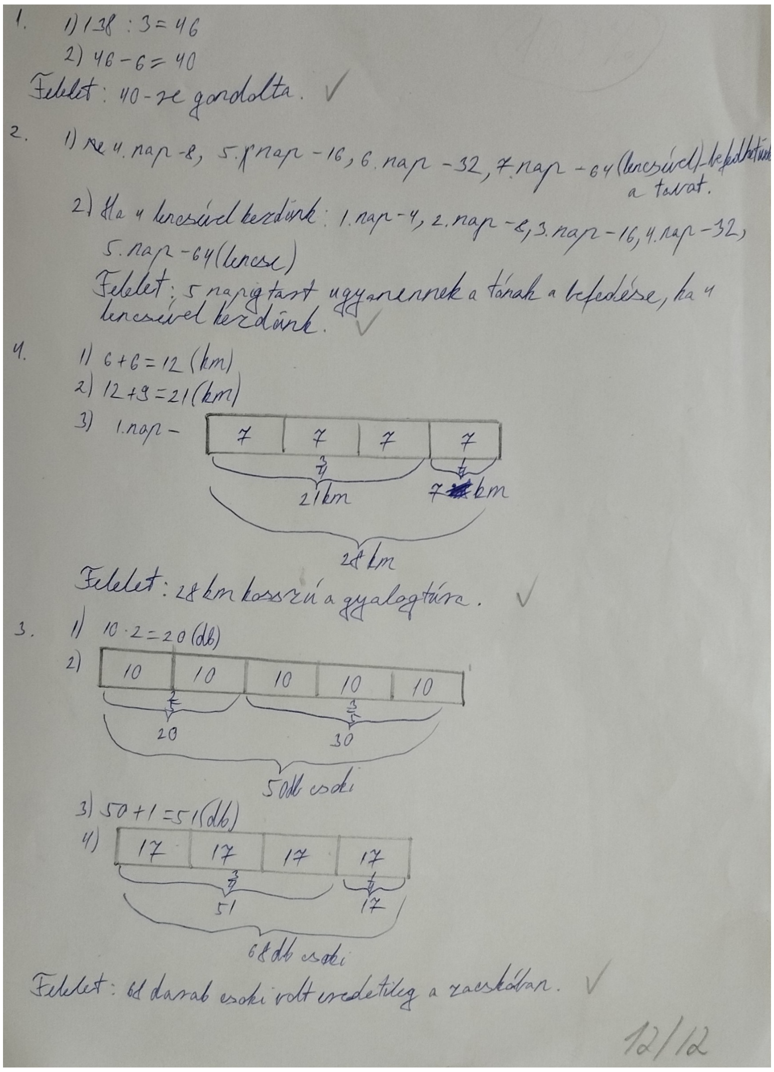
.

Innen az a következtetés vontható le, hogy az összeállított feladatsor nehéz volt a diákok számára. Nem sok diák tudott szintet lépni a bemeneti feladatsorhoz képest a záró feladatsor megírása során. Az utolsó ábrán is látható, hogy az első feladat kivételével a többi feladat nehézséget okozott a diákoknak és szükséges ennek a feladatsornak a javítása.

2.4. Tanulók által megoldott feladatok elemzése

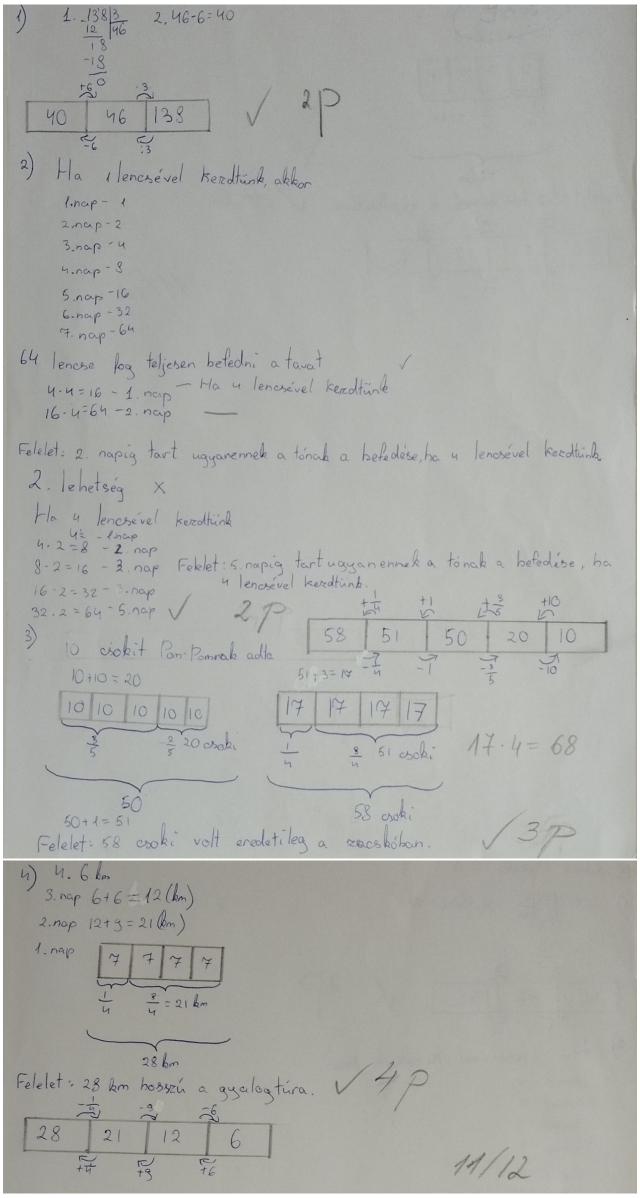
Ez a fejezet néhány tanuló munkájának a bemutatásáról fog szólni. A tanulók megkülönböztetésére T1, T2, ... jeleket fogok használni.

Az első képen T1 tanuló munkája látható, amely teljes mértékben megfelelt a pontozási rendszerem minden követelményének. A tanuló felhasználta a tanórán is alkalmazott módszerünket. Látható, hogy ábrázolórajzot is készített valamint a visszafelé okoskodás módszerével oldott meg minden feladatott. Amely a kutatásom célja is volt, hogy el sajátítsák ennek a módszernek a megfelelő használatát.



7. ábra. T1

T2 tanulónál is egy majdnem teljesen tökéletes munkát láthatunk, attól eltekintve, hogy voltak kisebb számítási hibái. Szintén az órán tanultakat alkalmazta, és teljes mértékben úgy oldotta meg a feladatokat, mint ahogyan azokat bemutattam.


1) 1. 138 : 3 = 46 2. 46 − 6 = 40

40	46	138

2P

2) Ha 1 lencsével kezdtünk, akkor

1. nap − 1
2. nap − 2
3. nap − 4
4. nap − 8
5. nap − 16
6. nap − 32
7. nap − 64

64 lencse fog teljesen befedni a tavat

4 · 4 = 16 − 1. nap — Ha 4 lencsével kezdtünk
16 · 4 = 64 − 2. nap

Felelet: 2. napig tart ugyanennek a tónak a befedése, ha 4 lencsével kezdtünk.

2. lehetség

Ha 4 lencsével kezdtünk
4 − 1. nap
4 · 2 = 8 − 2. nap
8 · 2 = 16 − 3. nap
16 · 2 = 32 − 4. nap
32 · 2 = 64 − 5. nap

Felelet: 5. napig tart ugyanennek a tónak a befedése, ha 4 lencsével kezdtünk.

2P

3) 10 csokit Pom-Pomnak adta

58	51	50	20	10

10 + 10 = 20

10	10	10	10	10

$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$ 20 csoki

50

50 + 1 = 51

51 : 3 = 17

17	17	17	17

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ 51 csoki

58 csoki

17 · 4 = 68

Felelet: 58 csoki volt eredetileg a zacskóban.

3P

4) 4. 6 km
3. nap 6 + 6 = 12 (km)
2. nap 12 + 9 = 21 (km)
1. nap

7	7	7	7

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ = 21 km

28 km

Felelet: 28 km hosszú a gyalogtúra.

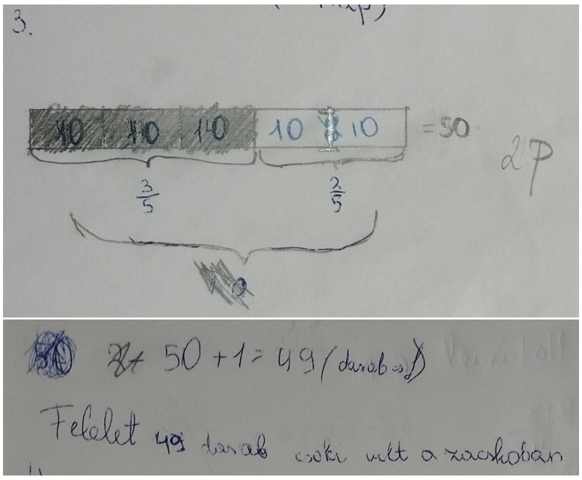
4P

28	21	12	6

11/12

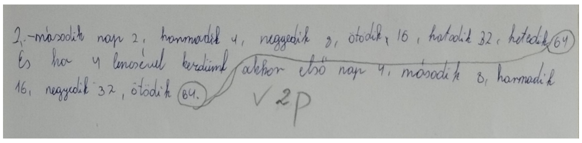
8. ábra. T2

A következő tanuló 3. feladatát választottam. Itt megfigyelhető, hogy a "rekeszes" módszert alkalmazta és el indult a helyes megoldás felé. Viszont látható, hogy elszámolta, valamint be sem fejezte a feladatot. Itt valószínűleg a feladat teljes megértésével lehetett gond.

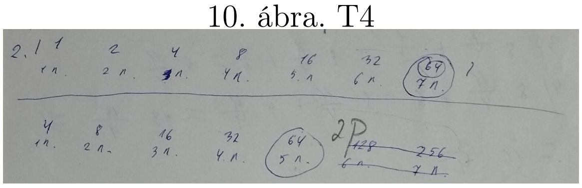


9. ábra. T3

T4 és T5 tanuló esetében is a 2. feladat megoldása látható, a legtöbb diák hasonlóan odlotta meg ezt a feladatot. Azért választottam ezeket a munkákat, mivel itt látszik, hogy a tanulók külön ki is emelték, hogy mindkét esetben megegyezik a végeredmény.

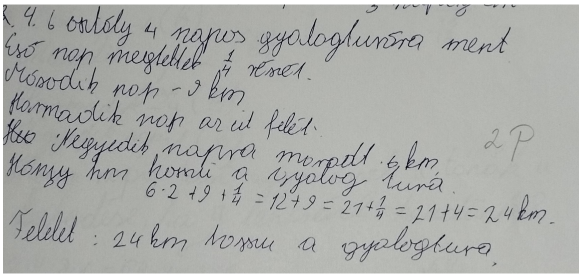


10. ábra. T4



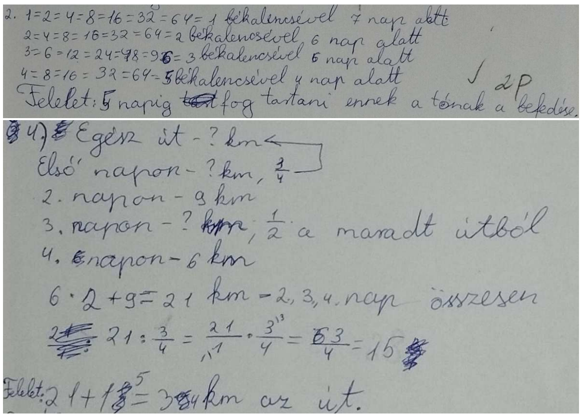
11. ábra. T5

Itt a 4 feladatot nézzük meg. Minden tanuló, aki belekezdett ebbe a feladatba hasonló hibákat követett el. T6 munkájában látjuk, hogy elindul a helyes megoldás felé. Tudja, hogy 6 az út fele, vagyis akkor neki a duplájával kell számolni. Valamint, hogy ha megtett 9 km-t, akkor nekünk hozzá kell adni a visszafelé okoskodás módszerben. Végül pedig a megmaradt részével volt gond, ahol "megtették az út $\frac{1}{4}$ részét" feladatrész olvasható.



12. ábra. T6

A következő tanuló esetében két feladatot is megvizsgálunk. A 2. feladatot, azért válogattam bele, mert itt látszik, hogy a tanuló végül jól adta meg a feleletet és helyesen is számolta ki, csak a magyarázat írásánál tűnt úgy, mintha elrontotta volna.



13. ábra. T7

A 4. feladat pedig hasonló, mint T6 tanuló esetében. Ez a tanuló is eljutott odáig , mint T6. Ebben az esetben viszont a törtekkel való művelet helytelen használata látható. Amit felírt a tanuló, $21 : \frac{3}{4}$ ez teljesen helyes volt, csak sajnos a kiszámításával voltak a gondok.

Az előző fejezetben le vontuk azt a következtetést, hogy az 1. feladaton kívül a többi feladat nehéznek számított a tanulók számára. Ezekből a tanulói munkákon megmutatkozi, hogy milyen nyelvi hátrányaik is vannak. Valamint az is, hogy sok esetben a módszert megjegyezték viszont a feladat szövegét nem követték és ezért nem jó eredményeket kaptak.

Következtetés

A visszafelé gondolkodási problémamegoldási stratégia alkalmazása során a diákok visszafelé haladnak a probléma megoldásához szükséges lépéseken. Ez segíti a diákokat abban, hogy könnyebben értelmezzék és kövessék a hosszú és bonyolult matematikai folyamatokat. A visszafelé gondolkodás hasznos lehet számítási feladatok során. A diákok az utolsó lépéstől kezdve haladva visszafelé azonosíthatják a szükséges lépéseket, és így egyszerűbben megérthetik a folyamatokat, amelyek a probléma megoldásához vezettek. A visszafelé gondolkodás nem csak a matematikai ismeretek fejlesztésében segíthet, hanem a problémamegoldó és logikus gondolkodási készségek kialakításában is hatékony eszköz lehet.

Ez a gondolkodási stratégia a diákok számára előnyöket kínálhat a matematikai oktatásban. Például segíthet abban, hogy azok a diákok, akiknek nehézséget okoz a hosszú és bonyolult matematikai folyamatok követése, könnyebben megérthessék azokat.

Kutatásomban látható, hogy a bemeneti valamint záró feladatsorok nehézre sikerültek, ezért a jövőben változtatni kell ezen feladatokon.

Hivatkozások

[1] Pintér Klára, Doktori értekezlet, A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról, Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar Bolyai Intézet, Szeged, 2012

[2] Ambrus András, Bevezetés a matematika didaktikába. Egyetemi jegyzet. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest , 2004

[3] Polya, J., How to solve it: A new aspect of mathematical method (2nd Ed.). Princeton, Princeton University Press, 1945/1988

[4] Ambrus András: A konkrét és vizuális reprezentációk szükségessége az iskolai matematikaoktatásban

[5] Brown, S. I., Walter, M.: The art of problem posing. NJ: Lawrence ErlbaumAssociates 1990.

[6] Crespo, S.: Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. Educational Studies in Mathematics 2003, 52: 243-270.

[7] English, L.D.: Children's Problem posing Within Formal and Informal Contexts. Journal for Research in Mathematics Education, 1998, Vol. 29, No.1, 83-106

[8] Flavell, J. H.: Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), The nature of intelligence. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1976.

[9] Flavell, J. H., & Wellman, H.: Metamemory. In R. Kail & J. Hagen (Eds.), perspectives ont he development of memory and cognition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1977

[10] Kersh, M. E. and McDonald, J.: How do I solve thee? Let me count the ways! Arithmetic Teacher, October 1991, pp. 38-41.

[11] Krulik, S. and Rudnick J. A.: For better problem solving and reasoning. Arithmetic Teacher, February 1994, pp. 334-33

[12] Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

[13] Lester, F. K. Jr.: Methodological Consideration in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives (pp. 41-69). Routledge, New York and London, 2009.

[14] Mason, J.: Thinking mathematically. Addison Wesley, Amsterdam, 1961.

[15] Ohlsson, S.: Informationprocessing explanations of insight and related phenomena. In: Keane, M. T. and Gilhooly, K. J.: Advances int he psychology of thinking. Volume one. Harvester Wheatsheaf, Hertfordshire. 144, 1992.

[16] Pintér Klára: A tanító szakos hallgatók probléma megoldási képességének felmérése, XIV. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia 2010, Tanulmánykötet, Győr 2011,

[17] Pólya György: A gondolkodás iskolája, Gondolat, Budapest, 1977

[18] Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[19] Pólya, G.: Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. Wiley, New York, 1981.

[20] Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I.: Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Gindburg (Ed.), The development of mathematical thinking. New York: Academic Press, 1983.

[21] Schoenfeld, A.: Mathematical Problem Solving, Academic Press INC.. New York, 1985.

[22] Schoenfeld, A.: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense makin gin mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). New York: Macmillan, 1992.

[23] Shulman, L. S.: On Teaching Problem Solving and Solving the Problems of Teaching. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives (pp. 439-450). Routledge, New York and London, 2009.

[24] Silver, E. A.: On mathematical problem posing. For the Learning Mathematics, 14(1), 19-28., 1994.

[25] Silver, E. A., and Cai, J.: An Analysis of Arithmetic problem Posing by Middle School Students. Journal for research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 5, 521-539, 1996.

[26] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Kenney, P. A.: Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No.3, 293-309, 1996.

Ábrák jegyzéke

Резюме

Під час застосування стратегії розв'язання проблеми шляхом відкидання від звичайного мислення у зворотному напрямку учні відбираються назад по кроках, необхідних для вирішення проблеми. Це допомагає учням легше сприймати і слідувати довгим і складним математичним процесам. Зворотне мислення може бути корисним при обчислювальних завданнях. Починаючи з останнього кроку, учні можуть визначити необхідні кроки, працюючи в зворотному напрямку, тим самим краще розуміючи процеси, що привели до розв'язання проблеми. Зворотне мислення може не тільки допомогти у розвитку математичних знань, але й стати ефективним інструментом у формуванні навичок розв'язування проблем та логічного мислення.

Ця стратегія мислення може мати переваги для учнів у математичному навчанні. Наприклад, вона може допомогти учням, які мають проблеми зі слідуванням довгим і складним математичним процесам, краще зрозуміти їх.

Моє дослідження показує, що завдання в початковому та кінцевому наборах виявилися важкими, тому майбутньому потрібно змінити ці завдання.

Melléklet

1.melléklet

Óravázlat

Dátum: 2022.11.17

Osztály: 6

Téma: A törtrész meghatározása és az egész rész meghatározása törtrésze alapján.

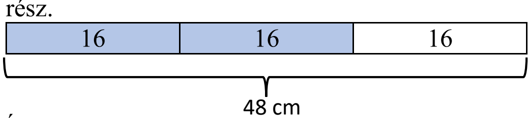
Oktatási cél: törtrész meghatározásának elsajátítása és feladatok megoldása

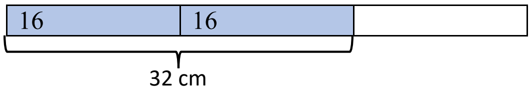
Nevelési cél: feladattartásra való nevelés, szabálykövetés

Képzési cél: gondolkodás fejlesztése

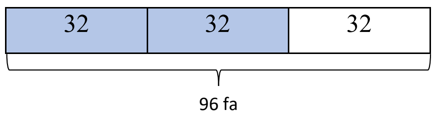
Az óra típusa: Kombinált óra

Eszközök: N. A. Taraszenkova: Matematika 6.osztály

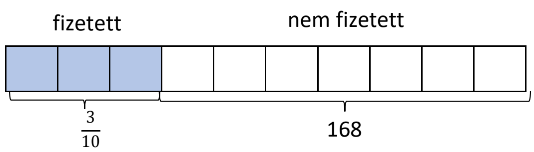
Az óra fő részei	Az óra menete	Idő	Megjegyzés
Szervezés	Köszönés. Hiányzók beírása. Eszközök előkészítése.	1 perc	
Számonkérés	Házi feladat ellenőrzése, ha volt. Ki mire emlékszik, mit tanultak eddig a törtekből?	2 perc	
Aktualizáció Motiváció	A törtrész meghatározása és az egész rész meghatározása törtrésze alapján a mai óránk témája.	2 perc	
Új anyag átadása	**Feladat:** Egy szoknya díszítésére 48 cm szalagot vásároltak, aminek $\frac{2}{3}$ részét használták fel. Hány cm-t használtak fel belőle? **Megoldás:** Az ábrán látható, hogy a 48 cm-es szalagot 3 egyenlő részre osztottuk és abból kell nekünk két rész.  Így kapjuk, hogy: $48:3 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$ cm Ezt a feladatot megoldhatjuk másféle képen is, úgy, hogy egész részt szorzunk tört számmal. $48 \cdot \frac{2}{3} = \frac{{}^{16}\cancel{48} \cdot 2}{{}_{1}\cancel{3}} = 16 \cdot 2 = 32\ cm$ **A törtrész meghatározásának szabálya** Ahhoz, hogy meghatározzuk a szám törtrészét, meg kell szorozni az adott számot a törtszámmal. **Feladat:** Egy szoknya díszítésére 32 cm szalagot vásároltak, ami az egész szalag $\frac{2}{3}$-a. Hány cm-es a szalag? **Megoldás:** Itt is hasonlóan vehetünk egy ábrát, amiből csak annyit tudunk, hogy két része 32 cm, de összesen nekünk 3 egyenlő részre kell felosztani.	15 perc	

<table>
<tr><td></td><td>


Itt a szalag teljes hosszát, úgy tudjuk kiszámolni, ha az adott szalag hosszát elosztjuk 2-vel és megszorozzuk 3-mal.
$32 : 2 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48\ cm$
Mint a másik esetben, ezt is megoldhatjuk törtekkel. Itt az adott rész értékét elosztjuk a törttel.
$32 : \frac{2}{32} = 32 \cdot \frac{3}{2} = \frac{{}^{16}\cancel{32} \cdot 3}{{}_{1}\cancel{2}} = 16 \cdot 3 = 48\ cm$

Az egész rész meghatározásának szabálya törtrésze alapján
Ahhoz, hogy meghatározzunk az egész részt törtrésze alapján, az adott részértéket el kell osztani a törttel.
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Begyakorlás</td><td>
1. A kertben nőtt 96 fa. A házigazda egy nap alatt lemeszelte a fák kétharmadát. Mennyit meszelt le a gazda egy nap alatt?
Megoldás:


$96 : 3 \cdot 2 = 32 \cdot 2 = 64$ (fa)
$96 \cdot \frac{2}{3} = \frac{{}^{32}\cancel{96} \cdot 2}{{}_{1}\cancel{3}} = 32 \cdot 2 = 64$ (fa)
Felelet: 64 fát meszelt le a gazda egy nap alatt.
2. A gazda lefestett 18 m kerítést, ami $\frac{3}{5}$-ét teszi ki a kerítés hosszának. Milyen hosszú a kerítés?
Megoldás:
Mivel meg van nekünk a kerítés egy része és az egész részt kell meghatározni, ezért osztunk:
$18 : \frac{3}{5} = 18 \cdot \frac{5}{3} = \frac{{}^{6}\cancel{18} \cdot 5}{{}_{1}\cancel{3}} = 30$ m
Felelet: 30 m hosszú a kerítés.
</td><td>20 perc</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>3. A mester 6 órát dolgozott, ez az egész munkaidejének a $\frac{2}{3}$-a. Meddig tart a mester munkaideje?
Megoldás:
Szintén meg van adva a mester munkaidejének egy része és meg kell határozni a teljes munkaidejét, ezért:
$6 : \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (óra)
Felelet: 9 óráig tart a mester munkaideje.
4. Az iskolai menzára már befizetett a tanulók $\frac{3}{10}$ része. Hányan ebédelnek az iskolában, ha még 168 -an nem fizettek?
Megoldás:


Ennél a feladatnál tudni kell mennyivel kell kiegészíteni a $\frac{3}{10}$-et, hogy 1 egészet kapjunk. Miután meg van, hogy nekünk ez a $\frac{7}{10}$, akkor ez tudjuk, hogy a nem fizetett tanulók száma. Mivel ez a tanulók egy része lesz, így ezt osztani kell a $\frac{7}{10}$-del:
$168 : \frac{7}{10} = 168 \cdot \frac{10}{7} = \frac{168 \cdot 10}{7} = 24 \cdot 10 = 240$
Felelet: 240 tanuló ebédel az iskolában.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Összefoglalás</td><td>Mi a szám törtrésze?
Hogyan határozzuk meg az egész részt a törtrészből?</td><td>3 perc</td><td></td></tr>
<tr><td>Házi feladat</td><td>A jéghegynek csak az $\frac{2}{9}$ része van a vízfelszíne felett. Hány tonnás a jéghegy,amelynek a víz alatti része 84 tonna tömegű?
Megoldás:
Ebben a feladatban is tudni kell, hogy mivel kell kiegészíteni a $\frac{2}{9}$ -et, hogy egy legyen, $\frac{7}{9}$-</td><td>2 perc</td><td></td></tr>
</table>

	el. Ez a tört a víz alatti rész, tehát ez a 84 tonna az egész résznek a $\frac{7}{9}$ -e. Vagyis: $84 : \frac{7}{9} = 84 \cdot \frac{9}{7} = \frac{84 \cdot 9}{7} = 12 \cdot 9 = 108$ Felelet: 108 tonnás a jéghegy.		

2. melléklet

Óravázlat

Dátum: 2022.11.18

Osztály: 6

Téma: Feladatok megoldása

Oktatási cél: a rákmódszer elsajátítása

Nevelési cél: szabálykövetés, logikus gondolkodás fejlesztése

Képzési cél: logika és problémamegoldás fejlesztése

Az óra típusa: Begyakorló óra

Eszközök: N. A. Taraszenkova: Matematika 6. osztály

Az óra fő részei	Az óra menete	Idő	Megjegyzés
Szervezés	Köszönés. Hiányzók beírása. Eszközök előkészítése.	1 perc	
Számonkérés	Házi feladat ellenőrzése. Hogyan határozzuk meg a szám törtrészét? Ahhoz, hogy meghatározzuk a szám törtrészét, meg kell szorozni az adott számot a törtszámmal. Hogyan határozzuk meg az egész részt törtrésze alapján? Ahhoz, hogy meghatározzuk az egész részt törtrésze alapján, az adott részértéket el kell osztani a törttel.	2 perc	
Aktualizáció Motiváció	A múlt órán elkezdett feladatokkal folytatjuk, viszont azoknak nehezebb változataival. Megismerkedtünk egy új módszerrel, a rákmódszerrel, amellyel könnyebben meg tudunk oldani szöveges feladatokat.	2 perc	
Begyakorlás	1. Gondoltam egy számot. Elosztottam 2-vel. Hozzáadtam 22-t. Megszoroztam 50-nel. Kivontam belőle 29-et. Eredményül 2021-et kaptam. Melyik számra gondoltam? I. Módszer Legyen x a gondolt szám: $(x : 2 + 22) \cdot 50 - 29 = 2021$ $(x : 2 + 22) \cdot 50 = 2021 + 29$ $(x : 2 + 22) \cdot 50 = 2050$ $x : 2 + 22 = 2050 : 50$ $x : 2 + 22 = 41$ $x : 2 = 41 - 22$ $x : 2 = 19$		

$x = 19 \cdot 2;$ $x = 38$

II. Módszer

38	9	41	2050	2021

· 2 -22 : 50 +29

2. Gondoltam egy kétjegyű számra. Felcseréltem a számjegyeit, majd a kapott számhoz hozzáadtam 15-öt. Az összegnek a felét vettem, végül a keletkezett szám jegyeit ismét felcseréltem. Melyik számra gondoltam, ha a végén a 62-t kaptam?

I. Módszer

Legyen x az a szám, amiután felcseréltük a gondolt szám számjegyeit

$$(x + 15) : 2 = 26$$

$$x + 15 = 26 \cdot 2$$

$$x + 15 = 52$$

$$x = 52 - 15$$

$$x = 37$$

A gondolt szám a 73.

II. Módszer

73	37	52	26	62

csere -15 · 2 csere

3. Egy ládából Bence egyik nap kiveszi az almák egyharmadát. Másnap újra kiveszi a még a ládában maradt almák egyharmadát. Harmadik nap újra kiveszi a megmaradt almák egyharmadát. Így végül 8 alma maradt a ládában. Hány alma volt eredetileg benne?

I. Módszer

1. $-\ \frac{1}{3}x$

2. $-\ \left(x - \frac{1}{3}x\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}x$

3. $-\ \left(x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}x$

Maradt még 8 alma

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}x + 8 = x$
II. Módszer
<table><tr><td>27</td><td>18</td><td>12</td><td>8</td></tr></table>
$:\frac{2}{3}$ $:\frac{2}{3}$ $:\frac{2}{3}$
4. Kerékpártúrán az első órában megtettük a táv $\frac{2}{3}$ részét. A következő órában csak egy km-t mentünk, mert pihentünk és egy szép kastélyt néztünk meg. Ezután megtettük a maradék út $\frac{3}{4}$ részét, így már csak 3 km maradt a végére. Hány km-es a túra?
I. Módszer
1. $-\frac{2}{3}x$
2. $-1\ km$
3. $-\left(x-\frac{2}{3}x-1\right)\cdot\frac{3}{4}$
4. $-3\ km$
$\frac{2}{3}x + 1 + \left(\frac{1}{3}x - 1\right)\cdot\frac{3}{4} + 3 = x$
II. Módszer
<table><tr><td>39</td><td>13</td><td>12</td><td>3</td></tr></table>
$:\frac{1}{3}$ $+1$ $:\frac{1}{4}$
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Összefoglalás</td>
<td>Milyen új módszert tanultatok a mai órán?
Rákmódszer (visszafelé okoskodás)
Hol alkalmazhatjuk?
Egyenletekkel is megoldható szöveges feladatokban.</td>
<td>3 perc</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Házi feladat</td>
<td>1. Gondoltam egy kétjegyű számra. A tízszeresét vettem, majd a kapott számhoz 8-at adtam hozzá. Az így kapott szám első és utolsó számjegyét felcseréltem, ezután ennek a felét vettem. Az eredmény így 421 lett. Melyik számra gondoltam?</td>
<td>2 perc</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$$24 \xleftarrow{:10} 240 \xleftarrow{-8} 248 \xleftarrow{\text{csere}} 842 \xleftarrow{\cdot 2} 421$$

Felelet: 24 a gondolt szám.

2. A Kovács családban közkívánatra anya palacsintát sütött. Pist megette a harmadát, Dóri a maradék negyedét, apa eztán négyet evett, Viki a maradék $\frac{3}{5}$ részét, anya aztán még ötöt, végül Huncut a kutyus is megkapta a maradék hármat. Mennyi palacsintát készített anya?

$$48 \xleftarrow{:\frac{2}{3}} 32 \xleftarrow{:\frac{2}{4}} 24 \xleftarrow{+4} 20 \xleftarrow{:\frac{2}{5}} 8 \xleftarrow{+5} 3$$

3. Egy juhász és három fia legelni viszi a nyájat. A juhász vállalja, hogy vigyáz a felére, a legkisebb fiú elviszi a következő tízet, a középső a maradék felét, végül a legnagyobb fiú a maradék húszat viszi el. Hány birkája van a juhásznak?

$$100 \xleftarrow{:\frac{1}{2}} 50 \xleftarrow{+10} 40 \xleftarrow{:\frac{1}{2}} 20$$

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

ID перевірки:
1015113520

Дата перевірки:
16.05.2023 15:18:56 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
17.05.2023 11:19:22 EEST

ID користувача:
100011749

Назва документа: Szakdolgozat_Pinte_E

Кількість сторінок: 42 **Кількість слів:** 7252 **Кількість символів:** 49259 **Розмір файлу:** 5.08 MB **ID файлу:** 1014795992

9.4% Схожість

Найбільша схожість: 2.29% з Інтернет-джерелом (http://doktori.bibl.u-szeged.hu/4026/1/%C3%89rtekez%C3%A9s.pdf)

8.66% Джерела з Інтернету | 203 Сторінка 44

0.95% Джерела з Бібліотеки | 3 Сторінка 45

2.15% Цитат

Цитати | 7 Сторінка 46

Не знайдено жодних посилань

29.4% Вилучень

Деякі джерела вилучено автоматично (фільтри вилучення: кількість знайдених слів є меншою за **8 слів** та **0%**)

29.4% Вилучення з Інтернету | 302 Сторінка 47

Немає вилучених бібліотечних джерел

Nyilatkozat

Alulírott, Pinte Edina, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.