ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Подільність в шкільному курсу математики

Фаркаш Беттіна Золтанівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йожефівна**
к. ф.-м. н

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**
к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Подільність в шкільному курсу математики

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-го курсу

Фаркаш Беттіна Золтанівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Рецензент: **Стойка Мирослав Вікторович**

к .ф. - м. н., доцент,

доцент кафедри математики та інформатики

Берегове
2023

Зміст

Вступ 2

1. Подільність натуральних чисел у шкільній освіті та опіці талантів 5

2. Планування задачі гуртків застосування якісних методів дослідження 10

3. Оцінювальна задача з розв'язком 18

4. Комплекс практичних завдань з рішенням 21

5. Хід і результати дослідження 28

Резюме 33

Бібліографія 34

Додаток 36

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

OSZTHATÓSÁG A KÖZÉPISKOLÁBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Farkas Bettina

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Dr. Kucsinka Katalin

tanszékvezető, Matematika és Informatika Tanszék

Recenzens: Sztojka Miroszláv

fiz. mat. tud. kandidátusa, docens,

a Matematika és Informatika Tanszék docense

Beregszász – 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés **2**

1. A természetes számok oszthatóságának témaköre az iskolai oktatásban és tehetséggondozó alkalmakon **5**

2. Akciókutatás és a tanulás fejlesztése **10**

3. Felmérő feladatok megoldással **18**

4. Gyakorló feladatok megoldással **21**

5. Az akciókutatás folyamata és eredménye **28**

Összegzés **33**

Irodalomjegyzék **34**

Melléklet **36**

Bevezetés

Napjainkban a matematika oktatás, az ismeretek átadásának módszertana a tanulók gondolkodásának fejlesztését tartja legfőbb feladatának. Az órákon sokféle hatékony és tudatos eljárást alkalmazhatunk a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztésére. A matematika, mint tantárgy, különböző ágazatokra bontható, melyek látszólag függetlenek egymástól, viszont ha mélyebben belegondolunk, rengeteg helyen kapcsolódnak össze a témák, témakörök. Az oszthatóság esetében ez a kapcsolatrendszer különösen szerteágazó, ami azt mutatja, hogy valóban fontos szerepe van.

A számelmélet kulcsfogalma az oszthatóság, amelynek meghatározása segít a nehezebben végrehajtható osztásban, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös meghatározásában, az eltérő nevezőkkel rendelkező törtek összeadásában és kivonásában, valamint a tört legegyszerűbb alakjának megtalálásában. Sok esetben az osztás végrehajtása időigényes és bonyolult lehet, ha azonban a hányadosok vagy maradékok nem szükségesek, akkor az oszthatósági szabályok segítségével megállapítható, hogy egy egész szám osztható-e egy másikkal. Az évek során matematikusok teszteket végezve kidolgoztak olyan oszthatósági szabályokat, amelyek egy rövid módszert adnak ennek meghatározására anélkül, hogy ténylegesen végrehajtanánk az osztást. Ahhoz, hogy a diákok elsajátítsák az oszthatósági szabályokat és önállóan felismerjék bizonyos számok osztóit, illetve többszöröseit, mindenképp tisztában kell lenniük az osztás metódusával, mint matematikai alapművelettel.

Az iskolai tantanterv fő célja az, hogy a közepes és gyengébb tanulók elsősorban a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat sajátítsák el, és alkalmazzák helyesen. A további (7, 11, 13) számokra vonatkozó szabályokat a tehetséggondozó alkalmakon szükségszerű ismertetni, ugyanis versenyfeladatoknál is előfordulhat, és nem utolsó sorban érdekes a matematika felé nyitottabb, fejlett készségű tanulók számára.

Az akciókutatás során a tanárok több információt szereznek az osztályteremben végzett munkájukról, gazdagítják pedagógiai repertoárjukat, és átgondolják, milyen módszereket használnak. A megközelítés segíti az oktatói attitűdök, a szakmai identitás és a pedagógiai szakértelem folyamatos fejlesztését, miközben biztosítja a tanár számára, hogy a saját helyzetének megfelelően, a saját szükségletei mentén értelmezhesse az eredményeket.

1. fejezet

A természetes számok oszthatóságának témaköre az iskolai oktatásban és tehetséggondozó alkalmakon

Az iskolákban a 6. osztályos tananyag része az Természetes számok oszthatóságának témaköre, amelyet Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által jóváhagyott tanmenet szerint 10 óra keretein belül sajátítanak el a diákok. [1]

A tanulók oktatási és kognitív tevékenységének várható eredményei :

A diák példákat ad: prím- és összetett számokra, páros és páratlan számokra, 2, 3, 5, 9, 10-zel osztható számokra, megkülönbözteti a prím- és összetett számokat, megfogalmazza a következő meghatározását: osztó, többszörös, prímszám, összetett szám, közös osztó. Feladatokat old meg, amelyek tartalmazzák: a számok 2, 3, 5, 9, 10-zel való oszthatósági szabályainak használatát; természetes számok felbontása prímtényezőkre, két szám közös osztóinak megtalálása, két szám legnagyobb közös osztója (LNKO) százon belül, illetve két szám legkisebb közös többszörösének (LKKT) megtalálása százon belül.

Oktatási anyag tartalma :

- Természetes számok osztói és többszörösei.
- A 2, 3, 5, 9, 10-zel való oszthatóság szabályai.

- Prím- és összetett számok.
- Számok felbontása prímtényezőkre.
- A legnagyobb közös osztó.
- A legkisebb közös többszörös.

A diákok 6. osztályban bővebben megismerkednek az oszthatóság fogalmával. A *Taraszenkova N.A. Matematika (2014)* [2] tankönyv ebben a témakörben az alábbiakat foglalja össze:

- A természetes szám osztója és többszöröse;
- Milyen oszthatósági szabályok vannak;
- Melyek a prímszámok és hogyan lehet őket meghatározni;
- Hogyan lehet tényezőkre bontani a számokat;
- Mi a számok legnagyobb közös osztója és hogyan kell azt meghatározni;
- Mi a számok legkisebb közös többszöröse és hogyan kell azt meghatározni;
- Hogyan alkalmazható a tananyag a gyakorlatban.

Egy tanár számára „tökéletes forgatókönyv” lenne megtanítani a tanulóknak, a szükséges oszthatóság szabályokat és elvárni, hogy megértsék és alkalmazzák őket, viszont tudjuk, egy új tananyag átadása a gyakorlatban nem így működik, másrészt a szabályok megtanítása és azok működésének bemutatása célszerűbb, hogy segítse a tanulókat az oszthatósági szabályok megértésében, főleg ha azt minél érdekesebb feladaton mutatjuk meg. Adhatunk a tanulóknak olyan eszközöket, amelyek használatáva vizuálisan, játékosan műveleteket hajthatnak végre, megszámolhatnak és csoportokba rendezhetnek. Engedjük a diákokat, hogy maguk találjanak mintát, módszereket oszthatóságokra, így sokkal könnyebben megőrzik ezt a készségüket és a későbbiekben kevesebb nehézséggel jár felevelenítik, ugyanis az oszthatósági szabályok használhatóak problémamegoldásra, de fontos megértéssel alkalmazni. Ezek ismerete bármikor előnyt ad a tanulóknak különböző alkalmazási területeken. Néhány ilyen terület magába foglalja az osztó tényezőinek megállapítását, annak meghatározását, hogy az osztó prímszám-e, a törtek egyszerűsítését, valamint két szám legkisebb közös többszörösének és közös nevezőjének kiszámítását.

A mi feladatunk nem csupán átadni a tudást és a matematikai szabályokat a tanulóknak, hanem fontos olyan útmutatást, metódusokat közölni, amely arra ösztönzi a tanulókat, hogy kifejezzék ötleteiket, fejlesszék érvelési készségeiket. Az oszthatósági témakör ismertetésekor több új kifejezést szűkséges bevezetni egy tanárnak ilyenkor igyekezzünk megállapítani, a tanulók megértettek-e bizonyos fogalmakat és felismerni gyakorlati helyzetben, mikor kell beavatkozni, ha a diáknak bizonyos fogalom vagy művelet nehézségeket okoz, ezáltal a matematikai kifejezések megértése javul, ha felismerik félreértéseiket vagy hibáikat.

Például egy 6. osztályos tanuló számára nehéz lenne ellenőrizni az oszthatóságot nagy számokkal, de ha megérti és alkalmazni tudja a kisebb számokkal való oszthatóság fogalmát, akkor nagyobb valószínűséggel sikerül neki ezt a metódust átvinni magasabb szintű feladatok megoldására.

Első lépésként megfelelő például a 18-as számon bemutatni az oszthatósági szabályokat 2-re és 3-ra, majd rávezetni a tanulókat, hogy felismerjék, melyik további számra alkalmazható az oszthatósági szabály ugyanezen a példán. Miután a 6-tal való oszthatóságot is bevezetjük, engedjük a diákoknak igazolni, valóban helyesen gondolkodtunk. Ezután megvizsgálhatjuk a 18-as számnál maradva a 4-gyel való oszthatóságot és engedjük a tanulókat elgondolkodni, választ adni. Miután elsajátították az alapvető oszthatósági tulajdonságokat, ellenőrizzék ezeket más számokkal, például 25-tel, 16-tal, 42-vel és 39-cel.

A „GENIUS” Jótékonysági Alapítvány szervezésében idén hetedszer kerültek megrendezésre a matematika tehetséggondozó és versenyfelkészítő hétvégék. A foglalkozások célja a 8-17 éves matematika iránt elkötelezett fiatalok megyei, országos és nemzetközi matematikaversenyekre való felkészítése, valamint matematika ismereteik bővítése és elmélyítése. .A versenyfelkészítő és tehetséggondozó hétvége programfelelőse, ötletgazdája: Kulin Judit, az Ungvári 10. sz. Dayka Gábor Középiskola igazgatója, az Ungvári Tehetségpont koordinátora, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és informatika tanszékének oktatója.

A képzésre a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség által megvalósított Terebesi Viktor Emlékverseny (5-6. osztályban tanulók számára) és a Geőcze Zoárd Matematikaverseny (7-11. osztályban tanulók számára) első tíz helyezettjei kapnak meghívót, ennek megfelelően átnéztem az említett emlékversenyek korábbi feladatsorait 1999-től a legutóbbi alkalomig és kiválogattam az oszthatóság, oszthatósági szabályok témaköreit lefedő feladatokat a "Kárpátaljai Matematikatanítás" online adatbázisból [3] . Felhasználtam feladatlapokat, füzeteket azokról a matematika foglalkozásokról, táborokból, versenyekről, amelyeken én magam korábban diákként vettem részt, valamint a hivatkozásokban megtekinthető feladatgyűjteményekből. A feladadatsor összeállítása során áttekintettem a 6. osztályos Taraszenkova Matematika tankönyvet[2], illetve az Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által jóváhagyott tanmenetet [1], hogy a diákok tudásához mérten megfelelő nehézségi szintű feladatokat sikerüljön összeválogatnom, igyekeztem szem előtt tartani, hogy semmiképp ne kerüljön bele olyan, amelynek megoldásához szűkséges művelet ismeretlen lenne a tanuló számára. Fontos, hogy a tehetséggondozó alkalmakon a diákok előtt minél szélesebb körben legyen áttekinthető bizonyos témakörök, megismerkedjenek számukra új gondolkodásmódokkal, módszerekkel, valamint alkalmazzák saját ötleteiket és önmaguk felismerjék, melyik feladat típushoz milyen metódusok vezetnek megoldáshoz.

Mielőtt rátérünk a feladatsor megoldására, első lépésként ajánlott az alapvető 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályok felelevenítése. Fontos, hogy egy új ismereteket átadó, begyakorló óra folyamán minden típusfeladatból elegendő legyen ahhoz, hogy a tanuló kellően megértse és memorizálja a megoldás lépéseit és a továbbiakban képes legyen önállóan megoldani hasonló feladatokat, akár versenyek, megmérettetések alkalmán. Ennek módja, ha egy feladat típusból legalább 3-mal készülünk: az elsőn mi mutatjuk be a megoldást, ezt követően mikor a diák rendelkezik az új metódus ismeretével, őket is belevonva, közösen megoldhatunk legalább egy feladatot. Eközben a tanár megfigyelheti, ki az aki kevésbé érti az új tananyagot és melyik tanuló aktívabb, hol szűkséges részletesebb magyarázat. A harmadik lépésként pedig már a diákot táblához hívhatjuk és feltehetően megoldja önállóan a feladatot, azaz sikeresen elsajátította az új tananyagot. A matematika felé nyitottabb, fejlett készségű tanulók számára érdekese lehet megmutatni szélesebb körben az oszthatósági szabályokat, például a 7, 11, 13 esetén.

Mindezen felül a következő fejezetben szereplő feladatok megolásához egy eljárást szűkséges alkalmazni, amely a hatványszámok utolsó számjegyének periodikusan ismétlődésének tulajdonságára épülnek. Ezt a módszert táblázat formájában érthetően le tudjuk vezetni. Például vizsgáljuk meg a 2-es szám hatványait: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ... Ezeket akár mégtovább írva, azt figyelhetjük meg, hogy az utolsó számjegyek periodikusan ismétlődőek (2, 4, 8, 6, 2, 4, ...) és elmondhatjuk, hogy ez a periodus szám a 4, mivel 4 elem után kezd ismétlődni a minta. A továbbiakban az oszthatósági szabályok mellett ezt az eljárást is alkalmazzuk más-más számokkal, különféle feladatok megoldásához.

2. fejezet

Akciókutatás és a tanulás fejlesztése

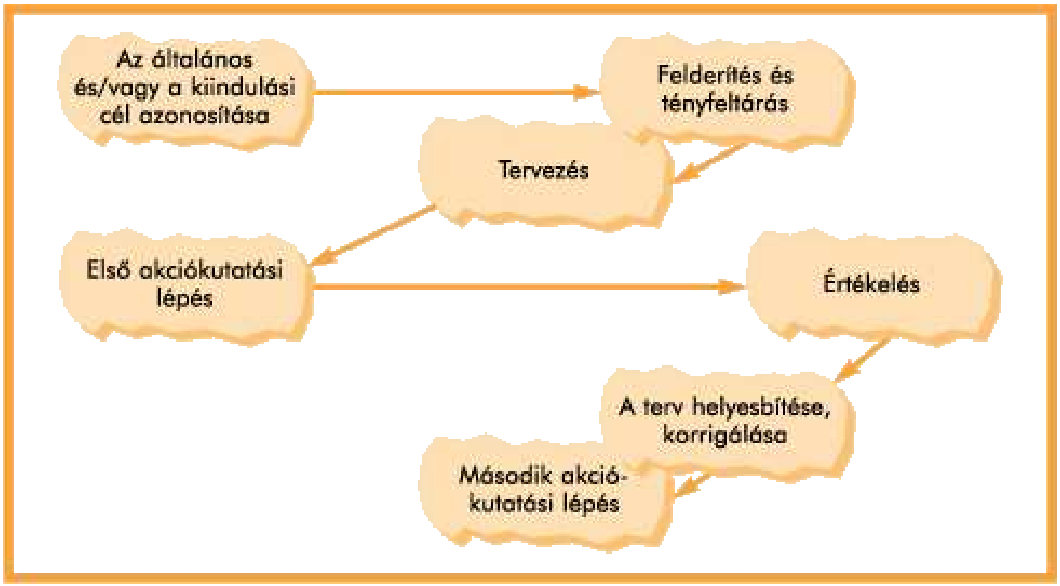
Az akciókutatás történeti áttekintése

Az akciókutatás az 1940-es években lelte meg igazi alapítóját Kurt Lewin pszichológussal. Munkásságával megszületett előbb az együttműködő kutatás, majd az akciókutatás fogalma. A kettő közötti különbség abban áll, hogy az utóbbiban nagyobb hangsúlyt kap a közreműködés szabadsága, a folyamat és – a társadalmi tanulásból következően – a közösségek. A fogalom megváltoztatása kutatásetikai kérdések felvetésének és társadalmi tanulási folyamatnak az eredménye, s nem utolsósorban a csoportdinamikai jellemzők felfedezésének. Lewin utóbbi téren végzett kutatásai szerint a viselkedésváltás azért következik be csoportkörülmények között, mert az együttes döntések összetartozás-élményként jelennek meg az egyén számára. Elmélete szerint a tanulás egyfajta átértékelési folyamat, amelyet az új tapasztalatok, érzelmi hatások váltanak ki. [8] Megfogalmazta a viselkedésváltozás folyamatát, mint:

- felolvasztás – az új helyzetben a korábbi szokások megkérdőjeleződnek és újabbak kerülnek felszínre;
- felolvasztás – az új helyzetben a korábbi szokások megkérdőjeleződnek és újabbak kerülnek felszínre;
- visszafagyasztás – az új szokások rögzítése.[8]

Az akciókutatás kiindulópontja tehát a kritikai és értékelő - önértékelő - aspektus, amelynek célja a tevékenységek javítása és optimalizálása. Ez a javítás azonban nem egy széles, megfoghatatlan áradatba akar szétszóródni, hanem a kezdetben kitűzött célokra összpontosít. Az akciókutatás az oktatási gyakorlatban tehát egy adott tanulási és tanítási tevékenység céljait hasonlítja össze az elért eredményekkel. A pedagógus tanítási tevékenységének részeként ez az összehasonlítás hasznos eszköz a saját tevékenységének mélyebb, elemzőbb és tudatosabb megértéséhez, valamint az önértékelés eszközeként.

Kemmis meghatározása szerint [10] az akciókutatás egyrészt egyfajta műveleti technológia, azaz egy sor dolog, amit meg lehet valósítani a gyakorlatban, másrészt annak elismerése, hogy a nevelési (egyben a tanítási-tanulási) célok megvalósulása lehet részleges, töredékes is, valamint morális és etikai állásfoglalás, mely célként ismeri el az emberi élet javítását. Ahhoz, hogy ezt állíthassuk, fel kell ismerni, hogy a tanteremben a „Mit fogok tenni?” kérdés együtt jár a „Mi történik?” és „Mit tegyek?” kérdésekkel. [9]



Forrás: Kemmis–McTaggart: The action research planner, 1988

2.1. ábra Az akciókutatás lépései A tervezés, cselekvés, megfigyelés, reflektálás ciklusai nem mindig pontos körfolyamatban jelentkeznek. A nevelés során keveredik a „merre mentem” és a „merre kell mennem”, és vannak olyan pontok, ahol egyes akciók logikája és az az idő, amikor a dolgokat át kell gondolni, meglehetősen esetleges megkülönböztetéseket hív életre. Általában azonban az akciókutatás a tanítás-tanulás során az iskolai élet ritmusával összhangban halad, ugyanakkor ezeket a ritmusokat nem tekinti magától értetődőnek.

Az akciókutatás tehát arról szól, hogy mindennapi dolgokat viszünk be az oktatás gyakorlatába, és ott kicsomagoljuk, hogy megvizsgáljuk fogalmi-logikai, személyes-szervezeti és más jelentőségüket. Az akciókutatás különleges sajátossága, hogy a folyamatot a tartalommal együtt hangsúlyozza, nem csak a folyamat kimenettartalmát mint kívánatos végeredményt. [15] Nemcsak a tanulói teljesítményre, hanem a tanulási folyamatra és a kettő közötti kölcsönhatásra is összpontosíthat. Az akciókutatás mint kutatási módszer a ciklikus és iteratív tevékenység elemeiből építkezik. Vagyis nem a kezdeti kérdezés, adatgyűjtés, elemzés és következtetés útját követi. Feltételezi, hogy a felismerések és a cselekvések egy folyamatos ciklusban, újrakapcsolódások láncolatában alakulnak ki, mindig arra összpontosítva, hogy a pedagógus mit csinál helyesen, ami az ötletek és a cselekvések állandó újragondolását, felülvizsgálatát és javítását igényli.[11] A folyamat vége más, mint a kutatás hagyományosabb felfogásaiban: nem az, hogy az oktatást jobban megértjük, s így az eredmények alkalmazását megkönnyítjük mások számára, hanem az ellentmondások meghatározásának állandó folyamatát jelenti, és ezzel segít etikailag védhető, újabb akciók tartalmának és helyének meghatározásában. [14]

Az akciókutatás mint önreflektálás

Az oktatási gyakorlattal kapcsolatos adatok és empirikus információk gyűjtése során az akciókutatás azt hangsúlyozza, hogy a tanárok hogyan tapasztalják és ítélik meg a tanórákat személyes intuíciójuk alapján, ami lehetővé teszi számukra, hogy a "jó tanításról" alkotott elképzeléseiket az oktatási folyamatban részt vevő más szereplők (szülők, gyerekek, tanárképzők, közösség, állam stb.) által lehetővé teszi számukra, hogy elhelyezzék magukat az általuk kialakított képben. Ez a gyakorlat segít abban, hogy a pedagógus személyes világában az oktatási folyamatot mindig problémák és megoldási kísérletek sorozataként lássák. E folyamat eredményeként, számtalan nehézségen keresztül felismerhetjük a "partnereinkkel" - diákokkal, szülőkkel, kollégákkal és szakemberekkel - való együttműködés fontosságát és szerepét, és új kommunikációs hálózatokat építhetünk ki. Ehhez folyamatosan tisztáznunk kell a társadalmi igazságosságról alkotott elképzeléseinket, fel kell ismernünk gyakorlatunk korlátait, és ki kell fejlesztenünk az elképzeléseink megvalósításához szükséges készségeket, és mindhárom területnek nyitottnak kell lennie a felülvizsgálatra és a változásra. Ebben az értelemben az akciókutatás a pedagógiai gyakorlat valóságának fejlesztése, javítása és megértése, valamint annak a kontextusnak az elemzése és feltárása, amelyben ez a gyakorlat zajlik. [15]

Az akciókutatásban való részvétel egyik fő előnye, hogy a tanárok a tanítás sikerének "reménye" helyett "tudni" kezdik,tisztább képet kapnak munkájuk hatékonyságáról. Az akciókutatás segíti a tanárokat abban, hogy képesek legyenek alternatívákat feltárni jelenlegi munkájukban, és hogy megismételjék azt, ami már jól működik.Tehát ez nem csupán javítási stratégia, hanem a szakemberek számára egy olyan lehetőség is, amely lehetővé teszi a meglátások feltárását abban a kontextusban, amelyben dolgoznak. Ennek során azonban fontos szem előtt tartani, hogy az akciókutatás ciklikus jellegéből adódóan az eredményei mindig "ideiglenesek", és a folyamat egy pillanatát rögzítik.

Az iskolai és a tehetséggondozói akciókutatás

A tanulási és fejlesztési szakemberek (pl. tantárgyfejlesztők, a módszertani innovációk tesztelésének szakértői) arról számolnak be, hogy az akciókutatás, ha elvégzik, nagyon gyakran ösztönző, energizáló és magával ragadó a tanárok számára, a közoktatás egészében azonban még mindig nagyon kevesen teszik ezt. Ha az akciókutatás nem válik az iskolákban természetes tevékenységként szabályozottá, akkor kuriózum marad, viszint ha önfenntartóvá válik, akkor pozitívan fog hozzájárulni a közoktatás egészének fejlődéséhez.

A fejlesztéssel foglalkozó szakemberek elsősorban azért vonják be a tanárokat az innovációba, mert úgy vélik, hogy ez növeli a tanulás és tanítás természetével kapcsolatos ismereteiket, és növeli szakmai bölcsességüket. Fontos azonban megjegyezni, hogy a cél nem a tudásbázisuk növelése, hanem az oktatási gyakorlatok megértésének fejlesztése. A kutatók megállapították, hogy a tanulás és tanítás tudásbázisát általában az iskolai kontextustól távolinak tartják. Ezzel szemben a szakmai tudás és a szakmai bölcsesség konkrét példákra, emberekre és osztálytermi helyzetekre vonatkozik. Egyértelmű, hogy egy tanár életében az akciókutatásnak csak akkor van értelme, ha a tanár meg akarja változtatni iskolája és saját maga körülményeit (kompetenciáit). Ahhoz, hogy az mindez a továbbiakban is az iskola életének része maradjon, a tanároknak meg kell érteniük annak gyakorlati hasznát. Ha a fejlesztőpedagógusok egyenrangú partnerként vehetnek részt a kutatásban, és meghatározhatják a tevékenységek tartalmát, akkor nem végrehajtóként, hanem szakértőként tekinthetnek magukra (és mások is így látják őket).[**?**]Az elméletírók általában tudományos problémákat vizsgálnak, és megpróbálnak szabályszerűségeket találni bennük. A pedagógusok ezzel szemben olyan kérdésekre összpontosítanak, amelyeknek közvetlen és általában azonnali hatást kell gyakorolniuk a diákokra. [13]

Az önreflexió és a reflektált gyakorlat

A tanulási-tanítási folyamat során szerzett benyomások és tapasztalatok személyes logikával tárolódnak a pedagógus emlékezetében, és később a pedagógiai munka személyes fogalmi keretei és kognitív sémái segítségével kerülnek feldolgozásra. [15] Az akciókutatásra való felkészülési időszak során ezeket a fogalmi kereteket felépítik, rekonstruálják és tudatosítják. Ebben a folyamatban döntő a fejlesztő pedagógus nyitottsága, tanulékonysága és kritikai-önkritikai képessége. Az akciókutatási módszert eszközként használó fejlesztő pedagógus önmaga korábbi fogalmi sémáival kerül konfliktusba, amikor ezeket revideálja és szétbontja. Ez az összetett folyamat magában foglalja gondolkodásának rugalmasságát, tudáskapacitását és egyéb pszichodinamikáját, jelentős tudattalan érzelmi komponenssel.

A pedagógus önreflexiója a saját szakmai tevékenységével kapcsolatos önértékeléshez kapcsolódik. Ha ez rugalmas és képlékeny, és nem kötődik mereven egy "rögzített" önképhez, akkor alakítható és fejleszthető. Az akciókutatás így a pedagógus önmagukhoz való viszonyának és saját szakmai önképüknek a tesztje is. Az tehát próbára teszi a pedagógus önmagához és saját szakmai énképéhez való viszonyát is. A csoportban lejátszódó folyamatok ezenkívül bonyolult szociális hierarchizálódási konfliktusokat is tükröznek, amelyekben meghatározóak az együttműködési és versengési, valamint az alá- és fölérendelődési szükségletek is. Mindez arra utal, hogy az előkészítése a csoport- és személyiségdinamika gondos felügyeletét és néha szakértői beavatkozást igényel.

Az akciókutatás fenntarthatósága

Ahhoz, hogy az akciókutatás fenntartható legyen, számos kihívással kell szembenézni, és számos kérdésre kell választ adni.

- Milyen alapvető feltételeknek kell teljesülniük ahhoz, hogy az akciókutatás beágyazódjék a helyi pedagógiai gyakorlatba?
- Hogyan kell elkezdeni az akciókutatást ahhoz, hogy időben és térben ugyanúgy működjék, mint az iskolai szakmai élet más aspektusai?
- Hogyan kell az akciókutatás módszertanát a pedagógusok élet- és munkakörülményeihez, mindennapjaihoz igazítani?
- Az akciókutatás fókusza hogyan illeszkedik legjobban a pedagógusok tényleges

problémáihoz (a külső szereplők érdekeivel összevetve)?

- Hogyan válik az akciókutatás lényeges elemévé annak, hogy egy pedagógusnak meg kell értenie és értékelnie kell saját gyakorlatát?
- Hogyan válik ez szakmai fejlődése elengedhetetlen elemévé?
- Hogyan marad továbbra is kollaboratív az akciókutatás, hogy a pedagógusok ne csak a saját kezdeményezéseikből profitálhassanak, hanem másokéiból is? [15]

Lényeges, hogy az akciókutatás "napirendje", azaz a témák, kritériumok és a munkaterv a tanártól származzon. A tanároknak kell megfogalmazniuk a vizsgálandó kérdéseket, területeket és szempontokat, és meg kell határozniuk az érintett partnereket. Az akciókutatásnak önfejlesztőnek is kell lennie. Ennek egyik lényeges eleme ugyanis az az ígéret, hogy ha részt vesznek ebben a tevékenységben, akkor jobbak lesznek, és az általuk fontosnak tartott célokért fognak dolgozni. Ez az ígéret - és remény - tanárközpontú. Ha ugyanis a tanárok nem látnak lehetőséget saját munkájuk javítására, akkor a tanárközpontú tevékenységekben rejlő lehetőségek csökkennek. A közös munka minőségét úgy lehet fenntartani, ha a folyamatba olyan mechanizmusokat építünk be, amelyek ezt megkövetelik.

Az akciókutatás helyi támogatása

Pedagógusképzés és továbbképzés feladata a tanári kompetenciák fejlesztése, amely lehetővé teszi, hogy a tanárok ne csak az iskolai gyakorlatot ismerjék meg, hanem a tanulásról és tanításról való közös gondolkodásmódot, a szakmai vitákat és a szervezeti struktúrák javításának és megváltoztatásának szükségességét is. Ha a pedagógusok egy bizonyos (tanulás- vagy tanítás-) elméletet próbáltak áttenni a gyakorlatba, gyakran azzal szembesülnek, hogy a tantermi helyzetekben egészen más elméletek valósulnak meg, azaz gyökeresen eltér a deklarált és a megvalósuló (esetleg rejtett) ötlet.

Az akciókutatás három típusa

Carr és Kemmis az alábbi három típust különbözteti meg:

- **Technikai jellegű akciókutatás:** Külső facilitátorok (akadémikusok, kutatók, intézmények) pedagógusokkal és más résztvevőkkel együttműködve közös tanár-kutató projekteken dolgoznak. Az a cél, hogy az oktató tanulmányozza a facilitátorok által megadott kritériumok alapján hatékonynak tűnő módszereket. Idetartoznak például azok az esetek, amelyekben egy iskola tanárai letesztelik egy kutatás eredményeit, de nem azzal a céllal, hogy a saját munkavégzésükön finomítsanak, hanem azért, hogy a tapasztalataikkal további adatokhoz segítsék a kutatást végzőket.

- **Gyakorlati jellegű akciókutatás:** Külső facilitátorok segítenek a pedagógusoknak és más, az oktatás területén dolgozóknak megfogalmazni a problémáikat, megtervezni a megoldáshoz szükséges lépéseket, bevezetni a változtatásokat, valamint monitorozni és értékelni az intézkedések hatását. Közös problémák mentén dolgoznak ugyan a pedagógusok és a facilitátorok, mégis elsősorban a tanárok felelőssége a saját munkavégzésük ellenőrzése, és maguknak kell ítéletet mondani a folyamatról. Az ilyen esetekben tehát nem az oktatásban dolgozók egységes, szisztematikus képzéséről van szó.[16]

- **Emancipatorikus akciókutatás:** A pedagógusok vezetik a kutatást, és támogatják a résztvevőket (a tanulókat és a kollégákat) a kollaboratív önreflexió során. Az is előfordulhat, hogy az egész iskolát érdemes bevonni egy-egy részfolyamatba, például az osztálytermi interakciókra vonatkozó megközelítések, a mindenki által alkalmazott értékelési gyakorlatok meghatározásába. Az emancipatorikus akciókutatás nyílt, kollaboratív eljárás. Használata feltételezi az egyéni és a csoportos felelősség közötti dialektikus viszony megértését. A gyakorlati jellegű akciókutatás következő lépcsőjének is tekinthető.

2.1. táblázat A klasszikus és az emancipált akciókutatás összehasonlítása

Szempont	Klasszikus akciókutatás	Emancipálódott vagy kritikai akciókutatás
Az akciókutatás társadalmi szerepe	Kisközösségek demokratikus részvétele a társadalmi folyamatokban, saját szempontjaik érvényesítésében	A kutatás demokratizálódása azáltal, hogy a kutatás elszakadt egy privilegizált körből, a kizárólagos „akadémiai” világtól, s „leszállt” a hétköznapokban
Az akciókutatás hatása	Az innováció technikailag könnyebben kivitelezhető és társadalmi hatását tekintve tartósabb	Az innováció folyamatában relevánsabb válaszok születnek a megoldandó problémákra
A tudományos kutató	Akadémiai kör tagja, kizárólagosan birtokolt és megkülönböztetett szakértelemmel	Azok a szereplők, akiknek a tevékenysége a vizsgálat tárgya és akiknek aktivitásával a kutatás folyik
Kutatás-metodológia	A valóságra irányul, a tudományos vigazságot keresi. Matematikai inspiráció, kísérleti-technicista megközelítések	Értelmező, interpretatív jellemzők tudományos értéke megnőtt

Az akciókutatás olyan alkalmazott kutatás, amelyet egyénileg vagy másokkal együttműködve lehet végezni. Az együttműködésen alapuló akciókutatás során a tanárok és a kutatók együtt dolgoznak a mindkettőjüket érdeklő területek feltárásán, inkább egy tágabb megközelítésnek, mint egy konkrét módszertannak tekinthető. Ez azért van így, mert nagyon különböző módon, nem teljesen egyforma módszerekkel lehet megvalósítani. Például magában foglalhat kvalitatív és kvantitatív adatgyűjtést is, amelyek mindkettő segít a tanároknak abban, hogy a szükséges információkhoz jussanak, és megválaszolják kérdéseiket. Ezért az is fontos, hogy az ilyen tanulmányok szilárd módszertanon alapuljanak, amelyek megfelelnek a tudományos és etikai normáknak.

3. fejezet

Felmérő feladatok megoldással

1. Igazoljuk a következő oszthatóságokat: [4]
   a) $9 \vdots (10^{33} + 8)$;
   b) $6 \vdots (10^{10} + 14)$.

2. Bizonyítsd be, hogy $96^{2013} - 1$ különbség osztható 5-tel! [6]

3. Ha $3 \vdots 2734x5$, akkor mennyi lehet az x értéke?

4. Milyen számjegyeket írhatunk x és y helyére, ha $12 \vdots 64x32y$?

5. Ha egy iskola tanulóit négyesével, ötösével, vagy százegyesével állítják sorba, akkor egy tanuló egyedül áll. Hány tanuló jár az iskolába?

6. Öt egymást követő egész számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik az így kapott szám? [4]

3.1. Feladat. *Igazoljuk a következő oszthatóságokat:*
a) $9 \vdots (10^{33} + 8)$;
b) $6 \vdots (10^{10} + 14)$.

3.1. Megoldás. ***a)*** $9 \vdots (10^{33} + 8)$
Tudjuk, hogy a 9 többszöröseire jellemző az a tulajdonság, miszerint a számjegyek összege is osztható 9-cel. A 10 bármilyen nem 0 hatványon a következő alakban írható fel:

$$\overline{1\underbrace{0\ldots0}_{n}}, \tag{3.1}$$

ahol n- hatvány száma, tehát 10^{33} számjegyeinek összege 1 $\Rightarrow$ $10^{33}+8$ számjegyeinek összege $9 \Rightarrow$ a kifejezés osztható 9-cel.

b) $6 \vdots (10^{10}+14)$
A 6-ra vonatkozó oszthósági szabály szerint azok a számok, amelyek oszthatóak 2-vel és 3-mal is - azaz a számjegyei összege is osztható 3-mal - a 6 többszörösei. Mint már az előző feladatban, itt is alkalmazzuk a 10-es szám hatványaira jellemző tulajdonságot, tehát a $10^{10}+14$ kifejezés értékének számjegyei összege $1+14=15$, illetve utlsó számjegye 4, $\Rightarrow$ 3-mal is osztható és 2-vel is osztható, $\Rightarrow$ $10^{10}+14$ egyértelműen a 6 többszöröse.

3.2. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy $96^{2013}-1$ különbség osztható 5-tel!*

3.2. Megoldás. *Az oszthatósági szabály szerint a $96^{2013}-1$ kifejezés akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 5 vagy 0. Vizsgáljuk a 96 hatványai milyen számjegyekre végződnek:*

n	1	2	...	2013
k	6	6	...	6

ahol n- a hatványkitevő száma, k- az eredmény utolsó számje

$\Rightarrow$ beláthatjuk, a 96 minden nem nulla hatványon 6-os számjegyre végződik, amiből ha 1-et kivonunk, az adott kifejezés értékének utolsó számjegye 5, tehát beláthatjuk, $96^{2013}-1$ különbség osztható 5-tel.

3.3. Feladat. *Ha $3 \vdots 2734x5$, akkor mennyi lehet az x értéke?*

3.3. Megoldás. *3-mal osztható az a szám, amelyiknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal $\Rightarrow$ Összeadjuk a kifejezés számjegyeit és megkeressük, milyen x-ekkel lehet úgy kiegészíteni, hogy teljesüljön a feltétel, ha tudjuk, hogy $0 \leq x \leq 9$.*
$2+7+3+4+5=21 \Rightarrow$ *x helyén szerepelhet:* $0,3,6,9$ *számjegy.*

3.4. Feladat. *Milyen számjegyeket írhatunk x és y helyére, ha $12 \vdots 64x32y$?*

3.4. Megoldás. *12-vel osztható az a szám, amelyik 4-gyel és 3-mal is osztható.*
3-mal osztható az a szám, amelyiknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.
4-gyel osztható az a szám, amelyiknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel. $\Rightarrow$ y lehet $0,4,8$
ha $y=0 \Rightarrow 6+4+3+2+0=15 \Rightarrow$ *x lehet* $0,3,6,9;$
ha $y=4 \Rightarrow 6+4+3+2+4=19 \Rightarrow$ *x lehet* $2,5,8;$

ha $y = 8 \Rightarrow 6 + 4 + 3 + 2 + 8 = 23 \Rightarrow$ *x lehet* $1, 4, 7.$

Felelet: A következő számpárok felelnek meg x és y értékéül: (0;0), (1;8), (2;4), (3;0), (4;8), (5;4), (6;0), (7;8), (8;4), (9;0).

3.5. Feladat. *Ha egy iskola tanulóit négyesével, ötösével, vagy százegyesével állítják sorba, akkor egy tanuló egyedül áll. Hány tanuló jár az iskolába?*

3.5. Megoldás. *Legyen a keresett szám* $x + 1$*. Ekkor x-nek osztója a 4, 5, és a 101 is. Ezek legkisebb közös többszöröse 2020. Tehát az iskolába 2021 tanuló jár.*

3.6. Feladat. *Öt egymást követő egész számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik az így kapott szám? [4]*

3.6. Megoldás. *A szorzat osztható 10-zel, mivel 5 egymást követő egész szám között egy biztosan az 5 többszöröse, illetve valamennyi páros számot is tartalmaz.*

4. fejezet

Gyakorló feladatok megoldással

1. Milyen számjegyeket írhatunk x helyére, ha :

   (a) $3 \vdots 2734x5$

   (b) $3 \vdots 1234x5$

   (c) $3 \vdots 4x6789$

   (d) $4 \vdots 12345x$

   (e) $4 \vdots 1234x6$

   (f) $4 \vdots 12344x$

   (g) $9 \vdots 2022x0$

   (h) $9 \vdots 1234x5$

2. Milyen számjegyeket írhatunk x ás y helyére, ha :

   (a) $12 \vdots 64x32y$

   (b) $12 \vdots 5x327y$

   (c) $15 \vdots 5x327y$

   (d) $36 \vdots 53x27y$

3. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságokat: [5]

   (a) $9 \vdots (10^{33} + 8)$

   (b) $6 \vdots (10^{10} + 14)$

(c) $5 \vdots (2^{558} - 3^{1972})$

4. Bizonyítsd be, hogy $66^{2022} - 1$ különbség osztható 5-tel!

5. Bizonyítsd be, hogy $3^{2022} + 1$ különbség osztható 5-tel!

6. Öt egymást követő páratlan számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik az így kapott szám? [4]

7. Melyik az a legkisebb, 7-esekből es 3-asokbol álló szám, melyben a számjegyek összege és maga a szám is osztható 7-tel es 3-mal?

4.1. Feladat. *Milyen számjegyeket írhatunk x helyére, ha :*

(a) $3 \vdots 2734x5$

(b) $3 \vdots 1234x5$

(c) $3 \vdots 4x6789$

(d) $4 \vdots 12345x$

(e) $4 \vdots 1234x6$

(f) $4 \vdots 12344x$

(g) $9 \vdots 2022x0$

(h) $9 \vdots 1234x5$

4.1. Megoldás. *a)* $3 \vdots 2734x5$
3-mal osztható az a szám, amelyiknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal $\Rightarrow$ *Összeadjuk a kifejezés számjegyeit és megkeressük, milyen x-ekkel lehet úgy kiegészíteni, hogy teljesüljön a feltétel, ha tudjuk, hogy* $0 \leq x \leq 9$.
$2 + 7 + 3 + 4 + 5 = 21 \Rightarrow$ *x helyén szerepelhet:* $0, 3, 6, 9$ *számjegy.*
b) $3 \vdots 1234x5$
Az előzőhöz hasonlóan, itt is a 3-mal való osztást vizsgaljuk: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ *Mivel a* 15 *-nek osztója a* $3 \Rightarrow$ *az x helyén a 3* $0 \leq x \leq 9$ *intervallumba eső többszörösei állnak, illetve a 0. Tehát x helyén szerepelhet:* $0, 3, 6, 9$ *számjegy.*
c) $3 \vdots 4x6789$

Az előzőhöz hasonlóan, itt is a 3-mal való osztást vizsgaljuk: $4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 34$ *Mivel a* 34 *a* 3*-mal osztva 1-es maradékot ad, tehát az adott számot úgy szűkséges kiegészítenünk, hogy a számjegyeket összeadva és 3-mal osztva ne kapjunk maradékot, illetve tudjuk, hogy az x helyén a* $0 \leq x \leq 9$ *intervallumba eső számjegyek állhatnak, tehát megfelel nekünk a* $2, 5, 8$ *számjegyek.*

d) $4 \vdots 12345x$

4-gyel osztható az a szám, amelyiknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel. Az oszthatósági szabályt felhasználva, illetve azt figyelembe véve, hogy $0 \leq x \leq 9$*, belátjuk, hogy az* 52 *és* 56 *megfelelnek a feltételnek, tehát az x helyén 2 és 6 számok állhatnak.*

e) $4 \vdots 1234x6$

A c) feladat megoldásához hasonlóan járunk el. Melyek azok a kétjagyű számok, melyek 6-ra végződnek, és 4-gyel oszthatóak? $16, 36, 56, 76, 96 \Rightarrow$ *Az x helyén állhat:* $1, 3, 5, 7, 9$*, tehát az egyjegyű páratlan számok.*

f) $4 \vdots 12344x$

Az előző feladatokhoz hasonlóan a 4-es szám oszthatósági szabályát alkalmazzuk. A kifejezésünk utolsó 2 számjegyéből képzett szám 4-el kezdődik, és ahhoz, hogy maradék nélkül osztható legyen ezzel a számmal, az x helyén állhat $0, 4, 8$ *számok.*

g) $9 \vdots 2022x0$

Szintén a 3-hoz hasonlóan 9-cel osztható az a szám, amelyiknek számjegyeinek összege is osztható 9-cel. $\Rightarrow 2 + 2 + 2 + 0 + 0 = 6$ *Az összegnek egyenlőnek kell lennie 9-cel, tehát* $x = 3$*.*

h) $9 \vdots 1234x5$

A 3-hoz hasonlóan 9-cel osztható az a szám, amelyiknek számjegyeinek összege is osztható 9-cel. $\Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ *A 9-nek ide megfelelő többszöröse a 18, tehát,* $x = 3$*.*

4.2. Feladat. *Milyen számjegyeket írhatunk x ás y helyére, ha :*

(a) $12 \vdots 64x32y$

(b) $12 \vdots 5x327y$

(c) $15 \vdots 5x327y$

(d) $36 \vdots 53x27y$

4.2. Megoldás. *a)* $12 \vdots 64x32y$

12-vel osztható az a szám, amelyik 4-gyel és 3-mal is osztható, mint relatív prímek.

3-mal osztható az a szám, amelyiknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

4-gyel osztható az a szám, amelyiknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel. $\Rightarrow$ *y lehet* $0, 4, 8$

ha $y = 0 \Rightarrow 6+4+3+2+0 = 15 \Rightarrow$ *x lehet* $0, 3, 6, 9$;

ha $y = 4 \Rightarrow 6+4+3+2+4 = 19 \Rightarrow$ *x lehet* $2, 5, 8$;

ha $y = 8 \Rightarrow 6+4+3+2+8 = 23 \Rightarrow$ *x lehet* $1, 4, 7$.

Felelet: A következő számpárok felelnek meg x és y értékéül: (0;0), (1;8), (2;4), (3;0), (4;8), (5;4), (6;0), (7;8), (8;4), (9;0).

b) $12 \vdots 5x327y$

12-vel osztható az a szám, amelyik 4-gyel és 3-mal is osztható.

3-mal osztható az a szám, amelyiknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

4-gyel osztható az a szám, amelyiknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel. $\Rightarrow$ *y lehet* $2, 6$

ha $y = 2 \Rightarrow 5+3+2+7+2 = 19 \Rightarrow$ *x lehet* $2, 5, 8$;

ha $y = 6 \Rightarrow 5+3+2+7+6 = 23 \Rightarrow$ *x lehet* $1, 4, 7$;

Felelet: A következő számpárok felelnek meg x és y értékéül: (1;6), (2;2), (2;5), (2;8), (4;6), (7;6).

c)$15 \vdots 5x327y$

Azok a számok oszthatók 15-tel, amelyek 3-mal és 5-tel is oszthatóak.

3-mal osztható az a szám, amelyiknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal; 5-tel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 5-tel

$\Rightarrow$ *y lehet* $0, 5$

ha $y = 0 \Rightarrow 5+3+2+7+0 = 19 \Rightarrow$ *x lehet* $1, 4, 7$;

ha $y = 5 \Rightarrow 5+3+2+7+5 = 22 \Rightarrow$ *x lehet* $2, 5, 8$;

Felelet: A következő számpárok felelnek meg x és y értékéül:(1;0), (4;0), (7;0), (2;5), (5;5), (8;5).

d)$36 \vdots 53x27y$

Azok a számok oszthatók 36-tal, amelyek 4-gyel és 9-cel is oszthatóak.

4.3. Feladat. *Bizonyítsuk be a következő oszthatóságokat:*

(a) $9 \vdots (10^{33} + 8)$

(b) $6 \vdots (10^{10} + 14)$

(c) $5 \vdots (2^{558} - 3^{1972})$

4.3. Megoldás. *a)* $9 \vdots (10^{33} + 8)$
Tudjuk, hogy a 9 többszöröseire jellemző az a tulajdonság, miszerint a számjegyek összege is osztható 9-cel. A 10 bármilyen nem 0 hatványon a következő alakban írható fel:

$$\overline{1\underbrace{0\ldots0}_{n}}, \tag{4.1}$$

ahol n*- hatvány száma, tehát* 10^{33} *számjegyeinek összege 1* $\Rightarrow$ $10^{33} + 8$ *számjegyeinek összege* $9 \Rightarrow$ *a kifejezés osztható* 9*-cel.*
b) $6 \vdots (10^{10} + 14)$
A 6-ra vonatkozó oszthósági szabály szerint azok a számok, amelyek oszthatóak 2-vel és 3-mal is - azaz a számjegyei összege is osztható 3-mal - a 6 többszörösei. Mint már az előző feladatban, itt is alkalmazzuk a 10-es szám hatványaira jellemző tulajdonságot, tehát a $10^{10} + 14$ *kifejezés értékének számjegyei összege* $1 + 14 = 15$*, illetve utlsó számjegye* 4*,* $\Rightarrow$ *3-mal is osztható és 2-vel is osztható,* $\Rightarrow$ $10^{10} + 14$ *egyértelműen a* 6 *többszöröse.*
c) $5 \vdots (2^{556} - 3^{1972})$
Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 5-tel, tehát 0, vagy 5. Első lépésént meghatározzuk az összeadandók utolsó számjegyeit külön-külön. Vizsgáljuk meg, a 2^{558} *és* 3^{1972}

Vizsgáljuk, a kettő hatványra elemésével milyen t *periódussal ismétlődnek a kapott szám utolsó számjegyei:*

n	1	2	3	4	5	6	...	556
k	2	4	8	6	2	4	...	6

ahol n- a hatványkitevő száma, k- az eredmény utolsó számje
$\Rightarrow$ *a 2 hatványai* $t = 4$ *periodikusan ismétlődnek* $\Rightarrow$ 2^{70} *A* 556*-ot 4-gyel maradéktalanul tudunk osztani, tehát a táblázat utolsó eleme, azaz a 6-os a keresett számunk.*
Ezt a metódust végezzük el a 3^{1972} *esetére is:*

n	1	2	3	4	5	6	...	1972
k	3	9	7	1	3	9	...	1

Látjuk, hogy a 3 is hatványaira emelve szintén 4-es periodussal ismétlődő utolsó számjegyeket ad, 1972 pedig pontosan a 4 többszöröse, tehát itt az 1 lesz nekünk az utolsó számjegye a keresett hatványnak. $\Rightarrow$ *Ha tudjuk, hogy a kisebbitendő 6-ra, a kivonandó pedig 1-re végződik, a különbség utolsó számjegye* $6 - 1 = 5$. *Mivel az a kapott szám megfelel az 5-re vonatkozó oszthatósági szabálynak, ezért* $5 \vdots 2^{556} - 3^{1972}$.

4.4. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy* $(66^{2022} - 1)$ *különbség osztható 5-tel!*

4.4. Megoldás. *Az oszthatósági szabály szerint a* $(66^{2022} - 1)$ *kifejezés akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 5 vagy 0. Vizsgáljuk a* 66 *hatványai milyen számjegyekre végződnek:*

n	1	2	...	2022
k	6	6	...	6

ahol n- a hatványkitevő száma, k- az eredmény utolsó számje

$\Rightarrow$ *beláthatjuk, a* 66 *minden nem nulla hatványon 6-os számjegyre végződik, amiből ha 1-et kivonunk, az adott kifejezés értékének utolsó számjegye 5, tehát beláthatjuk,* $(66^{2022}-1)$ *különbség osztható 5-tel.*

4.5. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy* $(3^{2022} + 1)$ *különbség osztható 5-tel!*

4.5. Megoldás. *Az oszthatósági szabály szerint a* $3^{2022} + 1$ *kifejezés akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 5 vagy 0. Vizsgáljuk a* 3 *hatványai milyen számjegyekre végződnek:*

n	1	2	3	4	5	6	...	2022
k	3	9	7	1	3	9	...	9

Látjuk, hogy a 3 is hatványaira emelve szintén 4-es periodussal ismétlődő utolsó számjegyeket ad, 2022 pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad, tehát a táblázat 2. eleme, azaz a 9-es a keresett számunk, amihez ha 1-et hozzáadunk, az adott kifejezés értékének utolsó számjegye 0, tehát beláthatjuk, $3^{2022} + 1$ *összeg osztható 5-tel.*

4.6. Feladat. *Öt egymást követő páratlan számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik az így kapott szám?*

4.6. Megoldás. *A szorzat osztható 5-tel, mivel 5 egymást követő páratlan egész szám között egy szorzandó biztosan az 5 többszöröse.*

4.7. Feladat. *Melyik az a legkisebb, 7-esekből es 3-asokbol álló szám, melyben a számjegyek összege és maga a szám is osztható 7-tel es 3-mal?*

4.7. Megoldás. *Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyeknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.*
7-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy dupláját(2-szeresét). Ha az így kapott szám osztható 7-tel akkor az eredeti is. Ha még az így kapott számról sem tudjuk megállapítani, hogy osztható-e 7-tel, akkor ugyanezt a tendenciát kell folytatni amíg olyan számot nem kapunk amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható 7-tel.
Ha a 7-esek száma a, a 3-asok száma b, akkor a számjegyek összege $7a+3b$*. Ez akkor osztható 7-tel és 3-mal, ha* $3 \vdots a$ *és* $7 \vdots b$*. A legkisebb számot keresve először az* $a = 3, b = 7$*esetet kell vizsgálnunk. A szóba jöhető legkisebb számok:* $3333333777, 3333337773, 3333377733, ...$
Közülük az első kettő nem osztható 7-tel. A keresett szám: 3 333 377 733.

5. fejezet

Az akciókutatás folyamata és eredménye

A kutatásom alanya a Genius Jótékonysági Alapítvány által már több éve működtetett Tehetséggondozó program 6. osztályos korcsoportjának résztvevői, pontosan 8 személy. Ezek az alkalmak azoknak a diákoknak nyújtanak fejlődési lehetőséget, akik sikeresen szerepeltek a Kárpátaljai Magyar Pedagógusszövetség tantárgyi vetélkedőin, vagyis évfolyamonként az első 10 helyezett. Az évente megrendezésre kerülő három hétvégés programsorozat célja a tanulók kompetenciáinak, ismereteinek fejlesztése, valamint az iskolai oktatáson túl tágítani a metematikai látószögüket, olyan módszerek továbbadása, amelyek segítik a tanuló versenyeken való előmenetelét. Amint a dolgozatom címéből kiderül, foglalkozásaim témája az oszthatóság, a hatékony oktatás valamint a kutatás célravezetésének érdekében két feladatsort állítottam össze: egy teszt, valamint egy ismertető, gyakorló feladatsort, amelyek egy része saját, illetve a hivatkozásokban feltüntetett feladatgyűjteményekből merítettem. A teszt 6, az utóbbi pedig 7 fő feladatból tevődik össze, amelyek számos alpontot - összesítve 20 példát - tartalmaznak.

5.1. ábra A kutatás vázlatos metódusa

A munkám első lépéseként megismerkedtem a csoporttal, illetve kiosztottam számukra a bemenő tesztet, amelynek megoldására 30 perc állt rendelkezésükre, a 6 feladat mindegyikére két-két pontot érhettek el a helyes válasz, valamint indoklás feltételével. Az alábbi táblázat sorai a feladatok sorszámát, oszlopai pedig a bemenő teszten résztvevőket nevezi meg szám formátumban- az oszlopok és sorok metszteiben láthatóak, melyik feladatra az adott tanuló milyen pontszámot ért el, továbbá az összesítésben feltüntettem, a feladatok megoldásának gyakoriságát, azaz hol született a feltételeknek megfelelően legmagasabb számban pont: ez a bemenő tesztnél a 6., a II. fordulóban, azaz a kimenő tesztnél pedig a 4. feladatra volt jellemző, láthatjuk ezt az említett táblázatok utolsó oszlopainál százalék formátumban kifejezve.

Feladatok sorszáma	Elért pontok- I. forduló									
	1	2	3	4	5	6	7	8	Leggyakrabban megoldott feladatok	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Nem történt helyes megoldás
2	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0,5	3%
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Nem történt helyes megoldás
4	0	0	0	2	0	0	0	0	2	12,50%
5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	6,25%
6	2	0	1	0	0	0	0	2	5	31% - legtöbb sikeres megoldás
Összsítve										

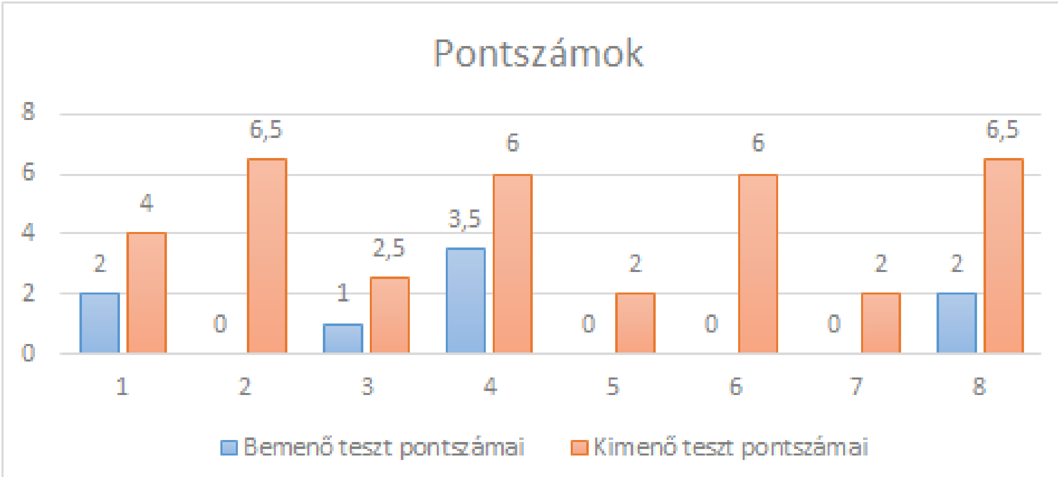
5.1. tábázat Az első tesztelésen elért pontszámok egyénenként

Feladatok sorszáma	Elért pontok- II. forduló									
	1	2	3	4	5	6	7	8	Leggyakrabban megoldott feladatok	
1	1	2	1	0	0	2	0	1	7	44%
2	0	1	1	1	0	0	0	2	5	31%
3	0,5	1,5	0	1	0	2	0	2	7	44%
4	0,5	2	0,5	2	0	2	0	1,5	8,5	53% - legtöbb sikeres megoldás
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Nem történt helyes megoldás
6	2	0	0	2	2	0	2	0	8	50%-ban oldották meg
Összsítve	4	6,5	2,5	6	2	6	2	6,5		

5.2. tábázat A második tesztelésen elért pontszámok egyénenként

5.1. diagram Az első és második tesztelésen elért pontszámok összevetése egyénenként

Az **5.1 diagram** diagram szemlélteti a tanulók egyénileg milyen összpontszámra teljesítették összevetőlegesen a teszt első, valamint második fordulójának esetében. Észrevehetjük, a kimenő teszt eredménye minden esetben kivétel nélkül sikeresebb, mint az előző, tehát elmondhatjuk, folyamatos egyéni fejlődés történt.



Mivel a feladatsor maximálisan elérhető pontszáma 12, így ezt a pontozási skálát osztottam 5 részre, majd a beérkező megoldásokat a javítás során az itt látható csoportokra osztottam: kezdő, középhaladó, haladó, jeles, kitűnő. Az 5.2 számú táblázatban az érdemjegyek besorolása mellett feltüntettem két mellékelt oszlopot, amelyek kimutatják, melyik kategóriába pontosan hány tanuló besorolandó az első, valamint a második teszt megírását követően. Észrevehető, az első eredményeknél elenyésző a teljsítmény: egy viszonylag kimagaslóbb tanuló kivételével mindenki közép-haladó kategóriába tartozik, viszont a tananyag elsajátítását követően megjelennek magasabb eredmények: a résztvevők felének sikerült haladó szintű pontszámmal megoldania a feladatsort, nyolcan, megegyező eloszlással kezdő-középhaladó minősítésre teljesített. Megfigyelhető, a 7 kezdő diákból kettő kapta ugyanezt az értékelést a 2. teszt megírását követően is, viszont pontszámot tekintve észrevehető az előmenetelük.

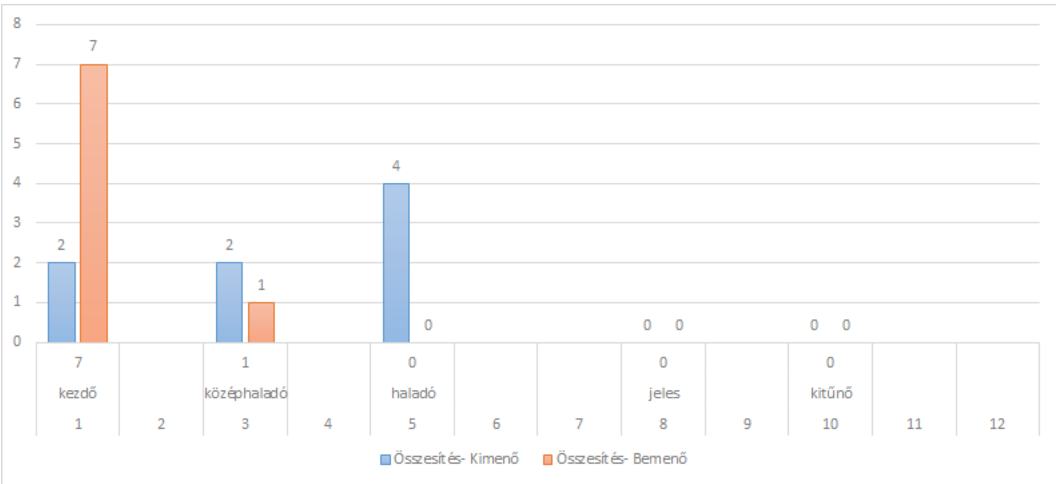
Érdemjegyek besorolása		Összesítés- Bemenő	Összesítés- Kimenő
1	kezdő	7	2
2			
3	középhaladó	1	2
4			
5	haladó	0	4
6			
7			
8	jeles	0	0
9			
10	kitűnő	0	0
11			
12			

5.3. tábázat Érdemjegyek beosztása és hozzárendelt gyakoriságok

Sorszám	Bemenő teszt pontszámai	Kimenő teszt pontszámai	Pontszámok különbsége	Bemenő teszt értékelése	Kimenő teszt értékelése
1	2	4	2	kezdő	középhaladó
2	0	6,5	6,5	kezdő	haladó
3	1	2,5	1,5	kezdő	középhaladó
4	3,5	6	2,5	középhaladó	haladó
5	0	2	2	kezdő	kezdő
6	0	6	6	kezdő	haladó
7	0	2	2	kezdő	kezdő
8	2	6,5	4,5	kezdő	haladó

5.4. tábázat Bemenő- és kimenő tesztek különbsége

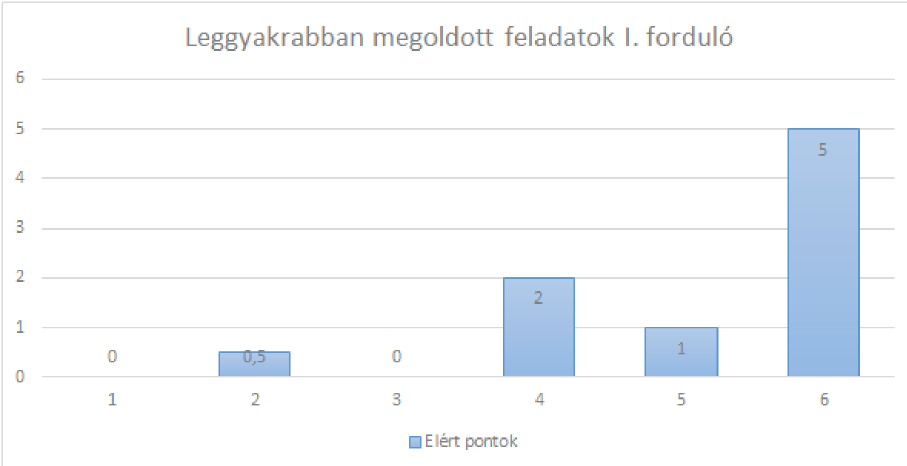
Az 5.4. táblázatból kiderül, ha megvizsgáljuk a bemenő- és kimenő teszt pontszámai közötti rést, nem kapunk negatív eredményt, értelmeszerűen nem történt a begyakorlást követően visszaesés. A legészrevehetőbb fejlődés a 2. sorban megfigyelhető, ahol a diák a bemenő teszten nem ért el pontot, viszont azt követően a legeredményesebben, 6,5 pontra teljesített, amit haladónak minősül.



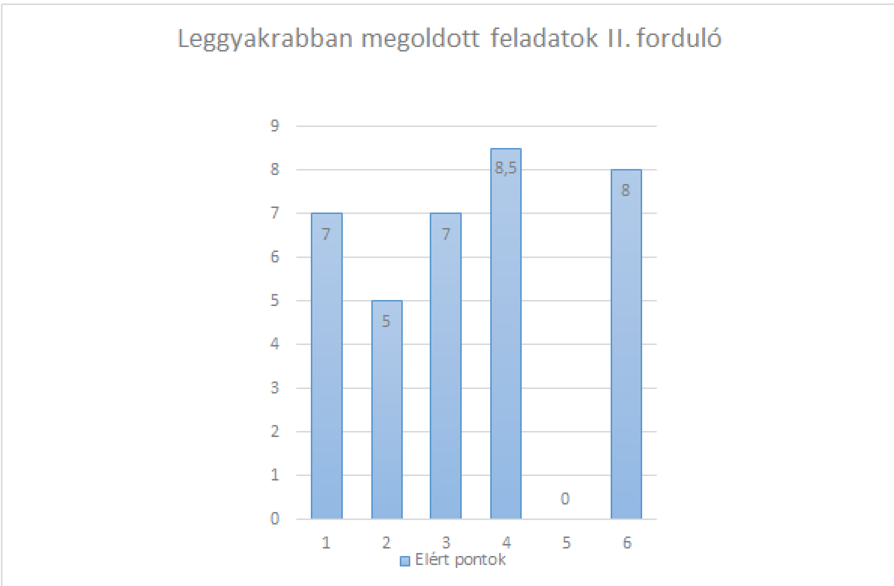
5.2. diagram Érdemjegyek beosztása és hozzárendelt gyakoriságok

Amint az 5.2 diagram mutatja annak a gyakoriságát, érdemjegyenként hány diák teljesített kezdő, középhaladó, haladó, jeles, valamint kitűnő minősítésben. Láthajtjuk, a két legmagasabb kategória ponthatárát sem a bemenő, sem pedig a kimenő tesztelés során nem sikerült elérniük.

Ha összehasonlítjuk az 5.3. és az 5.4. diagramokat, szembetűnő, hogy a kimenő tesztnél, azaz a II. fordulóban már jelentősen magasabbak az arányok pontszámokat tekintve, az 5. feladat kivételével mindegyikre legalább 5-en választ találtak.



5.3. diagram Egyénenként leggyakrabban megoldott feladatok I. teszt



5.4. diagram Egyénenként leggyakrabban megoldott feladatok II. teszt

Összegzés

Gyakorló pedagógusként nagyon fontosnak és szükségesnek érzem azoknak a lehetőségeknek a felkutatását, amelyekkel növelhető oktatásunk hatékonysága. A munkám során az iskolai oktatásban és tehetséggondozó alkalmakon történő természetes számok oszthatóságának témájával foglalkoztam, amihez készítettem egy felmérő, illetve egy gyakorló feladatsort, főként 6. osztályosok számára. Ezt megelőzően áttanulmányoztam az oktatási anyagok tartalmát, ebből felmértem, hol tart a diákok matematikai ismerete és annak megfelelően igyekeztem olyan feladatsort összeállítani, ami nem jelent nagy nehézséget, közben mégis új metódusokat, számukra is érdekes oszthatósági szabályokat ismerhetnek meg általa. Felhasználtam feladatlapokat, jegyzeteket azokról a matematika foglalkozásokról, tehetséggondozó alkalmakról, versenyekről, amelyeken én korábban diákként vettem részt, valamint a hivatkozásokban megtekinthető feladatgyűjteményekből. A szakdolgozatom által szerzett ismereteim és tapasztalataim a jövőben is hasznosak lesznek pedagógusi pályám során.

Irodalomjegyzék

[1] *Ukrajna oktatási és tudományos minisztériuma, Tanterv középiskolák számára, 5-9 osztály, 2017., 40 oldal. Elérhető: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas*

[2] *Taraszenkova N. A., Bohatirjova I.M., Kolomijec O.M., Szergyuk Z.O. Matematika tankönyv az általános iskolák 6. osztálya számára, Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériumának ajánlásával Csernyivci, 2014, 309 oldal*

[3] *Kárpátaljai matematikatanítás weboldal. Elérhető: https://sites.google.com/site/karpataljamatek/*

[4] *Róka Sándor 2000 Feladat az elemi matematika köréből, 6. kiadás Budapest, 2010 36-43. oldal*

[5] *Pogáts Ferenc Varga Tamás matematikai versenyek, Tehetségek példatára, Typotex Elektronikus Kiadó Kft. 2006, 192 oldal*

[6] *Terebesi Viktor emlékverseny feladatlap a 6. osztály számára Beregszász, 2013*

[7] https://fejszamolas.trukkok.hu/oszthatosagi-szabalyok-(0-40-ig)

[8] *Vámos Ágnes A gyakorlat kutatása a neveléstudományban Az akciókutatás ELTE PPK Oktatáselméleti Tanszék, 2013 25. oldal*

[9] *Havas Péter Akciókutatás és a tanulás fejlesztése Országos Közoktatási Intézet Új Pedagógiai Szemle, 2004 június*

[10] *Kemmis, S. – McTaggart, R. (eds.): The action research planner. (3rd edition.) Geelong: Deakin University Press, 1988.*

[11] *Országos Közoktatási Intézet FENNTARTHATÓ KÖZÖSSÉGEK ÉS ISKOLAFEJLESZTÉS Innováció a tanárképzésben, az akciókutatás és a környezeti nevelés lehetôségei, 2004*

[12] *ttps://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/akciokutatas-es-a-tanulas-fejlesztese*

[13] *Juhász Erika - Endrody Orsolya A felsőoktatási intézmények szerepe a hallgatók élethosszig tartó sportszocializációjában - egészségfejlesztési jó gyakorlatok a Kárpát-medencében. HERA ÉVKÖNYVEK VI. Magyar Nevelés- és Oktatáskutatók Egyesülete, Budapest, 2019*

[14] *Mikó Magdolna A csoportmunka hatása az általános iskolai oktatás sikerességére ELTE Neveléstudományi Doktori Iskola, 2014.*

[15] *https://epa.oszk.hu/00000/00035/00082/2004-06-ta-Havas-Akciokutatas.html*

[16] *https://www.schooleducationgateway.eu/hu/pub/resources/tutorials/action-research-promotion.htm*

Melléklet

Oszthatósági szabályok 0-tól 40-ig segédeszközként feladatok begyakorlásához:[7]

0: 0-val való osztás értelmetlen.

1: Minden egész szám osztható 1-gyel.

2: Azok a számok oszthatók 2-vel, amelyeknek utolsó (egyes helyiértéken álló) számjegye 0 vagy páros szám.

3: Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyeknek a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

4: Azok a számok oszthatók 4-gyel, amelyeknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel.

5: Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 5-tel.

6: Azok a számok oszthatók 6-tal, amelyek 2-vel és 3-mal is oszthatóak.

7: 7-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy dupláját(2-szeresét). Ha az így kapott szám osztható 7-tel akkor az eredeti is. Ha még az így kapott számról sem tudjuk megállapítani, hogy osztható-e 7-tel, akkor ugyanezt a tendenciát kell folytatni amíg olyan számot nem kapunk amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható 7-tel. Pl.: $315 \Rightarrow 31 - (2 \cdot 5) = 21.21$ osztható 7-tel, tehát 315 is.

8: Azok a számok oszthatók 8-cal, amelyeknek az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám is osztható 8-cal.

9: Azok a számok oszthatók 9-cel, amelyeknek számjegyeinek összege is osztható 9-cel.

10: Azok a számok oszthatók 10-zel, amelyeknek utolsó számjegye is osztható 10-zel, magyarul 0-ra végződik.

11: 11-gyel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonom az utolsó számjegyet. Ha az így kapott szám osztható 11-gyel, akkor az eredtei is. Ugyanúgy mint a 7-tel való oszthatóságnál itt is lehet ismételni ezt a folyamatot, ha még mindig megállapíthatatlan az oszhatóság. Pl.:

$5258 \Rightarrow 525 - 8 = 517 \Rightarrow 51 - 7 = 4444$ osztható 11-gyel, tehát 5258 is.
12: Azok a számok oszthatók 12-vel, amelyek 4-gyel és 3-mal is oszthatóak.
13: 13-mal úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy 4-szeresét. Ugyanúgy mint a 7-nél is a 11-nél, itt is lehet ismételni a folyamatot. Pl.: $6175 \Rightarrow 617 + (4 \cdot 5) = 637 \Rightarrow 63 + (4 \cdot 7) = 91 \Rightarrow 9 + (4 \cdot 1) = 13$. 13 osztható 13-mal, tehát 6175 is.
14: Azok a számok oszthatók 14-gyel, amelyek 2-vel és 7-tel is oszthatóak.
15: Azok a számok oszthatók 15-tel, amelyek 3-mal és 5-tel is oszthatóak.
16: Azok a számok oszthatók 16-tal, amelyeknek utolsó négy számjegyéből képzett négyjegyű szám is osztható 16-tal.
17: 17-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy ötszörösét. A folyamat itt is ismételhető. Pl.: $132770 \Rightarrow 13277 - (0 \cdot 5) = 13277 \Rightarrow 1327 - (7 \cdot 5) = 1292 \Rightarrow 129 - (2 \cdot 5) = 119$. 119 osztható 17-tel, tehát 132770 is osztható 17-tel.
18: Azok a számok oszthatók 18-cal amelyek 2-vel és 9-cel is oszthatóak.
19: 19-cel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy kétszeresét. A folyamat itt is ismételhető. Pl.: $7828 \Rightarrow 782 + (2 \cdot 8) = 798 \Rightarrow 79 + (2 \cdot 8) = 95 \Rightarrow 9 + (2 \cdot 5) = 19$. 19 osztható 19-cel, tehát 7828 is osztható 19-cel.
20: Azok a számok oszthatók 20-szal, amelyeknek az utolsó két számjegyükből képzett két jegyű szám is osztható 20-szal.
21: Azok a számok oszthatók 21-gyel, amelyek 3-mal és 7-tel is oszthatóak.
22: Azok a számok oszthatók 22-vel, amelyek 2-vel és 11-gyel is oszthatóak.
23: 23-mal úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy 7-szeresét. Ha ez a szám osztható 23-mal akkor az eredeti is. Ha még ebből a számból sem lehet megállapítani, hogy osztató-e 23-mal, akkor mégegyszer el kell végezni az előbb leírtakat. Pl.: $20033 \Rightarrow 2003 + (7 \cdot 3) = 2024 \Rightarrow 202 + (4 \cdot 7) = 230$. 230 osztható 23-mal, tehát 20033 is osztható 23-mal.
24: Azok a számok oszthatók 24-gyel, amelyek 3-mal és 8-cal is oszthatóak.
25: Azok a számok oszthatók 25-tel, amelyeknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 25-tel.
26: Azok a számok oszthatók 26-tal, amelyek 2-vel és 13-mal is oszthatóak.
27: A számot blokkokba kell rendezni hatulról, úgy, hogy egy blokkban 3 számjegy le-

gyen. A blokkokat (tehát a képzett háromjegyű számokat) összeadjuk. Ha ez az összeg osztható 27-tel akkor az eredeti szám is. Pl.: 2360367 Ezt hátulról hármas blokkokba csoportosítjuk így: 2 360 367. Mivel a 2-es számjegy már egyedül maradt a végére, ezért ő egyedül fog képezni egy blokkot. Most ezután összeadjuk a három számot: $367 + 360 + 2 = 729$. Mivel 729 osztható 27-tel, $\Rightarrow$ 2360367 is.
28: Azok a számok oszthatók 28-cal, amelyek 4-gyel és 7-tel is oszthatóak.
29: 29-cel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzet számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy háromszorosát. Ha ez a szám osztható 29-cel, akkor az eredeti is. Pl.: $4205 \Rightarrow 420 + (3 \cdot 5) = 435 \Rightarrow 43 + (3 \cdot 5) = 58 \Rightarrow 5 + (3 \cdot 8) = 29$. Mivel 29 osztható 29-cel, ezért 4205 is.
30: Azok a számok oszthatók 30-cal, amelyek 3-mal és 10-zel is oszthatóak.
31: 31-gyel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy háromszorosát. Ha ez a szám osztható 31-gyel, akkor az eredeti is. Pl.: $204197 \Rightarrow 20419 - (3 \cdot 7) = 20398 \Rightarrow 2039 - (3 \cdot 8) = 2015 \Rightarrow 201 - (3 \cdot 5) = 186 \Rightarrow 18 - (3 \cdot 6) = 0$. 0 osztható 31-gyel(mert 0 minden számmal osztható), ezért 204197 is osztható 31-gyel.
32: Azok a számok oszthatók 32-vel, amelyeknek az utolsó öt számjegyéből képzett ötjegyű szám is osztható 32-vel.
33: Azok a számok oszthatók 33-mal, amelyek 3-mal és 11-gyel is oszthatóak.
34: Azok a számok osztahtók 34-gyel, amelyek 2-vel és 17-tel is oszthatóak.
35: Azok a számok oszthatók 35-tel, amelyek 5-tel és 7-tel is oszthatóak.
36: Azok a számok oszthatók 36-tal, amelyek 4-gyel és 9-cel is oszthatóak.
37: 37-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy 11-szeresét. Ha ez a szám osztható 37-tel, akkor az eredeti is. Pl.: $32227 \Rightarrow 3222 - (11 \cdot 7) = 3145 \Rightarrow 314 - (11 \cdot 5) = 259$. 259 osztható 37-tel, ezért 32227 is.
38: Azok a számok oszthatók 38-cal, amelyek 2-vel és 19-cel is oszthatóak.
39: Azok a számok oszthatók 39-cel, amelyek 3-mal és 13-mal is oszthatóak.
40: Azok a számok oszthatók 40-nel, amelyeknek az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám is osztható 40-nel.

Резюме

Як вчитель-практик, я вважаю дуже важливим і необхідним досліджувати шляхи підвищення ефективності нашої освіти. У своїй роботі я працювала над темою подільності натуральних чисел у шкільній освіті та на заняттях з розвитку талантів, для чого підготувала опитування та комплекс вправ, переважно для учнів 6-х класів. Перед цим я вивчила зміст навчальних матеріалів, оцінила рівень математичних знань учнів і спробувала створити серію завдань, які були б не надто складними, але водночас знайомили б з новими методами та цікавими правилами подільності. Я використовувала робочі зошити, конспекти з уроків математики та олімпіад, в яких брала участь, будучи студенткою, а також зі збірників робочих зошитів, доступних за посиланнями. Знання та досвід, отримані під час роботи над дипломною роботою, будуть корисними в моїй майбутній кар'єрі вчителя.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

ID перевірки:
1015153385

Дата перевірки:
20.05.2023 15:37:52 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
22.05.2023 13:56:30 EEST

ID користувача:
100011749

Назва документа: SZAKDOLGOZAT-Farkas Bettina

Кількість сторінок: 38 **Кількість слів:** 8336 **Кількість символів:** 56047 **Розмір файлу:** 263.63 KB **ID файлу:** 1014834020

24.6% Схожість

Найбільша схожість: 13.8% з Інтернет-джерелом (https://fejszamolas.trukkok.hu/oszthatosagi-szabalyok-(0-40-ig))

24.6% Джерела з Інтернету 186 .... **Сторінка** 40

0.19% Джерела з Бібліотеки 19 .... **Сторінка** 40

0.78% Цитат

Цитати 1 .... **Сторінка** 41

Не знайдено жодних посилань

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Nyilatkozat

Alulírott, Farkas Bettina, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.