ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28"лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Рівні геометричного мислення учнів 9 класу та шляхи його розвитку

Сенько Анастасія Анатоліївна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2023

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йожефівна**

(к. ф.-м. н, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики)

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

(к. ф.-м. н, доцент)

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Рівні геометричного мислення учнів 9 класу та шляхи його розвитку

Рівень вищої освіти: бакалавр

Виконавець: студентка IV-го курсу

Сенько Анастасія Анатоліївна

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йожефівна**

(к. ф.-м. н, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики)

Рецензент: Петечук Юлія Василівна

(к. ф.-м. н, доцент, доцент кафедри математики та інформатики)

Берегове
2024

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A 9. OSZTÁLYOS TANULÓK GEOMETRIAI GONDOLKODÁSÁNAK SZINTJEI ÉS FEJLESZTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI

Szakdolgozat

Készítette: Szenykó Anasztázia

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: dr. Kucsinka Katalin

(fiz.-mat. tud. kandidátusa, PhD, docens, tanszékvezető)

Recenzens: Petecsuk Júlia

(fiz.-mat. tud. kandidátusa, PhD, docens, a Matematika és Informatika Tanszék docense)

Beregszász – 2024

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A gondolkodás minden embernél más, így egy adott feladatot vagy problémát többféle módon is meglehet oldani. Ezek a lehetőségek segítenek szélesebben és több szempontból látni a felmerülő kérdést.

A matematika fontos szerepet játszik az emberek életében és gondolkodásában. Ennek következtében tudunk sok olyan dolgot is megvalósítani, amit a geometria ismerete nélkül nehéz lenne.

A geometriai gondolkodáson alapul a térlátásunk, aminek köszönhetően haladunk előre és valósítsuk az addig lehetetlennek tűnő dolgokat.

A geometriai gondolkodás még kicsi korban megjelenik, amit a különbörő térbeli játékok használata bővít. Az iskolában a matematika tantárgy megjelenésével az addig szerzett vizuális tudás azok neveivel bővül. Az általános osztályok elvégzésével, már a geometriatudás olyan szintre lép, hogy nem csak felismerni fogjuk az adott alakzatokat, hanem a tulajdonságokat, axiómákat felhasználva már sokkal egyszerűbben fogjuk tudni látni a feladatokat vagy problémákat.

Pierre Van Hiele, hogy az emberek felmérhessék a geometria tudásszintjüket, összeállított egy tesztfeladatsort, és szintekre osztotta. Ezek sokban segítenek leellenőrizni a meglévő tudást és fejlődni.

A geometriai gondolkodás olyan képesség, aminek köszönhetően az emberek képesek megérteni a térbeli strúkturákat, az alakzatok tulajdonságait és különböző alkalmazásukat, változásukat. Segít felismerni és leírni a formákat, mintákat és objektumokat, a köztük lévő kapcsolatokat és tulajdonságokat.

A geometriai gondolkodás fontos szerepet játszik a mindennapi életben, például térbeli tájékozódásban, építészetben, mérnöki tervezésben és matematikai problémamegoldásban. A geometriai gondolkodás fejlesztése segíti az embereket abban, hogy hatékonyabban megoldják a különböző feladatokat és jobban megértsék a körülöttük lévő világot.

A munkám fő célja, hogy összeállítsak egy feladatgyűjteményt, ami segíti a 9. osztályos tanulók geometriagondolkodásának fejlesztését. Ehhez első lépésben szükséges egy mérést elvégezni, hogy melyek a leginkább fejlesztésre szoruló területek. A méréshez a Van Hiele [6] által fejlesztett teszt feladataiból és a 9. osztályos DPA [12] feladataiból fogok válogatni. A felmérés eredményei alapján kerül összeállításra egy feladatsor, melyet e cél elérése fogok alkalmazni.

1. Geometriai gondolkodás a matematikában

A matematika egyik fontos része a geometria, hiszen annak köszönhetően használhatunk különböző eszközöket, építkezhetünk, és fejlődhetünk.
A matematikai gondolkodást és a hozzátartozó képességek és a hozzájuk járó tudásszerzést és tanulást Csapó Benő, Csíkos Csaba és Molnár Gyöngyvér fogalmazták meg "A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei" [3] munkájukban, amely alapján az alábbi fejezetet fogalmaztam meg.

A matematikai gondolkodásban két olyan képesség van, amely a geometria részeként fontos szerepet játszik:

- térbeli gondolkodás – olyan képesség, amely biztosítja számunkra a térbeli és síkbeli alakzatok forgatását, azokkal különböző műveleteket végezni;
- arányossági gondolkodás – olyan képesség, amely a térfogat és terület számítását biztosítja, a mértékek átszámítása, amely maga az arányosságot is magába foglalja, amelyet vagy el tudunk sajátítani vagy nem.

A térbeli gondolkodáshoz kapcsolódik a transzformáció (áthelyezés, levetítés). A művészetben tökéletesen megfigyelhető maga a térbeli ábrázolás (szobrok, stb.) és síkbeli ábrázolás (festmények, stb.). Maga a művészetnek, épített környezeten, természetben, ember alkotta dolgokban könnyedén megfigyelhető és megérthető a szimmetria, ismétlés. ritmus alapjait, amelyet a későbbiekben fejlesztünk és alkalmazunk.

A geometria alapját a térszemlélet adja. A térbeli képesség segít abban, hogy a térben látott információt feldolgozhassuk és használhassuk, formálhassuk és elraktározzuk az elménkben.

A geometriai gondolkodás magába foglalja a geometriai fogalmak megértését, azok alkalmazását a problémák és feladatok megoldására. A geometriai gondolkodás fejlesztése fontos, mert segít a tanulóknak megérteni a térbeli világot és megoldani ezek során felmerülő problémákat.

Geometriai gondolkodás lépései
A geometriai gondolkodást fejleszthetjük gyakorlatok és feladatok megoldásával, de a játékok és a valós életbeli példák is segítségünkre vannak, hogy minél jobban értsük a geometria különlegességeit.
A geometriai gondolkodás fontosabb lépései:

- **Vizuális felismerés, azonosítás** – a formák és alakzatok felismerése, azok név szerinti meghatározása, megkülönböztetése;
- **Szabályok és tulajdonságok megértése** – a szabályok nem csak megtanulása a cél, hanem azok megértése és alkalmazása, mindennapi dolgokkal való magyarázat;
- **Hasonlóságok felismerése** – különböző alakzatok hasonlóságának vagy épp különbségének a felismerése, megnevezése, megértése;
- **Problémamegoldás** – például egy alakzat területének vagy épp a kerületének a meghatározása, ebben segítenek a képletek, de azokat tudni kell megfelelően alkalmazni;

- **Tervezés és kreativitás** – rajzok és modellek készítése.

A geometriai gondolkodás maga nem igazán függ a korosztálytól. A kicsi gyerekek teljesen másképp látják a külvilágot, mint a felnőttek vagy az idősebbek, hiszen az ő gondolkodásuk más szinten van és nem ragaszkodnak a korlátokhoz és szabályokhoz. Ezért kell megtanulni látni és eltérni azoktól a dolgoktól, amelyeket mi másképen láttunk eddig, hisz az nem mindig felel meg az eredeti megfeleltetésnek [1].

A geometriatanítás-tanulás céljai
A geometriatanítás - tanulás céljait Herendiné Kónya Eszter foglalta össze "A geometriai képességek fejlesztésének lehetőségei" [7] című munkájában.

- A tananyaghoz kapcsolódó tudás és jártasságok megszerzése.
- A geometria kettős természetének felismerése, azaz a tanuló legyen képes a geometriai témakört egyszerre tiszta matematikaként látni, ugyanakkor a természeti és a mesterséges világ geometriai oldalait is észrevenni.
- Geometriai modellek felépítése és alkalmazása matematikán belüli és azon kívüli kontextusokban.
- A geometria és a hétköznapi élet kapcsolata.
- Gondolkodási módszerek, technikák megértése és elsajátítása.
- Matematikai problémák felvetése, elemzése, megoldása.
- Kreativitás, találékonyság.
- Ismerkedés a matematika történetével, filozófiájával.
- Pozitív attitűd kialakítása.
- Általános mentális, szociális képességek fejlesztése.

2. A geometriai gondolkodás szintjei

2.1. A geometriai gondolkodás szintjei Van Hiele szerint

A geometriagondolkodás kulcsfontosságú a matematikában, így többen is elgondolkodtak azon, hogy a tanulók az iskolában milyen szinten tudnak elmélyülni a mértanban. Ekkor Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele holland házaspár 1950-es években dolgoztak ki egy olyan rendszert, amellyel felmérték a tanulók geometria gondolkodását és szintekre osztották. De ezek a szintek egymásra épülnek, így ha nem tudják az előző szintet teljesíteni, akkor nem tudnak tovább lépni, és a tananyag is úgy fan felépítve, hogy maga a mértan folyamatosan bővül és egymásra épül [4].

Például kimaradt a háromszög fogalma és tulajdonságai, akkor már a négyszögeket nem biztos, hogy képesek leszünk teljes mértékben megérteni, hiszen hiányzik egy fontos rész – a háromszög.

Ahhoz, hogy eredményes tanítást végezzünk, szükségünk van arra az információra, hogy a tanulóink milyen szinten vannak és hogyan tudnánk őket segíteni a fejlődésben, továbblepésben a szintek között.

Az 1980-as években állítottak össze a ma leggyakrabban használt feladatsort, amellyel a tanulók szintje mérhető fel. A feladatsor 25 kérdésből áll, melynek neve Usiskin-féle feladatsor. Usiskin volt az, aki elgondolkodott a feladatsor létrehozásában, a szintek felmérése érdekében, melyet 1982-re meg is fogalmazott [2]. A tesztre kortól függetlenül 35 perc állt rendelkezésre, amely elvégzése után derült ki, melyik tanulót hová lehetett sorolni a szintek alapján. Kutatócsoportja sokat gondolkodott a feladatok típusain és megfogalmazásukban és a ma használt tesztfeladatok lettek a véglegesített felmérő teszt [6].

Van Hiele által megfogalmazott szintek a geometriagondolkodás felmérésére [5]:

1. **Kiindulási szint:** az alakzatokat, mint egészet látják, felismerik, de nem veszik észre a tulajdonságokat és azok összefüggéseit.

2. **Elemző szint:** megkezdődik az alakzatok tulajdonságainak vizsgálata, de a köztük levő kapcsolatokat még nem ismeri fel. Az alakzatokat ezért még nem definiálják.

3. **Rendezési szint:** megkezdődik az alakzatok logikai rendszerezése tulajdonságaik alapján, a tulajdonságok összefüggéseinek felfedezése, a bizonyítások kezdetei.

4. **Lokális dedukció szintje:** az egyes részek deduktív felépítése, alapfogalmak, axiómák, definíciók, tételek, bizonyítások.

5. **Axiomatikus felépítés:** az axiómákat egymás után alkalmazni megfelelően a megoldás elérése érdekében.

Egy tanuló akkor sorolható egy adott szinthez, ha az előtte lévő szinteket teljesítette, vagyis ha az 1 és 3-as szinteket megugrotta, de a 2 szintet nem végezte el, akkor ő nem sorolható a 3-dik szinthez, és máshoz sem. De viszont, ha teljesítette a három szintet teljesen, akkor ő a 3-dik szinthez sorolható. Ehhez legalább az 5 feladatból hármat helyesen kell megoldania, hogy teljesítse, míg ez másik módszer szerint 4 helyes feladat garantálja a tovább lepést [4].

Van Hiele szintek felosztása képességek alapján

Van Hiele-szintek egy elméleti keret, amelyet Pierre Van Hiele holland oktatáskutató fejlesztett ki a geometriai gondolkodás fejlődésének leírására. Ezek a szintek jelzik, hogy a diákok milyen szinten értik és dolgozzák fel a geometriai fogalmakat és elveket. A Van Hiele-szintek általában öt szintre oszthatók, bár néha egy hatodik szint is említésre kerül.

Herendiné Kónya Eszter "A geometriai képességek fejlesztésének lehetőségei" [7] munkájában írta le a Van Hiele szintegek tudásszint fejlettsége szerint.

Van Hiele-szintek a legegyszerűbbtől a legfejlettebbig:

0. szint: A tanuló megfigyeli a geometriai alakzatokat, de még nem ismeri fel a kapcsolatokat közöttük.

1. szint: A tanuló képes az alakzatokat felismerni, megnevezni őket.

2. szint: A tanuló már képes értelmezni és leírni az alakzatok tulajdonságait és kapcsolatokat találni közöttük.

3. szint: A tanuló az alakzatokat a definíciókkal képes felismerni, a tulajdonságokat megnevezni felismerni, egyszerű axiómákat bizonyítani.

4. szint: A tanuló ismeri a különbséget az axiómák, állítások, definíciók között, de nem feltétlen tudja visszavezetni bizonyítását axiómákra. Az elfogadott állításokat nem tartja fontosnak bizonyítani, így nem is teszi.

5. szint: A tanuló képes az absztrakt gondolkodásra, vagyis az axiómákat tudja használni és kombinálni őket a megoldás elérése érdekében, tudja őket bizonyítani, alátámasztani állításait. (ez a legmagasabb szint).

A van Hiele rendszer jelemzői

A van Hiele rendszer jellemzőit Herendiné Kónya Eszter "A geometriai képességek fejlesztésének lehetőségei" [7] munkájában fogalmazta meg.

- a felépített sorrend nem változhat, követnie kell az eredeti felépítést, és addig nem léphet a következő szintre, míg nem teljesíti az előtte lévőt/lévőket;
- minden szint rendekezik saját jelölő rendszerrel, szimbólumokkal, a fogalmak változhatnak a szintek változásával, hiszen a tanárnak azon a szinten kell oktatnia tanulóit, amilyennek azok tudása felel meg, hiába ő feljebb van a ranglétrán;
- egyes fogalmakat egyik szinten csak említünk, míg a következőkben kifejtjük azokat;
- ha a tanár saját szintjének megfelelően adja át az anyagot, a diákjai nem fogják tejes mértékben megérteni, csak meg fogják tanulni;
- egy adott osztályban a tanulók lehetnek más szinteken, így különbözően is gondolkodnak, amire a tanárnak számítania kell és tudnia kezelni;
- ha egy szinten túl szeretne lépni a tanuló, ez motiválsa a minőségesebb tanulásra és nem függ a korosztályától.

Köpeczi-Bócz Ákos Tamás, Széles Katalin, Dobák Dávid a "Mérnökhallgatók geometriai gondolkodásának mérése Van Hiele teszt segítségével" [8] című dolgozatában fogalmazák meg, melyben olvasható a Van Hiele szintek létrejötte és megtalálható maga a teszt is. A tesztet szintén felhasználta Győry Ákos a Matematikából tehetséges középiskolai tanulók geometriai bizonyítási képességének vizsgálata és fejlesztése [6] című kiadványában, melyben ő is a geometriai tudást vizsgálta.

2.2. A geometriai gondolkodás szintjei Clemens - Battista szerint

A Van Hiele házaspár felépített egy geometriai gondolkodás szintrendszert, amellyel a tanulók mértani szintjeit meg lehet vizsgálni és osztályozni egy a neki megfelelő szinthez. De a fogalmak fejlődési szintjeinek egy továbbfejlesztett változatát Clemens és Battista – geometria didaktika kutatói állították össze [1].
A Clemens és Battista szintjeit Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely a "Matematika módszertani példatár"-ban [1] fogalmazták és írták le.

Clemens és Battista geometriai fogalmak fejlődési szintjei:

0. szint: **Felimerés előtti:** A gyerekek érzékelik a formákat, de nem képesek különbséget tenni közöttük.

1. szint: **Vizuális:** A gyerekek felismernek különböző formákat, tulajdonságokat, mentális képeket alkotnak. Ezeket a formákat és tulajdonságokat egységes egészként érzékelik, jellemzésükhöz vizuális, képszerű leírásokat használnak. (egy forma kör, mert úgy néz ki mint egy érme).

2. szint: **Leíró, analitikus:** A tanulók már tudják csoportosítani a formákat és azok részleteit, tulajdonságait, amik alapján azonosítani tudják őket. Az alakzatokat egyként, a tulajdonságokat szintén családként érzékelik őket.

3. szint: **Absztrakt, összefüggés felismerő:** A tanulók a megfigyelt tulajdonságok alapján meghatározásokat fogalmaznak meg és osztályokra osztják. A meghatározott osztályok és meghatározások alapján feltételeket állítanak fel és összefüggéseket neveznek meg.

4. szint: **Formális dedukció:** A tanulók bizonyításokat oldanak és fogalmaznak meg. Tételeket alkotnak és ezeket alátámasztják következtetésekkel.

5. szint: **Szigor, matematikai:** A tanulók érveléseket tudnak felépíteni matematikai rendszerek segítségével. Érvelésük alapján képesek megalapozni és összehasonlítani különböző axiomatikus rendszereket.

3. Geometria az oktatásban

Geometria – az alakok, térbeli és síkbeli objektumok vizsgálatával foglalkozik. Több területet is magába foglal: síkgeometria, térgeometria, trigonometria, differenciálgeometria. Az alapok megértése fontos a felmerülő geometriai problémák és feladatok megoldása szempontjából és a térbeli viszonyok jobb megértéséhez.

A geometria oktatása és tanulása még alsó osztályban kezdődik az általános formák felismerésével majd halad fokozatosan a bonyolultabb témák felé, amelyeket felső (7-9) osztályokban folytatnak Mértan tantárgy néven. A gyakorlati feladatok és problémák megoldása fontos része úgy az oktatásnak, mint a mindennapi életnek, hiszen segít jobban megérteni a körülvevő világot és maga a matematikát.

Maga a mértan nagy része az alakzatokon épül, amelyek sokszor szembe jönnek velünk a mindennapokban.

Néhány fontos része a geometriának:

- pont, egyenes, szakasz;
- háromszög;
- négyszög, sokszög;
- kör, körvonal, hasonlóság;
- terület, kerület;
- síkbeli és térbeli alakzatok.

A mértan mint külön tantárgy a matematikából a 7-dik osztályban válik ki, ahol a tanulók megismerkednek a háromszöggel és tulajdonságaival, párhuzamos egyenesekkel, a körvonallal és körlappal.

3.1. A geometria témakörei az oktatásban

A Merzljak által összeállított mértan könyveket vizsgáltam, a magyar nyelven elért formátumai miatt minden osztály számára.

A Merzljak 7. osztályos tankönyv [9] az alábbi paragrafusokból és altémákból állm melyekre 70 óra van adva:

1.§ A legegyszerűbb mértani alakzatok és tulajdonságaik
Az adott témakörre 8 óra van adva az elsajátításra

2.§ Háromszögek
Ez a témakör nagy részét teszi ki a tematikának, és elsajátítására 27 óra van adva.

3.§ Párhuzamos egyenesek. A háromszög szögeinek összege
A témakört 12 óra leforgása alatt tanulják meg.

4.§ Körvonal és körlap
Az adott témakörre 13 óra áll rendelkezésre.

A 8-dik osztályos mértan már bővül a sokszögekkel, négyszögekkel, hasonlósággal és területszámításokkal.
A Merzljak 8. osztályos mértan tankönyv [10] az alábbi témákat és altémákat tartalmazza, melyekre 70 óra van adva:

1.§ Négyszögek
Az adott témakör 21 órából áll.

2.§ A háromszögek hasonlósága
Az adott témakör elsajátítása 7 óra alatt zajlik le.

3.§ Derékszögű háromszögek megoldása
A megértésre és elsajátításra 11 óra áll rendelkezésre.

4.§ Sokszögek. A sokszög területe A témakör átvéte 19 órából áll. És még 7 óra a tanagyag megismétlésére és az év lezárására.

A geometria a 9-dik osztályban több új anyagot is magába foglal, de az előtte lévő témák közül is bővíti a tudást.
A Merzljak Mértan 9. osztályos tankönyv [11] az alábbi témakörökből áll, melyekre 70 óra van adva:

1.§ Háromszögek megoldása
Az adott témakör elsajátítása 14 óra alatt valósul meg.

2.§ Szabályos sokszögek
Erre a témakörre 10 óra adott.

3.§ Descartes-féle koordináták a síkon
A témakörre szintén 10 óra van szánva.

4.§ Vektorok
Ez a témakör 13 órában sajátítódik el.

5.§ Geometriai transzformációk
E témakör megértésére 7 óra adott.

3.2. A 9. osztály tanmenete

A 9-dik osztályos tananyag nagy része a síkmértannal foglalkozik, hiszen itt tanulják a meg a trigonometria alapjait, a háromszög területeinek a képletei, a Descartes koordináta rendszer alapjait a síkon, a vektorokat és alakzatok transzformációit [11].

Az első félévben 30 óra áll a tanárok rendelkezésére, míg a második félévben 40 óra, hogy az arra kijelölt tananyagot elsajátítsák.

A 9-dik osztály első témakörének elsajátítására 14 óra áll rendelkezésre, amely magába foglalja a tankönyv első fejezetét, a "Háromszögek megoldása" -t. Ide tartozik a szinusz, koszinusz, tangens értékei 0° - 180° -ig, a szinusz- és koszinusztétel, a háromszögek megoldásai és területei.

A szögeket egy óra alatt, míg a $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ trigonometrikus azonosságot ismerik meg.

Utána a "Koszinusztétel és annak következményei", amely 1-1 órát köt le. A következő altéma a "Szinusztétel", amelyet "A tétel arányos összefüggéseinek kapcsolata a szinuszok és a kör átmérője" követ. Ezekre szintén 1-1 óra van határozva.

Ezek után jönnek a háromszög megoldásai, amely a "Háromszögek területének a meghatározására szolgáló képletek" -kel kezdődik, amelyet a "Herón képlete" s a "Háromszög köré és bele írt körvonal sugarai" követ.

Ennek a témakörnek az a lényege, hogy maga a szögek értékeivel megismerkedjenek, a háromszög területeit több módon tudják meghatározni, és a háromszögek köré és bele írt körvonal sugarait megtudják határozni a területek alapján.

A következő témakör "Szabályos sokszögek. A körvonal hossza. A körlap területe", amely 10 óra alatt sajátítanak el.

Két óra alatt megismerkednek a "Szabályos sokszögek" -kel, azok fajtájaival és tulajdonságaival.

Majd két óra a "Szabályos sokszögekbe és köré írt kör sugarainak képletei" -t sajátítják el. Két óra "A körvonal hossza" -ra és "A körvonal ívhossza" -ra van tervezve, majd szintén két óra "A körlap területe" -re és annak részeire.

A harmadik része "Koordináták a síkon" amelyre 10 óra van kijelölve, ebből 3 óra az első félévre, míg a többi 7 óra a második félévre esik.

Az első félévben még átveszik egy órában "A derékszögű koordinátarendszer a síkon" és két órában "A szakasz felezőpontjának koordinátái" -t.

Majd a második félévben 2 órában átveszik "A két pont közötti távolság adott koordinátákkal". Egy óra keretein belül megismerkednek az "Alakzat egyenlete" -vel és "A körvonal egyenlete" -vel. Egy óra még "A körvonal egyenlete" -re van szánva, majd még két óra az “Egyenes egyenlete” -vel.

A negyedik témakör a "Vektorok a síkon", amely 13 óra alatt kerül elsajátításra.
Két óra a "Vektor abszolút értéke és iránya. A vektorok egyenlősége" részre, egy óra a "Vektor koordinátái" -ra, két óra a "Vektorok összeadása és kivonása" -ra.
"A vektorok összegével (különbségével) egyenlő vektor szerkesztése" -re egy óra, míg a "Vektor szorzata számmal" két óra van kijelölve.
Egy óra van a "Kollineáris vektorok" -ra, két óra a "Vektorok skaláris szorzata" -ra.
Ezekkel a témákkal a vektorok alaptulajdonságait és fogalmait ismerik meg és sajátítják el.

Az ötödik témakörre a "Geometriai transzformációk" -ra 7 óra van szánva, hogy a témakört megértsék.
Egy óra az "Elmozdulás és tulajdonságai" -ra, egy óra a "Szimmetria ponthoz viszonyítva. Szimmetria egyeneshez viszonyítva" témára, egy óra a "Elfordulás. Párhuzamos eltolás" -ra, és egy óra az "Alakzatok hasonlósága" -ra.

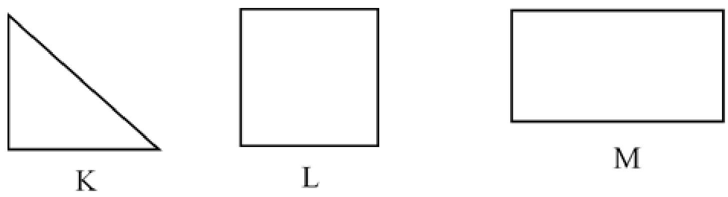
Ezeken kívül minden témakor tartalmaz feladatok megoldására szánt órákat, a dolgozatok megírására, és az azt követő órákon azok megoldását és az új téma megismerését.

Majd 9 óra van szánva az éves anyag rövid átismétlésére.

4. A feladatsor megoldása

A feladatsor 24 feladatból állt. Az 1-5 feladatok 1 pontot, a 6-10 feladatok 2 pontot, 11-15 feladatok 4 pontot értek. 16-21 feladatok szintén tesztes formában voltak megadva, melyekkel 1 pontot lehetett minden helyes válaszért kapni, míg a teljes kidolgozást igénylő feladatok teljes megoldására 3 pontot kaptak. Viszont, ha fel volt írva a megoldó képlet és egy helyes rajz, egy pontot kaptak, a hibás végeredményért, de helyes megoldás meneteért 2 pontot. A teljes feladatsor megoldásakor a maximális pontszám 50 pont volt.

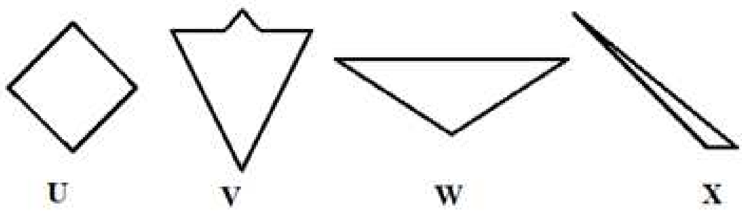
1. Melyik négyzet?



a) Csak K
b) Csak L
c) Csak M
d) Csak L és M
e) Mind az

A helyes válasz: b) Csak L.
A tanulók 62 %-a adott helyes választ.

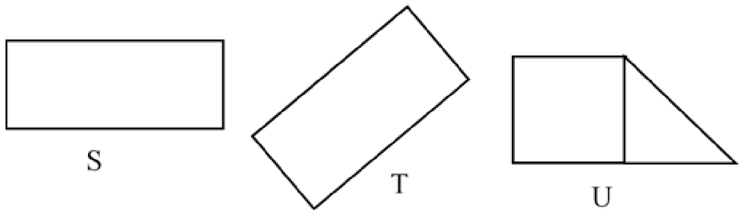
2. Melyik háromszög?



a. Egyik sem
b. Csak V
c. Csak W
d. Csak W és X
e. Csak V és W

A helyes válasz: d) Csak W és X.
A tanulók 66 %-a adott helyes választ.

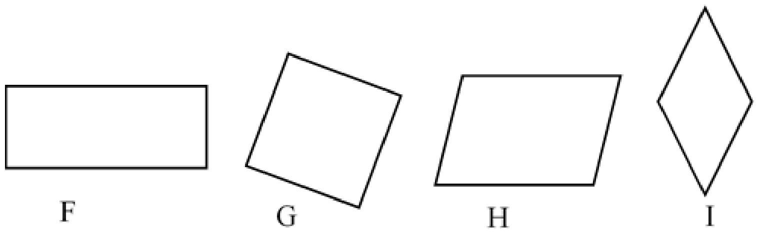
3. Melyik téglalap?



a) Csak S
b) Csak T
c) Csak S és T
d) Csak S és U
e) Mind az

A helyes válasz: c) Csak S és T.
A tanulók 82 %-a adott helyes választ.

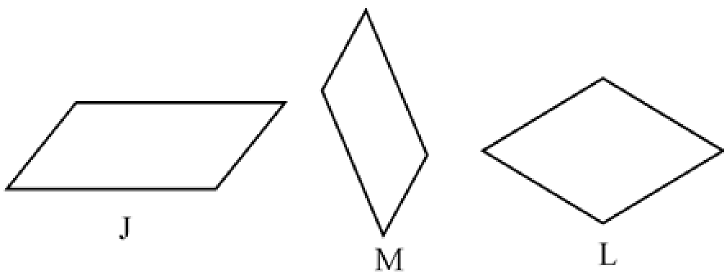
4. Melyik négyzet?



a) Egyik sem
b) Csak G
c) Csak F és G
d) Csak G és I
e) Mind az

A helyes válasz: b) Csak G.
A tanulók 68 %-a adott helyes választ.

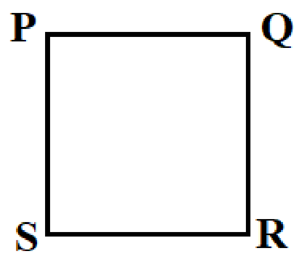
5. Melyik paralelogramma?



a. Csak J
b. Csak L
c. Csak J és M
d. Egyik sem
e. Mind az

A helyes válasz: b) Csak L.
A tanulók 24 %-a adott helyes választ.

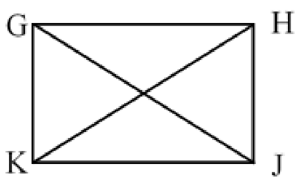
6. PQRS egy négyzet (lásd ábra). Melyik állítás igaz rá?



a. PR és RS ugyan olyan hosszúságú
b. QS és PR merőlegesek egymásra
c. PS és QR merőlegesek egymásra
d. PS és QS ugyan olyan hosszúságú
e. A Q-nál lévő szög nagyobb, mint az R-nél lévő szög.

A helyes válasz: b) QS és PR merőlegesek egymásra.
A tanulók 34 %-a adott helyes választ.

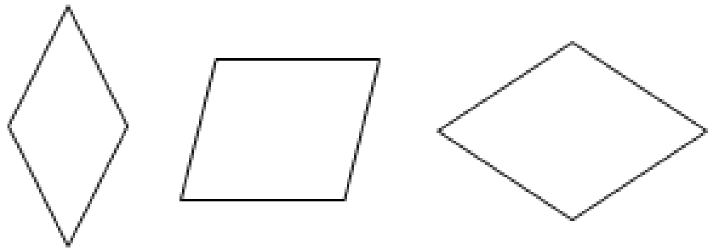
7. GHJK egy téglalap, GJ és HK az átlói (lásd ábra). Melyik állítás nem igaz rá a-d közül?



a) Négy derékszöge van
b) Négy oldala van
c) Átlói egyenlő hosszúságúak
d) Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak
e) a)-d) közül mind igaz

A helyes válasz: e) a)-d) közül mind igaz.
A tanulók 42 %-a adott helyes választ.

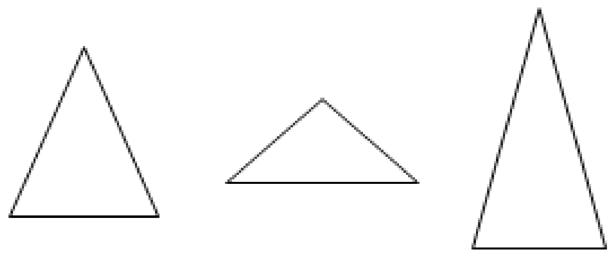
8. Melyik állítás nem igaz egy tetszőleges rombuszra (lásd ábra) a-d közül?



   a. A két átlója egyenlő hosszúságú
   b. Mindkét átlója felezi a rombusz két-két szögét
   c. A két átlója merőleges egymásra
   d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak
   e. a-d közül mind igaz

   A helyes válasz: a) A két átlója egyenlő hosszúságú.
   A tanulók 54 %-a adott helyes választ.

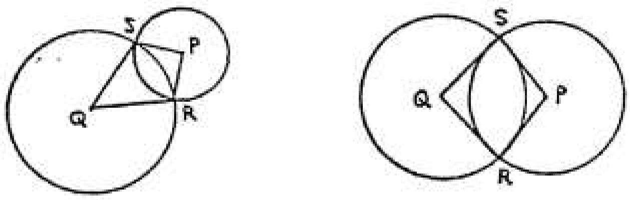
9. Melyik állítás igaz egy egyenlő szárú háromszögre (lásd ábra) a-d közül?



   a) Mindhárom oldala egyenlő hosszúságúnak kell, hogy legyen
   b) Az egyik oldalának kétszer akkorának kell lennie, mint egy másiknak
   c) Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen
   d) Három szögének egyenlő nagyságúnak kell lennie
   e) a)-d) közül egyik sem igaz

   A helyes válasz: c) Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen.
   A tanulók 60 %-a adott helyes választ.

10. Egy P és egy Q középpontú kör metszéspontjai R és S. Ezek a pontok meghatározzák a PRQS alakzatot. Két példát meg is adtunk (lásd ábra). a-d közül melyik állítás nem mindig igaz?



a. PRQS-nek van két egyenlő hosszúságú oldalpárja
b. PRQS-nek legalább két szöge egyenlő nagyságú
c. A PQ és RS egyenesek merőlegesek egymásra
d. A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak
e. a-d közül mind igaz

A helyes válasz: d) A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak.
A tanulók 28 %-a adott helyes választ.

11. Tekintsük a következő két állítást:

i. Az F alakzat téglalap
ii. Az F alakzat háromszög

Melyik igaz az alábbiak közül?

a. Ha i igaz, akkor ii is az.
b. Ha i hamis, akkor ii igaz.
c. i és ii egyszerre nem lehet igaz.
d. i és ii nem lehet egyszerre hamis.
e. a-d közül egyik sem igaz.

A helyes válasz: c) i és ii egyszerre nem lehet igaz.
A tanulók 34 %-a adott helyes választ.

12. Tekintsük a következő két állítást:

i. Az ABC háromszögnek van három egyenlő hosszúságú oldala.
ii. Az ABC háromszögben a B-nél, illetve a C-nél lévő szögek egyenlő nagyságúak.

Melyik igaz az alábbiak közül?

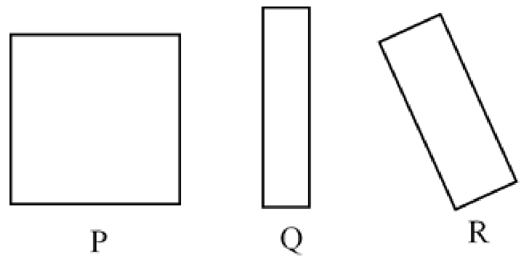
a) i és ii egyszerre nem lehet igaz.
b) Ha i igaz, akkor ii is az.
c) Ha ii igaz, akkor i is az.

d) Ha i hamis, akkor ii is hamis.

e) a-d közül egyik sem igaz.

A helyes válasz: b) Ha i igaz, akkor ii is az.
A tanulók 32 %-a adott helyes választ.

13. Az alábbiak közül melyik téglalap?



a.	Mind az	c.	Csak R	e.	Csak Q és R
b.	Csak Q	d.	Csak P és Q		

A helyes válasz: a) Mind az.
A tanulók 12 %-a adott helyes választ.

14. Melyik igaz?

a) A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is

b) A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes téglalapnak is.

c) A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.

d) A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.

e) a)-d) közül egyik sem igaz.

A helyes válasz: a) A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is.
A tanulók 16 %-a adott helyes választ.

15. Az alábbiak közül melyik az, ami minden téglalapra igaz, de bizonyos paralelogrammákra nem?

a. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak

b. Átlói egyenlő hosszúságúak

c. Szemközti oldalai párhuzamosak

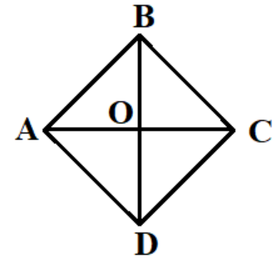
d. Szemközti szögei egyenő nagyságúak

e. a-d közül egyik sem igaz.

A helyes válasz: b) Átlói egyenlő hosszúságúak.
A tanulók 24 %-a adott helyes választ.

Az alábbi feladatok a Merzljak DPA feladatgyűjteményből [12] vannak válogatva.

16. Mivel kell, hogy egyenlő legyen az OC szakasz, hogy az ABCD rombusz, amely az ábrán látható, négyzet legyen, ha a BO = 8 cm?

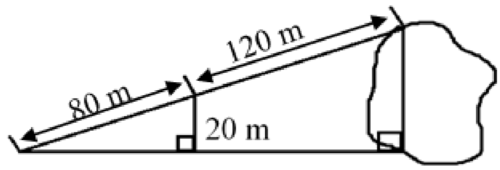


1. ábra. Rombusz

a) 2 cm c) 8 cm b) 4 cm d) 16 cm

A helyes válasz: c) 8 cm.
A tanulók 52 %-a adott helyes választ.

17. Az adatokkal, amelyek az ábrán vannak feltűntetve, határozzátok meg a tó szélességét.

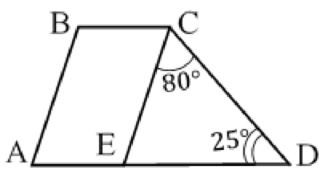


2. ábra. Tó

A) 30 cm C) 60 cm B) 50 cm D) 80 cm

A helyes válasz: b) 50 cm.
A tanulók 12 %-a adott helyes választ.

18. A CE egyenes párhuzamos az ABCD trapéz AB oldalával, ahogy az ábrán látható. Határozd meg a trapéz B szögét.



3. ábra. Trapéz

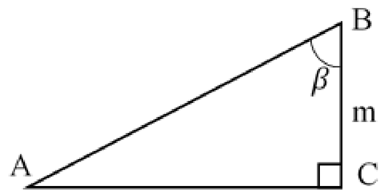
A) 80° C) 75° B) 105° D) 100°

A helyes válasz: b) $105°$.
A tanulók 34 %-a adott helyes választ.

19. Mivel egyenlő a paralelogramma nagyobbik oldala, ha az 8 cm-el nagyobb, mint a másik, és a paralelogramma kerülete 40 cm.
a) 20 cm c) 16 cm b) 18 cm d) 14 cm

A helyes válasz: d) 14 cm.
A tanulók 24 %-a adott helyes választ.

20. Az ábrán az ABC derékszögű háromszög látható ($C\angle = 90°$). Határozd meg az AC oldalt.

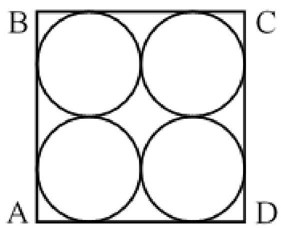


4. ábra. Háromszög

A) $m \cdot \tan\beta$ C) $m \cdot \cos\beta$ B) $m \cdot \sin\beta$ D) $\frac{m}{\cos\beta}$

A helyes válasz: a) $m \cdot \tan\beta$.
A tanulók 26 %-a adott helyes választ.

21. Az ABCD négyzetbe négy egyforma kört rajzoltak 5 cm-es sugarakkal, ahogy az ábrán látható. Mivel egyenlő az ABCD négyzet területe?

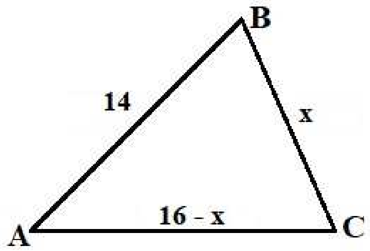


5. ábra. Négyzet

A) $25\ cm^2$ C) $80\ cm^2$ B) $100\ cm^2$ D) $400\ cm^2$

A helyes válasz: d) $400\ cm^2$.
A tanulók 32 %-a adott helyes választ.

22. Egy háromszög két oldalának összege 16 cm, a köztük lévő szög – $120°$. Határozd meg közülük a kisebbik oldalt, ha a háromszög harmadik oldala 14 cm-el egyenlő.
Kidolgozás:
Adva van:
ABC - háromszög
$AB = 14\ cm$,
$BC + AC = 16\ cm$
$C\angle = 120°$
Kiszámítani: a legkisebb oldalt.
Megoldás:

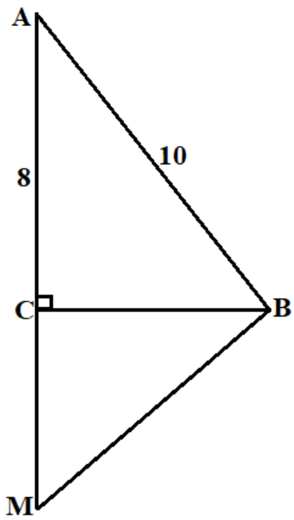


6. ábra. Háromszög oldalai

Legyen: $BC = x$, akkor $AC = 16 - x$
Felírjuk a koszinusz tételt: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot cosC\angle$
$14^2 = x^2 + (16 - x)^2 - 2 \cdot x \cdot (16 - x) \cdot cos120°$
$196 = x^2 + 256 - 32x + x^2 + 16x - x^2$
$x^2 - 16x + 60 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \cdot 60 = 256 - 240 = 16 = 4^2$
$x_1 = \frac{16+4}{2} = 10\ ; \quad x_2 = \frac{16-4}{2} = 6$
Vagyis a kisebbik oldal $6\ cm$.
Felelet: $6\ cm$.

A tanulók közül senki sem oldotta meg a feladatot. Viszont két tanuló kapott 1 pontot, mert szerepelt egy helyes rajz és egy helyes képlet, míg 4 tanuló 2 pontot kapott, amiért helyes volt a megoldás menete, csak helytelen a végeredmény.

23. Az ABC háromszögről tudjuk, hogy a $C\angle = 90°$, AB = 10 cm, AC = 8 cm. Az AC oldal meghosszabbításán a C pont után egy M pontot vettünk fel úgy, hogy a CM = 6 cm. Mivel egyenlő a BM szakasz?
Kidolgozás:
Adva van:
ABC - háromszög
$AB = 10\ cm$
$AC = 8\ cm$
$C\angle = 90°$
$CM = 6\ cm$
Kiszámolni: BM - ?
Megoldás:

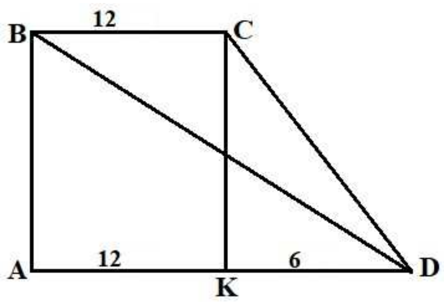


7. ábra. Háromszög

Pitagorasz tételével az ABC - háromszögben meghatározzuk a CB - szakasz hosszát:
$AB^2 = BC^2 + AC^2$
$BC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$
$BC = 6\ cm$
$CM = BC = 6\ cm$ => MCB - háromszög egyenlőszárú és derékszögű.
Vagyis ismét felírható Pitagorasz tétele MCB - háromszögre.
$BM^2 = CM^2 + CB^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$
$BM = \sqrt{72} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$
Felelet: $BM = 6\sqrt{2}$.

A tanulók közül egy oldotta meg végig és helyesen a feladatot, így megkapta a 3 pontot, és 2 tanuló kapott 1 pontot, a helyes rajzért és felírt képletért.

24. A derékszögű trapéz alapjai 18 cm és 12 cm, a hegyesszögből húzott átmérő az adott hegyesszög szögfelezője. Határozd meg a trapéz területét.
Kidolgozás:
Adva van:
$ABCD$ - derékszögű trapéz
$BC = 12\ cm$
$AD = 18\ cm$
Kiszámítani: $S = ?$
Megoldás:



8. ábra. Trapéz területe

Legyen CK - magasság
$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CK$
A két párhuzamos egyenest metsző harmadik egyenes tulajdonsága alapján a megfelelő szögek egyenlők: $BDA\angle = BDC\angle = CDB\angle$
Ebből következik, hogy BCD - háromszög egyenlőszárú, vagyis $BC = CD = 12\ cm$
$AK = 12\ cm; \quad KD = 18 - 12 = 6\ cm$
Akkor Pitagorasz tételével, a CKD - háromszögben:
$CK^2 = CD^2 - KD^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$
$CK = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$
$S = \frac{18+12}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 15 \cdot 6\sqrt{3} = 90\sqrt{3}\ cm^2$
Felelet: $90\sqrt{3}\ cm^2$

Ezt a feladatot egy tanuló sem oldotta meg, el sem kezdték a megoldást.

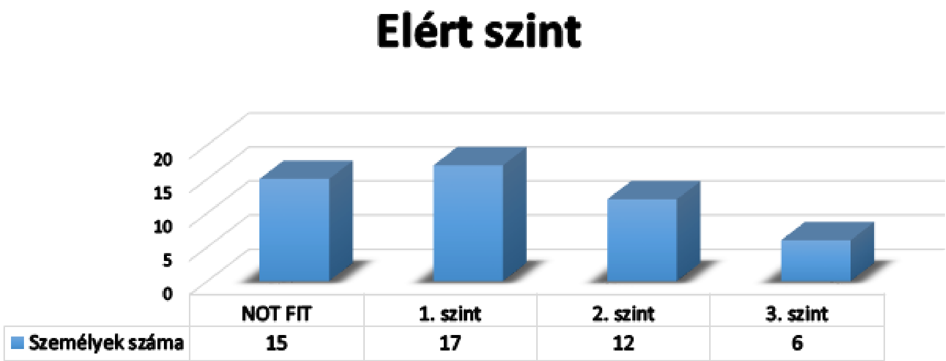
5. A feladatsor körülményei és eredményei

A 9-dik osztályban végeztem egy felmérést, amelyhez Van Hiele által összeállított teszt első tizenöt feladatát használtam fel, hogy megtudjam, a tanulók milyen szinten vannak a geometria gondolkodás terén. A 15 feladat magába zárja a Van Hiele által felosztott geometriai gondolkodás első három szintjét.
Mint, ahogy Van Hiele is felosztotta, a harmadik szintet elérő tanulók, felismerik és megkülönböztetik a geometriai alakzatok tulajdonságait és képesek kapcsolatokat és különbségeket is tenni. Az első szintet elérő tanulók tudása abban rejlik, hogy felismerik az alakzatokat, míg a második szintnél már meghatározzák a tulajdonságokat, de kapcsolatokat nem tudnak létrehozni közöttük.

A megírt feladatsor másik része az Ukrajnai DPA feladatok közül lett válogatva, melyeket már tanultak a teszt megírásáig. Ezzel az volt a célom, hogy megvizsgáljam, hogyan tudják értelmezni a feladatok szövegét és hogyan tudják alkalmazni a tanultakat.

A feladatsor írására 40 perc volt adva, és 50 tanuló írta meg. 3 iskola vett részt a felmérésben, mely anonim volt, papír alapú és önálló munka. A megiratást követően különböző eredmények születtek.

Az eredmények alapján a tanulók az alábbi szinteket érték el:



9. ábra. Elért szint

A diagramon látható, hogy több olyan tanuló is volt, aki nem érte el az első szintet sem. Ez azt jelenti, hogy vagy nem helyesen válaszoltak, vagy nem igazán tudták felismerni az alakzatokat.
A Van Hiele szintek szerint, aki nem old meg helyesen legalább három feladatot, az nem tud lépni a következő szintre.
A NOT FIT - azt mutatja, hogy az 50 tanulóból 15 nem oldotta meg az első 5 feladat legalább három feladatát helyesen. Vagyis nem érte el az első szintet. Az 1. szintet 17 tanuló érte el, így az alakzatokat felismerik, de mivel a tulajdonságokat nem tudják teljes mértékben, így nem érték el a következő szintet. A 2. szintet 12 tanuló érte el, míg a 3. szintet csak 6 tanuló.

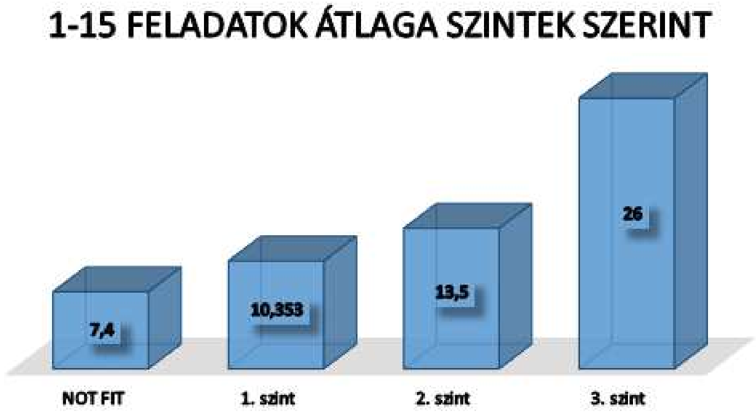
Feladatonként a tanulók helyes válaszainak száma az alábbi diagramokon látható.

10. ábra. Van Hiele teszt feladatonkénti helyes felelések száma

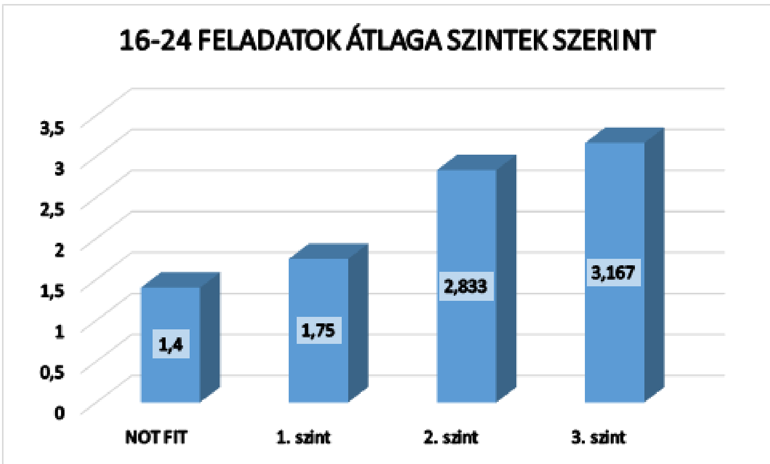
11. ábra. DPA feladatok helyes feleléseinek száma

A tanulók változóan válaszoltak a kérdésekre és nem minden esetben adtak jó választ. Ahogy látható, az első 4 feladatot a legtöbb tanuló helyesen válaszolta meg, így az első szintet meg tudták ugrani. Viszont ezek után már egyre többen vétettek hibát, vagy nem helyesen értelmezték a feladatot. A 7-9 feladatokat szintén elég sokan megválaszolták helyesen, de a 12. feladat után már a hibák csak növekedtek.

Mivel nem csak a Van Hiele tesztből állt a feladatsor, így megvizsgáltam azt is, hogy az adott szinten a tanulók hogyan teljesítették a feladatsor második részét. Átlagot vizsgáltam az elért szinteknek megfelelően, és feltűnt, hogy minél magasabb szintet ért el a tanuló a Van Hiele tesztben, annál nagyobb volt az átlag is.



12. ábra. Átlag a Van Hiele feladatokból

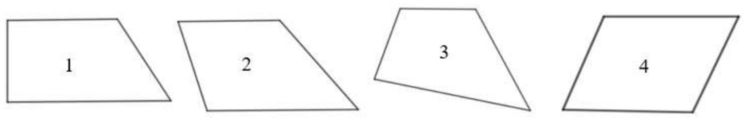


13. ábra. Átlag a DPA feladatokból

6. A geometriai gondolkodást fejlesztő feladatsor

A megiratott feladatsor eredményei alapján összeállítottam egy olyan feladatgyűjteményt, amely segít megismételni és könnyebben megérteni a mértani tulajdonságokat és azok akalmazását egyszerű feladatok megoldásánál. Az a célom ezekkel a feladatokkal, hogy a tanulók meg tudják figyelni, hogy miket tudnak adott témakörökben és mit kell még megismételni.
Szeretném, ha ezzel a feladatsorral fejlődnének és le tudnák ellenőrizni tudásuk vagy fejleszteni azt.
Ha lesz módomban, ki is szeretném próbálni és a tanulókkal együtt ismételni és fejlődni.
Az 1-30 feladatok az eddig szerzett ismereteim és tudásom szerint voltak összeállítva. Olyan feladatokat vettem alapul, melyek gyakran előfordulhatnak akár egy dolgozatban, tankönyvben, vagy akár egy versenyfeladatsorban is.

1. Az alábbi álakzatok közül melyek trapézok?



14. ábra. Melyik trapéz?

a) 1; 2 b) 2; 3 c) 3; 4 d) 1; 3 e) 2; 4

2. Paralelogramma -

   a. négyszög, melynek páronként párhuzamosak az oldalai
   b. négyszög, melynek páronként párhuzamosak oldalai és egyenlők
   c. négyszög, melynek minden oldala egyenlő
   d. négyszög, melynek minden szöge egyenlő
   e. négyszög, melynek két oldala párhuzamos

3. Meyik állítás hamis?

   a. a paralelogramma szemben lévő oldalai egyenlők
   b. a paralelogramma szemben fekvő szögei egyenlők
   c. a paralelogramma átlói egyenlők
   d. a paralelogramma szomszédos szögeinek összege 180 fok

4. Melyik alakzatnak egyenlők az átlói?
   a) négyzet b) rombusz c) trapéz d) paralelogramma

5. Melyik állítás igaz?

   a. a rombusz átlói egyenlők
   b. a paralelogramma átlói derékszögben metszik egymást
   c. a téglalap átlói egyenlők
   d. a trapéz átlói felezik egymást

6. Milyen tulajdonság igaz a rombuszra az alábbiak közül?
   a) minden oldala egyenlő c) átlói derékszögben metszik egymást
   b) szemben fekvő szögei egyenlők d) minden válasz igaz

7. Az alábbi alakzatok közül melyiknek van két párhuzamos oldala?
   a) négyzet b) paralelogramma c) trapéz d) rombusz

8. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
   a) a rombusz egy téglalap b) a rombusz egy négyzet
   c) a rombusz egy paralelogramma d) egy állítás sem igaz

9. Melyik négyszögnek egyenlő minden szöge?
   a) paralelogramma b) trapéz c) rombusz d) téglalap

10. Melyik négyszögnek nem egyenlők a szemben fekvő szögei?
    a) paralelogramma b) rombusz c) négyzet d) trapéz

11. Melyik négyszögnek az átlója egyben szögfelezője is?
    a) paralelogramma b) trapéz c) rombusz d) téglalap

12. Trapéz – olyan négyszög, melynek

    a. oldalai párhuzamosak
    b. két oldala párhuzamos, a másik kettő nem
    c. nincsenek párhuzamos oldalai
    d. szögei egyenlők és két oldala párhuzamos

13. Ha a trapéz egyenlőszárú, akkor az alábbi állítások közül melyik igaz?
    a) alapnál lévő szögei egyenlők c) van két derékszöge
    b) az alapjai egyenlők d) szemközti szögei egyenlők

14. Ha a háromszög szabályos, akkor az alábbi állítások közül, melyik lesz hamis?
    a) minden oldala egyenlő c) két oldala egyenlő e) minden állítás hamis
    b) minden szöge egyenlő d) két szöge egyenlő

15. Ha egy rombusznak az átlói egyenlők, akkor az milyen alakzat?
    a) téglalap c) négyzet e) egyik válasz sem helyes
    b) paralelogramma d) négyszög

16. Ha a trapéznak az átlói egyenlők, akkor az:
    a) derékszögű b) egyenlő alapú c) egyenlő szárú d) egyenlő szögű

17. Az állítások közül melyik igaz?

    a. a háromszög két oldalának összege mindig kisebb, mint a harmadik oldal értéke
    b. a háromszög két oldalának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal értéke
    c. a háromszög két oldalának összege egyenlő a harmadik oldal értékével
    d. egyik állítás sem igaz

18. Adott egy paralelogramma, melynek minden oldala egyenlő. Egyik átlója 6 cm, a másik átlója 8 cm. Mivel egyenlő az adott alakzat oldala?
   a) 5 cm   b) 6 cm   c) 4 cm   d) 3 cm   e) 8 cm

19. Adott egy négyzet, melynek területe 30 cm^2. A felsoroltak közül melyek lehetnek a téglalap oldalai?
   a) 5 cm és 6 cm   c) 7 cm és 5 cm   e) egyik válasz sem helyes
   b) 3 cm és 9 cm   d) 4 cm és 8 cm

20. Egy téglalap egyik oldala 6 cm a területe pedig 48 cm^2. Mivel egyenlő a téglalap másik oldala?
   a) 7   b) 8   c) 9   d) 12

21. Adott egy derékszögű háromszög melynek befogói 18 és 16 cm. Mivel egyenlő a négyzet oldala, ha a területe egyenlő a derékszögű háromszög területével?
   a) 16   b) 10   c) 18   d) 12

22. Ha a háromszögben meghúzzuk a három középvonalat, hány háromszöget kapunk?
   a) 3   b) 4   c) 5   d) 6

23. Egy ötszögnek hány átlója van?
   a) 5   b) 4   c) 3   d) 6

24. Ha egy rombuszban meghúzzuk a két átlót, maximálisan hány háromszög fog létrejönni?
   a) 2   b) 4   c) 6   d) 8

25. Egy trapéz két alapja megfelelően 6 és 12 cm, akkor mivel lesz egyenlő a középvonala?
   a) 10   b) 8   c) 9   d) 11

26. Egy paralelogramma nagyobbik oldala 12 cm, erre az oldalra bocsátott magassága 6 cm. Mivel lesz egyenlő a paralelogramma területe?
   a) 72   b) 36   c) 62   d) 52

27. Adott egy háromszög melynek oldalai 6, 8, 10 cm. Mivel egyenlő a háromszög területe?
   a) 12   b) 20   c) 24   d) 36

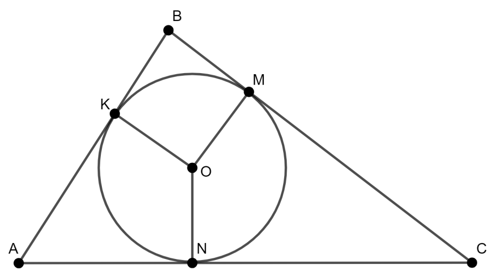
28. Adott egy trapéz, melynek egyik alapja 24 cm, a másik pedig 16 cm. Mivel egyenlő a trapéz magassága, ha a területe 60 cm^2?
   a) 2   b) 3   c) 4   d) 5

29. A téglalap átlója 10 cm és a kisebbik oldala 6 cm. Mivel egyenlő a téglalap nagyobbik oldala?
   a) 9   b) 8   c) 7   d) 6

30. A rombusz két átlója megfelelően 6 és 12 cm. Mivel egyenlő a rombusz területe?
   a) 72   b) 36   c) 48   d) 60

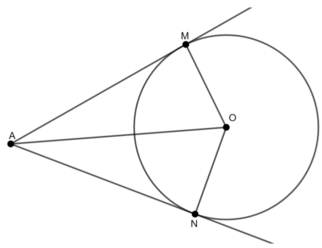
Az alábbi feladatok (31 - 40) a [13] 2013-ban kiadott DPA feladatgyűjtemény-ből lettek válogatva.

31. Adott egy körvonal, amely az ABC háromszög minden oldalát érinti (Lásd a rajzot). Az alakult szakaszok közül, melyik lesz egyenlő az AK szakasszal?



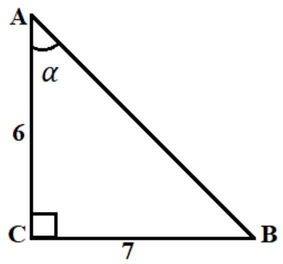
15. ábra. Szakasz hossza

32. Az ábrán AM és AN – a körvonal érintői, melynek középpontja az O pontban van. Tudjuk, hogy $AOM\angle = 75°$. Mivel egyenlő az $MAN\angle$?



16. ábra. Érintők

33. A derékszögű háromszögben α szöggel, 6 cm és 7 cm befogókkal határozd meg a $cos\alpha$. (Lásd a rajzot).



17. ábra. Derékszögű háromszög

34. Határozd meg a derékszögű háromszög területét, ha a hegyesszög szögfelezéje a szemben fekvő befogót két szakaszra osztja 3 cm és 5 cm.

35. A derékszögű trapéz nagyobbik átlója 15 cm, magassága – 12 cm, a kisebbik alapja 4 cm. Határozzátok meg a nagyobbik szárát.

36. Egy háromszög két oldala úgy aránylik egymáshoz, mint 5:3, és a köztük lévő szög $120°$. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát, ha a háromszög kerülete 45 cm.

37. Az egyenes, amely párhuzamos az ABC háromszög AB oldalával, metszi az CA és CB oldalakat M és N pontokban megfelelően. AB = 15 cm, MN = 6 cm, AM = 3 cm. Határozzátok meg az AC oldal hosszát.

38. Határozzátok meg a rombusz tompa szögét, ha az oldala az átlókkal olyan szögeket alkot, amelyek különbsége $20°$.

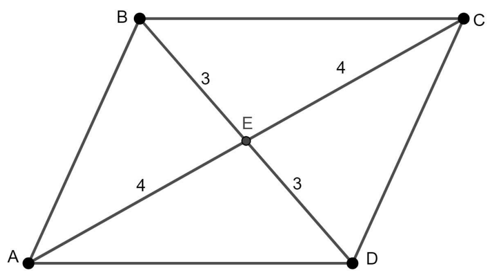
39. Egy háromszög két oldala egyenlő 10 cm és $6\sqrt{2}$ cm, és a nagyobbik oldallal szemben fekvő szög egyenlő $45°$. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát.

40. A rombusz területe egyenlő 200 cm^2, és az egyik átlója – 40 cm. Határozzátok meg a rombusz másik átlóját.

7. A feladatsor megoldókulcsa

1. Az alábbi alakzatok közül melyek trapézok?
   Helyes válasz: a. 1, 2
2. Paralelogramma -
   a. négyszög, melynek páronként párhuzamosak az oldalai
3. Meyik állítás hamis?
   Helyes válasz: c. a paralelogramma átlói egyenlők
4. Melyik alakzatnak egyenlők az átlói?
   Helyes válasz: a) négyzet
5. Melyik állítás igaz?
   Helyes válasz: c. a téglalap átlói egyenlők
6. Milyen tulajdonság igaz a rombuszra az alábbiak közül?
   Helyes válasz: d) minden válasz igaz
7. Az alábbi alakzatok közül melyiknek van két párhuzamos oldala?
   Helyes válasz: c) trapéz
8. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
   Helyes válasz: c) a rombusz egy paralelogramma
9. Melyik négyszögnek egyenlő minden szöge?
   Helyes válasz: d) téglalap
10. Melyik négyszögnek nem egyenlők a szemben fekvő szögei?
    Helyes válasz: d) trapéz
11. Melyik négyszögnek az átlója egyben szögfelezője is?
    Helyes válasz: c) rombusz
12. Trapéz – olyan négyszög, melynek
    Helyes válasz: b. két oldala párhuzamos, a másik kettő nem
13. Ha a trapéz egyenlőszárú, akkor az alábbi állítások közül melyik igaz?
    Helyes válasz: a) alapnál lévő szögei egyenlők
14. Ha a háromszög szabályos, akkor az alábbi állítások közül, melyik lesz hamis?
    Helyes válasz: e) minden állítás hamis
15. Ha egy rombusznak az átlói egyenlők, akkor az milyen alakzat?
    Helyes válasz: c) négyzet
16. Ha a trapéznak az átlói egyenlők, akkor az:
    Helyes válasz: c) egyenlő szárú
17. Az állítások közül melyik igaz?
    Helyes válasz: b. a háromszög két oldalának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal értéke

18. Adott egy paralelogramma, melynek minden oldala egyenlő. Egyik átlója 6 cm, a másik átlója 8 cm. Mivel egyenlő az adott alakzat oldala?
Kidolgozás:
Adva: ABCD - paralelogramma
AC = 6 cm
BD = 8 cm
AB = BC = CD = AD
Kiszámolni: AB - ?
Megoldás:
Mivel a paralelogramma minden oldala egyenlő, így az egy rombusz. Tudjuk a rombusz átlói merőlegesek és felezik egymást.
Vagyis $AE = EC = 4$ cm, $BE = ED = 3$ cm.



18. ábra. Ábra a 18. feladathoz

Pitagorasz tétele szerint:
$AB^2 = AE^2 + BE^2$ => $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ => $AB = 5$ (cm).
Felelet: AB = 5 cm.
Helyes válasz: a) 5 cm

19. Adott egy négyzet, melynek területe 30 cm^2. A felsoroltak közül melyek lehetnek a téglalap oldalai?
Kidolgozás:

Adva: négyzet	Megoldás:
$S_n = 30cm^2$	A téglalap területképlete: $S_t = a \cdot b$
Kiszámolni: a, b - ?	$S_n = S_t = 30$

Megyvizsgáljuk, hogy milyen szorzatokra rakható szét a szorzat: $a \cdot b = 30$
$a \cdot b = 1 \cdot 30 = 3 \cdot 10 = 2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
A válaszok közül az 5 cm és 6 cm a helyes válasz.
Felelet: a téglalap oldalai 5 cm és 6 cm.
Helyes válasz: a. 5 cm és 6 cm

20. Egy téglalap egyik oldala 6 cm a területe pedig 48 cm^2. Mivel egyenlő a téglalap másik oldala?
Kidolgozás:

Adva: téglalap	Megoldás:
$a = 6$ cm	A téglalap területképlete: $S = a \cdot b$
$S = 48\ cm^2$	Adott, hogy $S = a \cdot b = 48$
Kiszámolni: b - ?	$6 \cdot b = 48$ => $b = 8$ (cm)

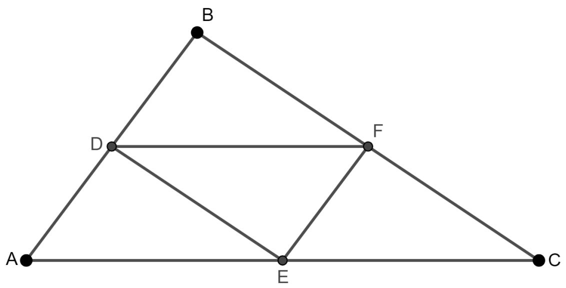
Felelet: a téglalap másik oldala 8 cm.
Helyes válasz: b. 8 cm

21. Adott egy derékszögű háromszög melynek befogói 18 és 16 cm. Mivel egyenlő a négyzet oldala, ha a területe egyenlő a derékszögű háromszög területével?
Kidolgozás:

Adva: ABC - háromszög	Megoldás:
$C\angle = 90°$	$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$
$AC = 18$ cm	$S_A BC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$
$BC = 16$ cm	$S_A BC = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 16 = 9 \cdot 16 = 144$
$S_{ABC} = SN$	$S_n = a^2 = 144$
Kiszámolni: a - ?	$a = 12$ (cm)

Felelet: a négyzet oldala 12 cm
Helyes válasz: d. 12 cm

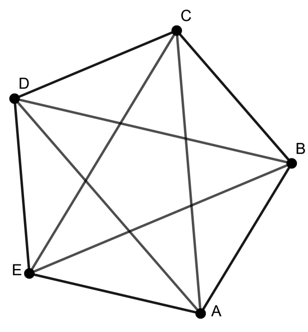
22. Ha egy háromszögben meghúzzuk a három középvonalat, hány háromszöget kapunk?
Kidolgozás:



19. ábra. Háromszögek

Felelet: 5 háromszöget kapunk.
Helyes válasz: c. 5

23. Egy ötszögnek hány átlója van?
Kidolgozás:
I módszer: Rajz segítségével:



20. ábra. Sokszög

5 átlója van.
II módszer: Képlet segítségével.
A sokszög átlóinak meghatározására használt képlet: $A = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$
Akkor az ötszög átlóinak száma: $A = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

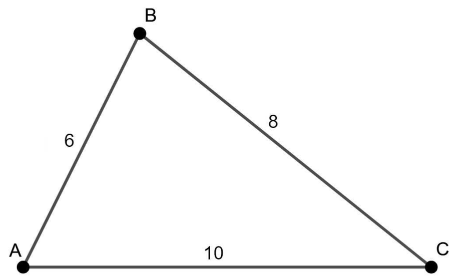
Felelet: 5 átlója van.
Helyes válasz: a. 5

24. Ha egy rombuszban meghúzzuk a két átlót, maximálisan hány háromszög fog létrejönni?
Kidolgozás:
Egy rombuszban 8 háromszög lehet: négy derékszögű és négy egyenlőszárú.
Helyes válasz: d. 8

25. Egy trapéz két alapja megfelelően 6 cm és 12 cm, akkor mivel lesz egyenlő a trapéz középvonala?
Kidolgozás:
A trapéz középvonala: $K = \frac{a+b}{2}$
$K = \frac{6+12}{2} = 9$ (cm)
Felelet: a trapéz középvonala 9 cm.
Helyes válasz: c. 9 cm

26. Egy paralelogramma nagyobbik oldala 12 cm, erre az oldalra bocsátott magassága 6 cm. Mivel lesz egyenlő a paralelogramma területe?
Kidolgozás:
A paralelogramma területképlete: $S = a \cdot h$, akkor $S = 12 \cdot 6 = 72$ (cm^2)
Felelet: a paralelogramma területe 72 cm^2.
Helyes válasz: a) 72 cm^2

27. Adott egy háromszög melynek oldalai 6 cm, 8 cm, 10 cm. Mivel egyenlő a háromszög területe?
Kidolgozás:



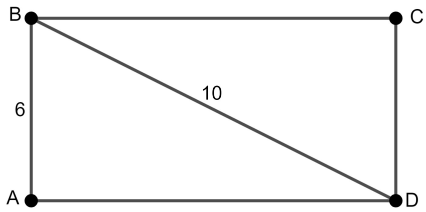
21. ábra. Ábra a 27. feladathoz

Adva: ABC - háromszög	Megoldás:
AB = 6 cm	A háromszög területe Heron szerint:
BC = 8 cm	$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$
AC = 10 cm	$p = \frac{a+b+c}{2}$
Kiszámolni: S - ?	$p = \frac{6+8+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$

$S = \sqrt{12 \cdot (12-6) \cdot (12-8) \cdot (12-10)} = 24$ (cm ^{2})
Felelet: a háromszög területe 24 cm ^{2}
Helyes válasz: c. 24 cm^2

28. Adott egy trapéz, melynek egyik alapja 24 cm, a másik pedig 16 cm. Mivel egyenlő a trapéz magassága, ha a területe 60 cm^2?
Kidolgozás:
A trapéz területképlete: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, akkor $60 = \frac{24+16}{2} \cdot h$
$60 = 20 \cdot h$ => $h = 3$ (cm)
Felelet: a trapéz magassága 3 cm.
Helyes válasz: b. 3 cm

29. A téglalap átlója 10 cm és a kisebbik oldala 6 cm. Mivel egyenlő a téglalap nagyobbik oldala?
Kidolgozás:



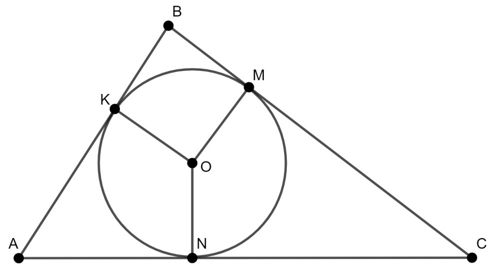
22. ábra. Ábra a 29. feladathoz

Adva: ABCD - téglalap	Megoldás:
AB = 6 cm	Felírjuk Pitagorasz tételét:
BD = 10 cm	$BD^2 = AB^2 + AD^2$ => $AD^2 = BD^2 - AB^2$
Kiszámolni: AD - ?	$AD^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$
	$AD = 8$ (cm)

Felelet: 8 cm.
Helyes válasz: b. 8 cm

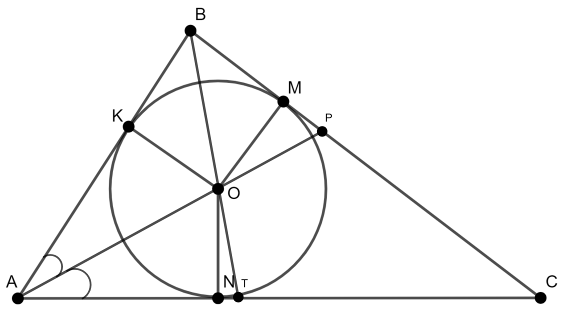
30. A rombusz két átlója megfelelően 6 és 12 cm. Mivel egyenlő a rombusz területe?
Kidolgozás:
A rombusz területképlete az átlókon keresztül: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
$S = \frac{6 \cdot 12}{2} = \frac{72}{2} = 36$ (cm^2)
Felelet: S = 36 cm ^{2}
Helyes válasz: b. 36 cm^2

31. Adott egy körvonal, amely az ABC háromszög minden oldalát érinti (Lásd a rajzot). Az alakult szakaszok közül, melyik lesz egyenlő az AK szakasszal?



23. ábra. Szakasz hossza

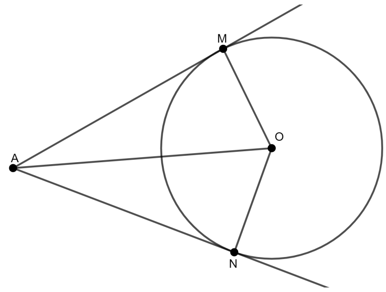
Kidolgozás:
Tudjuk, hogy a háromszögbe írt körvonal középpontja a háromszög szögfelezőinek a metszéspontjában van.



24. ábra. Ábra a 31. feladathoz

Így a megfelelő háromszögek egybevágóak. Vagyis az AKO háromszög egybevágó lesz az AON háromszöggel, mert mind a kettőnek van egy derékszöge, az $OAK\angle = OAN\angle$ és az AO közös oldaluk. Így az egybevágóság második tételéből következik, hogy a két háromszög egybevágó és akkor minden oldala és szöge megfelelően egyenlő.
Akkor az AK = AN.
Felelet: AK = AN.

32. Az ábrán AM és AN – a körvonal érintői, melynek középpontja az O pontban van. Tudjuk, hogy $AOM\angle = 75°$. Mivel egyenlő az $MAN\angle$?

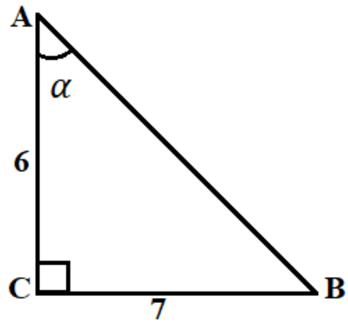


25. ábra. Érintők

Kidolgozás:

Tudjuk, hogy a közvonalhoz húzott érintőre bocsátott sugár merőleges lesz, vagyis $AMO\angle = 90°$.
Tudjuk, hogy $AOM\angle = 75°$. Akkor $OAM\angle = 180° - 90° - 75° = 15°$
A két háromszög AMO = ANO, mert mindkettőnek van derékszöge, AO oldal közös, és OM = ON = R, vagyis a körvonal sugarai.
Így az egybevágóság első tétele szerint lesz a két háromszög egybevágó, vagyis az adott szögek és oldalak egyenlők.
Akkor $MOA\angle = NOA\angle = 75°$, $MAO\angle = NAO\angle$ => $NAO\angle = 15°$ => $MAN\angle = 15° + 15° = 30°$
Felelet: $MAN\angle = 30°$

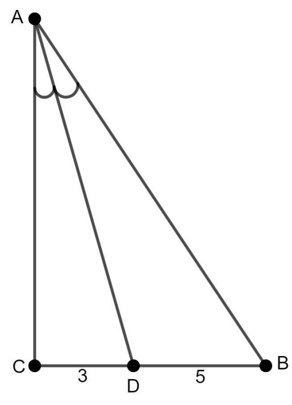
33. A derékszögű háromszögben α szöggel, 6 cm és 7 cm befogókkal határozd meg a $cos\alpha$. (Lásd a rajzot).



26. ábra. Derékszögű háromszög

Kidolgozás:
A $cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, ahol tudjuk, hogy AC = 6 cm, de AB nem adott. Akkor Pitagorasz tételével meghatározzuk:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$ => $AB = \sqrt{85}$
Vagyis $cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{85}}$.
Felelet: $cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{85}}$

34. Határozd meg a derékszögű háromszög területét, ha a hegyesszög szögfelezője a szemben fekvő befogót két szakaszra osztja 3 cm és 5 cm.
Kidolgozás:



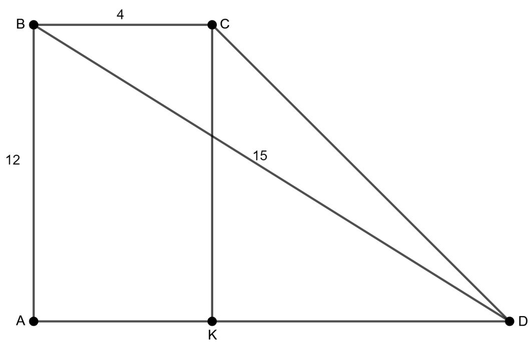
27. ábra. Ábra a 34. feladathoz

Adva: ABC - háromszög
$C\angle = 90°$
$CAD\angle = BAD\angle$
AD = 3 cm
BD = 5 cm
Kiszámolni: S - ?

Megoldás:
Felírjuk a szögfelező tételt:
$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$ => $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$
Akkor $AC = 3x,\ AB = 5x$
Felírjuk Pitagorasz tételét:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$ => $25x^2 = 9x^2 + 64$ => $16x^2 = 64$ => $x^2 = 4$ => $x = 2$
$AC = 3 \cdot 2 = 6$ cm, $AB = 5 \cdot 2 = 10$ cm
A derékszögű háromszög területe: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$
$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ cm^2
De mivel megvan mind a három oldal, kiszámítható Heron képletével is a terület.
Akkor: $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{10+8+6}{2} = \frac{24}{2} = 12$
$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{12 \cdot (12-10) \cdot (12-8) \cdot (12-6)} = \sqrt{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = 24$ (cm^2)
Felelet: $S = 24$ cm^2.

35. A derékszögű trapéz nagyobbik átlója 15 cm, magassága – 12 cm, a kisebbik alapja 4 cm. Határozzátok meg a nagyobbik szárát.
Kidolgozás:



28. ábra. Ábra a 35. feladathoz

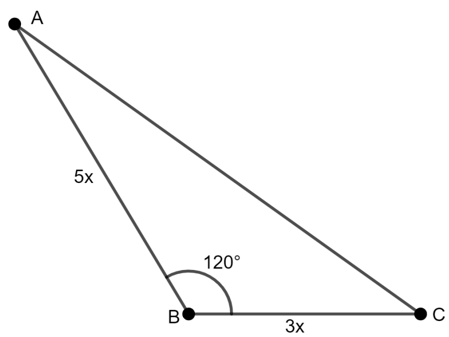
Adva: ABCD - trapéz
AB = CK = 12 cm
BC = 4 cm
BD = 15 cm
Kiszámolni: CD - ?

Megoldás:
BAD háromszög => Pitagorasz tétellel meghatározzuk az AD-t
$AD^2 = BD^2 - AB^2$
$AD^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$

$AD = 9$ cm
Mivel BC = AK => KD = 9 - 4 = 5 cm
CKD - háromszögben Pitagorasz tételével kiszámoljuk CD-t.
$CD^2 = CK^2 + KD^2$ => $CD^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ => $CD = 13$ (cm).
Felelet: a derékszögű trapéz nagyobbik szára 13 cm.

36. Egy háromszög két oldala úgy aránylik egymáshoz, mint 5:3, és a köztük lévő szög $120°$. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát, ha a háromszög kerülete 45 cm!

Kidolgozás:



29. ábra. Ábra a 36. feladathoz

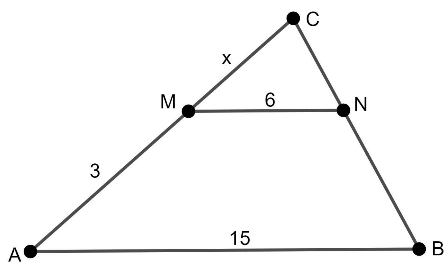
Adva: ABC - háromszög
AB : BC = 5 : 3
B∠ = 120°
P = 45 cm
Kiszámítani: AC - ?

Megoldás:
Legyen $AB = 5x,\ BC = 3x$
Felírjuk a koszinusz tételt:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot cos120°$
$AC^2 = (5x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot (-\frac{1}{2})$

$AC^2 = 25x^2 + 9x^2 + 15x^2 = 49x^2$ => $AC = 7x$
$3x + 5x + 7x = 45,$ => $15x = 45$ => $x = 3$ => $AC = 3 \cdot 7 = 21$ (cm).
Felelet: AC = 21 cm.

37. Az egyenes, amely párhuzamos az ABC háromszög AB oldalával, metszi az CA és CB oldalakat M és N pontokban megfelelően. AB = 15 cm, MN = 6 cm, AM = 3 cm. Határozzátok meg az AC oldal hosszát.

Kidolgozás:



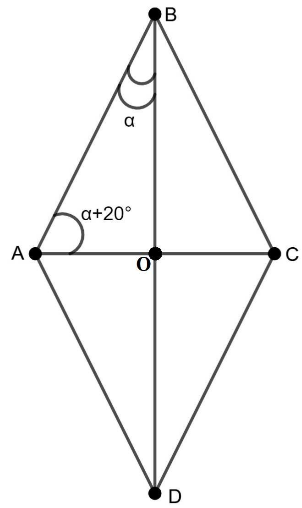
30. ábra. Ábra a 37. feladathoz

Adva: ABC - háromszög
$AB = 7$ cm
$MN = 6$ cm
$AM = 3$ cm
Kiszámolni: AC - ?

Megoldás:
Legyen $MC = x$ cm, akkor $AC = 3 + x$ cm
$\frac{AC}{AB} = \frac{MC}{MN}$
$\frac{3+x}{15} = \frac{x}{6}$
$18 + 6x = 15x$

$9x = 18$ => $x = 2$ => $AC = 3 + 2 = 5$ (cm)
Felelet: AC = 5 cm.

38. Határozzátok meg a rombusz tompa szögét, ha az oldala az átlókkal olyan szögeket alkot, amelyek különbsége $20°$.
Kidolgozás:



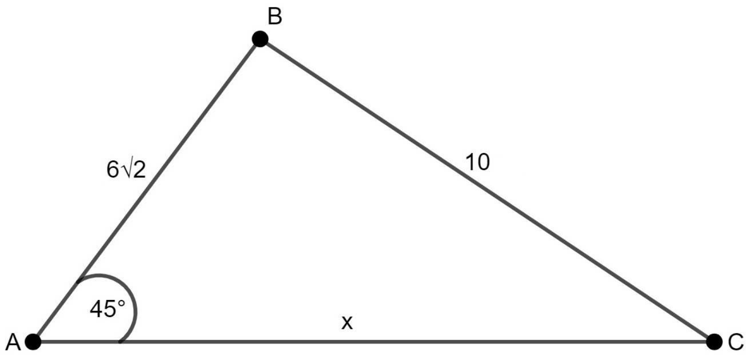
31. ábra. Ábra a 38. feladathoz

Adva: ABCD - rombusz
$AOB\angle = 90°$
$OAB\angle = ABO\angle + 20°$
Kiszámolni: $BAD\angle$ - ?

Megoldás:
Legyen $ABO\angle = \alpha,\ BAO\angle = \alpha + 20°$
Akkor: $ABO\angle + BAO\angle = 90°$
$\alpha + \alpha + 20° = 90°$
$2\alpha = 70°$ => $\alpha = 35°$
Akkor: $BAO\angle = 35° + 20° = 55°$
Vagyis: $BAD\angle = 55° \cdot 2 = 110°$

Felelet: $BAD\angle = 110°$.

39. Egy háromszög két oldala egyenlő 10 cm és $6\sqrt{2}$ cm, és a nagyobbik oldallal szemben fekvő szög egyenlő $45°$. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát.
Kidolgozás:



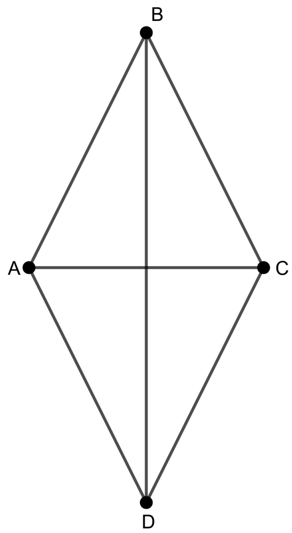
32. ábra. Ábra a 39. feladathoz

Adva: ABC - háromszög
$BAC\angle = 45°$
$AB = 6\sqrt{2}$ cm
$BC = 10$ cm
Kiszámolni: AC - ?

Megoldás:
Legyen AC = x
Felírjuk a koszinusz tételt:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos45°$
$10^2 = (6\sqrt{2})^2 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$100 = 72 + x^2 - 12x$ => $x^2 - 12x - 28 = 0$

$D = 12^2 - 4 \cdot (-28) \cdot 1 = 144 + 112 = 256$
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{12+16}{2} = 14$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{12-16}{2} = -2$ - nem felel meg.
Vagyis $AC = 14$ (cm)
Felelet: $AC = 14$ cm.

40. A rombusz területe egyenlő 200 cm^2, és az egyik átlója – 40 cm. Határozzátok meg a rombusz másik átlóját.
Kidolgozás:



33. ábra. Ábra a 40. feladathoz

Adva: ABCD - rombusz
$S = 200$ cm^2
$d_1 = 40$ cm
Kiszámolni: d_2 - ?

Megoldás:
A rombusz területképlete: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
$200 = \frac{40 \cdot d_2}{2}$
$200 = 20 \cdot d_2$
$d_2 = \frac{200}{20} = 10$ (cm)

Felelet: a rombusz másik átlója $d_2 = 10$ cm.

Összegzés

A geometria gondolkodást a 9. osztályban a Van Hiele teszt és a DPA-ból válogatott feladatok felhasználásával vizsgáltam meg.
Maga a geometriai gondokodás fontos az élet minden szakaszában, hiszen a térlátás és az alakzatok ismerete nélkül nehezebb lenne érvényesülni és tájékozódni mint a matematika alapjaiban, mint a mindennapok problémáival.

A Van Hiele által felállított szintek abban segítenek, hogy a tanulók, vagy épp az őket oktató tanárok tudják, milyen mértani tudással is rendelkeznek, így jobban tudnak a hiányos tudásra koncentrálni és fejlődni.

Folyamatosan tanulunk és fejlődni csak úgy tudunk, ha van hozzá akaratunk és motivációnk.

A megiratott teszttel az volt a célom, hogy megvizsgáljam a tanulók geometriai szintjét és egy önállóan összeállított feladatsort hozzak létre , mely segítene a tanulók geometriai gondolkodásának fejlesztésében. A felmérésben 50 tanuló vett részt, melyek beadott feladatsorainak eredményeit vizsgáltam és a kapott adatok alapján állítottam össze a feladatgyűjteményt.

A kitűzött célt sikerült elérnem, így összeállítottam a saját feladatgyűjteményemet, mellyel a 9. osztályos tanulók geometriai képességét fejleszthetem.

A jövőben, ha oktató leszek, szeretném, ha a tanulók értenék a matematikát és akarjanak fejlődni. Hiszen sohasem lehet tudni, ki hol fog végül elhelyezkedni a jövőben. A mértan nagyon fontos, így ha a Van Hiele tesztet alkalmazzuk, az eredmények alapján összeállíthatunk olyan feladatokat, amelyek segítenek abban, hogy előrébb haladjunk, és értsük azt, ami körbevesz minket, megtudjuk oldani a felmerülő problémákat és leküzdeni az akadályokat.

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely, Matematika módszertani példatár, Budapest, Magyarország: Typotex Kiadó 2013, 654 old.

[2]Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka, Török Tímea, Teszteljül a tesztet: A geometriai megértés szintjeinek újragondolása a magyarországi teszteredmények alapján, Tudományos Diákköri Dolgozat, Budapest, Magyarország, 2018, 35 old.

[3] Csapó Benő, Csíkos Csaba és Molnár Gyöngyvér, A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei, Vác, Magyarország: Duna-Mix Kft., 2015, 103 old.

[4] Dobák Dávid, Csuta Ákos, Megyeri Krisztina, Szilágyi Brigitta, A geometriai gondolkodás szintjeinek feltérképezése a van Hiele-elmélet segítségével, Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat, Budapest, Magyarország, 2021, 45 old.

[5] Dr. Pintér Klára főiskolai docens, Matematika módszertan, 2020, URL: `http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_mdszertan/index.html`

[6]Győry Ákos, Matematikából tehetséges középiskolai tanulók geometriai bizonyítási képességének vizsgálata és fejlesztése, Debrecen, Magyarország, 2021, 162 old.

[7] Herendiné Kónya Eszter, A geometriai képességek fejlesztésének lehetőségei, Debrecen, Magyarország: KFRTKF, 2007, 6 old.

[8] Köpeczi-Bócz Ákos Tamás, Széles Katalin, Dobák Dávid, Mérnökhallgatók geometriai gondolkodásának mérése Van Hiele teszt segítségével, Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat, Budapest, Magyarország, 2021, 45 old.

[9] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, Mértan, 7. osztály, Lemberg, Szvit kiadó, 2015, 224 old.

[10] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, Mértan, 8. osztály, Lemberg, Szvit kiadó, 2016, 208 old.

[11] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, Mértan, 9. osztály, Lemberg, Szvit kiadó, 2017, 242 old.

[12] А.Г. Мерзляк, Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики ДПА, 9 клас, Київ, Україна: Центр навчально-методичної літератури, 2014, 256 стор.

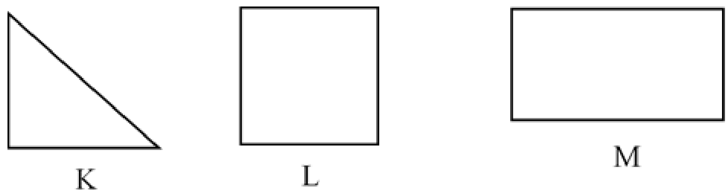
[13]А.Г. Мерзляк, Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики ДПА, 9 клас, Київ, Україна: Центр навчально-методичної літератури, 2013, 166 стор.

Ábrák jegyzéke

8. Melléklet

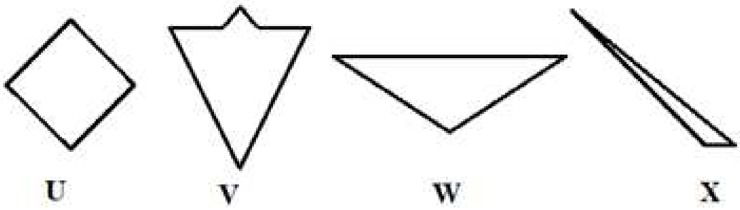
A megíratott feladatsor

1. Melyik négyzet?



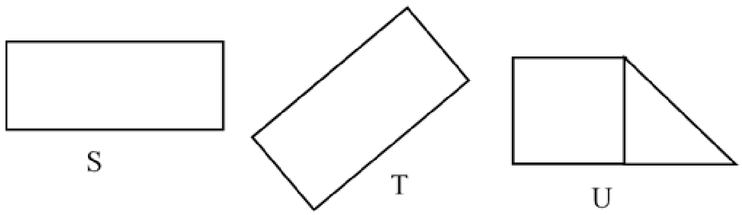
a) Csak K
b) Csak L
c) Csak M
d) Csak L és M
e) Mind az

2. Melyik háromszög?



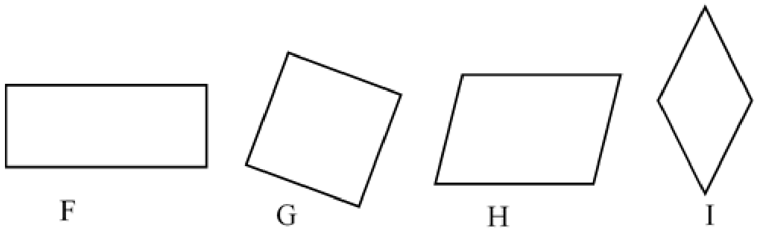
a. Egyik sem
b. Csak V
c. Csak W
d. Csak W és X
e. Csak V és W

3. Melyik téglalap?



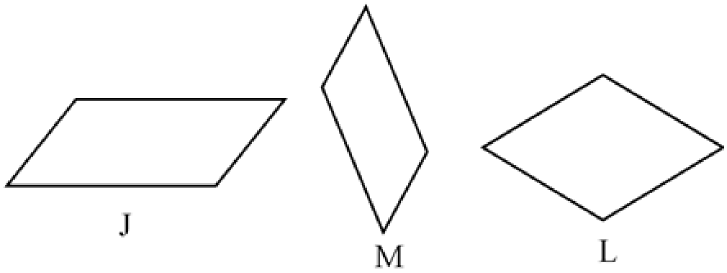
a) Csak S
b) Csak T
c) Csak S és T
d) Csak S és U
e) Mind az

4. Melyik négyzet?



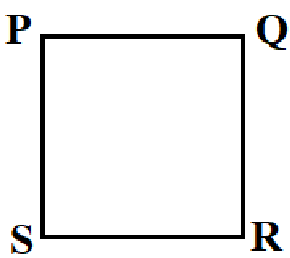
a) Egyik sem
b) Csak G
c) Csak F és G
d) Csak G és I
e) Mind az

5. Melyik paralelogramma?



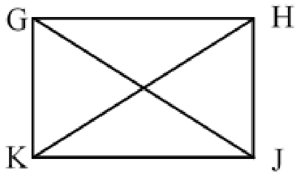
a. Csak J
b. Csak L
c. Csak J és M
d. Egyik sem
e. Mind az

6. PQRS egy négyzet (lásd ábra). Melyik állítás igaz rá?



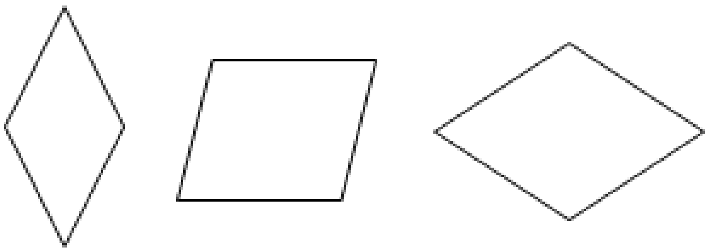
a. PR és RS ugyan olyan hosszúságú
b. QS és PR merőlegesek egymásra
c. PS és QR merőlegesek egymásra
d. PS és QS ugyan olyan hosszúságú
e. A Q-nál lévő szög nagyobb, mint az R-nél lévő szög.

7. GHJK egy téglalap, GJ és HK az átlói (lásd ábra). Melyik állítás nem igaz rá a-d közül?



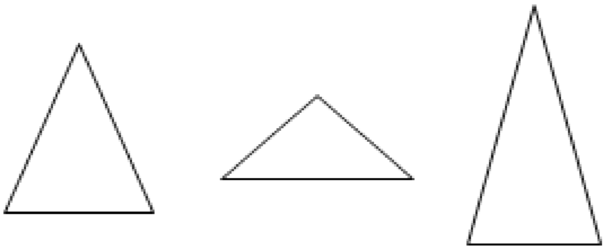
a) Négy derékszöge van
b) Négy oldala van
c) Átlói egyenlő hosszúságúak
d) Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak
e) a)-d) közül mind igaz

8. Melyik állítás nem igaz egy tetszőleges rombuszra (lásd ábra) a-d közül?



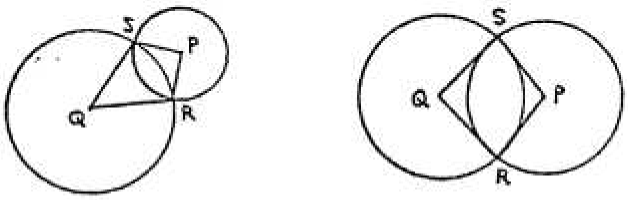
a. A két átlója egyenlő hosszúságú
b. Mindkét átlója felezi a rombusz két-két szögét
c. A két átlója merőleges egymásra
d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak
e. a-d közül mind igaz

9. Melyik állítás igaz egy egyenlő szárú háromszögre (lásd ábra) a-d közül?



   a) Mindhárom oldala egyenlő hosszúságúnak kell, hogy legyen
   b) Az egyik oldalának kétszer akkorának kell lennie, mint egy másiknak
   c) Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen
   d) Három szögének egyenlő nagyságúnak kell lennie
   e) a)-d) közül egyik sem igaz

10. Egy P és egy Q középpontú kör metszéspontjai R és S. Ezek a pontok meghatározzák a PRQS alakzatot. Két példát meg is adtunk (lásd ábra). a-d közül melyik állítás nem mindig igaz?



   a. PRQS-nek van két egyenlő hosszúságú oldalpárja
   b. PRQS-nek legalább két szöge egyenlő nagyságú
   c. A PQ és RS egyenesek merőlegesek egymásra
   d. A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak
   e. a-d közül mind igaz

11. Tekintsük a következő két állítást:

   i. Az F alakzat téglalap
   ii. Az F alakzat háromszög

   Melyik igaz az alábbiak közül?

   a. Ha i igaz, akkor ii is az.
   b. Ha i hamis, akkor ii igaz.
   c. i és ii egyszerre nem lehet igaz.

d. i és ii nem lehet egyszerre hamis.
e. a-d közül egyik sem igaz.

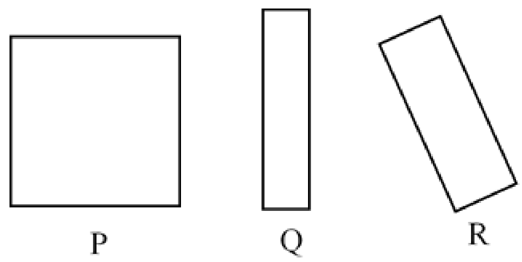
12. Tekintsük a következő két állítást:

    i. Az ABC háromszögnek van három egyenlő hosszúságú oldala.
    ii. Az ABC háromszögben a B-nél, illetve a C-nél lévő szögek egyenlő nagyságúak.

    Melyik igaz az alábbiak közül?

    a) i és ii egyszerre nem lehet igaz.
    b) Ha i igaz, akkor ii is az.
    c) Ha ii igaz, akkor i is az.
    d) Ha i hamis, akkor ii is hamis.
    e) a-d közül egyik sem igaz.

13. Az alábbiak közül melyik téglalap?



a. Mind az	c. Csak R	e. Csak Q és R
b. Csak Q	d. Csak P és Q	

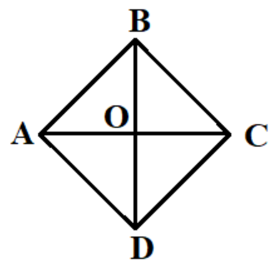
14. Melyik igaz?

    a) A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is
    b) A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes téglalapnak is.
    c) A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
    d) A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
    e) a)-d) közül egyik sem igaz.

15. Az alábbiak közül melyik az, ami minden téglalapra igaz, de bizonyos paralelogrammákra nem?

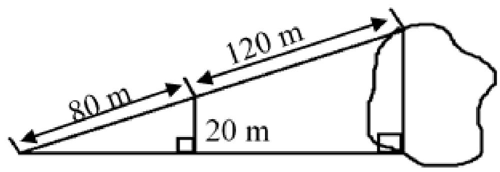
    a. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak
    b. Átlói egyenlő hosszúságúak
    c. Szemközti oldalai párhuzamosak
    d. Szemközti szögei egyenő nagyságúak
    e. a-d közül egyik sem igaz.

16. Mivel kell, hogy egyenlő legyen az OC szakasz, hogy az ABCD rombusz, amely az ábrán látható, négyzet legyen, ha a BO = 8 cm?



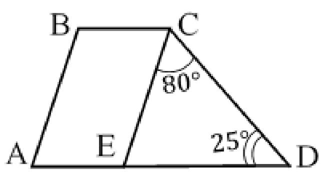
a) 2 cm c) 8 cm b) 4 cm d) 16 cm

17. Az adatokkal, amelyek az ábrán vannak feltűntetve, határozzátok meg a tó szélességét.



A) 30 cm C) 60 cm B) 50 cm D) 80 cm

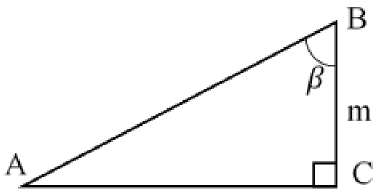
18. A CE egyenes párhuzamos az ABCD trapéz AB oldalával, ahogy az ábrán látható. Határozd meg a trapéz B szögét.



A) 80° C) 75° B) 105° D) 100°

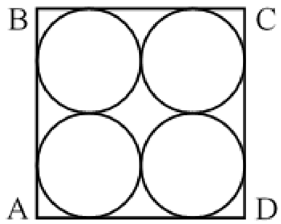
19. Mivel egyenlő a paralelogramma nagyobbik oldala, ha az 8 cm-el nagyobb, mint a másik, és a paralelogramma kerülete 40 cm.
    a) 20 cm c) 16 cm b) 18 cm d) 14 cm

20. Az ábrán az ABC derékszögű háromszög látható ($C\angle = 90°$). Határozd meg az AC oldalt.



A) $m \cdot \tan\beta$ C) $m \cdot \cos\beta$ B) $m \cdot \sin\beta$ D) $\frac{m}{\cos\beta}$

21. Az ABCD négyzetbe négy egyforma kört rajzoltak 5 cm-es sugarakkal, ahogy az ábrán látható. Mivel egyenlő az ABCD négyzet területe?



A) $25\ cm^2$ C) $80\ cm^2$ B) $100\ cm^2$ D) $400\ cm^2$

22. Egy háromszög két oldalának összege 16 cm, a köztük lévő szög – $120°$. Határozd meg közülük a kisebbik oldalt, ha a háromszög harmadik oldala 14 cm-el egyenlő.

23. Az ABC háromszögről tudjuk, hogy a $C\angle = 90°$, AB = 10 cm, AC = 8 cm. Az AC oldal meghosszabbításán a C pont után egy M pontot vettünk fel úgy, hogy a CM = 6 cm. Mivel egyenlő a BM szakasz?

24. A derékszögű trapéz alapjai 18 cm és 12 cm, a hegyesszögből húzott átmérő az adott hegyesszög szögfelezője. Határozd meg a trapéz területét.

Висновок

За допомогою завдань із теста Van Hiele і збірника вибраних питань ДПА я перевірила на якому степені геометричне мислення у 9-ому класі. Саме геометричне мислення є важливою частиною у всіх стадіях нашого життя, бо без просторового бачення і знання геометричних фігур важче би було вписатися і орієнтуватися як в основі математики, так і в проблемах повсякдення.

За допомогою складеним рівням Van Hiele учні чи їхні вчителі зможуть вияснити, які геометричні знання мають і на якому рівні вони за системою Van Hiele, завдяки чому вони можуть розвиватися і розширювати свої знання.

Ми беззупинно вчимося і розвиватися лише за допомогою мотивацій і волі можемо ефективно.
Із написаним тестом я хотіла дізнатися, на якому геометричному рівні учні, і скласти свій список завдань, яке могло би допомогти учням розвивати геометричне мислення. В опитуванні 50 учнів брали участь. Ознайомилася з результатами поданих ними завдань і на основі отриманих данних склала збірник завдань.

Мені вдалося досягти поставлену мету, тому я склала власний збірник завдань, за допомогою якого можу покращити геометричні здібності учнів 9. класу.

В майбутньому, якщо стану вчителем, я хотіла би, щоб мої учні розуміли математикуі хотіли би розвиватися в ньому. Бо не можемо знати, хто де буде в майбутньому працювати. Геометрія є важливою частиною життя, тому якщо використовувати тести Van Hiele, то за результатами можемо скласти такі завдання, які могли би допомогти в зрозумінні світу, який нас оточує, в розв'язку проблем і виникнених перешкод.

Nyilatkozat

Alulírott, Szenykó Anasztázia, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Звіт про перевірку схожості тексту Oxsico

Назва документа:

Szakdolgozat_Szenyko_Anasztazia.pdf

Ким подано:	Дата перевірки:	Дата звіту:
Пап Габрієлла	**2024-05-27 10:14:50**	**2024-05-27 11:41:46**
Ким перевірено:	Кількість сторінок:	Кількість слів:
I + U + DB + P + DOI	**41**	**9323**

Схожість 3%	Збіг: **12 джерела**	Вилучено: **0 джерела**
Інтернет: **8 джерела**	DOI: **0 джерела**	База даних: **0 джерела**
Перефразовування 1%	Кількість: **6 джерела**	Перефразовано: **81 слова**
Цитування 2%	Цитування: **26**	Всього використано слів: **1852**
Включення 0%	Кількість: **0 включення**	Всього використано слів: **0**
Питання 0%	Замінені символи: **0**	Інший сценарій: **8 слова**