ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28"лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Застосування олімпіадних завдань на уроках математики

Деме Ангеліка Аттілівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2023

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

(кандидат фізико-математичних наук, доцент)

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

(к. ф.-м. н, доцент)

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28"лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Застосування олімпіадних завдань на уроках математики

Рівень вищої освіти: бакалавр

Виконавець: студентка IV-го курсу

Деме Ангеліка Аттілівна

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

(кандидат фізико-математичних наук, доцент)

Рецензент: Петечук Юлія Василівна

(кандидат фізико-математичних наук, доцент)

Берегове
2024

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

VERSENYFELADATOK BEÉPÍTÉSE A MATEMATIKA OKTATÁSBA

Szakdolgozat

Készítette: Deme Angelika

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Sztojka Miroszláv

(fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens)

Recenzens: Petecsuk Júlia

(fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens)

Beregszász – 2024

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikatanulás során a diákok számos különböző típusú feladattal találkoznak első osztályos koruktól az érettségiig, melyek segíti őket az elméleti és gyakorlati tudás megszerzésében. Egyszerűbb és összetettebb versenyfeladatok bemutatása mellett a cél az, hogy hogyan is illeszthetők be a matematikaoktatás folyamatába.

A tanulók a verseny hallatán először az olimpiákra gondolhatnak vagy akár a Zrínyi Ilona Matematikaverseny, Geőcze Zoárd Matematikaverseny (3-6. osztály), Terebesi Viktor Matematika Emlékverseny (7-11. osztály), a Kenguru vetélkedőre stb., ahol számos feladattípussal találkozhatnak.

A versenyfeladatok megoldásához szükséges elméleti és gyakorlati módszereket felidézése, melyre különböző feladatsorok is részei a szakdolgozatomnak, amelyek segítik a diákokat az adott témakörrel kapcsolatos ismeretek frissítésében és a feladatok megoldásában.

A dolgozat célja emellett a feladatok és feladatsorok gyakorlati problémáinak és tapasztalatainak elemzése is. Fontosnak tartom, hogy a feladatok által levont tapasztalatok segítsék az oktatás minőségének javítását.

A dolgozatom motivációja, hogy a diákok izgalmasabb és tartalmasabb feladatokkal foglalkozzanak a tanórákon. A matematika oktatása során az egyik legnagyobb kihívás az órák változatosságának és érdekességének fenntartása. Elengedhetetlennek tartom, hogy a diákok a feladat megoldása során gondolkodjanak is, ne csak kész megoldásokra számítsanak. Egy tanórán viszont fontosnak tartom azt is hogy a diákok egy-egy feladatról, problémáról egymással is beszélgessenek és kifejthessék gondolataikat a feladattal kapcsolatban ezzel is fejlesztve egymást és önmagukat, illetve magát a csoportot is, hiszen egy sikeres feladat megoldása pozitív élményhez vezet.

Az ismert témák és elvek ismétlése, megfelelő alkalmazása mellett fontosak az összetettebb logikai feladatok gyakorlása is, mivel az élet számos területén szükség van ilyen gondolkodásmódra.

A versenyfeladatok nagyobb kihívást jelentenek, és több lépéses tervezést és megvalósítást igényelnek, mint a hagyományos gyakorló feladatok. Bár előfordulhat, hogy a diákok kérdőjelezik meg az ilyen feladatok gyakorlati alkalmazhatóságát, fontos megérteniük és alkalmazniuk ezeket a készségeket, mivel fejlesztik a logikai gondolkodást, amelyet később az élet más területein is hasznosíthatnak.

A szakdolgozatomban saját tapasztalatról is be tudok számolni, hiszen diákkoromban többször is részt vettem matematikaversenyeken. Ezek a versenyek vegyes érzelmeket váltottak ki belőlem, hiszen egyszerre izgul, de idegeskedik is a tanuló, hogyan állja majd a sarat a vetélkedő folyamán, mind pozitív, mind negatív érzelmek is kavarognak a versenyzőben a megoldások levezetésekor, attól függően, hogy helyes-e megoldás, vagy eljut a végeredményhez, vagy bele tud-e kezdeni.

A dolgozat célja, hogy segítse a diákokat, hogy már az érettségi előtt találkozzanak összetettebb feladatokkal, amelyek kihívást jelenthetnek számukra. Úgy vélem, hogy ha a diákok már korán tapasztalatokat szereznek ilyen típusú feladatok megoldásában, akkor könnyebben boldogulnak majd később az egyszerűbb és bonyolultabb feladatokkal is.

1. Problémaforrások

A matematia oktatás fő célja az ismeretek megszerzése, gyakorlása és a diákok tudásának fejlesztése. Sajnos viszont előfordulhatnak olyan akadályok, problémák, melyek hátráltathatják a célt és ezek nem feltétlenül matematikai problémák, hanem lehetnek egyéniek, melyekre érdemes odafigyelni és számításba venni.
Akadályként kiemelném a motiváció hiányát, a szorongást, az időhiányt, amit a továbbiakban ki szeretnék majd fejteni.

1.1. Versenyekhez való motiváció hiánya

A matematikaversenyek hallatán először a kihívás az ami eszünkbe juthat, majd a siker és a kudarc. A kezdéshez szükség van magabiztosságra, tudásra, problémamegoldó képességre, logikai kézségre, stb., a sikerhez vezető úthoz. A matematikaversenyeken való részvétel által számos pozitív élményben lehet része a diáknak, de csupán a próbálkozás is megadhatja a kellő örömöt és izgalmat, a lényeg az, hogy pedagógus vedje le a verseny és a helyezés által elérendő sikertelenség terhét a diák válláról.
Ahhoz, hogy pozitív visszajelzéseket kaphassanak és motiváltak maradjanak a versenyzésre , szerintem fontos, hogy két szempontból is érvényesítsük a teljesítményünket. Az egyik szempont a tanulók pozitív visszajelzése és a matematikai erősségeik elismerése. A motiváció már nő akkor is ha a diák több magabiztosságot érez abban amit csinál. Ha ez több diákban is megtörténik, akkor már a társas motiváció is hatással lesz rájuk. Tehát akkor többen is szeretnének majd versenyre járni, akár egymás között is megmérettetni magukat. A másik szempont az élményközpontúság, az eredmény fontosságának csökkentése. Elég nehéz elvonatkoztatni az eredményről, arról hogy hogyan is teljesít a diák a többi diákhoz képest, de ebből fakadóan szorongás is kialakulhat.
Fontosnak tartom, hogy a diákokban a motiváció megnőjön a versenyek iránt, mert a rendszeres versenyen való részvétel által rengeteget fejlődnek (szemléletváltás, feladatmegoldási szemlélet, nehézségek feloldása).

1.2. Matematikai szorongás

A matematikai szorongás, mely régóta jelen lévő probléma sok definíciójával találkozhatunk, de a legismertebb meghatározás: Egyfajta nyomás és szorongás érzése, amely számokkal való foglalkozás és matematikai problémák megoldása során jelentkezik széleskörűen a hétköznapi életben és iskolai helyzetben egyaránt. A szorongás több formában is megjelenhet, érzelmi és viselkedéses szinten is megnyilvánul, amikor zavartan, fészkelődve végzik a feladatukat a diákok, többnyire sok hibával, ugyanakkor viszonylag gyorsan, csakhogy meneküljenek ebből a szorongató feladathelyzetből. [5]
Ez a fajta szorongás kiváltó okai lehetnek:
(1) helyzeti tényezők: matematika dolgozat írása, órai feladatmegoldás;
(2) szociális tényezők: tanári attitűdök és szorongások, szülők szorongása;

(3) alkati tényezők: a diák belső jellemzői (énhatékonyság, énkép);

(4) oktatási és környezeti faktorok

(5) kudarcélmények. [4]

Mint látjuk a szorongás mértéke függ a szülők és a tanárok szerepétől is. Pedagógus részről az egyik fontos tényező az az időnyomás, oda kell figyelni, hogy egy önálló vagy dolgozat esetén elegendő időt adjunk a megoldásra, ugyanis lehet valaki lasabban tudja megoldani az adott feladatot és ha az idő miatt szorongás lép fel a diákban, akkor romlik a teljesítménye.

Dicséretet akkor érdemes adni, ha a diák saját maga ér el eredményt, de a túlzásba se szabad esni a dicsérettel, mert végül negatív hatást válthat ki. Ha csak a jó megoldásokat dicsérjük, és a helytelen vagy pontatlan megoldásokat is megfelelően korrigáljuk, csökkenthetjük a szorongást. [5]

1.3. Időhiány

A mai világ rohanó hétköznapjaiban a diákok rengeteg ingernek vannak kitéve, hiszen számos lehetőség tárul eléjük, ami rengeteg időt igényel (ilyen akár a világban való tájékozódás, különböző tapasztalatszerzések). Tanulmányi követelményeiken felül, vannak hobbijaik, amikben jól érzik magukat és amikben kiteljesednek, emiatt az iskolában koncentrációjuk romolhat, így tanulmányi eredményeik és teljseítményük is. A különböző területeken való megfelelés sok időt és energiát vesz el a diákoktól, emiatt előfordul, hogy a tanulás is háttérbe szorul.

Megoldani a problémát nem tudjuk, de kezelhetjük, mégpedig ebben az esetben megértéssel és empátiával, úgy, hogy a diákok eredményességéhez vezessen.

2. Feladatok és megoldásaik

2.1. feladatsor

1. Egy termék 500 hrivnyába került. Egy idő után 10%-kal emelkedett az ára, majd 10%-kal csökkent. Határozza meg az új árat! [1]

   Mivel a termék eredeti ára 500 hrivnya volt, ezért 10%-os emelés után a termék ára hrivnyában:

   $$500 + \tfrac{500}{100} \cdot 10 = 500 + 50 = 550.$$

   Ezután a árat 10%-kal csökkentve az új ár hrivnyában:

   $$550 - \tfrac{550}{100} \cdot 10 = 550 - 55 = 495.$$

2. Reggel 9 órakkor egy személyvonat elindult az A állomásról, majd 11 órakkor ugyanerről az állomásról egy gyorsvonat is elindult utána. Mekkora távolságra kell elengednie a személyvonatnak a gyorsvonatot az A állomástól, ha a személyvonat sebessége 54 km/h, a gyorsvonaté pedig 72 km/h? [1]

   Legyen t az az idő, amíg a személyvonatnak haladnia kell, mielőtt elengedné a gyorsvonatot. Ekkor a gyorsvonat $t-2$ órát haladt az említett esemény előtt. Mivel az esemény időpontjában mindkét vonat ugyanazt a távolságot tette meg, az alábbi egyenlőség áll fenn:

   $$54t = 72(t-2).$$

   Oldjuk meg az egyenletet:

   $$54t = 72(t-2),\ 54t = 72t - 144,\ 72t - 54t = 144,\ 18t = 144,\ t = \tfrac{144}{18} = 8.$$

   Tehát a személyvonatnak 8 órán át kell haladnia, mielőtt elengedi a gyorsvonatot, amely 9 órakor indult az A állomásról. Ezért a személyvonat 8 óra alatt az alábbi távolságot teszi meg:

   $$S = 54 \cdot 8 = 432 \text{ km}.$$

   Így a gyorsvonat 432 km-re az A állomástól éri utol a személyvonatot.

3. Adott két szám melyek nem oszthatók egymással és legkisebb közös többszörösük a 630, míg a legnagyobb közös osztójuk a 18. Határozzuk meg ezeket a számokat! [1]

   Legyen x és y a keresett számok. Ekkor a feltételek alapján az alábbi egyenlőségek teljesülnek:

   $$LKKT(x,y) = 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$
   $$LNKO(x,y) = 18 = 2 \cdot 3^2.$$

Az második egyenlőségből következik, hogy a keresett számok alakja:$x = 18 \cdot x'$, $y = 18 \cdot y'$, ahol x' és y' relatív prímek.

Az első egyenlőségből két lehetséges eset következik:

(a) $x = 18 \cdot 5$, $y = 18 \cdot 7$ (vagy $x = 18 \cdot 7, y = 18 \cdot 5$);

(b) $x = 18 \cdot 5 \cdot 7$, $y = 18 \cdot 1$ (vagy $x = 18 \cdot 1, y = 18 \cdot 5 \cdot 7$).

Mivel a keresett számok nem oszthatók egymással, a második eset nem felel meg a feladat feltételeinek. Ezért a keresett számok: $x = 90$ és $y = 126$.

4. A könyv oldalainak számozásához 1392 számjegyre van szükség. Hány oldal van ebben a könyvben? [1]

   Az első 9 oldal számára 9 darab 1-es számjegyre lesz szükség: $9 \cdot 1$.

   A 10. oldaltól a 99. oldalig terjedő oldalak számozásához $(99 - 10 + 1) \cdot 2 = 90 \cdot 2 = 180$ számjegyre lesz szükség, ami 90 oldal.

   A 100. oldaltól a 999. oldalig terjedő oldalak számozásához $(999-100+1) \cdot 3 = 2700$ számjegyre lesz szükség, ami 900 oldal.

   Mivel összesen 1392 számjegyre van szükség az összes oldalak számozásához, ezért a könyvben több mint 99, de kevesebb mint 999 oldal van.

   Továbbá, a háromjegyű oldalszámok számozásához pontosan $1392 - 9 \cdot 1 - 90 \cdot 2 = 1203$ számjegyre van szükség.

   Ezért a háromjegyű oldalszámok száma $\frac{1203}{3} = 401$ oldal.

   Tehát a könyvben összesen $9 + 90 + 401 = 500$ oldal van.

5. A körbe 2003 természetes számot írtak. Bizonyítsuk be, hogy lesz két szomszédos szám, amelyek összege páros! [1]

   2003 természetes számból legalább 1002 szám páros vagy páratlan. Azaz, mivel 2003 darab számunk van, így a páros és páratlan számok közül valamelyikből 1-gyel kevesebb lesz, mint a másikból.

   Feltételezzük, hogy a 2003 számból például több a páros, mint a páratlan, akkor 1002 páros szám van.

   Ha feltételezzük, hogy a körben nincs két szomszédos szám, amelyek összege páros, az azt jelenti, hogy a kört úgy rendezik el, hogy a számok váltakozva vannak, páros, páratlan, páros, páratlan stb. De ebben az esetben a körben legalább 2004 számnak kell lennie. Tehát ellentmondást értünk el a feltétellel, mert a körben pontosan 2003 természetes szám található.

2.2. feladatsor

1. Milyen a paraméter értéknél van az $ax - 2a = 2x - 4$ egyenletnek végtelen sok megoldása? [2]

   Vizsgáljuk meg, hogy az $ax - 2a = 2x - 4$ egyenlet a paraméterének mely értéknél lesz végtelen megoldása.

$$ax - 2a = 2x - 4;$$
$$ax - 2x = 2a - 4;$$
$$x(a-2) = 2(a-2)$$

Ahhoz, hogy az egyenlet minden x értékre teljesüljön, a baloldalon lévő együtthatónak $(a-2)$ nullának kell lennie, különben az egyenlet nem lehet igaz minden x-re, mert az x-es tag változhat, míg a jobb oldalon állandó érték nem: $a - 2 = 0$.
Így az a értékének 2-nek kell lennie: $a = 2$.
Ellenőrizzük, hogy ez az érték valóban végtelen sok megoldást ad-e, ha $a = 2$, az eredeti egyenlet így néz ki: $2x - 4 = 2x - 4$. Ez azonosan igaz minden x-re, mivel mindkét oldal teljesen megegyezik.
Tehát, valóban, ha $a = 2$, az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

2. Adott 1, 2, 3, 4 cm hosszúságú szakaszok. Hány különböző egyenlőszárú háromszöget készíthetünk a megadott hosszúságú szakaszokból? [2]
   Egy egyenlőszárú háromszög két egyenlő hosszúságú oldallal rendelkezik. Legyen szárak hossza b, az alap hossza a. Ekkor:
   $a = 1$ alapú egyenlőszárú háromszögek: $(1;1;1), (1;2;2), (1;3;3), (1;4;4)$;
   $a = 2$ alapú egyenlőszárú háromszögek: $(2;2;2), (2;3;3), (2;4;4)$;
   $a = 3$ alapú egyenlőszárú háromszögek: $(3;2;2), (3;3;3), (3;4;4)$;
   $a = 4$ alapú egyenlőszárú háromszögek: $(4;3;3), (4;4;4)$.
   Tehát összesen 12 különböző egyenlőszárú háromszög készíthető az adott szakaszokból.

3. Két szám összeszorzásakor néhány számjegyet csillaggal (*) helyettesítettünk, és megkaptuk az eredményt. Helyettesítsük vissza a csillagok helyére a megfelelő számjegyeket! [2]
   Az egyszerűség kedvéért cseréljük le a csillagokat a latin ábécé betűire.

$$\begin{array}{ccccccc}
\times & & & * & 1 & * \\
 & & & 3 & * & 2 \\
\hline
+ & & & * & 3 & * \\
+ & & 3 & * & 2 & * & \\
 & * & 2 & * & 5 & & \\
\hline
 & 1 & * & 8 & * & 3 & *
\end{array}$$

2.1. ábra. Két szám összeszorzása (*)

Először is $3 + 2 = 5$, tehát az $l = 5$ vagy $l = 6$. A $h = 1$.
Mivel a $h2k5$ szám az $a1b$ szám 3-mal való szorzatának az eredménye, innen kapjuk, hogy a $b = 5$.
A $d3e$ szám az $a15$ szám 2-vel való szorzatának az eredménye, tehát $e = 0$, így az n is 0-val

$$
\begin{array}{rcccccc}
\times & & & & a & 1 & b \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & d & 3 & e \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & h & 2 & k & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & n
\end{array}
$$

2.2. ábra. Két szám összeszorzása (latin betűk)

egyenlő.

Mivel az 12k5 szám az $a15$ és a 3 szozatának az eredmény, innen kapjuk, hogy $k = 4$.

Ha k 4-el egyenlő, akkor az $a = 4$, mivel az 1245 számot az $a15$ és a 3 szorzata.

Mivel a $d30$ a 415-ös szám és a 2 szorzatának az eredménye, akkor d csak 8 lehet.

Az m csak 5 lehet, mivel $8 + 2 + 5 = 15$.

Az $f + 4 + 1 \neq 18$, azaz $f + 4 + 1 = 8$, ezért $f = 3$.

A $3 + g = 3$, tehát $g = 0$.

Az utolsó ismeretlen a c, ami csakis 8-cal lehet egyenlő.

$$
\begin{array}{rcccccc}
\times & & & & 4 & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & 8 & 2 \\
\hline
+ & & & & 8 & 3 & 0 \\
+ & & 3 & 3 & 2 & 0 & \\
 & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 8 & 5 & 3 & 0
\end{array}
$$

2.3. ábra. Két szám összeszorzása végeredmény

4. Az a szám 25%-kal nagyobb, mint a b szám. Hány százalékkal lesz kisebb a b szám az a számhoz viszonyítva? [2]

   Mivel az a szám 25%-kal nagyobb a b számnál felírható a következő egyenlőség:

   $$a = b + \tfrac{b}{100} \cdot 25 = b + \tfrac{b}{4} = \tfrac{5}{4}b.$$

   Tehát

   $$b = \tfrac{4}{5}b \text{ vagy } \tfrac{b}{a} = \tfrac{4}{5}.$$

Vagyis a b szám az a számnak a $\frac{4}{5}$-ét teszi ki, ami $\frac{4}{5} \cdot 100 = 80\%$. Ezért a b szám 20%-kal kisebb, mint az a szám.

5. Minden pont az egyenesen kék vagy piros színűre van festve. Bizonyítsuk be, hogy ezen az egyenesen található három különböző pont az A, B, C ugyanazzal a színnel vannak festve, és úgy helyezkednek el, hogy a B az AC szakasz felezőpontja. [2]

   Tegyük fel, hogy minden pont az egyenesen kék vagy piros színű. Az állítást a következő lépésekkel bizonyítjuk:

   (a) Végtelen sok pont van az egyenesen:
   Az egyenes minden pontja kék vagy piros, és mivel végtelen sok pont van az egyenesen, biztosan vannak végtelen sok kék és végtelen sok piros pontja.

   (b) Az állítás feltételezése:
   Feltételezzük az ellenkezőjét, hogy nincs három olyan különböző pont A, B, C, amelyek ugyanazzal a színnel vannak festve, és a B pont az AC szakasz felezőpontja.

   (c) Vizsgáljuk meg az egyenes minden lehetséges három pontját:
   Vegyük az egyenes három egymást követő pontját, mondjuk P, Q, és R, ahol Q a PR szakasz felezőpontja. Ha ezek a pontok különböző színekkel vannak festve (két kék és egy piros, vagy két piros és egy kék), az máris ellentmondásra vezet. Mivel mindegyik pont kék vagy piros, legalább két pontnak ugyanolyan színűnek kell lennie.

   (d) Térjünk vissza a pontok közötti távolságokhoz:
   Tekintsünk négy egymást követő pontot az egyenesen, például A, B, C és D, ahol B a AC felezőpontja és C a BD felezőpontja. Mivel minden pont vagy kék vagy piros, két egymást követő pont biztosan azonos színű lesz.

   (e) Példák és ellenpéldák keresése:
   Ha A és C azonos színű, akkor B (a felezőpont) ugyanezen színnel kell rendelkeznie, hogy ne legyen ellentmondás. Ugyanakkor, ha B és D is ugyanolyan színűek, akkor C (a felezőpont) is ugyanezen színnel kell rendelkeznie.

   Ezek alapján bármelyik három pont esetén, amelyek középpontként egy másik pontot tartalmaznak, mindig találunk három azonos színű pontot, amelyek egy szakasz felezőpontját is magukban foglalják.

   Ezért mindig létezik három különböző pont az egyenesen, amelyek azonos színűek és közülük az egyik pont a másik két pont által meghatározott szakasz felezőpontja. Ez bizonyítja az állítást.

2.3. feladatsor

1. Ismert, hogy $ac + ad + bc + bd = 68$ és $c + d = 4$. Mennyivel lesz egyenlő az $a + b + c + d$? [3]
   Alakítsuk át az $ac + ad + bc + bd = 68$ egyenlet bal oldalát:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b)$$
$$(c + d)(a + b) = 68$$

Mivel tudjuk, hogy a $c + d = 4$, ezért

$$4 \cdot (a + b) = 68$$
$$a + b = 68 : 4 = 17$$

Innen kapjuk, hogy az $a + b + c + d = (a + b) + (c + d) = 17 + 4 = 21$.

2. A gyerekek 100 kg gombát gyűjtöttek, amelynek a nedvességtartalma 99%, majd megszárították őket 98%-ra. Mennyi a megszárított gomba tömege? [2]
Mivel a kezdeti gomba nedvességtartalma 99% volt, azaz a gomba 99%-a víz volt, így a gomba (amely a gomba szárítása után marad) tömege 1% volt. Tehát a 100 kg-os gyűjtött gomba tömege: $100 \cdot \frac{1}{100} = 1$ kg.
Az állítás szerint a gombát megszárították, így a nedvességtartalom 98% lett. A gomba tömege 1 kg, ami a szárított gombák tömegének 2%-a. Ha a gomba tömege 1 kg, és ez 2%-a a szárított gombák tömegének, akkor a szárított gombák össztömege x kg, ahol x a következő egyenlettel számolható:

$$0,02x = 1$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$x = \tfrac{1}{0{,}02} = 50$$

Tehát a megszáradt gomba tömege 50 kg.

3. Határozzuk meg azt az a paraméter értéket, amelyre az $a^2x - 2a = 4x - 4$ egyenletnek nincs megoldása. [2]
Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat az egyenlet bal és jobb oldalán:

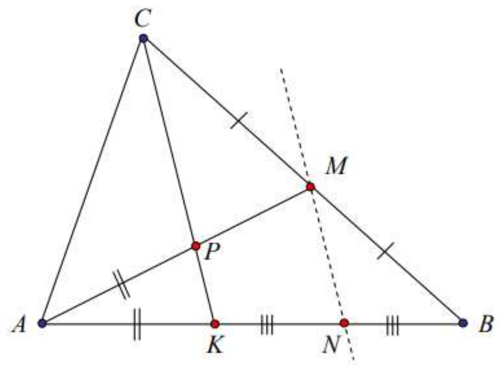
$$a^2x - 2a = 4x - 4 \Rightarrow a^2x - 4x = 2a - 4 \Rightarrow (a^2 - 4)x = 2(a - 2).$$

Az egyenlet csak akkor nem lesz megoldható, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

$$\begin{cases} (a - 2)(a + 2) = 0, \\ 2(a - 2) \neq 0 \end{cases}$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $a = -2$. Nyilvánvaló, hogy $a = -2$ esetén az egyenlet a következő alakot ölti: $0 \cdot x = -8$ tehát nincs megoldása.

4. Az ABC háromszög AB oldalán felvettek egy K pontot. A CK szakasz metszi az AM súlyvonalt a P pontban, úgy, hogy $AK = AP$. Határozzuk meg a $BK : PM$ arányát! [2]
Thalész tétele és az arányos szakaszok tétele alapján:



2.4. ábra. ABC háromszög

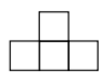
Húzzunk egy egyenest az M ponton keresztül, amely párhuzamos a CK egyenessel, és metszi az AB egyenest az N pontban. Mivel $CM = MB$, és a párhuzamos CK és MN egyenesek metszik a $CBA\angle$ oldalait, Thalész tétele szerint $KN = NB$. Ebből következik, hogy $KB = 2KN$.

Mivel a párhuzamos PK és MN egyenesek metszik a $MAB\angle$ oldalait, és levágnak az oldalakon AP és PM valamint AK és KN szakaszokat, az "arányos szakaszok tételének" megfelelően fennáll az arány $AP : PM = AK : KN$, amiből (az arányosság tulajdonsága alapján) az arány $\frac{AP}{AK} = \frac{PM}{KN}$. A feltétel szerint $AP = AK$. Így igaz az egyenlőség $1 = \frac{PM}{KN}$, ebből következik, hogy $PM = KN$.

Az előzőkből következik $BK : PM$ arány:

$BK : PM = 2KN : KN = 2 : 1$.

5. Lehetséges-e egy 10×10-es négyzetet 25 darab az ábrán látható figurára felvágni [2]



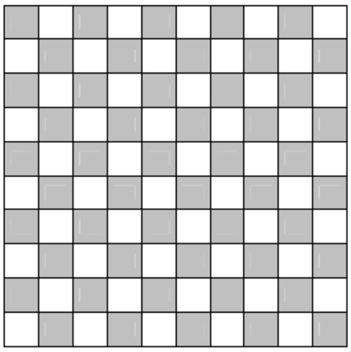
2.5. ábra. Figura

(a) Színezzük be a 10×10-es négyzetet két színre (szürke és fehér) sakkos mintázatban:

(b) Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott színezési módszerrel a 1×1-es szürke és fehér cellák száma egyenlő, ami 50.

(c) A 10×10-es négyzet bármely elhelyezkedésével (a színezett négyzet határain belül) tetrominóban az alábbiak lehetnek:

- vagy 3 szürke és 1 fehér cella - 1. típusú tetrominó,
- vagy 1 szürke és 3 fehér cella - 2. típusú tetrominó.



2.6. ábra. Sakkos mintázat

(d) Tegyük fel, hogy a 10×10-es négyzetet 25 tetrominóra lehet felosztani. Ekkor a (c) pont figyelembevételével ezek között: n darab 1. típusú tetrominó és (25 - n) darab 2. típusú tetrominó van, ahol n egy nemnegatív egész szám ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

- Számoljuk meg a szürke cellák számát. Egyrészt, a szürke cellák száma 50. Másrészt pedig: $3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n)$. Tehát igaz az egyenlőség: $3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n) = 50$, amiből $2n = 25$, $n = 12,5 \notin \mathbb{Z}$.
- Így ellentmondásba ütköztünk azzal, hogy $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ezért a feltételezésünk, hogy a 10×10-es négyzetet 25 tetrominóra lehet felosztani, helytelen.
  Tehát nem lehetséges.

2.4. feladatsor

1. Hasonlítsa össze a következő számokat: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ és $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$! [1]
   $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{(2)^2}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{6} + 2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

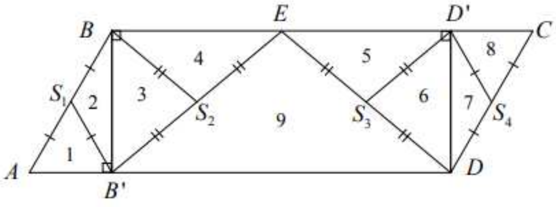
2. A a,b,c,d egész számok kielégítik az $\frac{a-b}{c+d} = \frac{a+b}{c-d}$ feltételt. Lehet-e az abcd szorzat egyenlő 1000-rel? [1]
   Vizsgáljuk meg, hogy lehet-e az abcd szorzat 1000, ha az egészek a, b, c, d kielégítik az $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$ feltételt.
   Legyen $d \neq \pm c$, akkor $(a-b)(c+d) = (a+b)(c-d)$ vagy $ac+ad-bc-bd = ac-ad+bc-bd$.
   Ez átalakítható: $2(ad - bd) = 0$. Tehát $ad = bc$. Ennek megfelelően az abcd szorzat alakja: $abcd = (ad)(bc) = (ad)^2$.
   Ha feltételezzük, hogy valamilyen egészek a és d esetén $(ad)^2 = 1000 = 10\sqrt{10}^2$, vagyis $(ad)^2 = 10^3$. Ez azt jelenti, hogy az egészek a és d szorzata egyenlő kell legyen $10\sqrt{10}$ -nel, azaz: $ad = \sqrt{1000}$, ami nem lehetséges, mivel az ad szorzatnak egész számnak kellene lennie, de $\sqrt{1000}$ irracionális szám. Ennek megfelelően nem lehetséges, hogy az abcd szorzat 1000 legyen.

3. Bizonyítsa be, hogy bármely paralelogrammát pontosan 9 egyenlő szárú háromszögre lehet

felvágni! [1]

Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Húzzuk meg a BB' és DD' magasságokat. Jelöljük továbbá E-vel a BD' szakasz felezőpontját.

(a) Vizsgáljuk meg az $AB'B$ derékszögű háromszöget, és legyen S az AB' átfogó felezőpontja. Mint ismeretes, S_1 az $AB'B$ háromszög köré írt kör középpontja. Így $AS_1 = S_1B = S_1B'$, vagyis az AS_1B' és BS_1B' háromszögek egyenlő szárúak.



2.7. ábra. ABCD paralelogramma

(b) Vizsgáljuk meg a $BB'E$ derékszögű háromszöget, és legyen $S2$ a $B'E$ átfogó felezőpontja. Így a BS_2B' és BS_2E háromszögek egyenlő szárúak.

(c) Vizsgáljuk meg az $ED'D$ derékszögű háromszöget, és legyen S_3 az ED átfogó felezőpontja. Így az $ES3D'$ és $DS3D'$ háromszögek egyenlő szárúak.

(d) Vizsgáljuk meg a $DD'C$ derékszögű háromszöget, és legyen S_4 a CD átfogó felezőpontja. Így az DS_4C' és DS_4D' háromszögek egyenlő szárúak.

(e) Felépítés szerint a $BB'DD'$ négyszög téglalap, és E a BD' szakasz felezőpontja. Ezért a $BB'E$ és $DD'E$ derékszögű háromszögek egyenlőek (két befogó alapján). Ebből következik, hogy $BE = ED'$. Így a BED' háromszög egyenlő szárú.

Így nyolc vágással tetszőleges paralelogrammát felvághatunk kilenc egyenlő szárú háromszögre. A képen ezeket 1-től 9-ig van számozva.

4. Milyen a értékek esetén van az $(x^2 + (2a - 1)x - 2a) \cdot (x^2 + (1 - a)x - a) = 0$ egyenletnek pontosan három különböző gyöke? [1]

$$(x^2(2a-1)x-2a)\cdot(x^2+(1-a)x-a)=0) \Leftrightarrow (x-1)(x+2a)(x+1)(x-a)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x+1)(x^2+ax-2a^2)=0.$$

Nyilvánvaló, hogy a $x^2 + ax - 2a^2 = 0$ egyenlet megoldásai a következő számok:

$$x_1 = \tfrac{-a-3a}{2} \text{ és } x_2 = \tfrac{-a+3a}{2} = a.$$

Az egyenletnek akkor és csak akkor van három különböző gyöke, ha teljesül az alábbi feltételek egyike:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 \neq 1 \\ x_1 \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 = -1 \\ x_2 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_2 = 1 \\ x_1 \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_2 = -1 \\ x_1 \neq 1. \end{cases}$$

Ahol

$$\left[\begin{array}{l} -2a = a \\ -2a = 1 \\ -2a = -1 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ a = -1. \end{array}\right.$$

Megoldás: ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, 0.

5. Egy végtelen városban az összes blokk egyforma méretű négyzet. Egy kerékpáros elindult egy utcasarokról. Fél perc múlva egy másik kerékpáros indult utána. Mindketten állandó sebességgel, percenként 1 blokknyit haladnak, és minden utcasarkon jobbra vagy balra fordulnak. Találkozhatnak-e valahol? [1]

   Fessük a város negyedeit sakktáblaszerűen, úgy hogy mindkét kerékpáros indulásakor jobbra egy fekete negyed legyen. Így bármelyik pillanatban mindkét kerékpáros jobbra egy fekete negyeddel találja magát szemben.

   Ez valóban így van, mert minden kereszteződésben (az első indulási pont kivételével) minden kerékpáros kötelezően elfordul:

   - vagy balra, ekkor jobbra tőle egy fekete negyed van, amely különbözik attól, amelyet éppen elhagyott;
   - vagy jobbra, ekkor a kerékpáros megkerüli (balra maradva tőle) ugyanazt a fekete negyedet, amelyet éppen elhagyott.

   (a) A kerékpárosok nem találkozhatnak egyetlen kereszteződésnél sem. Ez abból következik, hogy az első kerékpáros minden percben megjelenik egy kereszteződésnél (az indulástól számítva), t időpontokban ($t = 1, 2, \cdots$), amelyek természetes számok. Mivel a második kerékpáros fél perccel az első után indul és állandó 1 perc sebességgel halad, így a kereszteződéseknél az időpontokban $t + 0,5$ ($t = 1, 2, \cdots$) jelenik meg, amelyek nem természetes számok. Ezért nincs olyan időpont, amikor a kerékpárosok egyszerre lennének a kereszteződéseknél.

   (b) Mivel a kerékpárosok azonos sebességgel és fél perc különbséggel haladnak, egyikük sem érheti utol a másikat: a kereszteződésnél ez nem történhet meg, ahogyan korábban bizonyítottuk; egy negyed közepén sem történhet ez meg, mert az ellenkező feltételezés és az azonos sebességgel való haladás feltétele szerint a következő kereszteződésnél egyszerre lennének jelen, ami lehetetlen.

(c) Tehát, ha a kerékpárosok találkozhatnak, akkor csak egy negyed közepén, és csak akkor, ha egymással szemben haladnak. De ez utóbbi is lehetetlen, mert ebben az esetben az egyikük számára a fekete negyed balra, a másikuk számára pedig jobbra lenne.

2.5. feladatsor

1. Adott, hogy $\frac{x^2}{2+\frac{y^2}{2}} \leq \frac{(x+y)^2}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy $x + y = 1$! [1]

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \leq x + y \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 2 \leq 4x + 4y \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1.$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletet! [1]

$$|x^2 + 4x + 2| = \frac{5x+16}{3}$$

Ha az $\frac{5x+16}{3} < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, mivel ebben az esetben az egyenlet bal oldala nemnegatív, míg a jobb oldala negatív.
Legyen

$$\frac{5x+16}{3} \geq 0, \text{ akkor } |x^2 + 4x + 2| = \frac{5x+16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{16}{5}(1) \\ x^2 + 4x + 2 = -\frac{5x+16}{3}(2) \\ x^2 + 4x + 2 = \frac{5x+16}{3}(3) \end{cases}$$

Oldjuk meg külön az (2) és (3) egyenleteket:

$$x^2+4x+2 = -\frac{5x+16}{3} \Leftrightarrow 3x^2+12x+6 = -5x-16 \Leftrightarrow 3x^2+17x+22 = 0 \Leftrightarrow 3(x+\frac{11}{3})(x+2) = 0.$$

Ahol

$$x = -\frac{11}{3}$$
$$x = -2$$

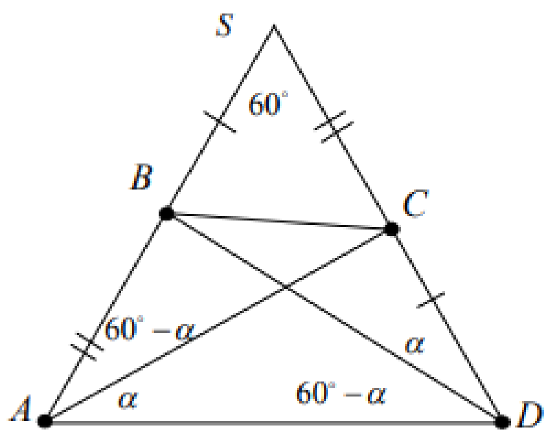
Azonban a gyökök egyike se felel meg az (1) feltételnek.

$$x^2 + 4x + 2 = \frac{5x+16}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + 6 = 5x + 16 \Leftrightarrow 3x^2 + 7x - 10 = 0 \Leftrightarrow 3(x + \frac{10}{3})(x - 1) = 0.$$

Ahol

$$x = -\frac{10}{3}$$
$$x = 1$$

Azonban csak az $x = 1$ felel meg az (1) feltételnek. Így ennek az egyenletnek az egyetlen gyöke az $x = 1$.



2.8. ábra. ABCD négyszög

3. Az ABCD négyszögről ismert, hogy $BAD\angle = CDA\angle = 60°$, valamint a $CAD\angle = CDB\angle$. Bizonyítsd be, hogy $AB + CD = AD$! [1] Folytassuk az AB és CD szemközti oldalainak meghosszabbítását a metszéspontjukig S pontban. Mivel az adott feltételek szerint $BAD\angle = CDA\angle = 60°$, ezért az ADS háromszög szabályos háromszög. Ebből következik, hogy $AS = SD = AD$. Vizsgáljuk meg az ADC és DSB háromszögeket:
mivel $AD = DS$, $CAD\angle = BDS\angle = \alpha$, és $ADC\angle = DSB\angle = 60°$, ezért az ADC és DSB háromszögek egyenlők az oldal és a mellékelt szögek alapján. Ezért $DC = SB$ és $AC = DB$. Mivel $AS = SD$ és $BS = CD$, ezért $AS - BS = SD - CD$. Ebből következik, hogy $AB = SC$. Mivel $AD = AS$, ezért $AD = AB + BS = AB + CD$. Továbbá $AC = BD$.

4. A $P(x) = x^2 + px + q$ másodfokú egyenlet D diszkriminánsa pozitív. Hány gyöke lehet a $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$ egyenletnek? [1]
A feltételek szerint a másodfokú polinom $P(x) = x^2 + px + q$ diszkriminánsa $D = p^2?4q$.
Vizsgáljuk meg, hány gyöke lehet a következő egyenletnek:
$P = (x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$. (1)
Tekintsük meg az egyenlet bal oldalát:
$P(x)+P(x+\sqrt{D}) = x^2+px+q+(x+\sqrt{D})^2+p(x+\sqrt{D})+q = 2x^2+2x(p+\sqrt{D})+D+p\sqrt{D}+2q$.
Akkor a (1) másodfokú egyenlet $D*$ diszkriminánsa egyenlő:
$D* = 4(p+\sqrt{d})^2-8(D+p\sqrt{D}+2q) = 4p^2+8p\sqrt{D}+4D-8D-8p\sqrt{D}-16q = 4p^2-4D-16q = 4(p^2-4q) - 4D = 4D - 4D = 0$.
Mivel a $D* = 0$, ezért az egyenletnek két gyöke van:
$x_1 = x_2 = \frac{-2(p+\sqrt{D})}{4} = -\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$.
Tehát a másodfokú polinom $P(x) = x^2+px+q$ diszkriminánsa pozitív, akkor a $P(x)+P(x+\sqrt{D} = 0)$ egyenletnek mindig van egy valós gyöke:
$x = -\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ (dupla gyök).

5. Az $1, 2, 3, \cdots, 25$ számokat 5×5 ös négyzetes táblázatba helyeztük el úgy, hogy minden sor-

ban a számokat növekvő sorrendben helyeztük el. Mi lehet a legkisebb értéke az 3. oszlopban lévő számok összegének? [1]

A feladat feltétele szerint az $1, 2, 3, \cdots, 25$ számokat egy 5×5-ös négyzetes táblázatban kell elhelyezni úgy, hogy minden egyes (i-edik) sorban a számok $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ növekvő sorrendben legyenek $(a_i < b_i < c_i < d_i < e_i)$. Jelöljük S-sel annak a legkisebb értéknek az összegét, amelyet a harmadik oszlopban lévő számok $(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$ összege ad ki a táblázatban.

A legkisebb lehetséges szám az c_i-edik sor harmadik helyére (az 1 és 25 közötti számok közül)

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
a_4	b_4	c_4	d_4	e_4
a_5	b_5	c_5	d_5	e_5

1	2	**3**	...	...
4	5	**6**	...	...
7	8	**9**	...	...
10	11	**12**	...	...
13	14	**15**	...	...

...	...	**11**	**12**	**13**
...	...	**14**	**15**	**16**
...	...	**17**	**18**	**19**
...	...	**20**	**21**	**22**
...	...	**23**	**24**	**25**

2.9. ábra. Táblázat

a 3, mivel az első két pozíciót az 1 és 2 számokkal kell kitölteni, mivel az kisebb, mint a 3.

A legkisebb lehetséges szám az c_i-edik sor harmadik helyére (a 4 és 25 közötti számok közül) a 6, mivel az első két pozíciót a 4 és 5 számokkal kell kitölteni, mivel az kisebb, mint a 6.

A legkisebb lehetséges szám az c_i-edik sor harmadik helyére (a 7 és 25 közötti számok közül) a 9, mivel az első két pozíciót a 7 és 8 számokkal kell kitölteni, mivel az kisebb, mint a 9.

A legkisebb lehetséges szám az c_i-edik sor harmadik helyére (a 10 és 25 közötti számok közül) a 12, mivel az első két pozíciót a 10 és 11 számokkal kell kitölteni, mivel az kisebb, mint a 12.

A legkisebb lehetséges szám az c_i-edik sor harmadik helyére (a 13 és 25 közötti számok közül) a 15, mivel az első két pozíciót a 13 és 14 számokkal kell kitölteni, mivel az kisebb, mint a 15.

Mivel a táblázat kitöltése során (a feladat feltételeinek megfelelően) minden sor harmadik helyére a lehetséges legkisebb számot választottuk, a harmadik oszlopban lévő számok legkisebb összértéke az említett számok összege: 3, 6, 9, 12 és 15.

Tehát $S = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$.

2.6. feladatsor

1. Az $f(x)$ függvény alakja $\frac{ax+b}{cx+d}$, ahol a, b, c, d számok. Adott, hogy $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$. Mennyi $f(3)$ értéke? [1]

   Az $f(x)$ függvény alakja $\frac{ax+b}{cx+d}$, ahol a, b, c, d számok. Tudjuk, hogy az $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$.

   Mivel $f(0) = \frac{b}{d} = 1$ egyenlő, ezért a $d = b$, és így az $f(x)$ függvény felírható a következő formában:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}.$$

Mivel $f(1) = \frac{a+b}{c+b} = 0$, és $b = -a$ így

$$f(x) = \frac{ax-a}{cx-a}.$$

Hasonlóképpen, az $f(2) = \frac{2a-a}{ac-a} = 3$ függvényre vonatkozó feltételből kapjuk, hogy $a = 6c - 3a$. Innen $c = \frac{2}{3}a$.

Ezért az $f(x)$ függvényt felírhatjuk a következőképpen:

$$f(x) = \frac{ax-a}{\frac{2}{3}ax-a} = \frac{a(x-1)}{a(\frac{2}{3}x-1)} = \frac{x-1}{\frac{2}{3}x-1} = \frac{3(x-1)}{2x-3}.$$

A megadott feltételek mellett az a nem lehet 0. Valóban, az ellentétes feltételezésből a következő feltételeket kapjuk: $1 = \frac{b}{d}$, $0 = \frac{b}{c+d}$, $3 = \frac{b}{3c+d}$, amelyek egyszerre nem teljesülhetnek. Ennek megfelelően:

$$f(3) = \frac{3(3-1)}{2 \cdot 3 - 3} = 2.$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $cosx \neq 0$, akkor $|\frac{cos2x+3}{cosx}| \geq 4$. [1]

   Mivel bármely valós x esetén érvényes a következő azonosság $cos2x = 2cos^2x - 1$, ezért

$$|\frac{cos2x+3}{cosx}| = |\frac{2cos^2x-1+3}{cosx}| = |\frac{2cos^2x+2}{cosx}| = 2 \cdot |\frac{cos^2x+1}{cosx}| = 2 \cdot |cosx + \frac{1}{cosx}| = 2(|cosx| + \frac{1}{|cosx|}).$$

   Mutassuk meg, hogy $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ teljesül az egyenlőtlenség $|cosx| + \frac{1}{cosx} \geq 2$. Mivel $cosx \neq 0$, ezért

$$|cosx| + \frac{1}{cosx} \geq 2 \Leftrightarrow |cosx|^2 - 2|cosx| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|cosx| - 1)^2 \geq 0.$$

   Mivel az utolsó egyenlőtlenség $(|cosx| - 1)^2 \geq 0$ igaz, így megállapítható, hogy a következő egyenlőtlenség is igaz:

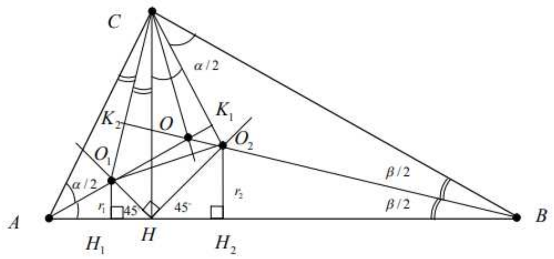
$$|\frac{cos2x+3}{cosx}| \geq 4, \text{ amikor } cosx \neq 0.$$

3. A CH szakasz az ABC derékszögű háromszög magassága, amely az AB átfogóra van húzva. Az O_1, O_2 és O pontok az ACH, BCH, ABC háromszögek beírt köreinek középpontjai. Bizonyítsa be, hogy $CO_1 \perp O_1O_2$ és $CO = O_1O_2$! [1] Először bizonyítsuk be, hogy a $CO_1 \perp O_1O_2$.

   Ehhez vizsgáljuk meg az O_1CO_2 háromszöget és állapítsuk meg, hogy az O pont ennek a háromszögnek a magasságpontja.

   Legyen az ACB háromszög A csúcsából induló AO_1 szögfelező az O_1O_2C háromszög CO_2 oldalát a K_1 pontban metszi. Ekkor az AK_1C háromszögből következik, hogy:

$$AK_1C\angle = 180° - CAK_1\angle - ACK_1 = 180° - CAK_1\angle - (ACO\angle + OCK_1\angle) =$$
$$180° - \frac{\alpha}{2} - (45° + (45° - \frac{\alpha}{2})) = 90°.$$



2.10. ábra. ABC derékszögű háromszög

Ezért az O_1K_1 magassága az O_1O_2C háromszögnek.
Legyen az ACB háromszög B csúcsából induló AO_2 szögfelező az O_1O_2C háromszög CO_1 oldalát a K_2 pontban metsző. Ekkor az BK_2C háromszögből következik, hogy:

$$BK_2C\angle = 180° - CBK_2\angle - BCK_2 = 180° - CBK_2\angle - (BCO\angle + OCK_2\angle) =$$
$$180° - \tfrac{\beta}{2} - (45° + (45° - \tfrac{\beta}{2})) = 90°$$

Ezért az O_2K_2 magassága az O_1O_2C háromszögnek.
Mivel az O_1K_1 és O_2K_2 az O_1CO_2 háromszög magasságai és azok O pontban metszik egymást, a CO egyenes merőleges lesz az O_1O_2oldalra. Most bizonyítsuk be az egyenlőséget: $CO = O_1O_2$.
Nézzük mmeg az OCB és O_2HB háromszögeket.

$$CBO\angle = HBO_2\angle = \tfrac{\beta}{2},\ OCB\angle = O_2HB = 45°.$$

Akkor

$$\tfrac{OC}{CB} = \tfrac{O_2H}{HB},$$

innen

$$O_2H = \tfrac{OC\cdot HB}{CB}.$$

A COA és HO_1A háromszögek hasonlóságából $OAC\angle = O_1AH\angle = \frac{\alpha}{2}$, $ACO\angle = AHO_1\angle = 45°$ vagyis $\frac{OC}{AC} = \frac{O_1H}{AH}$, tehát

$$O_1H = \tfrac{AH\cdot OC}{AC}.$$

Az O_1HO_2 háromszögben Pithagorász-tétele alapján:

$$O_1O_2 = \sqrt{HO_2^2 + HO_1^2} = \sqrt{\tfrac{OC^2\cdot HB^2}{CB^2} + \tfrac{AH^2\cdot OC^2}{AC^2}} = OC\cdot\sqrt{\tfrac{HB^2}{CB^2} + \tfrac{AH^2}{AC^2}} =$$
$$OC\cdot\sqrt{\tfrac{HB^2}{AB\cdot BH} + \tfrac{AH^2}{AB\cdot AH}} = OC\cdot\sqrt{\tfrac{HB}{AB} + \tfrac{AH}{AB}} = OC\cdot\sqrt{\tfrac{AB}{AB}} = OC.$$

Tehát $CO = O_1O_2$.

4. Létezik-e olyan természetes szám a, hogy a $x_n = n^2 + 2007an + 2006a^2$ sorozatban bármely két szomszédos elem relatív prím legyen? [1]

   $x_n = n^2+2007an+2006a^2 = (n+2003a)(n+a)\forall n \in \mathbb{N}$, akkor $x_n+1 = (n+1+2006a)(n+a+1)$.

   (a) $(n + 2006a), (n + a), (n + 2006a + 1), (n + a + 1) \in \mathbb{N}$

   (b) LNKO $(n + 2006a; n + 2006a + 1) = 1$, LNKO $(n + a; n + a + 1) = 1$.

   Hogy létezik-e olyan természetes a szám, amelynél a $\{x_n\}$ adott természetes számsorozat bármely két szomszédos eleme, x_n és $x_(n + 1)$, relatív prímek, ekvivalens azzal azzal, hogy létezik-e olyan természetes a szám, amelynél minden tört $\frac{x_(n+1)}{x_n}$ nem egyszerűsíthető.
   Tekintettel a feltételre:

   $$\frac{x_(n+1)}{x_n} = \frac{(n+a+1)(n+2006a+1)}{(n+a)(n+2006)}$$

   Akkor és csak akkor nem egyszerűsíthető, ha

   $$\frac{n+a+1}{n+2006a} \text{ és } \frac{n+2006a+1}{n+a}$$

   törtek nem egyszerűsíthetők.
   Nyilvánvaló, hogy minden természetes a esetén, ha $n = 2004a + 1$ a tört $\frac{n+2006a+1}{n+a} = 2$ egyszerűsíthető, és ha $n = 2004a - 2$ a tört is egyszerűsíthető $\frac{n+a+1}{n+2006a} = \frac{1}{2}$.
   Így bármely természetes a esetén az $\{x_n\}$ sorozat $n = 2004a + 1$, $n = 2004a + 2$ vagy $n = 2004a - 2$, $n = 2004a - 1$ nem relatív prímek. Ezért ilyen természetes a nem létezik.

5. Egy egység oldalú négyzetben 2006 szabályos háromszöget helyeztek el, amelyek kerületének összege 300. Bizonyítsa be, hogy legalább három ilyen háromszögnek van közös pontja. [1]
   Legyen $a_1, a_2, \cdots, a_2006$ a háromszög adott oldalainak hosszúságai. A háromszög kerületét a $3a_i$ képlettel tudjuk meghatározni, innen kapjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{2006} 3a_i = 300$, tehát $\sum_{i=1}^{2006} a_i = 100$.
   A szabályos háromszög területét a $\frac{\sqrt{3}}{4}a_i^2$ képlettel határozható meg, az összes háromszög területét pedig $\sum_{i=1}^{2006} \frac{\sqrt{3}}{4}a_i^2$ képlettel számolhatjuk ki.

   $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

   Tehát $(\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2)}{n}) \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$.
   Felírható a következő:

   $$\frac{(100)^2}{2006} = \frac{1}{2006}(\sum_{i=1}^{2006} a_i) \leq \sum_{i=1}^{2006} a_i^2.$$
   $$\frac{(100)^2}{2006} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \sum_{i=1}^{2006}(a_i^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}) = \sum_{i=1}^{2006} S_i.$$
   $$\frac{(100)^2}{2006} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{10000}{2006} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2500\sqrt{3}}{2006} = \frac{1250\sqrt{3}}{1003}$$
   $$\frac{1250\sqrt{3}}{1003} > 2 \Leftrightarrow 1250\sqrt{3} > 2006 \Leftrightarrow 625\sqrt{3} > 1003 \Leftrightarrow (625\sqrt{3})^2 > 1003^2 \Leftrightarrow 1171875 > 1006009, \text{ akkor } 2 < \sum_{i=1}^{2006} S_i.$$

   Az utolsó egyenlőtlenségből következik, hogy legalább három ilyen háromszögnek van nem üres metszete, akkor legalább három háromszögnek van közös pontja.

3. Módszertani elemzés

3.1. A feladatok felépítése

A versenyfeladatok, olyan feladatok, melyek megoldásához egyedi megközelítés szükséges. A versenyfeladatok tartalmának elemzése alapján a következőket kell tartalmaznia:

- a feladatok nehézségi szintjének növekedése az elsőtől a következőig;
- a feladatok az iskolai matematika tanterv alapján állítandó össze;
- tartalmaznia kell mind algebrai, mind mértani feladatokat;
- nem hagyományos feladatok, melyek kihívást jelentenek a résztvevőnek.

Az iskolai matematika tanterv alapján állítandó össze a versnyfeladatok, például az 5. osztály számára számrejtvények, mérős feladatok, logikai és szöveges feladatok szerepelnek; a 6. osztályosban mértani alakzatok tulajdonságaival kapcsolatos feladatok, logikai, szöveges feladatok, számrejtvények; 7. osztályban egyenletek megoldásával, oszthatósági feladatok természetes számokkal, logaikai feladatok; 8. osztályban algebrai kifejezések átalakításával, függvénygrafikonok szerkesztésével, háromszögek elemeivel kapcsolatos feladatok, logikai feladatok; 9. osztályban oszthatóság, másodfokú egyenletek és tulajdonságaik, algebrai kifejezések átalakítása, háromszögek alapvető elemei, kombinatorikai feladatok, 10. osztályban másodfokú egyenletek, háromszögek és tulajdonságai, négyszögek és tulajdonságaik, bizonyítási feladatok, 11. osztályban függvényekkel kapcsolatos, összetettebb algebrai és mértani feladatok.
A feladatok megoldása során a diákok nehézségekbe ütközhetnek a feladatok logikai összetetsége, algebrai átalakítások, szemléletváltás miatt.

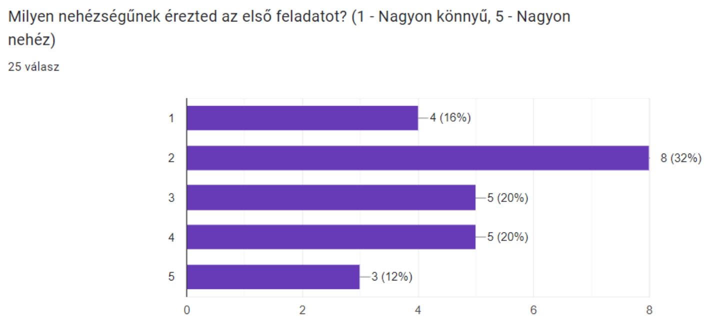
3.2. Gyakorlati próba

A szakdolgozatom egyik fontos része a gyakorlati próba, amit jelen esetben 7. osztályos tanulók oldottak meg (a 2. feladatsort) és töltötték ki a kérdőívet. A diákok két különböző iskolából töltötték ki úgy, mint a Zápszonyi Gimnázium és a Pilisvörösvári Általános Iskola .
A feladatsor első és a második feladata a legtöbb diák számára jól sikerült. A harmadik esetén viszont sokat időztek a megoldáson, néhol elakadtak és hibákat ejtettek, de az eredmény visszahelyettesítése, az ellenőrzés sokat segített. A negyedik feladatban a szöveg pontos értelmezése kisebb akadályt jeletett a diákoknak. Az utolsó feladat már nagyobb kihívás volt és több diáknak nem sikerült önállóan megoldani.

3.3. Visszajelző kérdőív

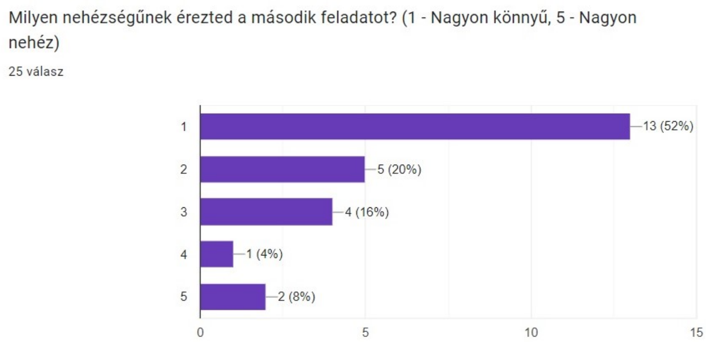
A feladatsor kiértékelését a következőkben szeretném bemutatni. A kérdőívet kettő csoport minden jelenlévő tagja kitöltötte. A grafikonokon jelölve vannak a választások száma és az a válaszlehtőségek aránya a kitöltők számához viszonyítva. Ahogy várható is volt az első feladatokat nagyobb számba jelölték a diákok a könnyebbnek és ahogy haladtak tovább fokozatosan egyre nehezebbnek titulálták a feladatokat.

1. kérdés



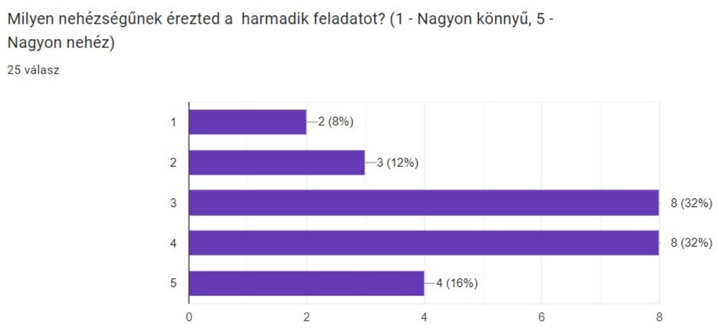
3.1. ábra. 1. kérdés

2. kérdés



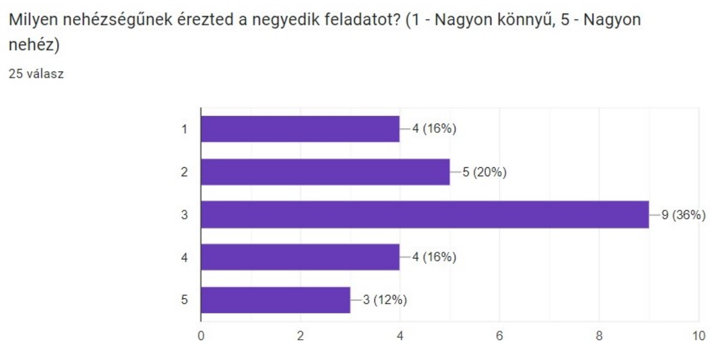
3.2. ábra. 2. kérdés

3. kérdés



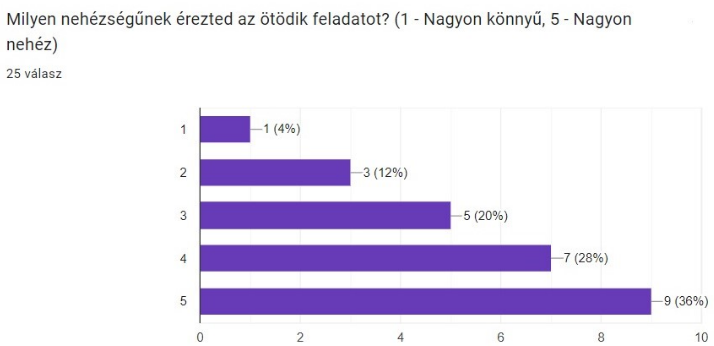
3.3. ábra. 3. kérdés

4. kérdés



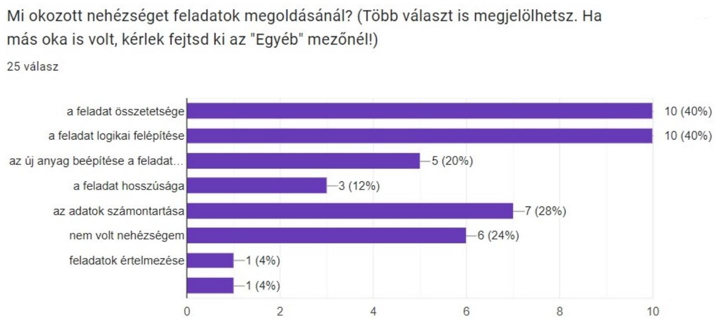
3.4. ábra. 4. kérdés

5. kérdés



3.5. ábra. 5. kérdés

6. kérdés



3.6. ábra. 6. kérdés

Összességében a feladatsor esetén hasznosnak tartom a visszajelzéseket, hiszen őszintén saját belátásuk szerint töltötték ki, így egyszerűen fel lehet mérni a feladatok nehézségét és könnyebben lehet következtetéseket levonni.

Összefoglaló

A versenyfeladatok beépítése a matematikaoktatásba számos előnnyel jár, amelyek hozzájárulhatnak a diákok tudásának, problémamegoldó képességeinek és logikai gondolkodásuk fejlesztéséhez.
Úgy gondolom, hogy a dolgozatom írása alatt sok új érdekességre tettem szert, amit a jövőben alkalmazni tudok. Bemutattam néhány problémát is, amelyekkel foglalkozni kell, és törekedni fogok a legjobb módszerek alkalmazására és folyamatos fejlődésre. Fontos, hogy a diákok számára kihívásokat állítsunk, mert ez motiválja őket, és szükség esetén segítséget nyújtsunk nekik a tanulási folyamat zökkenőmentessége érdekében.

Irodalomjegyzék

[1] Összukrán Matematika olimpia második forduló feladatsorai - 2010

https://ddpu.edu.ua/fmk/publications/manuals/manual_06.pdf?fbclid=IwZXh0bgNhZW0CMTAAAR00kKPmmyarwFm1Jzj9eBAeX-8N4-Y_p4mxibiG5769oX5VQ8v2bHQKftE_aem_AVi21ifhfUqwGrxCoArzQBEdPJUgP3fL8mh0biAie5cZwuau-WPMcvGpYwdH-Gc3VX0l3moHvKdN2R11CHbVIcYn

[2] Összukrán Matematika olimpia második forduló feladatsorai - 2016

https://erudyt.net/navchalni-predmety/matematika/olimpiadni-zadachi-rozv-yazannya-zadach-ii-etapu-vseukrayins-koyi-uchnivs-koyi-olimpiady-z-matematyky-6-11-klas.html

[3] Összukrán Matematika olimpia második forduló feladatsorai - 2014

https://ddpu.edu.ua/fmk/publications/manuals/manual_10.pdf

[4] *https://naurok-com-ua.translate.goog/metodi-rozv-yazuvannya-olimpiadnih-zavdan-103925.html?_x_tr_sl=uk&_x_tr_tl=hu&_x_tr_hl=hu&_x_tr_pto=sc*

[5] *https://www.magyarpedagogia.hu/index.php/magyarpedagogia/article/download/141/140/152*

Ábrák jegyzéke

Резюме

Математика є невід'ємною частиною навчального процесу, яка супроводжує учнів від початкової школи до складання іспитів необхідних для отримання атестату. Протягом цього періоду учні стикаються з різними типами задач, що допомагають їм здобувати як теоретичні, так і практичні знання. Представлення простіших та складніших олімпіадних задач має на меті інтеграцію цих завдань у процес викладання математики.

Почувши про математичні олімпіади, учні можуть одразу згадати про олімпіади або змагання, такі як конкурс імені Ілони Зріні, конкурс імені Зоарда Гечі для учнів 3-6 класів, конкурс імені Віктора Теребеші для учнів 7-11 класів, конкурс Кенгуру тощо, де вони стикаються з численними типами задач. Успішне розв’язання олімпіадних задач вимагає використання як теоретичних, так і практичних методів, що є частиною моєї роботи. Вона включає різні набори задач, які допомагають учням оновити свої знання з відповідної тематики та полегшити розв’язання завдань.

Метою роботи є також аналіз практичних задач і досвіду, пов'язаних із задачами та їхніми наборами. Вважається важливим, щоб висновки, зроблені на основі вирішення задач, сприяли покращенню якості освіти. Мотивацією для роботи є бажання, щоб учні займалися більш захоплюючими та змістовними задачами на уроках. Одним з найбільших викликів у викладанні математики є підтримання різноманітності та цікавості уроків. Важливо, щоб учні під час розв'язання задач не просто покладалися на готові розв'язки, а й самостійно мислили. Крім того, на уроках важливо, щоб учні обговорювали між собою завдання та ділилися своїми думками щодо їх вирішення, розвиваючи себе та свою групу.

Поряд із повторенням відомих тем і принципів та їх правильним застосуванням, важливим є і використання на практиці складніших логічних задач, оскільки такий тип мислення необхідний у багатьох сферах життя. Олімпіадні задачі є більшим викликом і вимагають багатокрокового планування та реалізації, ніж звичайні завдання для тренування. Незважаючи на те, що учні можуть можуть мати сумнів в практичній застосовності таких задач, важливо розуміти та застосовувати навички розв’язання олімпіад них задач, оскільки вони розвивають логічне мислення, яке буде корисним у майбутньому.

Робота також спирається на власний досвід дипломантки, адже неодноразово брала участь у математичних змаганнях у шкільні роки.

Основною метою роботи є допомога учням у знайомстві з більш складними задачами ще до складання іспитів для отримання атестату. Вважаю, що якщо учні набудуть досвіду у вирішенні таких завдань на ранніх етапах, то в майбутньому їм буде легше впоратися як із простішими, так і з складнішими завданнями.

Nyilatkozat

Alulírott, Deme Angelika, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Звіт про перевірку схожості тексту Oxsico

Назва документа:

Szakdolgozat_Deme_Angellika.pdf

Ким подано:	Дата перевірки:	Дата звіту:
Пап Габріелла	**2024-05-30 11:32:06**	**2024-05-30 11:41:25**

Ким перевірено:	Кількість сторінок:	Кількість слів:
I + U + DB + P + DOI	**27**	**10457**

Схожість 0%	Збіг: **26 джерела**	Вилучено: **0 джерела**
Інтернет: **13 джерела**	DOI: **0 джерела**	База даних: **0 джерела**
Перефразовування 0%	Кількість: **1 джерела**	Перефразовано: **6 слова**
Цитування 1%	Цитування: **1**	Всього використано слів: **112**
Включення 0%	Кількість: **0 включення**	Всього використано слів: **0**
Питання 0%	Замінені символи: **0**	Інший сценарій: **0 слова**