ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

МЕТОДИКА РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

ПОЛІНСКІ ГЕОРГІНА СТЕПАНІВНА

Студентка ІІ-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2023

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

(канд. фіз.-мат. наук, доцент)

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

(к. ф.-м. н, доцент)

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

Рівень вищої освіти: магістр

Виконавець: студентка ІІ-го курсу

Полінскі Георгіна Степанівна

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

(канд. фіз.-мат. наук, доцент)

Рецензент: **Бортош Марія Юліївна**

(канд. фіз.-мат. наук)

Берегове
2024

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

PARAMÉTERES FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK MÓDSZERTANA

Magiszteri dolgozat

Készítette: Palinszky Georgina

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Sztojka Miroszláv

(fiz.-mat. tud. kandidátusa, docens)

Recenzens: Bartos Mária

(fiz.-mat. tud. kandidátusa)

Beregszász – 2024

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematika oktatásának egyik legösszetettebb területe a paraméteres feladatok megoldása, mivel ezek a feladatok nemcsak az algebrai készségeket fejlesztik, hanem a tanulók logikai gondolkodását is erősítik.

A paramétereket tartalmazó példák különleges kihívást jelentenek, mivel a megoldások száma és típusa gyakran függ a paraméterek értékeitől.

Ez a diplomamunka a paraméteres egyenletek típusainak és megoldási módszereinek részletes bemutatására összpontosít, különös tekintettel az oktatásban betöltött szerepükre és alkalmazási lehetőségeikre.

Az első fejezetben áttekintjük a paraméterek alapvető fogalmait és jelentőségét, majd elemzésre kerülnek a legfrissebb oktatási és módszertani irodalmak, melyeket az 5-11 osztályos diákok oktarására készítettek. Továbbá áttekintjük a paraméteres feladatok szerepét az olimpiai feladatsorokban.

A második fejezetben részletesen tárgyaljuk a különböző típusú paraméteres egyenleteket és azok megoldási módszereit.

Különös figyelmet fordítunk a lineáris egyenletek, tört-racionális egyenletek, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, irracionális egyenletek, és az abszolútértéket tartalmazó egyenletek paraméteres változataira.

Megfogalmazásra kerül a kutatás központi hipotézise, miszerint a diákok többsége nem képes önállóan megoldani a paraméteres egyenleteket, mivel ezek a feladatok összetettebb gondolkodási folyamatokat és alaposabb matematikai tudást igényelnek. Feltételezésünk szerint a diákok nehézségekkel szembesülnek a paraméterek helyes értelmezése és alkalmazása során, ami jelentősen megnehezíti a feladatok megoldását.

Végül a saját kutatási eredmények, illetve a hipotézisünkre kapott válasz kerül ismertetésre a paraméteres egyenletek megoldása terén.

Célunk, hogy a pedagógusok és a diákok számára hasznos útmutatást nyújtsunk, amely elősegíti a paraméteres egyenletek alapos megértését és sikeres megoldását.

A dolgozat célja, hogy átfogó képet nyújtson a paraméteres feladatokról és azok megoldási technikáiról, valamint bemutassa, hogyan lehet ezeket a feladatokat hatékonyan integrálni az oktatási folyamatba.

1. fejezet

Általános kérdések

1.1. Alapinformációk a paraméterekről

A matematikai feladatok megoldása során gyakran szükség van egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek kombinálására és megoldására. Ugyanakkor ezek a matematikai kifejezések általában nem csak az ismeretleneket foglalják magukban, hanem rendszerint más változókat is, amelyeket paramétereknek nevezünk.
A paraméter egy olyan független változó, amelynek értékét rögzítettnek vagy tetszőleges számnak, illetve olyan számnak tekintjük, ami beleesik a feladat feltétele által meghatározott tartományba. A paramétereket általában a latin ábécé első betűivel jelölik: $a, b, c, d, \ldots, k, l, m, n$, míg az ismeretleneket az x, y, z betűkkel szokás jelölni.
A paraméteres egyenlet egy matematikai egyenlet, melynek kinézete és megoldása egy vagy több paraméter értékétől függ. Az egyenletet paraméteres egyenletnek nevezik, ha a következő formában írható fel:
(1.1)

$$F(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

ahol x az ismeretlen változó, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig a paraméterek. A keresett ismeretlen, x értéke a paraméterek értékeitől függ.
Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paraméterek azon értékeit, amelyeknél az $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kifejezésnek van jelentése az x egyes értékeire, elfogadhatónak nevezzük. Az (1.1) egyenlet paramétereinek összes megengedett értékrendszerének halmazát az egyenlet paramétertartományának nevezzük.
Egy egyenlet paraméterekkel való megoldása azt jelenti, hogy megkeressük ennek az

egyenletnek az összes megoldását minden lehetséges paraméterérték-rendszerre.
Nincs általános módszer a paramétert tartalmazó feladatok megoldására. Azonban két típusra oszthatók: analitikusra és grafikusra.
Az analitikus módszer a legáltalánosabb, de a legbonyolultabb, mivel magas szintű matematikai ismereteket és pontosságot igényel. A grafikus módszer érdekes, egyszerűbb és szemléletesebb megközelítés, de nem mindig praktikus, és igényel némi jártasságot a grafikonok terén.
A paraméteres feladatok megoldásához először egyszerűsíteni kell az adott egyenletet: fel kell bontani szorzatokra, figyelembe kell venni az értelmezési tartományt, megszabadulni az abszolútértéktől, logaritmustól, trigonometrikus kifejezésektől, majd külön-külön meg kell oldani az egyes részfeladatokat.
Különböző paraméterértékek esetén az egyenlet különböző számú megoldással rendelkezhet: lehet egy gyöke, végtelen sok gyöke vagy egyáltalán nincs gyöke. A paraméteres egyenletek megoldásában fontos lépés az eredmények rögzítése, különösen azoknál az eseteknél, amikor a megoldás a paraméter értékétől függ. Ebben az esetben a válasz része a korábban kapott eredmények összessége. Itt rendkívül fontos, hogy az összegzés során ne hagyjuk el a megoldás minden részletét.
Az általános gyakorlat az, hogy a paraméteres feladatok megoldására analitikus és grafikus módszereket alkalmazunk. Általában az analitikus módszert részesítik előnyben az egyenletek, egyenlőtlenségek, illetve rendszerek megoldásánál. Bizonyos esetekben azonban a függvények tulajdonságainak felhasználása jelentős eredményeket hozhat.
Fontos, hogy a diákok megismerjék és elsajátítsák a különböző megoldási módszereket, és ne ragaszkodjanak kizárólag egyhez. Ezáltal minden diák képes lesz racionális és hatékony megoldási módot választani. Érdemes nagy hangsúlyt fektetni arra, hogy a diákok önállóan képesek legyenek módszereket és megfelelő algoritmusokat választani a problémamegoldás során.
Nézzünk meg egy egy példát a két módszer alkalmazására a gyakorlatban:

Analitikus módszer

1. Feladat. *Oldja meg az egyenlőtlenséget az a paraméter összes értékére[21]*

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$$

Megoldás. *Meghatározzuk az egyenlet értelmezési tartományát:*

$$\begin{cases} a + x \geq 0, \\ a - x \geq 0. \end{cases} \quad x \in [-a; a]$$

Mindkét oldalt emeljük négyzetre:

$$a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a$$

Amikor mindkét oldalt négyzetre emeljük, két esetet kell figyelembe vennünk:

$$\begin{cases} a^2 - 2a \geq 0, \\ 4(a^2 - x^2) > (a^2 - 2a)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 2a < 0, \\ x \in [-a; a]. \end{cases}$$

Mivel $a \neq 0$, ezért:

$$\begin{cases} a \in (0; 2), \\ x \in [-a; a]; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ 4a^2 - 4x^2 > a^4 - 4a^3 + 4a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ x^2 < \dfrac{4a^3 - a^4}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ x \in \Big(-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}\Big), \\ 4a - a^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty), \\ x \in \Big(-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}\Big), \\ a \in [0; 4]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \Big(-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}\Big), \\ a \in [2; 4]; \end{cases}$$

Felelet:

Ha $a \in (-\infty; 0] \cup (4; +\infty)$, akkor $x \in \emptyset$;

ha $a \in (0;2)$, *akkor* $x \in (-a;a)$;

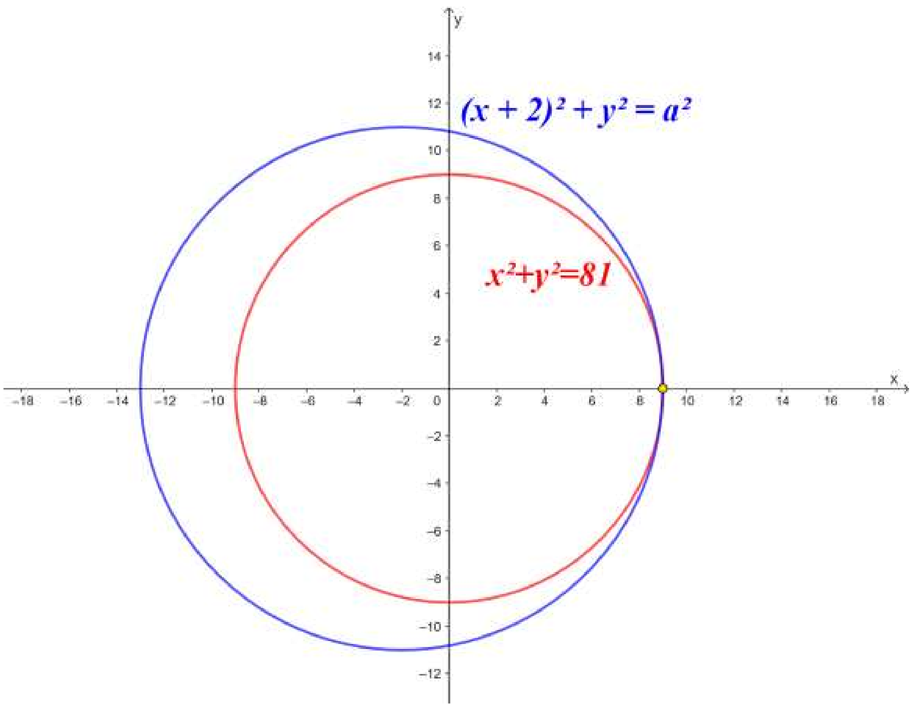
ha $a \in [2;4]$, *akkor* $x \in \Big(-\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\Big)$.*[21]*

Grafikus módszer

2. Feladat. *Keresse meg az a paraméter legnagyobb értékét, amely esetén az egyenletrendszernek egyetlen megoldása lesz.[21]*

$$\begin{cases} x^2+y^2=81 \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

Megoldás. *Az* $x^2+y^2=81$ *egyenlet grafikonja egy kör, amelynek középpontja* $(0;0)$, *sugara pedig* 9. *A második* $(x+2)^2+y^2=a^2$ *egyenlet grafikonja szintén egy kör, melynek középpontja* $(-2;0)$, *sugara pedig* a. *Mivel a feltételek szerint a rendszernek egy megoldással kell rendelkeznie, így a grafikonoknak érinteniük kell egymást, ahogyan azt az ábrán láthatjuk:*



1.1. ábra.

Tehát a rendszer egyetlen megoldással rendelkezik, amikor $a=7$ *vagy* $a=11$. *A legnagyobb érték pedig a* 11.

Felelet: $a=11$.*[21]*

1.2. Oktatási és módszertani irodalom elemzése

Nincs kétség afelől, hogy diákok számára a paramétereket tartalmazó feladatok témaköre egyike a legnehezebbnek mind értelmezés, mind megoldás tekintetében. Ezek a nehézségek, véleményem szerint, azzal vannak összefüggésben, hogy az iskolai matematika tanterve nagyon kevés időt szentel az algebrai feladatok paraméterekkel valómegoldására.

Elemzésem során azt figyeltem meg, hogy a modern iskolai tankönyvek jelentős hányadát paraméterekkel kapcsolatos feladatok alkotják. Az algebra és matematika tankönyvekben, amelyeket azokban az iskolákban használnak, ahol az oktatás szabványos szinten történik, ezeket a feladatokat egy (*) szimbólummal jelölik. Ez a jelölés a téma mélyebb megértésére irányuló gyakorlatokhoz használható, amelyeket időhiány miatt ritkán tárgyalnak az órákon. A profil szintű előkészítéshez ajánlott tankönyvekben ezeknek a feladatoknak a száma sokkal nagyobb, ami arra ösztönöz, hogy ezekre a feladatokra több figyelmet szenteljünk az órákon.

A középiskolai matematika tanterveiben a paraméterekkel kapcsolatos feladatoknak jelentéktelen helyet szánnak. Ezért elsősorban meg kell határozni azokat az általános iskolai matematikai témaköröket, ahol maga a paraméterek gondolata jelen van.

Az 5-6. osztályokban néhány tankönyvben előfordulnak paraméterekkel kapcsolatos feladatok. Általában azonban az iskolai matematikai tananyagban a diákok csak a 7. osztályban találkoznak először a paraméterekkel, amikor lineáris egyenleteket kezdenek megoldani, majd a 8-9. osztályokban, már csak egy-egy óra jut ezeknek a feladatoknak a megoldására és leginkább csak a mélyebb matematika tanulmányokat választó osztályokban. Sajnálatos módon, ahogy fent is említettük, a 10-11. osztályokban a paraméterekkel való találkozás még ritkább.

A középiskolai tananyagban szereplő paraméterekkel kapcsolatos feladatok közé tartozik például a lineáris és másodfokú egyenletek megoldásainak keresése általános formában, valamint a megoldásaik számának vizsgálata a paraméterek értékeitől függően.

Természetesen egy ilyen kis feladatcsoport számos diák számára nem teszi lehetővé a lényeg megértését: a paraméter (rögzített, de ismeretlen szám) kettős természete van. Egyrészt a paramétert számként lehet kezelni, másrészt ez egy ismeretlen szám. Nem véletlen azonban, hogy a paraméteres feladatok elengedhetetlen részét képezik

a felsőoktatási matematikai felvételi vizsgáknak, valamint 2021-ig az önálló matematika érettségi feladatai között helyett kapott paramétert tartalmazó feladat, mivel ezek a feladatok megoldására való képesség azt mutatja, hogy a diák alapos matematikai felkészültséggel, illetve magas szintű logikai gondolkodással rendelkezik.
Annak ellenére, hogy az általános iskolai matematika tanterv elvétve tartalmazza a diákok paraméterekkel kapcsolatos feladatok megoldására való képességeinek kialakítását, mégis fontos lenne a matematikai fejlődés szempontjából, hogy a diákok megismerkedjenek a paraméteres feladatokkal és azok megoldási módszereivel.
Egy 10. osztályosoknak szánt tankönyvben a diákok számára a következő feladatot kínálják megoldásra:

3. Feladat. *Keresse meg az a paraméter összes értékét, amelyek esetén a*

$$(a^2-4a+4)(4+4\sin^2 x+8\sin x)+2(16a-16-4a^2)(1+\sin x)+28-8a=0$$

egyenlet legalább egy megoldással rendelkezik.[12]

Megoldás.

$$(a-2)^2(2+2\sin x)^2+2(-(4a^2-16a+16))(1+\sin x)=8a-28$$

$$4(a-2)^2(1+\sin x)^2-8(a-2)^2(1+\sin x)=8a-28$$

$$4(a-2)^2(1+\sin x)(1+\sin x-2)=8a-28$$

$$(a-2)^2(1+\sin x)(\sin x-1)=2a-7$$

$$(a-2)^2(\sin^2 x-1)=2a-7$$

$$-(a-2)^2\cos^2 x=2a-7$$

$$(a-2)^2\cos^2 x=7-2a$$

$$cos^2 x=\frac{7-2a}{(a-2)^2}$$

$$0\le\cos^2 x\le 1; 0\le\frac{7-2a}{(a-2)^2}\le 1$$

$$\begin{cases}\dfrac{7-2a}{(a-2)^2}\ge 0\\ \dfrac{7-2a}{(a-2)^2}\le 1\end{cases}\quad\begin{cases}(7-2a)(a-2)^2\ge 0\\ a\ne 2\\ \dfrac{7-2a-(a-2)^2}{(a-2)^2}\le 0\end{cases}$$

Innen kapjuk, hogy $a \in (-\infty; 2) \cup (2; 3,5)$

$$\frac{7-2a-a^2+4a-4}{(a-2)^2} \leq 0$$
$$\frac{-a^2+2a+3}{(a-2)^2} \leq 0$$
$$\frac{a^2-2a-3}{(a-2)^2} \geq 0$$
$$\frac{(a+1)(a-3)}{(a-2)^2} \geq 0$$

Innen kapjuk, hogy $a \in (-\infty; -1] \cup [3; 3,5)$

Felelet: $a \in (-\infty; -1] \cup [3; 3,5)$.*[12]*

11. osztályos tanulók számára készült tankönyvben pedig a következő feladatot találhatjuk:

4. Feladat. *Az a paraméter mely értékei mellett van két különböző gyöke a* $4^x - 2^x(a+1) + 2a - 2 = 0$ *egyenletnek?[13]*

Megoldás.

$$2^{2x} - 2^x(a+1) + 2a - 2 = 0$$

Elvégezzük a behelyettesítést: legyen $2^{2x} = k$, *akkor megkapjuk a következő egyenletet:*

$$k^2 - k(a+1) + 2a - 2 = 0$$

Megkeressük az egyenlet gyökeit:

$$D = (a+1)^2 - 4(2a-2) = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$$
$$k_1 = \frac{a+1-(a-3)}{2} = 2; k_2 = \frac{a+1+a-3}{2} = a-1$$

Visszatérve a behelyettesítéshez, kapjuk:

$$\begin{cases} 2^{2x} = 2 \\ 2^{2x} = a-1 \end{cases}$$

A $2^{2x} = 2$*-ből azt kapjuk, hogy az egyenletnek egy gyöke van, az* $x = 1$. *Szükségünk van a második egyenletre, amiből megkapjuk az alábbi egyenletrendszert:*

$$\begin{cases} a-1 > 0 \\ a-1 \neq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1 \\ a \neq 3 \end{cases}$$

Így $a \in (1; 3) \cup (3; +\infty)$

Felelet: $a \in (1; 3) \cup (3; +\infty)$.*[13]*

1.3. Paraméteres feladatok olimpiai feladatsorokban

A matematikai olimpiáknak különleges szerep jut a diákversenyek világában. Története rakta le az alapokat a különböző tantárgyakat érintő versenyek számára. A matematikai olimpia elsősorban nemcsak az alapiskolai tananyag ismeretét igényli a győzelemhez, hanem a diákokra valóban kihívást jelentő, kreatív és nem szokványos problémamegoldó képességek fejlettségét is.

E verseny kivételes esemény, amely a matematika területén kiemelkedő képességekkel rendelkező diákok felfedezését és a matematikai érdeklődés ösztönzését célozza meg. A nehézsége abban rejlik, hogy ez nem csupán az iskolai tananyagon alapul, és bizonyos esetekben lehetetlen elérni a célokat, ha a tanórákon vagy a felkészülés során csak szabványos iskolai feladatokat kínálnak a diákoknak.

Az olimpián minden évben találkozunk egyenletekkel vagy egyenlőtlenségekkel, amelyek paramétereket tartalmaznak, de sajnos sok diák vagy nem is hallott erről a típusú feladatról, vagy nem tudja, hogyan használja azt az adott feladat megoldása során.

Tekintsük át a következő példákat az elmúlt évek olimpiai feladatsoraiból:

A 8. osztályos diákoknak 2015-ben a következő feladatot osztották ki 4. feladatként:

5. Feladat. *Az a paraméter mely értékeinél van négy gyöke az $|2|x|-3| = a$ egyenletnek?[15]*

Megoldás. ***1. módszer:***

Nézzük meg az a paraméter értékeit, amelyeknél az

$|2|x|-3| = a$ *egyenletnek négy különböző gyökere van.*

$$|2|x|-3| = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \begin{cases} 2|x|-3 = a \\ 2|x|-3 = -a \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \begin{cases} |x| = \frac{a+3}{2} \\ |x| = \frac{3-a}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \left[\begin{cases} \frac{a+3}{2} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{a+3}{2} \\ x = -\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} \frac{3-a}{2} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{3-a}{2} \\ x = -\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \left[\begin{cases} a \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{a+3}{2} \\ x = -\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} a \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{3-a}{2} \\ x = -\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{a+3}{2} \\ x = -\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq a \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{3-a}{2} \\ x = -\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Innen következik, hogy az $|2|x|-3| = a$ egyenletnek csak akkor lehet négy különböző gyöke, ha $a \in [0; 3]$.

Azonban $a = 0$ esetén a $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{a+3}{2} \\ x = -\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq a \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = +\frac{3-a}{2} \\ x = -\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = +\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \\ x = +\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ *alakot ölt, és csak 2 különböző gyöke van;*

ha $a = 3$, akkor pedig a következő alakot ölti $\left[\begin{array}{l} x = +3 \\ x = -3 \\ x = +0 \\ x = -0 \end{array}\right.$ *és csak 3 különböző gyöke van.*

Az alábiakban ellenőrizzük, hogy $a \in (0;3)$ esetén négy különböző gyöke van:

$$x_1 = \frac{a+3}{2}, x_2 = -\frac{a+3}{2}, x_3 = \frac{3-a}{2}, x_4 = -\frac{3-a}{2}.$$

Ha feltételezzük, hogy $x_1 = x_2$, akkor a megfelelő $\frac{a+3}{2} = -\frac{a+3}{2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = -3 \notin (0;3)$;
ha feltételezzük, hogy $x_1 = x_3$, akkor a megfelelő $\frac{a+3}{2} = \frac{3-a}{2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = 0 \notin (0;3)$;
ha feltételezzük, hogy $x_1 = x_4$, akkor a megfelelő $\frac{a+3}{2} = -\frac{3-a}{2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy nincs megoldása;
ha feltételezzük, hogy $x_2 = x_3$, akkor a megfelelő $-\frac{a+3}{2} = \frac{3-a}{2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy nincs megoldása;
ha feltételezzük, hogy $x_2 = x_4$, akkor a megfelelő $-\frac{a+3}{2} = -\frac{3-a}{2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = 0 \notin (0;3)$;
ha feltételezzük, hogy $x_3 = x_4$, akkor a megfelelő $\frac{3-a}{2} = -\frac{3-a}{2}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = 3 \notin (0;3)$.
Így az $|2|x| - 3| = a$ egyenletnek négy különböző gyöke van akkor és csak akkor, ha $0 < a < 3$.[15]

2. módszer:

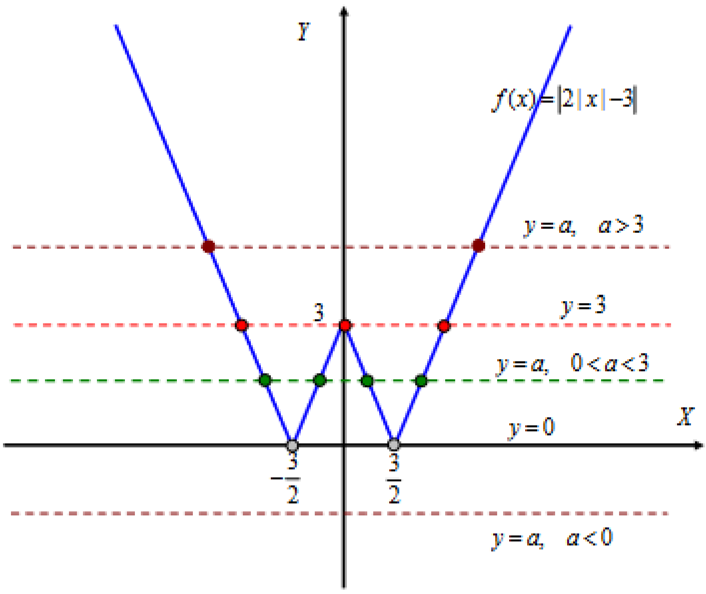
Nézzük meg az $y = f(x) = |2|x| - 3|$ függvényt.
Mivel $f(-x) = |2|-x|-3| = |2|x|-3| = f(x)$, így az $y = f(x) = |2|x|-3|$ függvény grafikonja szimmetrikus az OY tengelyhez viszonyítva.
Ezután egyszerüsítjük az $f(x) = |2|x| - 3|$ függvény alakját:

$$y = f(x) = |2|x| - 3| = \begin{cases} |2x-3|, x \geq 0 \\ |-2x-3|, x < 0 \end{cases} = \begin{cases} |2x-3|, x \geq 0 \\ |2x+3|, x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x-3, ha x \geq 0, 2x-3 \geq 0 \\ -2x+3, ha x \geq 0, 2x-3 < 0 \\ 2x+3, ha x < 0, 2x+3 \geq 0 \\ -2x-3, ha x < 0, 2x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-3, x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3, 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 2x+3, -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ -2x-3, x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Így az adott $y = f(x)$ függvény grafikonja a következőképpen szerkeszthető meg:
Tudjuk, hogy az $y = a$ függvény grafikonja (az a paraméter tetszőleges értéke mellett)

egy egyenes, amely átmegy a $(0;a)$ *ponton, és párhuzamos az* OX *tengellyel.*
Szintén jól ismert, hogy az $f(x)=g(x)$ *egyenlet valós gyökeinek száma megegyezik az* $f(x)$ *és* $g(x)$ *függvények grafikonjainak metszéspontjainak számával.*
Az $f(x)=|2|x|-3|$ *és a* $g(x)=a$ *függvények grafikonjai, amelyeket egy koordináta síkon ábrázolunk, lehetővé teszik számunkra, hogy megvizsgáljuk a megadott egyenlet megoldásainak számát:*
Ha $a<0$*, akkor az* $y=|2|x|-3|$ *és az* $y=a$ *függvények grafikonjai egyáltalán nem metszik egymást. Ezért, ha* $a<0$*, akkor a megadott egyenletnek nincsenek gyökei;*
ha $a=0$*, akkor a megadott függvények grafikonjainak csak két közös pontja van, ezért* $a=0$ *esetén ennek az egyenletnek pontosan két gyöke van;*
ha $a=3$*, akkor a megadott függvények grafikonjainak csak három közös pontja van, ezért* $a=3$ *esetén ennek az egyenletnek pontosan három gyöke van;*
ha $a>3$*, akkor a megadott függvények grafikonjainak csak két közös pontja van, ezért* $a>3$ *esetén ennek az egyenletnek pontosan két gyöke van;*
ha $0<a<3$*, akkor a megadott függvények grafikonjainak négy közös pontja van, ezért* $0<a<3$ *esetén ennek az egyenletnek pontosan négy különböző gyökere van.*



1.2. ábra.

Felelet: $0<a<3$*[15]*

2015-ben a 11. osztály tanulói a következő feladatot kapták 5. feladatként:

6. Feladat. *Oldja meg az a paramétert tartalmazó egyenletet![15]*

$$x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$$

Megoldás. *Oldjuk meg az* $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$ *egyenletet:*

$$D : \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq -a \end{cases}$$

Mivel a teljes értelmezési tartományon $x + \sqrt{\sqrt{x} + a} \geq 0$, *ezért ha* $a < 0$, *akkor az egyenletnek nincsenek (valós) megoldásai.*

1. Ha $a = 0$, *akkor:*

$$x + \sqrt{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Így ha $a = 0$, *akkor az egyenlet gyöke* $x = 0$.

2. Legyen $a > 0$, *így*

$$\sqrt{\sqrt{x} + a} = a - x,$$

ami egyenértékű a következő rendszerrel

$$\begin{cases} \sqrt{x} + a = a^2 - 2ax + x^2 \\ a - x \geq 0 \end{cases}$$

Tekintsük a rendszer 1. egyenletét másodfokú egyenletnek az a paraméterhez képest

$$a^2 - a(2x + 1) + x^2 - \sqrt{x} = 0.$$

$$D = (2x + 1)^2 - 4(x^2 - \sqrt{x}) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4\sqrt{x} = (2\sqrt{x} + 1)^2$$

Ekkor $a = \dfrac{2x + 1 \mp (2\sqrt{x} + 1)}{2}$. *Innen*

$$a = \frac{2x + 1 - (2\sqrt{x} + 1)}{2} = x - \sqrt{x}$$

vagy

$$a = \frac{2x + 1 + (2\sqrt{x} + 1)}{2} = x + \sqrt{x} + 1.$$

Nézzük meg az egyes eseteket külön-külön:

2.1. Legyen

$$a = x - \sqrt{x}.$$

Vezessük be a $\sqrt{x} = t$ *behelyettesítést,* $t \geq 0$ *(*). Ekkor az* $a = x - \sqrt{x}$ *egyenlet a következő formát veszi fel*

$$t^2 - t - a = 0.$$

$D_1 = 1 + 4a > 0$. *Ekkor* $t = \dfrac{1 \mp \sqrt{1+4a}}{2}$. *Figyelembe véve a (*) feltételt* $t = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. *Ekkor* $\sqrt{x} = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, *és* $x = \left(\dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(2 + 4a + 2\sqrt{1+4a}) = a + \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a} > a)$, *ami ellentmond a rendszer 2. egyenlőtlenségének.*

2.2. Most legyen

$$a = x + \sqrt{x} + 1.$$

Vezessük be a $\sqrt{x} = t$ *behelyettesítést,* $t \geq 0$ *(*). Ekkor az* $a = x + \sqrt{x} + 1$ *egyenlet a következő formát veszi fel*

$$t^2 + t + 1 - a = 0,$$

amelynek diszkriminánsa $D_2 = 4a - 3$*:*

2.2.1. Ha $0 < a < \frac{3}{4}$, *akkor a* $t^2 + t + 1 - a = 0$, *az* $a = x + \sqrt{x} + 1$ *és egyben az* $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$ *egyenletnek nincs megoldása;*

2.2.2. Ha $a = \frac{3}{4}$, *akkor* $t = -\frac{1}{2}$, *ami nem teljesíti a (*) feltételt;*

2.2.3. Ha $a > \frac{3}{4}$, *akkor* $t = \dfrac{-1 \mp \sqrt{4a-3}}{2}$, *figyelembe véve a (*) feltételt:* $t = \dfrac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$, *és csak* $a \geq 1$ *esetén. Ezért ha* $a \geq 1$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{4a-3} - 1}{2}, x = \frac{1}{4}(4a - 2 - 2\sqrt{4a-3}) = a - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a-3}).$$

Nyilvánvaló, hogy $x = a - \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{4a-3}) < a$ *tehát teljesül a rendszer 2. egyenlőtlensége.*

Így $a \geq 1$ *esetén a* $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$ *egyenlet megoldása* $x = a - \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{4a-3})$.

Felelet: ha $a = 0$, *akkor* $x = 0$*;*

ha $a < 0$ *vagy* $0 < a < 1$, *akkor az egyenletnek nincs megoldása;*

ha $a \geq 1$, *akkor* $x = a - \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{4a-3})$*[15]*

2018-ban pedig a következő feladat volt az amit 5. feladatként kellett megoldani a diákoknak:

7. Feladat. *Hány gyöke van a* $\sqrt{x+a} = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2a)$ *egyenletnek az a paraméter különböző értékeinél?[17]*

Megoldás. *Vezessük be az $x + a = t$ helyettesítést. Ekkor az $x - 2a = x + a - 3a = t - 3a$, így a $\sqrt{x+a} = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2a)$ egyenlet ekvivalens a*

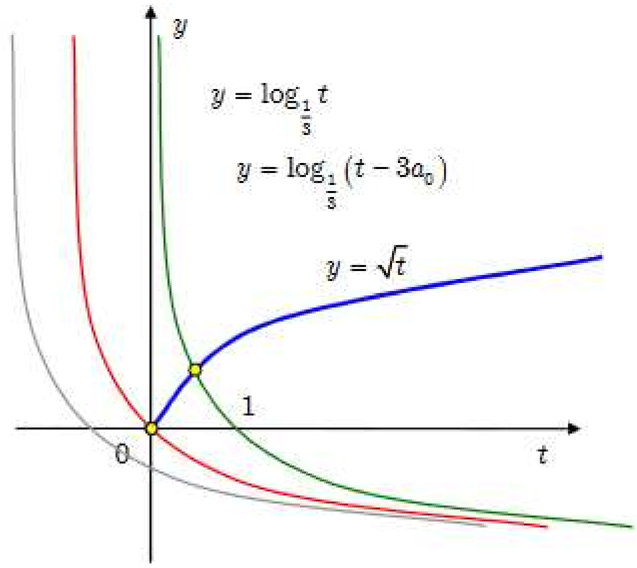
(1.2)

$$\sqrt{t} = \log_{\frac{1}{3}}(t - 3a)$$

egyenlettel, ezért az egyenlet gyökeinek számának megtalálása az a paraméter különböző értékeinél megegyezik az (1.2) egyenlet gyökeinek számának megtalálásával az a paraméter különböző értékeinél. Oldjuk meg grafikusan az (1,2) egyenleteket, ábrázolva az $y = \sqrt{t}$ függvény és az $y = \log_{\frac{1}{3}}(t - 3a)$ logaritmikus függvény grafikonjait (amikor $a > 0, a = 0, a = -\frac{1}{3}, a < -\frac{1}{3}$) egy tOy koordinátarendszerben ($t \geq 0$). A (0;0) pont hozzátartozik az $y = \log_{\frac{1}{3}}(t - 3a_0)$ függvény grafikonjához akkor és csak akkor, ha

$$0 = \log_{\frac{1}{3}}(t - 3a_0) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} 1 = \log_{\frac{1}{3}}(-3a_0) \Leftrightarrow 1 = -3a_0 \Leftrightarrow a_0 = -\frac{1}{3}.$$

Ha $a < -\frac{1}{3}$, akkor az $y = \log_{\frac{1}{3}}(t - 3a)$ függvény grafikonjának a $t \in [0; +\infty)$ intervallumon nincs közös pontja az $y = \sqrt{t}$ függvény grafikonjával, ha pedig $a \geq -\frac{1}{3}$, akkor az $y = \log_{\frac{1}{3}}(t - 3a)$ függvény grafikonjának mindig csak egy közös pontja van az $y = \sqrt{t}$ függvény grafikonjával.



1.3. ábra.

Így:

ha $a \in [-\frac{1}{3}; +\infty)$, akkor ennek az egyenletnek egy gyöke van;

ha $a \in (-\infty; \frac{1}{3})$, akkor ennek az egyenletnek nincs gyöke.[17]

2. fejezet

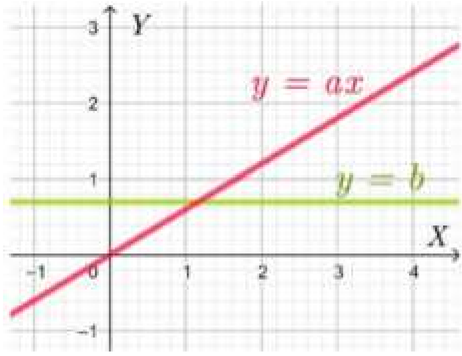
Paramétert tartalmazó feladatok típusai

2.1. Lineáris egyenletek paraméterekkel

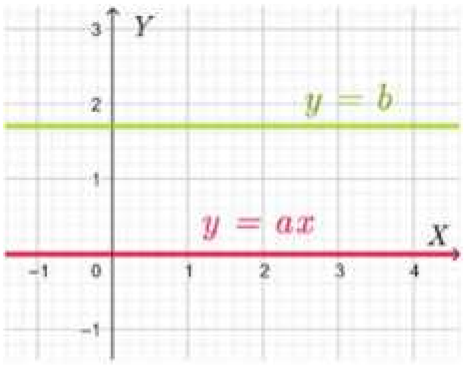
Az $ax = b$ alakú egyenletet, ahol a és b adott számok, lineáris egyenletnek nevezzük az x változóval. Az a és $b$számok az egyenlet együtthatói, a az x változó együtthatója, b pedig az egyenlet szabad tagja. Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletet egyváltozós elsőfokú egyenletnek nevezzük.[1]
A lineáris egyenletnek lehet, hogy nincs megoldása, lehet egy vagy akár több megoldása is.

8. Feladat. *Milyen a és b értékek mellett van az $ax = b$ egyenletnek: egy gyöke; több gyöke; nincs gyöke?[22]*

Megoldás. *1) Ha az $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletet vizsgáljuk. Az $y = ax$ függvény grafikonja egy egyenes, ami az Ox tengelyhez képest α szögben dől. Az $y = b$ függvény grafikonja egy egyenes, ami párhuzamos az Ox tengellyel. Ezek a egyenesek egy bizonyos pontban metszik egymást, és ez a pont az $ax = b$ egyenlet gyöke. (2.1 ábra)*
2) Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az $y = ax$ egyenletet vizsgáljuk. Az $y = ax$ függvény grafikonja egy olyan egyenes, ami párhuzamos az Ox tengellyel. Az $y = b$ függvény grafikonja egy olyan egyenes, ami egybeesik az Ox tengellyel. Ezek az egyenesek nem metszik egymást, így az $ax = b$ egyenletnek nincsenek gyökei. (2.2 ábra)

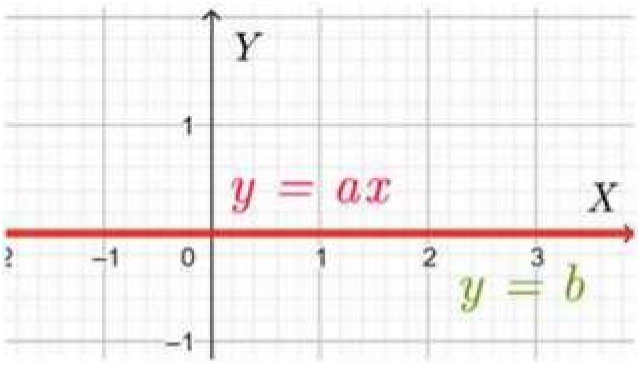


2.1. ábra.



2.2. ábra.

3) Ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor az $y = ax$ és $y = b$ egyenesek egybeesnek egymással és egybeesnek az Ox tengellyel. Tehát az $ax = b$ egyenlet gyöke bármely szám lehet. (2.3 ábra)



2.3. ábra.

Felelet: Amikor $a \neq 0$, az egyenlet egyetlen megoldással rendelkezik; amikor $a = 0$ és $b = 0$, az egyenletnek végtelen sok megoldása van; amikor $a = 0$ és $b \neq 0$, az egyenletnek nincs megoldása.[22]

9. Feladat. *Határozzátok meg az $ax = x - a + 1$ egyenlet gyökeit az a paramétertől függően.[1]*

Megoldás.

$$ax = x - a + 1$$

$$(a-1)x = (1-a)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a-1=0\\ 0x=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a-1\neq 0\\ x=\dfrac{1-a}{a-1}\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a=1\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 1\\ x=-1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

*Felelet: ha $a = 1$, akkor $x \in \mathbb{R}$; ha $a \neq 1$, akkor $x = -1$.[**?**]*

10. Feladat. *Oldjátok meg az $1 + ax = 2x - b$ egyenlet.[1]*

Megoldás.

$$1 + ax = 2x - b$$

$$(a-2)x = -b - 1$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a-2=0\\ 0x=-b-1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a-2\neq 0\\ x=\dfrac{-b-1}{a-2}\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a=2\\ -b-1=0\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a=2\\ -b-1\neq 0\\ x\in\emptyset\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 2\\ x=-\dfrac{b+1}{a-2}\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a=2\\ b=-1\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a=2\\ b\neq -1\\ x\in\emptyset\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a\neq 2\\ x=\dfrac{b+1}{2-a}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Felelet: ha $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ b=-1\end{array}\right.$*, akkor $x \in \mathbb{R}$; ha* $\left\{\begin{array}{l}a=2\\ b\neq -1\end{array}\right.$*, akkor $x \in \emptyset$; ha $a \neq 2$, akkor* $x = \dfrac{b+1}{2-a}$

2.2. Tört-racionális egyenletek paraméterekkel

A paraméteres törtracionális egyenletet olyan egyenletként definiáljuk, amely a következő formában írható fel: $\dfrac{f(x;a)}{g(x;a)} = 0$, ahol $f(x;a)$ és $g(x;a)$ polinomok. Ennek az egyenletnek az értelmezési tartománya: $g(x;a) \neq 0$. A paraméteres tört-racionális egyenletek megoldásakor kizárjuk azokat az x és a paraméter értékeket, amelyekre a nevező $g(x;a) = 0$.[1]

A törtracionális egyenleteket lineáris egyenletekké alakítjuk át. Ezért ahhoz, hogy egy törtracionális egyenlet grafikonját felépítsük, emlékeznünk kell arra, hogyan építjük fel az $ax = b$ egyenlet grafikonját.

Néha előfordul, hogy ezeknek az egyenleteknek a megoldása a másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározására vezethető vissza.

11. Feladat. *A k paraméter milyen értékei mellett van a $k-2 = \dfrac{3x+1}{x+1}$ egyenletnek negatív megoldása?[22]*

Megoldás. *Rendezzük az egyenletet:*

$$\frac{3x+1}{x+1} - k + 2 = 0$$

$$\frac{3x+1-k(x+1)+2(x+1)}{x+1} = 0$$

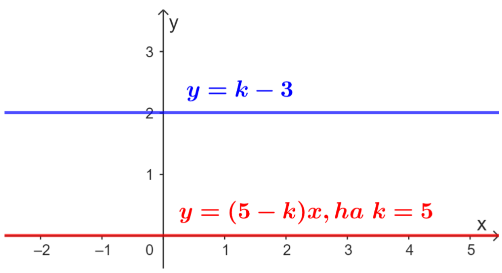
Megkeressük az értelmezési tartományt: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$.

Most megoldjuk a számlálót:

$$3x+1-k(x+1)+2(x+1) = 0$$

$$(5-k)x = k-3 \Rightarrow x = \frac{k-3}{5-k}$$

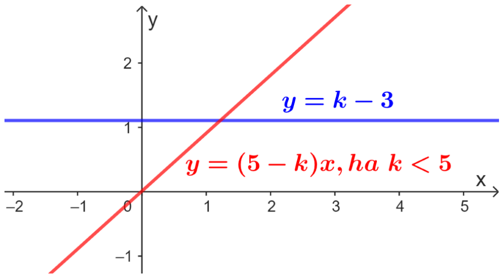
Rajzoljuk meg az $y = (5-k)x$ és $y = k-3$ függvények grafikonját.



2.4. ábra.

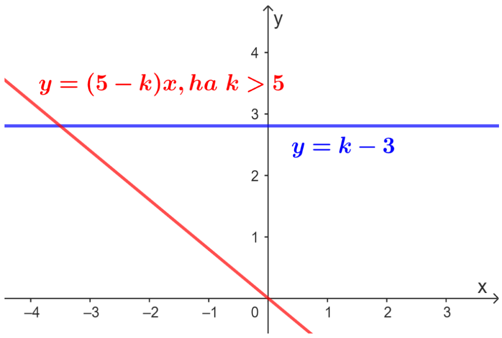
Ha megvizsgáljuk az első grafikont (2.4 ábra), észrevehetjük, hogy ha $k = 5$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

A második grafikonról (2.5 ábra) láthatjuk, hogy ha $k < 5$, akkor a grafikonok csak egy pontban metszik egymást.



2.5. ábra.

A harmadik grafikon (2.6 ábra) megfigyelhetjük, hogy ha $k > 5$, akkor a grafikonok ismét csak egy pontban metszik egymást.



2.6. ábra.

Ha tovább vizsgáljuk a grafikonokat, láthatjuk, hogy $k < 3$ és $k > 5$ esetén a $k - 2 = \dfrac{3x+1}{x+1}$ egyenletnek negatív megoldásai vannak. Ellenőrizzük ezt analitikus módszerrel:

$$\frac{k-3}{5-k} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} k-3 < 0 \\ 5-k > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} k-3 > 0 \\ 5-k < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} k < 3 \\ k < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} k > 3 \\ k > 5 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} k \in (-\infty; 3) \\ k \in (5; +\infty) \end{cases}$$

Tehát, ha $k \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, akkor a $k - 2 = \dfrac{3x+1}{x+1}$ egyenlet megoldásai negatívak.

Felelet: $k \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$.[22]

12. Feladat. *Mekkora az a valós szám, ha az*

$$\frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7}$$

kifejezés x-től függetlenül állandó, ahol $2ax-4a+5x-7\neq 0$*?[18]*

Megoldás. ***1)*** *Tegyük fel, hogy van ilyen a valós szám. Jelöljük a kifejezés értékét b-vel:*

$$\frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7}=b$$

Szorozzuk mindkét oldalt a 0-tól különböző nevezővel:

$$(a+1)x-2a-1=2abx-4ab+5bx-7b$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$(a+1-2ab-5b)x=2a+1-4ab-7b$$

Ez tetszőleges x-re pontosan akkor áll fenn, ha

$$\begin{cases} a+1-2ab-5b=0 \\ 2a+1-4ab-7b=0 \end{cases}$$

A első egyenlet kétszereséből kivonjuk a másodikat:

$$1-3b=0$$

Innen $b=\dfrac{1}{3}$*, valamint az* $a+1-2ab-5b=0$ *egyenletből* $a=\dfrac{5b-1}{1-2b}=\dfrac{\frac{5}{3}-1}{1-\frac{2}{3}}=2$
Tehát ha van ilyen a szám, az csak a 2 lehet.

Behelyettesítjük $a=2$*-t az eredeti kifejezésbe:*

$$\frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7}=\frac{3x-5}{9x-15}=\frac{1}{3}$$

Tehát a keresett paraméter értéke: 2.

2) módszer:

Ha a kifejezés értéke minden x-re ugyanaz a konstans, akkor két különböző x behelyettesítésével nyert értékek egyenlők. $x=0$ *és* $x=1$ *érték behelyettesítésével az alábbi egyenletet kapjuk:*

$$\frac{-2a-1}{-4a-7}=\frac{-a}{-2a-2}$$

$$(a\neq -\frac{7}{4}, a\neq -1)$$

Ebből $4a^2+6a+2=4a^2+7a$*, ahonnan* $a=2$*.*

$a=2$ *esetén a kifejezés értéke valóban állandó* $(\frac{1}{3})$*.[18]*

2.3. Másodfokú egyenletek paraméterekkel

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenlet, ahol x a keresett ismeretlen, a, b, c pedig paraméterek, $a \neq 0$, paraméteres másodfokú egyenletnek nevezzük.

Vizsgáljuk meg az alábbi eseteket:

1) Ha $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, ebben az esetben kapunk egy $bx + c = 0$, alakú lineáris egyenletet. A lineáris egyenletről már beszéltünk az előző pontban.

2) Ha $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$, ebben az esetben kapunk egy hiányos másodfokú egyenletet, melynek alakja a következő:$ax^2 = 0$. Ennek az egyenletnek egy gyökere van, $x = 0$. Az $ax^2 = 0$ függvény grafikonja a teljes Oy tengely.

3) Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, ebben az esetben kapunk egy hiányos másodfokú egyenletet $ax^2 + bx = 0$ alakban. Az egyenletnek két gyöke van, $x = 0$ és $x = \frac{-b}{a}$.

4) Ha $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, ebben az esetben kapunk egy $ax^2 + c = 0$ alakú hiányos másodfokú egyenletet. Ennek az egyenletnek két lehetséges esete van:

a) Az $ax^2 + c = 0$ egyenletnek 2 gyöke van, $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, ha $c < 0$ és $a > 0$, vagy ha $a < 0$ és $c > 0$.

b) Az $ax^2 + c = 0$ egyenletnek nincsenek gyökei, ha $c > 0$ és $a > 0$, vagy ha $c < 0$ és $a < 0$.

5)Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, akkor a másodfokú egyenlet gyökeit a következő képlettel találhatjuk meg: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, ahol $D = b^2 - 4ac$. Itt három eset lehetséges:

Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek két valós gyöke van.

Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek egy gyöke van:$x = \frac{-b}{2a}$.

Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincsenek valós gyökei.

A másodfokú egyenlet grafikus megoldásához:

1. Először is, végezzük el az egyenértékű átalakításokat, azaz hagyjuk változatlanul a bal oldalt, és a paramétereket vigyük át a jobb oldalra.
2. Ábrázoljuk az első és második egyenlet grafikonját.
3. Határozzuk meg a létrehozott grafikonok metszéspontjának koordinátáit.

Írjuk fel az egyenlet megoldásait.[1]

13. Feladat. *A k paraméter mely értékei mellet lesz az $x^2 + (k^2 + 4k - 5)x - k = 0$ egyenlet gyökeinek összege egyenlő nullával?*

Megoldás. *Legyen x_1 és x_2 az adott egyenlet gyökei. Ekkor a Viete-tétel alapján teljesül, hogy:*

$$x_1 + x_2 = -(k^2 + 4k - 5) = 0$$

feltéve, hogy

$$(k^2 + 4k - 5)^2 + 4k \geq 0$$

Tehát a feladat megoldásainak halmaza a k paraméter értékétől függően felírható:

$$\begin{cases} k^2 + 4k - 5 = 0 \\ 4k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \in [-5; 0] \\ k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

Felelet: $k = 1$.*[1]*

14. Feladat. *A p valós paraméter mely értékeire van a $(p-1)x^2 + 2px + 4 + p = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke?[18]*

Megoldás. $p = 1$ *esetén a* $2x + 5 = 0$ *elsőfokú egyenletnek egy valós gyöke van* $(x = -2,5)$.

$p \neq 1$ *esetén az egyenlet másodfokú. Ennek pontosan akkor van legfeljebb egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa nem pozitív.*

$$D = 4p^2 - 4(p-1)(4+p) \leq 0$$

$$4p^2 - 4p^2 - 12p + 16 \leq 0$$

$$p \geq \frac{4}{3}$$

Tehát az egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van, ha $p = 1$ *vagy* $p \geq \frac{4}{3}$*[18]*

Felelet: $p = 1$ *vagy* $p \geq \frac{4}{3}$.

15. Feladat. *Határozzátok meg a p értékét úgy, hogy az $x^2+(2p+5)x+p^2+3p-4 = 0$ egyenletnek:*

a) ne legyen valós gyöke;

b) két egyenlő valós gyöke legyen (egy valós gyöke legyen);

c) gyöke legyen a 0*;*

d) két különböző pozitív gyöke legyen;

e) egy pozitív és egy negatív gyöke legyen;

f) két különböző negatív gyöke legyen![18]

Megoldás. *A megoldásokhoz szükségünk lesz a másodfokú egyenlet diszkriminánsára:*

$$D = (2p+5)^2 - 4(p^2+3p-4) = 8p + 41$$

a) Az egyenletnek nincs valós gyöke, ha $D < 0$. *Ez* $p < -\frac{41}{8} = -5,125$ *esetén teljesül.*

b) Egy valós gyöke van, ha $D = 0$, *azaz, ha* $p = -5,125$.

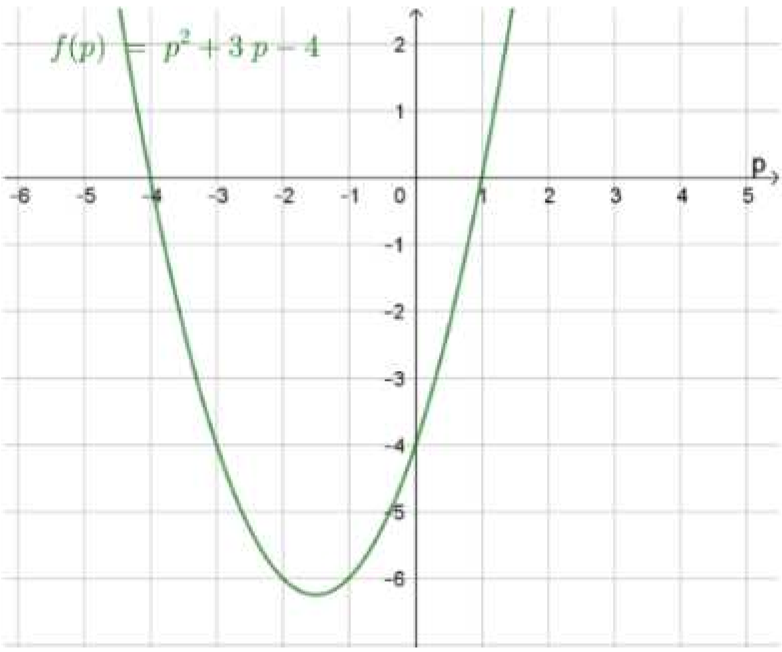
c) Az egyenlet az $x = 0$ *értékre teljesül, ezért ezt behelyettesítve a* $p^2 + 3p - 4 = 0$ *összefüggést kapjuk. Ez akkor igaz, ha* $p = -4$ *vagy ha* $p = 1$.

d) Egy másodfokú egyenletnek két különböző pozitív valós gyöke van, ha a diszkriminánsa pozitív, valamint a gyökök összege és szorzata is pozitív:

$D > 0$, *ha* $p > -5,125$

$x_1 + x_2 = -(2p+5) > 0$, *ha* $p < -2,5$

$x_1x_2 = p^2 + 3p - 4 > 0$, *ha* $p < -4$ *vagy* $p > 1$. *Az alábbi grafikonról leolvashatók ezek az értékek:*



2.7. ábra.

A másodfokú egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha $-5,125 < p < -4$.

e) Ha az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ *egyenletnek két különböző előjelű valós gyöke van, akkor a gyökök szorzata negatív.*

Elég csak ezt vizsgálni, mert ha ez teljesül, akkor az egyenlet gyökei valósak, hiszen, ha $x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$, *akkor ac is negatív és így* $D = b^2 - 4ac$ *biztosan pozitív.*

A feladatunkban $x_1x_2 = p^2 + 3p - 4 < 0$. *A megoldás leolvasható a d)-ben ábrázolt grafikonról:* $-4 < p < 1$.

f) Az egyenletnek két különböző negatív gyöke van, ha a diszkriminánsa pozitív, valamint a gyökök összege negatív és a szorzatuk pozitív.

$D > 0$, *ha* $p > -5,125$

$x_1 + x_2 = -(2p + 5) < 0$, *ha* $p > -2,5$

$x_1x_2 = p^2 + 3p - 4 > 0$, *ha* $p < -4$ *vagy* $p > 1$. *Ezek egyszerre teljesülnek, ha* $p > 1$.*[18]*

2.4. Egyenletrendszerek paraméterekkel

Ha számos egyenlet közös megoldásait kell megtalálni, akkor meg kell oldani a rögzített egyenletek rendszerét. A rendszer egyenleteinek megoldásai azoknak az ismeretleneknek az értékei, amelyek kielégítik a rendszer minden egyenletét.

A rendszer egyenleteinek megoldása azt jelenti, hogy megtaláljuk az összes megoldását, vagy bizonyítjuk, hogy egyáltalán nincsenek.

Most pedig nézzünk meg néhány példát:

16. Feladat. *Oldja meg a rendszert az a paraméter összes értékére:*

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ a^2x - y = a \end{cases} \qquad [1]$$

Megoldás. *Vizsgáljuk meg a rendszer egyenleteinek azonos együtthatóinak viszonyát:*

$\frac{a^2}{1} = \frac{-1}{-1}$ *ha* $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$;

$\frac{a^2}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{a}{1}$ *ha* $a = 1$;

$\frac{a^2}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{a}{1}$ *ha* $a = -1$.

Ekkor ha $a = 1$, *a rendszernek végtelen megoldása van:*

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

ha $a = -1$, *a rendszernek nincs megoldása;*

ha $a \neq \pm 1$, *a rendszernek egyetlen megoldása van.*

Keressük meg ezt az utolsó megoldást:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ a^2x - y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ a^2x - x + 1 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ (a^2 - 1)x = a - 1 \end{cases}$$

Amennyiben az $a \neq \pm 1$ *feltétel teljesül:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1} \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a+1} \\ y = -\dfrac{a}{a+1} \end{cases}$$

Felelet: ha $a = 1$*, akkor* $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 1 \end{cases}$ *;*
ha $a = -1$*, akkor* $x; y \in \emptyset$*;*
ha $a \neq \pm 1$*, akkor* $\left(x = \dfrac{1}{a+1}; y = -\dfrac{a}{a+1}\right)$ *[1]*

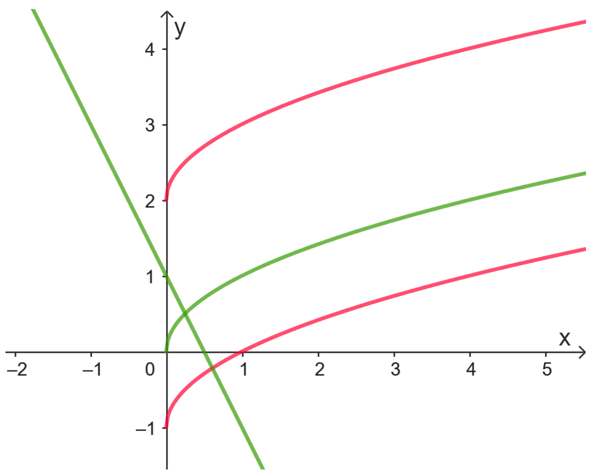
17. Feladat. *Hány megoldása van a rendszernek az a paraméter függvényében?*

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y = a + \sqrt{x} \end{cases} \quad [14]$$

Megoldás. *Hajtsuk végre az átalakítást, és írjuk fel a rendszert a következő alakban:*

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = a + \sqrt{x} \end{cases}$$

Készítsük el az első egyenlet grafikonját, és vázlatosan ábrázoljuk a másodikat.



2.8. ábra.

Az $y = a + \sqrt{x}$ egyenlet az $y = \sqrt{x}$ grafikonját ábrázolja, amely felfelé és lefelé mozog az Ox tengely mentén.

Nyilvánvaló, hogy ha $a \in (-\infty 1]$, akkor a grafikonok egy pontban metszik egymást, míg ha $a \in (1; +\infty)$, akkor a grafikonok nem metszik egymást.

Felelet: ha $a \in (-\infty 1]$, a rendszernek egyetlen megoldása van;

ha $a \in (1; +\infty)$, a rendszernek nincsenek megoldásai.[14]

18. Feladat. *Oldja meg a valós számpárok halmazán a*

$$\begin{cases} 2(p+2)x - (p+1)y = p \\ p^2(x-y) = 4x - y \end{cases}$$

egyenletrendszert, amelyben p valós paraméter![18]

Megoldás. *Rendezzük át az egyenleteket, az alábbiak szerint:*

$$\begin{cases} 2(p+2)x = (p+1)y + p \\ (p^2-4)x = (p^2-1)y \end{cases}$$

Szorozzuk az első egyenletet $(p-1)$-gyel, majd ebből vonjuk ki a másodikat:

$$(2p^2 + 2p - 4 - p^2 + 4)x = p(p-1)$$

Alakítsuk szorzattá a bal oldalt is:

$$p(p+2)x = p(p-1)$$

$p = 0$ esetén a két oldal nulla, ezért x tetszőleges szám.

Mindkét eredeti egyenlet: $4x - y = 0$. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, az $(a; 4a)$ számpár, ahol a tetszőleges valós szám.

$p = -2$ esetén a bal oldal nulla, a jobb oldal nem az, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

$p \neq 0$ és $p \neq -2$ esetén $x = \dfrac{p-1}{p+2}$.

Meg kell még határozni y megfelelő értékét. Ehhez helyettesítsük vissza az x-re kapott értéket a $2(p+2)x = (p+1)y + p$ egyenletbe!

$$2(p-1) = (p+1)y + p$$

$$p - 2 = (p+1)y$$

Ha $p=-1$, akkor az egyenlet jobb oldala nulla, bal oldala nem, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ha $p\neq -1$, akkor $(p+1)$-gyel oszthatunk, $y=\dfrac{p-2}{p+1}$.

Felelet: az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha $p=-2$, valamint, ha $p=-1$; egy megoldása van, ha $p\neq 0$, $p\neq -2$ és $p\neq -1$, mégpedig a $\left(\dfrac{p-1}{p+2};\dfrac{p-2}{p+1}\right)$ számpár;

végtelen sok megoldása van, ha $p=0$.[18]

2.5. Paraméteres irracionális egyenletek

Az irracionális egyenletek fő tulajdonságai:

1) Az összes páros hatványú gyök, ami az egyenletben található, aritmetikai.

Azaz a $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ alakú egyenlet azonos az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} f(x)=(g(x))^{2n} \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

ahol n egész szám.

A $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$ alakú egyenlet azonos az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$$

ahol n egész szám.

2) A páratlan hatvány összes gyöke a gyökkifejezés bármely érvényes értékére definiálva van.

Tehát a $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$ alakú egyenlet ugyanaz, mint a $f(x)=(g(x))^{2n+1}$ egyenlet, ahol n egy egész szám.

A $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$ alakú egyenlet pedig ugyanaz, mint az $f(x)=g(x)$ rendszer, ahol n egy egész szám.[19]

19. Feladat. *Az a paraméter milyen értéke mellett van a $\sqrt{x-a}=2x-1$ egyenletnek csak egy megoldása?[1]*

Megoldás.

$$\begin{cases} x-a\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \\ x-a=(2x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ x-a=(2x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-5x+1+a=0 \end{cases}$$

Az egyenletnek egy megoldésa van a következő esetekben:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} D=0 \\ x\geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ f(\dfrac{1}{2})<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{9}{16} \\ \frac{5}{8}\geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ 1-\dfrac{5}{2}+1+a<0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{9}{16} \\ a<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Felelet: $a\in\Big(-\infty;\dfrac{1}{2}\Big)\cup\Big(\dfrac{9}{16}\Big)$.*[1]*

2.6. Abszolútértéket és paramétert tartalmazó egyenletek

$$|x|=\begin{cases} x, ha x\geq 0 \\ -x, ha x<0 \end{cases}$$

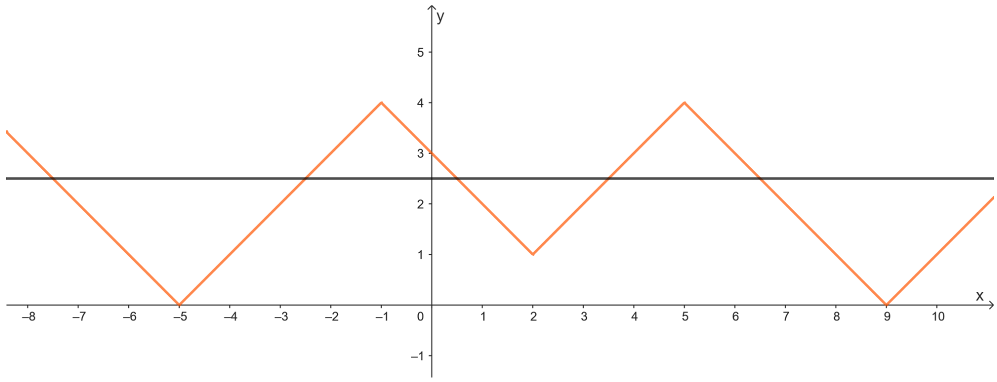
vagy

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), ha f(x)\geq 0 \\ -f(x), ha f(x)<0 \end{cases}$$

20. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogyan függ a paraméter értékétől a következő egyenlet megoldásainak a száma:*

$$|||x-2|-3|-4|=a[18]$$

Megoldás. *A megoldáshoz egy koordinátarendszerben ábrázoljuk az egyenlet mindkét oldalát x függvényeként, majd a grafikonokról leolvassuk a közös pontok számát.*
Az $|||x-2|-3|-4|=a$ *függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a nem negatív valós számok halmaza.*
A grafikonról leolvasható a megoldások száma.
Például $a=2,5$ *esetén az* $y=2,5$ *egyenes és az f függvény grafikonjának 6 közös pontja van.*



2.9. ábra.

ha $a < 0$, *akkor az egyenletnek nincs megoldása;*

ha $a = 0$, *akkor az egyenletnek 2 megoldása van;*

ha $0 < a < 1$, *akkor az egyenletnek 4 megoldása van;*

ha $a = 1$, *akkor az egyenletnek 5 megoldása van;*

ha $1 < a < 4$, *akkor az egyenletnek 6 megoldása van;*

ha $a = 4$, *akkor az egyenletnek 4 megoldása van;*

ha $a > 4$, *akkor az egyenletnek 2 megoldása van;[18]*

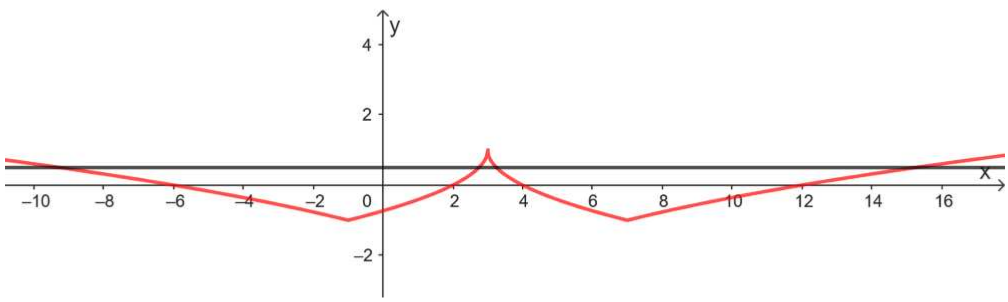
21. Feladat. *Határozzuk meg a* p *valós paraméter mely értékeinél hány megoldása van a következő egyenletnek:*

$$\left|\sqrt{|x-3|}-2\right|-1=p[18]$$

Megoldás. *Ábrázoljuk a bal oldalt az* x *változó függvényeként.*

A függvény értékkészlete $[-1;+\infty)$.

A jobb oldalon a konstans $g(x) = p$ *függvény grafikonja egy* x *tengellyel párhuzamos egyenes.*



2.10. ábra.

A megoldások számát az dönti el, hogy a két függvény grafikonjának hány közös *pontja van:*

ha $p < -1$*, akkor az egyenletnek nincs megoldása;*

ha $p = -1$*, akkor az egyenletnek 2 megoldása van;*

ha $-1 < p < 1$*, akkor az egyenletnek 4 megoldása van;*

ha $p = 1$*, akkor az egyenletnek 3 megoldása van;*

ha $p > 1$*, akkor az egyenletnek 2 megoldása van;[18]*

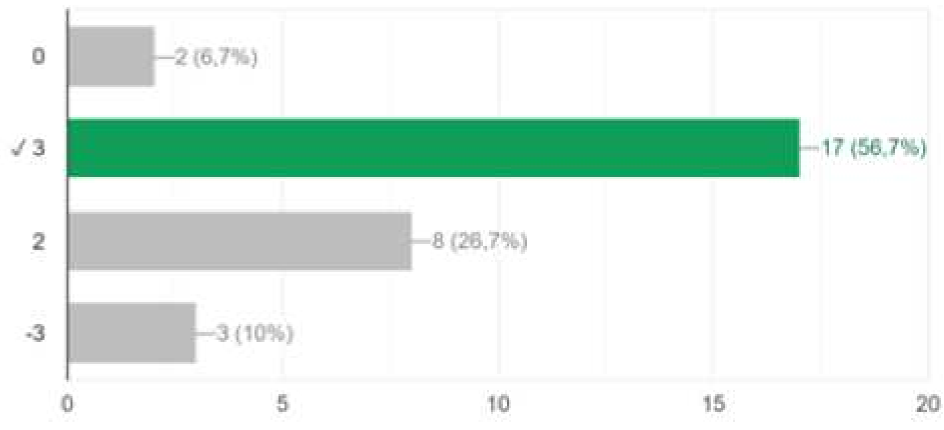
3. fejezet

Saját eredmények

A Google Forms platformon egy paraméterekkel kapcsolatos tesztet készítettem a 11. osztály diákjainak számára.
Miután átvizsgáltam a tankönyvek anyagát, melyeket az 5-11 osztályos diákok részére készítettek, feltételezem, hogy a felmérésben résztvevő tanulók többsége nem fogja tudni megoldani a kiosztott űrlap feladatait, mivel a tananyagban található feladatok száma nem elegendő a megfelelő tudás elsajátításához.
A kérdéseket és azok helyes válaszainak számát diagram segítségével vizsgáljuk meg.
A teszt elérhető a következő linken:

$$https://forms.gle/nQy53ZovJmWGJpsQ7$$

1) *A k paraméter mely értékénél lesz a* $(2k-6)x = 7k-21$ *egyenletnek végtelen sok gyöke?*



3.1. ábra.

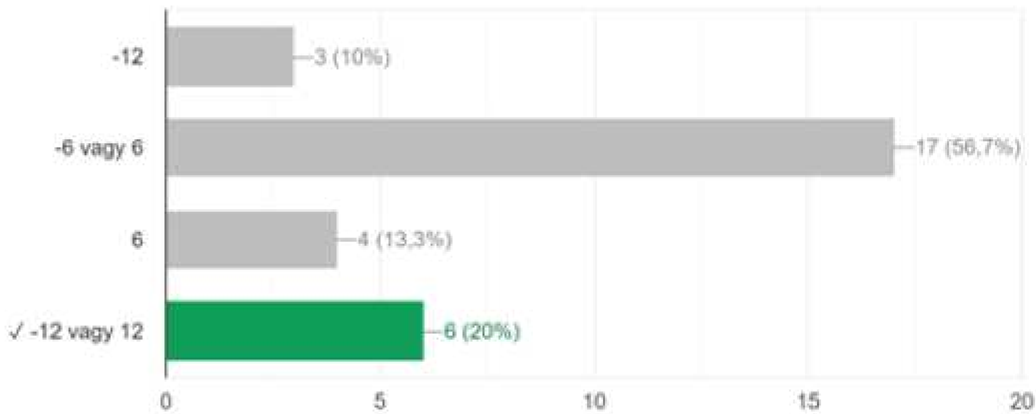
2) *Határozd meg a p paraméter értékét, az*

$$x^2 - px + 32 = 0$$

egyenletben, ha

$$x_1 - 2x_2 = 0$$

. *(x_1 és x_2 az egyenlet gyökei)*

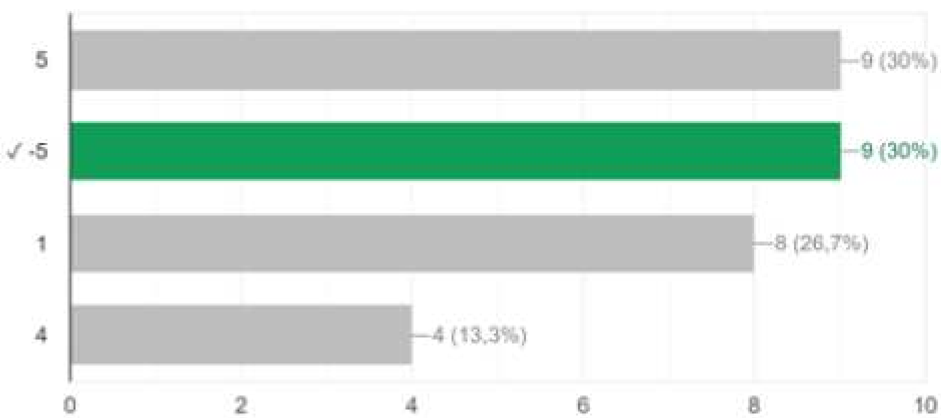


3.2. ábra.

3) *A k paraméter mely értéke mellett nincs megoldása a*

$$\frac{10x + 15}{3 - 2x} = k$$

egyenletnek?

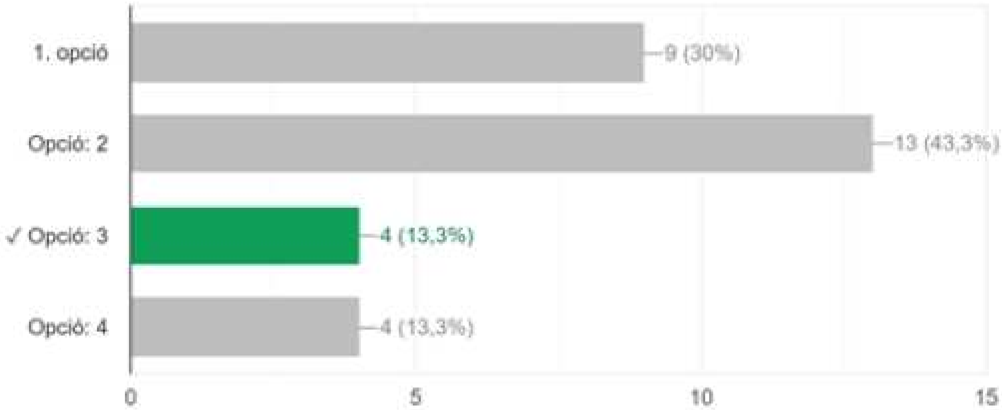


3.3. ábra.

4) *Az a paraméter mely értékeinél van két gyöke az*

$$(x-9)(\sqrt{x}-a)=0$$

egyenletnek?

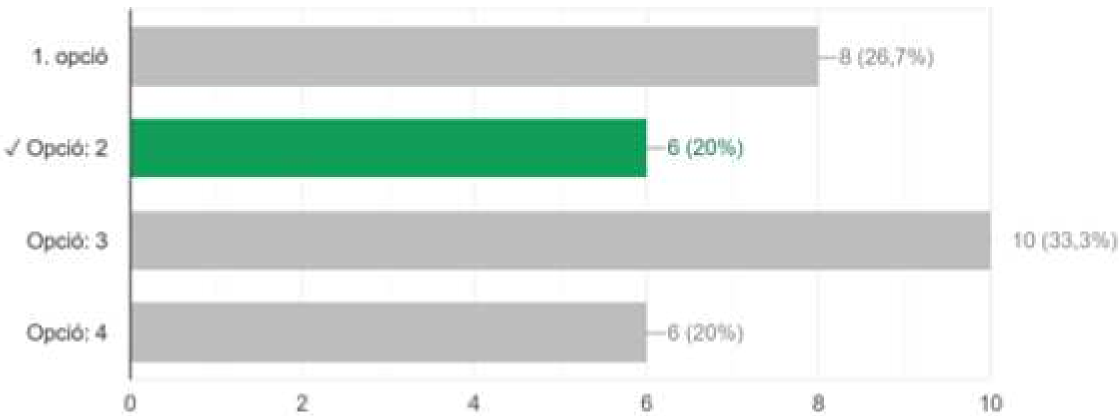


3.4. ábra.

5) *Az a paraméter mely értékei mellett lesz az*

$$y=|3\,|x|-4|$$

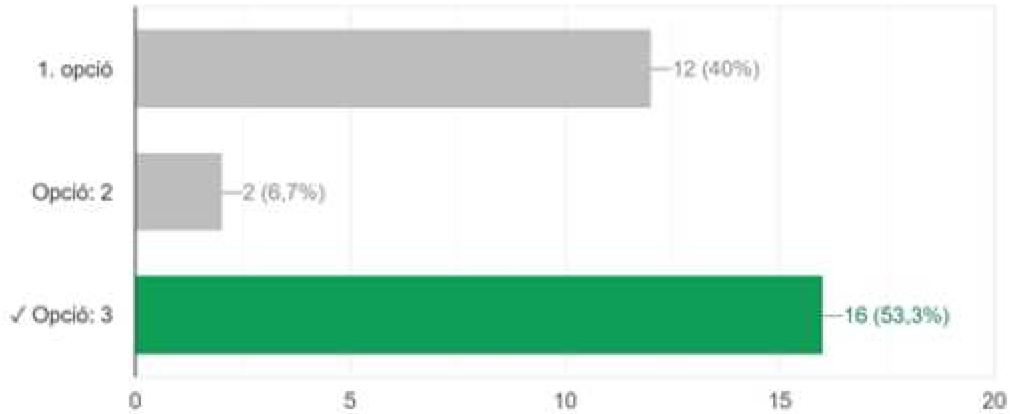
egyenletnek 4 különböző gyöke?



3.5. ábra.

6) *Párosítsd, melyik grafikon felel meg az adott egyenletnek:*

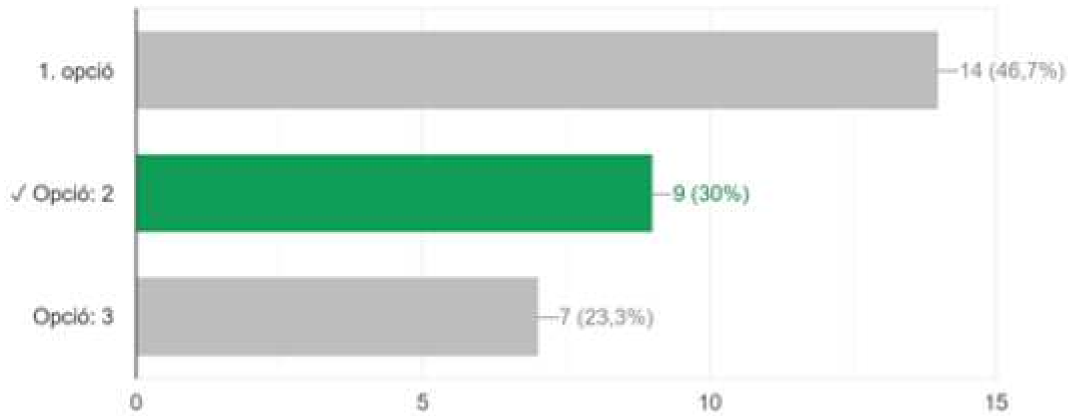
$$\left|3x^2 - 7\left|x\right|\right| = a$$



3.6. ábra.

7) *Párosítsd, melyik grafikon felel meg az adott egyenletnek:*

$$|x| + |x - 3| = a$$

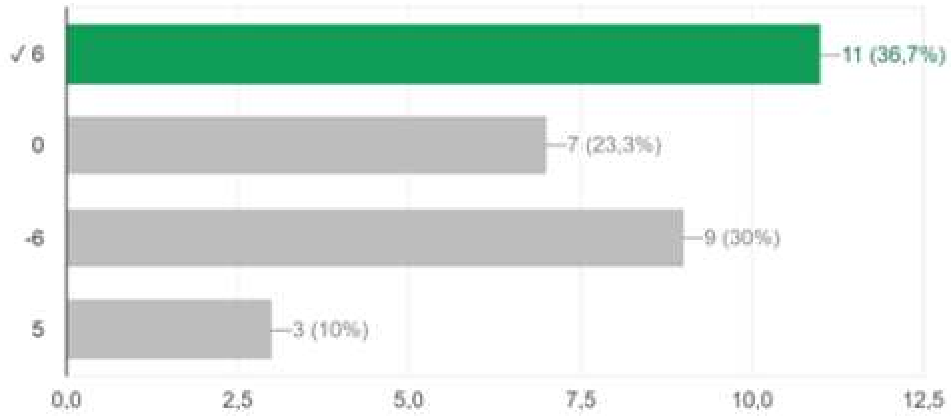


3.7. ábra.

8) *Határozd meg a p paraméter értékét úgy, hogy az*

$$5x^2 + (3p+3)x + p^2 - 12p + 36 = 0$$

egyenletnek gyöke legyen a 0.



3.8. ábra.

A felmérésben 2 iskola, azon belül 3 osztály vett részt. Az űrlapot így összesen 30 tanuló töltötte ki.

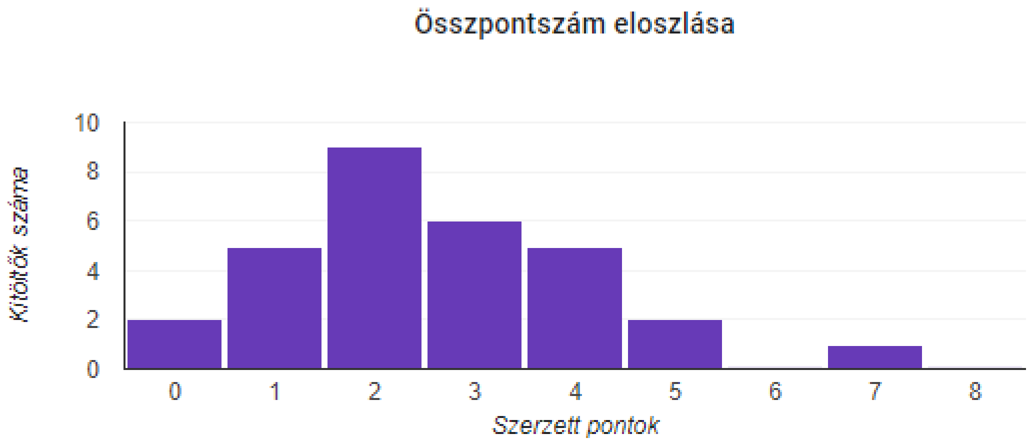
Az 1. feladatot a kitöltők 56,7%-a sikeresen oldotta meg, tehát 17 tanuló felismerte, hogy egyszerű behelyettesítéssel és a megfelelő tulajdonság alkalmazásával a megoldás könnyen megtalálható. Ebből arra következtetek, hogy ez a feladattípus a diákok számára könnyebbnek bizonyult.

A második feladat megoldásában már a tanulóknak nehezebb volt a dolguk, ugyanis itt már tudniuk kellett, hogy mi is az a paraméter, valamint a megadott plusz feltétel is nehezítette a feladatot. Jól felismerték, hogy 2 megoldása lesz az egyenletnek, egy negatív és egy pozitív, viszont a helyes megoldást csak 6 tanuló, vagyis a kitöltők mindössze 20%-a találta meg.

A harmadik feladatot 9 tanuló oldotta meg helyesen, viszont további 9 tanuló az **5** számot jelölte meg megoldásként, ami a helyes válasz ellenkező előjellel, így ebben az esetben a diákok egyszerű számítási hibát vétettek, aminek következtében hibás választ adtak.

A 4. feladat megoldásánál viszont már teljes egészében a tudás bírtokában kell lenni a paraméteres feladatok megoldásának valamelyik módszerét illetően. Erre a feladatra csupán 4 helyes megoldás érkezett, ami a válaszok 13,3%-át teszi ki. Ebből

a feladatból is jól látható, hogy az általános és középiskolai tanterv nem biztosítja a tanulók számára az adott témakör elsajátításának lehetőségét.
Az 5. feladatban grafikont kellett elemezni, a megoldások számának megtalálására. Ezt a feladatot 6-an oldották meg helyesen.
A 6. és 7. feladatokban meg kellett találni az egyenletekhez tartozó grafikonokat. A 6. feladatban a többség jól válaszolt, tehát felismerték a másodfokú egyenlet tulajdonságait, ez a feladat így könnyebbnek bizonyult. A 7. feladatban azonban már csak 9 diák találta meg a helyes választ. Ez a feladat nehezebb is volt, mivel két hasonló egyenlet grafikonja közül kellett kiválasztaniuk a megoldást.
A 8. és egyben utolsó feladatban akár behelyettesítéssel is el lehetett jutni az igaz megoldáshoz, ezáltal ez egy könnyebb feladat volt, amit az is igazol, hogy a többség a helyes megoldást jelölte válaszként. Továbbá itt is a megoldások között volt a helyes megoldás ellenkező előjellel, amire a második legtöbb válasz érkezett.
Az űrlap összeállításakor igyekeztem olya feladatokat kiválasztani, ami által fel tudom mérni az analitikus és grafikus megoldási módszer ismeretét is.
Viszont a kitöltést követően elmondható, hogy nem rendelkeznek megfelelő ismeretekkel ezt a témakört tekintve, így a módszereket sem ismerik igazán.



3.9. ábra.

Az összesített eredményekből egyértelműen látszik, hogy a diákok nincsenek megfelelő bírtokában annak a tudásnak, ami által gond nélkül meg tudnának oldani paraméteres egyenleteket.
Mindössze 8 diák volt, akinek sikerült legalább az 50%-át megoldania az adott feladatoknak, ebből pedig csak 1 tanuló volt, aki a megszerezhető 8 pontból 7-et tudott

megszerezni, ezáltal ő csak 1 feladatban hibázott.

Átlagosan 2,6 pontot szereztek a diákok.

Ezek a statisztikák a diagramon is jól láthatóak(3.9 ábra)

Összegezve tehát elmondhatom, hogy a 11. osztályos tanulók nagyrésze nem tudja, hogyan kellene megoldani az egyenletet, ha az paramétereket tartalmaz, ezáltal a felvetett hipotézis is bizonyításra került.

Véleményem szerint ezek az eredmények azzal magyarázható, hogy az iskolai tantervekben nincs külön óra ilyen típusú feladatokra, továbbá a tanórákra szánt feladatokban is csak elvétve találkozni paraméteres feladatokkal. A tanterv szoros időbeosztása pedig csak tovább nehezíti, hogy a tanárok bővebb ismeretet adjanak át a diákoknak ezen témakör ismeretét illetően. Ennek ellenére a matematikai külső független tesztelésében 2021-ig a kidolgozásra szánt feladatok egyike mindig paraméteres feladat volt, amely a legtöbb pontot érte.

Egyértelmű, hogy a paraméteres feladatok témakörének mélyebb megismerése fontos lenne a diákok számára, mivel ezek a feladatok lehetővé teszik a diákok ismereteinek és készségeinek minőségi fejlődését bizonyos témákban, mivel ezek a feladatok nemcsak alapvető ismereteket tartalmaznak, hanem egy sor tanult anyagot is, azok tulajdonságainak felhasználásával.

Összegzés

A diplomamunka célja az volt, hogy átfogó képet nyújtson a paraméteres egyenletek megoldásának módszereiről, különös tekintettel ezek oktatásában betöltött szerepükre.

A kutatás során részletesen megvizsgáltuk a paraméteres feladatok különböző típusait, bemutattuk az ezekhez kapcsolódó megoldási technikákat, és elemeztük a középiskolai diákok körében végzett felmérések eredményeit.

A kutatás eredményei megerősítették a hipotézisünket, miszerint a diákok nagy része nehézségekkel küzd a paraméteres egyenletek megoldása során. A kutatás alapján javasolt a tananyag és a tanítási módszerek olyan módosítása, hogy azok jobban támogassák a diákok paraméteres egyenletekkel kapcsolatos készségeinek fejlesztését. Ezek közé tartozik a paraméterekkel kapcsolatos fogalmak alaposabb oktatása, az analitikus és grafikus módszerek gyakorlása, valamint a problémamegoldó készségek fejlesztése célzott feladatok és projektek segítségével.

A munkám hozzájárulhat ahhoz, hogy a matematika oktatása hatékonyabbá váljon, és a diákok sikeresebben tudják elsajátítani a paraméteres egyenletek megoldásának technikáit.

Az eredmények alapján további kutatások is indokoltak, amelyek mélyebben vizsgálják a paraméteres egyenletek oktatásának módszertanát és annak hatásait a diákok matematikai kompetenciáira.

Irodalomjegyzék

[1] Апостолова Г. В., Ясінський Г. В. *Перші зустрічі з параметром.* Київ: Факт, 2008. 324 с.

[2] Мерзляк А.Г., Полонський В. Б., Якір М. С. *Математика. 5 клас : підруч. для закл. загал. серед. освіти.* Вид. 2-ге, переробл. і допов. Х. : Гімназія, 2018. 272 с.

[3] Мерзляк А.Г., Полонський В. Б., Якір М. С. *Математика. 6 клас : підруч. для закл. загал. серед. освіти.* Х. : Гімназія, 2014. 400 с.

[4] Бевз Г. П., Бевз В. Г. *Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою.* К.: Зодіак-ЕКО, 2007. Переклад угорською мовою Є. Є. Ґулачі.-Львів: Світ, 2007.-304 с.:іл.

[5] Мерзляк А. Г. *Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. угорською мовою.* А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. І. Й. Берегі, А. А. Буркуш. – Львів : Світ, 2015. – 256 с. : іл.

[6] Істер О.С. *Алгебра: підруч. для 7-го закл. загал. серед. освіти.* К. : Генеза, 2015. 256 с.

[7] Істер О.С. *Алгебра: підруч. для 8-го закл. загал. серед. освіти.* Вид. 2-ге, переробл. і допов. К. : Генеза, 2021. 260 с.

[8] Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. *Алгебра: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закладів..* Київ: УОВЦ «Оріон», 2021. 293 с.

[9] Мерзляк А. Г. *А лгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою* А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Я к ір ; пер. Ю. І. Кулін. - Львів : Світ, 2017. - 272 с. : іл

[10] Бевз Г. П. *Алгебра: Підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою* Г. П. Бевз, В. Г. Бевз // Переклад угорською мовою А. А. Варга. – Львів : Світ, 2009. – 288 с. : іл.

[11] Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. *Алгебра і початки аналізу : проф. рівень: підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти.* К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.

[12] Істер О.С., Єргіна О. В. *Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10-го кл. закл. серед. освіти.* К. : Генеза, 2018. 448 с.

[13] Мерзляк А.Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. *Алгебра і початки аналізу : проф. рівень: підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти.* Х. : Гімназія, 2019. 352 с.

[14] Крамор В.С. *Задачі з параметрами і методи їх розв'язання.* навч. посіб. Тернопіль : «Богдан», 2012. 416 с.

[15] Кадубовський О. А., Беседін Б. Б., Чуйко О. В., Воробйова С. І. *Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики.* навч. посіб. Слов'янськ : «Маторін», 2016. 100 с.

[16] Прус А.В., Швець В.О. *Задачі з параметрами в шкільному курсі математики.*навч. посіб. Вид. «Рута». Житомир, 2016. 468 с.

[17] Кадубовський О. А., Беседін Б. Б., Сьомкін В. С. *Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2018* навч. посіб. Слов'янськ : «Маторін», 2019. 100 с.

[18] Nagyné Pálmay Piroska *TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN: Segédanyagok középiskolai tanárok számára* PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar, 1083 Budapest, 2019.

[19] І. В. Житарюк, В. М. Лучко, В. С. Лучко *Методичні особливості розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з використанням властивостей і графіків елементарних функцій* Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, VII (80), Issue: 198, 2019 Maj

[20] О.Є. Волянська *МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ* elenavolyanska @ukr.net

[21] Н. Ю. Нарихнюк, Н. Ю. Корінчук, Л. І. Лейбик *АНАЛІТИЧНІ ТА ГРАФІЧНІ ПРИЙОМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ ІЗ ПАРАМЕТРАМИ ПІД ЧАС ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО* Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах, 2021 р., № 76, Т. 2.

[22] Пліско О.В. *Задачі з параметрами для 7-8 класів* «Основа», 2012. 128 с.

Ábrák jegyzéke

Висновки

Метою дипломної роботи було зробити аналіз методів розв'язання параметричних рівнянь з особливим акцентом на їхню роль в освіті.

У ході дослідження було детально розглянуто різні типи параметричних задач, продемонструвано методи їх розв'язання та проаналізовано результати опитувань серед учнів середніх шкіл.

Результати дослідження підтвердили сформульовану гіпотезу щодо труднощів які виникають під час розв'язання параметричних рівнянь. На основі дослідження було рекомендовано внести зміни до навчальних матеріалів і методів викладання для покращення розвитку навичок учнів у розв'язанні параметричних рівнянь. Це включає більш глибоке вивчення понять, пов'язаних із параметрами, застосування аналітичних і графічних методів, а також розвиток навичок вирішення проблем за допомогою цільових завдань і проєктів.

Дана робота може сприяти підвищенню ефективності викладання математики, а також допомогти учням успішніше опановувати техніки розв'язання параметричних рівнянь.

Результати дослідження також вказують на необхідність подальших досліджень, які глибше вивчатимуть методологію викладання параметричних рівнянь та їхній вплив на математичні компетенції учнів.

Nyilatkozat

Alulírott, Palinszky Georgina, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Звіт про перевірку схожості тексту Oxsico

Назва документа:

Diplomamunka_Palinszky_Georgona.pdf

Ким подано:	Дата перевірки:	Дата звіту:
Пап Габріелла	**2024-05-27 10:14:49**	**2024-05-28 19:57:08**
Ким перевірено:	Кількість сторінок:	Кількість слів:
I + U + DB + P + DOI	**50**	**12070**

Схожість 0%	Збіг: **10 джерела**	Вилучено: **0 джерела**
Інтернет: **7 джерела**	DOI: **0 джерела**	База даних: **0 джерела**
Перефразовування 0%	Кількість: **0 джерела**	Перефразовано: **0 слова**
Цитування 0%	Цитування: **0**	Всього використано слів: **0**
Включення 0%	Кількість: **0 включення**	Всього використано слів: **0**
Питання 0%	Замінені символи: **0**	Інший сценарій: **0 слова**