ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

СЮРРЕАЛЬНІ ЧИСЛА І ДВОМІСНІ ІГРИ

БАКША АДРІЕН АНДРАШІВНА

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к. ф.-м. н., доцент,

доцент кафедри математики та інформатики

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н.

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

СЮРРЕАЛЬНІ ЧИСЛА І ДВОМІСНІ ІГРИ

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-го курсу

Бакша Адріен Андрашівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к. ф.-м. н., доцент,

доцент кафедри математики та інформатики

Рецензент: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н., завідувач кафедрою

математики та інформатики

Берегове
2021

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszék

SZÜRREÁLIS SZÁMOK ÉS A KÉTSZEMÉLYES JÁTÉKOK

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Baksa Adrien

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Sztojka Miroszláv

fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens,

matematika és informatika tanszékének docense

Recenzens: Kucsinka Katalin

fizikai és matematikai tudományok kandidátusa,

matematika és informatika tanszékének vezetője

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

John Horton Conway (1937-2020) brit matematikus, a szürreális számok (vagy másszóval Conway-számok) és a Conway-játékok fogalmának megalkotója. Kutatási területei közé tartozott a véges csoportok elmélete, a csomóelmélet, a számelmélet és a kombinatorikus játékelmélet.

Conway a szürreális számokat csak a játékok után fedezte fel. Kifejlesztette a kombinatorikus játékelméletet, amiben a játékokra definiálható az összeadás, az ellentettképzés és az összehasonlítás. Csak később vette észre, hogy a játékok egy bizonyos osztálya érdekes tulajdonságokkal bír, és ellátta őket szorzással, amivel teljesülnek a kívánt tulajdonságok, és amivel megmutatható, hogy a valós számok is közöttük vannak.

A szürreális számok tartalmazzák a valós számok halmazát és a végtelen mennyiségeket is. Legegyszerűbben úgy lehetne összefoglalni, hogy minden valós szám szürreális számokkal van körülvéve, amelyek közelebb vannak hozzá minden valós számnál.

A szürreális számok több szempontból is érdekesek és több kérdés is felmerül velük kapcsolatban. Két egyszerű művelettel keletkeznek a "semmiből", de tulajdonságaikban hasonlítanak a valós számokra: elvégezhetők rajtuk a valós számokkal megszokott műveletek és a rendezés.

Conway leírta a szürreális számokat, és játékok, többek között a go kétszemélyes játék elemzésére használta On Numbers and Games (1976) című könyvében. A szürreális számok szoros kapcsolatban állnak a kétszemélyes, teljes információs, felváltva lépős stratégiai játékokkal, mint például a sakk. Gyakorlatban többek között az ilyen játékok nyerő stratégiáinak vizsgálatára használhatók.

1. fejezet

A szürreális számok elmélete

A Conway-számok elméletének első szabálya azt mondja ki, hogy minden x szám valójában az X_B bal oldali halmazból és az X_J jobb oldali halmazból álló rendezett halmazpár: [2]

$$x = (X_B, X_J), X_B \not\geq X_J.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\forall x_B \in X_B$ és $\forall x_J \in X_J$, akkor $x_B \not\geq x_J$. Vagyis x_B nem lehet nagyobb vagy egyenlő, mint x_J.
Hogy egyszerűbb legyen a megkülönböztetés, az említett szabályban nagybetűvel vannak jelölve a halmazok, kisbetűvel pedig a számok.

1.1. Alapfogalmak

Definíció. *([1]) Legyenek adottak a B és J halmazok. A B és J halmazok által alkotott x rendezett párt a következőképpen írhatjuk le: $x = \langle B, J \rangle = \{\{B\}, \{B, J\}\}$.*

A B halmazt az x bal oldali, a J halmazt pedig az x jobb oldali tagjának nevezzük. Valamint a B halmaz egy tetszőleges elemét x_B-vel jelöljük, a J halmazét pedig x_J-vel, és az x bal illetve jobb oldali összetevőinek nevezzük őket. [1]

Egy rendezett párt leggyakrabban az összetevőivel adunk meg. Például, ha $B = \{a, b, c\}$ és $J = \{d, e\}$, akkor $\langle B, J \rangle = \{a, b, c|d, e\}$, vagy általánosan $x = \{x_B|x_J\}$. [5]

A szakdolgozatban a következő jelölések lesznek érvényben: $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$, $x = y \Leftrightarrow x \leq y$ és $x \geq y$, $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ és $x \not\geq y$, $x > y \Leftrightarrow y < x$. A későbbiekben $x \equiv y$ jelöli azt, hogy x és y halmazelméleti értelemben azonosak. [3]

A halmazelmélet Zermelo-Fraenkel-féle axiómarendszeréből különösen fontos a következő axióma és annak következménye:

Regularitási axióma. [3] Minden $x \neq \emptyset$ halmaznak van olyan v eleme, amely diszjunkt x-től:

$$\forall x\Big(\exists u\,(u \in x) \to \exists v\big(v \in x \land \forall w\big(\neg\,(w \in x \land w \in v)\big)\big)\Big).$$

A számokkal kapcsolatos defníciók rekurzívak, ezért az állításokat indukcióval kell bizonyítani. Ehhez szükséges a regularitási axióma következménye.

Állítás. *([3]) Nem létezik halmazok olyan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ végtelen sorozata, melynek tagjaira igaz, hogy $x_{i+1} \in x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. A bizonyítást indirekt módszerrel végezzük el.
Tegyük fel, hogy létezik ilyen sorozat. Ekkor elkészíthetjük az $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ halmazt, ami ellentmond a regularitási axiómának. [3] ■

Definíció. *([1]) Egy G csoportot akkor nevezünk rendezett (részben rendezett) csoportnak, ha értelmezve van rajta egy teljes rendezés (részben rendezés), mellyel a csoportművelet eltolásinvariáns, azaz $\forall a, b, c \in G$ elemekre, ha $a \leq b$, akkor $a+c \leq b+c$ és $c+a \leq c+b$.*

Definíció. *([1]) Egy kommutatív gyűrűt, illetve testet rendezett gyűrűnek, illetve rendezett testnek hívunk, ha értelmezve van rajtuk egy teljes rendezés, mellyel az additív csoport rendezett, és a szorzásra igaz, hogy ha a és b elemekre $0 \leq a$ és $0 \leq b$, akkor $0 \leq ab$.*

Definíció. *([1]) Egy x rendezett pár Conway-játék, ha minden összetevője Conway-játék. Minden Conway-játék így áll elő.*

Ez rekurzív definíció, tehát ha már ismerünk néhány Conway-játékot, akkor e szabályt követve hozhatunk létre belőlük újakat; és csak azok az objektumok Conway-játékok, amelyek így születtek.

A Conway-számokat két rekurzív szabály határozza meg.

Definíció. *([1]) Egy x rendezett pár Conway-szám, ha minden összetevője Conway-szám, és nincsenek olyan x_B, x_J összetevői, melyekre $x_J \leq x_B$. Minden Conway-szám így áll elő.*

Donald Knuth könyvében [2] leírta a szürreális számok konstruálásának menetét, amely a következő sorokban olvasható.

Kezdetben nincs egy Conway-számunk sem, mégis létre tudunk hozni egyet. Mivel minden szám két halmazból áll, ezért legyen B és J ez a két halmaz, amelyek a szürreális szám bal- illetve jobboldali összetevői lesznek. Az első lépésben $B = J = \emptyset$. Ezzel egy olyan szürreális számot kaptunk, amely két üres halmazból áll, ez a szám a 0, melynek jelölése: $\{|\}$.

A következő Conway-számokat úgy adjuk meg, hogy a $|$ jeltől balra írjuk azokat, melyeknél a vizsgált szám nagyobb, és jobbra azokat, melyeknél kisebb. Például, $1 = \{0|\}$, $2 = \{1|\}$.

A végtelen minden természetes számnál nagyobb, tehát azokat mind balra kell írni. A végtelent a szürreális számok elméletében ω jelöli, és a következőképpen írható fel: $\omega = \{0, 1, 2, \dots |\}$.

Szürreális számokkal a törtszámokat is tudjuk ábrázolni. Például, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$, $\frac{1}{4} = \{0|\frac{1}{2}\}$.

Fel tudjuk írni Conway-szám formájában a végtelenül kicsi mennyiséget is. Ez az a szám, amely minden pozitív számnál kisebb, de nullánál nagyobb. Tehát $\varepsilon = \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$.

Természetesen a negatív számokat is fel tudjuk írni Conway-számokkal, például $-1 = \{|0\}$, $-\frac{1}{2} = \{-1|0\}$.

Egy szürreális számnak több alakja is van. A legelső szürreális szám, amit létre tudunk hozni a 0. Ezt követi az 1 és a -1. A következő lépésben már újabb négy számot tudunk létrehozni: -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2.

Egy szürreális szám mindig azt a számot határozza meg, amely a bal oldali összetevőjénél nagybb, jobb oldali összetevőjénél kisebb és leghamarabb lett létrehozva. Például: $\{2|5\} = 3$.

1. Lemma. *([1]) Legyen $x = \{x_B|x_J\}$ és feltételezzük, hogy valamely z-re és $\forall x_B, x_J$ esetén teljesül, hogy $x_J \leq z \leq x_B$, de z-nek egyetlen összetevője sem teljesíti ugyanezt. Ekkor $x = z$.*

Bizonyítás. Az $x \leq z$ egyenlőséghez teljesüléséhez az kell, hogy $z \leq x_B$ és $z_J \leq x$ teljesüljön. Az előbbi szerepel a lemma feltételében, az utóbbi pedig azért igaz, mert $\forall z_J$ $\exists x_J$, hogy $x_J \leq z_J$.

Az $x \leq z$ egyenlőséghez teljesüléséhez az kell, hogy $z \leq x_B$ és $z_J \leq x$ teljesüljön. Az előbbi szerepel a lemma feltételében, az utóbbi pedig azért igaz, mert $\forall z_J \ \exists x_J$, hogy $x_J \leq z_J$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $x \geq z$. Ebből következik, hogy $x = z$. [1] ■

Tehát a lemma kimondja, hogy egy x szürreális szám az x_B bal oldali összetevők és az x_J jobb oldali összetevők között álló számok közül a legkorábban megkonstruált, vagy Conway szavaival élve, a legöregebb. Conway ezt az eljárást a szám születésnapjának nevezte.

1.2. Műveletek Conway-számokkal

A szürreális számok között ugyanúgy lehet összeadni, kivonni, szorozni, osztani és gyököt vonni, mint ahogyan azt a valós számoknál megszoktuk, olyan objektumokat teremtve ezzel, melyeknek a matematika klasszikus ágaiban aligha lehetne értelmet adni.

A következő oldalakon bemutatásra kerülnek a rendezés, az összeadás és a szorzás tulajdonságai.

1.2.1. Rendezés

Definíció. *([1]) Pontosan akkor teljesül $x \leq y$, hogyha nem létezik x-nek olyan x_B összetevője, melyre $y \leq x_B$, és nem létezik y-nak olyan y_J összetevője, melyre $y_J \leq x$. Ezt az eljárást rendezésnek nevezzük.*

Állítás. *([1]) $\forall x, y, z$ esetén teljesülnek a következő állítások:*

(1) $x \leq x$,

(2) $\forall x_B, x_J : x_B \ngeq x$ *és* $x_J \nleq x$,

(3) ha $x \leq y$ *és* $y \leq z$, *akkor* $x \leq z$,

(4) ha x, y *Conway-számok, akkor* $x \leq y$ *és* $x \geq y$ *közül legalább az egyik teljesül.*

Bizonyítás. Az (1) eset bizonyítása elvégezhető indirekt módszerrel. Ha $x \nleq x$, akkor vagy $\exists x_J \leq x$, vagy $\exists x_B \geq x$ igaz. Ebből az következik az első esetben, hogy x-nek nincs olyan jobb oldali összetevője, ami kisebb vagy egyenlő, mint x_J. Hasonlóan belátható az $x_B \geq x_B$ is.

A (2) eset nyilvánvaló, mivel ez az állítás nem más, mint a reláció definíciója az (1) esetre felírva.

A (3) esetet tranzitivitásnak nevezzük. A bizonyítást indirekt módszerrel végezzül el, tehát tegyük fel, hogy $x \not\leq z$. Ilyenkor két lehetőség van: vagy $\exists z_J \leq x$ vagy $\exists x_B \geq z$. Ha $\exists z_J \leq x$ és $x \leq y$, akkor $z_J \leq y$, tehát $y \not\leq z$. Ha $\exists x_B \geq z$, akkor azt kapjuk, hogy $x \not\leq y$. Mindkét esetben ellentmondásba ütköztünk.

A (4) eset bizonyításához tegyük fel, hogy x, y Conway-számok és $x \not\leq y$, $x \not\geq y$. Ha $\exists y_J \leq x$ és $\exists y_B \geq x$, akkor a (3) eset szerint $y_J \leq y_B$, ami nem lehetséges, mivel ez ellentmond a szürreális szám definíciójának. Ha $\exists y_J \leq x$ és $\exists x_J \geq y$ igaz, akkor $\nexists y_J \geq x_J$, vagyis $\forall y_J \leq x_J$. Mivel az y számnak van jobboldali összetevője, amiről tudjuk, hogy kisebb, vagy egyenlő, mint x, a (3) állításból azt kapjuk, hogy $x_J \geq x$, ami ellentmond a (2) állításnak. Hasonlóan igazolható abban az esetben, amikor $\exists x_B \leq y$. [1] ■

1.2.2. Összeadás

Definíció. *([5])(Conway-számok összeadása). Az x és y számokat a következőképpen adjuk össze:*

$$x + y \equiv \{x_B + y, x + y_B | x_J + y, x + y_J\}.$$

Definíció. *([5])(Conway-számok ellentettje). Az x szám ellentettjét a következőképpen írjuk le:*

$$-x \equiv \{-x_J | -x_B\}.$$

Az ellentett segítségével elvégezhetjük a kivonást. $x - y$ azt jelenti, hogy $x + (-y)$.

1. Tétel. *([1]) $\forall x, y, z$ számokra teljesülnek a következő állítások:*

$$x + 0 \equiv x,$$

$$x + y \equiv y + x,$$

$$(x + y) + z \equiv x + (y + z).$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk az első állítást:

$$x + 0 \equiv \{x_B + 0 | x_J + 0\} \equiv \{x_B | x_J\} \equiv x.$$

Ezzel az első állítás be van bizonyítva. Vizsgáljuk a második kifejezést:

$$x + y \equiv \{x_B + y, x + y_B | x_J + y, x + y_J\} \equiv \{y + x_B, y_B + x | y + x_J, y_J + x\} \equiv y + x.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy az összeadás a szürreális számok esetében kommutatív művelet. Megmutatjuk, hogy az összeadás asszociatív is:

$$(x+y)+z \equiv \{(x+y)_B+z,(x+y)+z_B|(x+y)_J+z,(x+y)+z_J\} \equiv$$

$$\equiv \{(x_B+y)+z,(x+y_B)+z,(x+y)+z_B|(x_J+y)+z,(x+y_J)+z,(x+y)+z_J\} \equiv$$

$$\equiv \{x_B+(y+z),x+(y_B+z),x+(y+z_B)|x_J+(y+z),x+(y_J+z),x+(y+z_J)\} \equiv$$

$$\equiv x+(y+z).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az összeadás a Conway-számok felett egy kommutatív, asszociatív művelet, ahol 0 a neutrális elem. [1] ■

2. Tétel. *([5]) Legyenek x, y, z tetszőleges szürreális számok. Ha $y \geq z$, akkor $x+y \geq x+z$.*

3. Tétel. *([1]) Legyenek x, y, z tetszőleges szürreális számok. Akkor igazak a következő állítások:*

1. *a 0 egy szürreális szám;*
2. *ha x szürreális szám, akkor $-x$ is;*
3. *ha x és y szürreális számok, akkor $x+y$ is.*

Tehát a Conway-számok rendezett csoportot alkotnak az összeadás műveletére nézve.

1. Példa. $\frac{1}{2} = \{0|1\}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \{0|1\}+\{0|1\} = \left\{\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right\} = 1.$$

1.2.3. Szorzás

Definíció. *([5])(Conway-számok szorzása). Az x és y számokat a következőképpen szorozzuk össze:*

$$xy \equiv \{x_By+xy_B-x_By_B,x_Jy+xy_J-x_Jy_J|x_By+xy_J-x_By_J,x_Jy+xy_B-x_Jy_B\}.$$

4. Tétel. *([1]) $\forall x, y, z$ számokra teljesülnek a következő állítások:*

1. $x0 \equiv 0$,

2. $x1 \equiv x$,

3. $xy \equiv yx$,

4. $(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$,

5. $(x+y)z \equiv xz + yz$,

6. $(xy)z \equiv x(yz)$.

Bizonyítás. A tétel 1.-4. állításai indukcióval könnyen beláthatók. A disztributivitás bizonyításához vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$(x+y)z \equiv \{(x+y)_B z + (x+y)z_B - (x+y)_B z_B, \ldots | \ldots\} \equiv$$

$$\equiv \{(x_B+y)z + (x+y)z_B - (x_B+y)z_B, (x+y_B)z + (x+y)z_B - (x+y_B)z_B, \ldots | \ldots\} \equiv$$

$$\equiv \{(x_B z + x z_B - x_B z_B) + yz, xz + (y_B z + y z_B - y_B z_B), \ldots | \ldots\} \equiv xz + yz.$$

Az asszociativitás könnyen bizonyítható a disztributív tulajdonság felhasználásával. [1]

■

Tehát a szorzás a Conway-számok körében kommutatív, disztributív, asszociatív művelet, egységeleme az 1. Két szám szorzatát a következő alakban is felírhatjuk: ([1])

$$xy = \{xy-(x-x_B)(y-y_B), xy-(x_J-x)(y_J-y) | xy+(x-x_B)(y_J-y), xy+(x_J-x)(y-y_B)\}.$$

5. Tétel. *([1]) Legyenek x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 tetszőleges szürreális számok. Akkor igazak a következő állítások:*

1. ha x és y számok, akkor xy is;

2. ha $x_1 = x_2$, akkor $x_1 y = x_2 y$;

3. ha $x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2$, akkor $x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$.

2. fejezet

Kétszemélyes játékok

2.1. A kétszemélyes játékok alapfogalmai

John Horton Conway könyvében ([1]) a kétszemélyes játékokat a következőképpen definiálta.

Egy Conway-szám konstruálásakor figyelembe kell venni, hogy a bal oldali halmaz elemei kisebbek legyenek a jobb oldali halmaz elemeinél. Ha ezt a szabályt elhagyjuk, akkor a játék fogalmát kapjuk. Tehát egy játékot a következőképpen konstruálunk meg: ha L és R halmazok, akkor $\{L|R\}$ játék.

A szürreális számok fogalmának megalkotását eredetileg a go motiválta, viszont más játékok nyerő stratégiáinak vizsgálatára is felhasználhatók a Conway-számok. Egy ilyen játéktól a következő feltételeket várjuk el:

1. A játék teljes információs;
2. Ketten játszanak: Bal és Jobb;
3. A játék felváltva lépős;
4. A játék determinisztikus;
5. A játék véges számú lépéssel véget ér, ahol Bal vagy Jobb a nyertes;
6. Ha az egyik játékos nem tud lépni, a játék véget ér a másik játékos győzelmével.

A go játékon kívül több népszerű ilyen kétszemélyes játék létezik: sakk, dáma, malom. Viszont a kártyajátékok bár kétszemélyesek, nem tesznek eleget a feltételeknek.

A játék koncepciója a következő: adott egy bal- és egy jobb oldali játékos, az előbbit L-lel, az utóbbit R-rel jelöljük. Adott a játék állapotainak S halmaza, az s_0 kezdőállapot, illetve az állapotok közötti $\to_L$ és $\to_R$ relációk. A játékosok megállapodnak, ki kezdje a játékot s_0-ból indulva, ezután felváltva lépnek. Ha a játék s állapotban van, és az L játékoson van a sor, L bármely olyan $s\prime$ állapotba léphet, melyre $s \to_L s'$. Ha nincs ilyen s', L elvesztette a játékot. [7]

A koncepció hasonlóan felírható az R játékosra.

Fontos kikötés, hogy a játéknak mindenképp véges sok lépésben be kell fejeződni, és valaki biztosan nyer.

Valamint, még egy fontos kikötésre szükség van: $\forall s \in S$ állapot legyen elérhető valamilyen $s_0 \to s_1 \to \ldots \to s_n = s$ úton a kezdőállapotból. Az így meghatározott g játék jelölése: $(S, s_0, \to_L, \to_R)$. [8]

Minden s állapotra létezik g-nek egy $(S', s, \to_L, \to_R)$ részjátéka, ahol $S' = \{s\} \cup \{s' \in S : s'$ elérhető S-ből $\}$. [1]

Ha $s_0 \to_L s$, akkor a részjátékot g bal oldali, ha pedig $s_0 \to_R s$, akkor a g jobb oldali opciójának nevezzük, és g_L-lel illetve g_R-rel jelöljük. [8]

Definíció. *([1]) Két játék izomorf, és ezt $\cong$ szimbólummal jelöljük, ha állapotaik között relációtartó bijekció létesíthető.*

2.1.1. Példák játékokra

A **dominójáték** kezdőállapota a síkbeli koordinátarendszer rácsnégyzeteinek egy véges részhalmaza. Egy lépésben a soron következő játékos elvehet a négyzetek közül két szomszédosat, azaz egy dominóformát, de L csak vízszintes, R csak függőleges állású dominót vehet el. [1]

A **nim** egy kétszemélyes stratégiai játék, melyben több kupacban kavicsok vannak és a játékosok felváltva vesznek el a megfelelő szabályok szerint. Alapvetően az nyer, aki az utolsó kavicsot vagy kavicsokat elveszi, de van olyan változat is, amelyben éppen azt kell elkerülni, hogy az utolsó kavicsot elvegyük. A kupac- vagy nimjátékban az állapotok természetes számok $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ n-esei, ahol $k_i \leq m_i$ rögzített m_i számokra. A kezdőállapot $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, és mindkét játékos egy lépésében valamelyik k_i-t megváltoztathatja tetszőleges k_i-nél kisebb természetes számra – egyetlen kupacból kell elvennie, de abból bármennyit elvehet. Az nyer, aki előbb eljut a 0 állapotba.

Ha a játéknak azt a változatát vizsgáljuk, ahol az veszít, aki az utolsó elemet kényszerül elvenni, akkor be kell vezetni még egy w állapotot és a $0 \to_L w$, $0 \to_R w$ relációkat. [1]

Tehát, ha x egy Conway-játék, akkor a kezdőállapot legyen maga x, minden x_L-re $x \to_L x_L$, minden x_R-re $x \to_R x_R$, x minden x' összetevőjére $x' \to_L x'_L$ illetve $x' \to_R x'_R$ és így tovább.

Stratégia alatt egy függvényt értünk, amely a játék minden állásához hozzárendel egy lépést a lehetségesek közül. Az olyan stratégiát, amelyet követve mindig nyerni tudunk, függetlenül a másik játékos lépéseitől, nyerő stratégiának nevezzük.

2. Példa. *([8]) A $\{|\}$ játékban mindig a második játékos lesz a győztes, mivel nincs más dolga, mint várni, hogy az első megtegye a kezdőlépést, ám az lehetetlen, mivel nem létezik lépés.*
A $\{\{|\}|\}$ játékban mindig a Bal játékos a győztes, mivel ha nem ő kezdi a játékot, akkor a Jobb játkos nem tudja elkezdeni, ha ő kezdi, akkor a $\{|\}$ lépést választja, ezt követően a Jobb játékos nem tud lépni.
Hasonlóan, a $\{|\{|\}\}$ játékot mindig a Jobb játékos nyeri meg.

2.1.2. Műveletek játékokkal

Definíció. *([1]) A $g = (S, s_0, \to_L, \to_R)$ játék ellentettjének a két játékos lépéslehetőségeinek felcserélésével kapott játékot nevezzük: $-g = (S, s_0, \to_R, \to_L)$.*

Definíció. *([1]) Legyenek $g_1 = (S_1, s_{0_1}, \to_{L_1}, \to_{R_1})$ és $g_2 = (S_2, s_{0_2}, \to_{L_2}, \to_{R_2})$ játékok. A g_1 és g_2 játékok összege alatt a következő játékot értjük: $g_1 + g_2 = (S, s_0, \to_L, \to_R)$, ahol $S = S_1 \times S_2$, $s_0 = (s_{0_1}, s_{0_2})$, valamint $(s_1, s_2) \to_L (s'_1, s'_2)$ teljesül, ha vagy $s_1 \to_{L_1} s'_1$ és $s_2 = s'_2$ vagy $s_2 \to_{L_2} s'_2$ és $s_1 = s'_1$. Ugyanez az R játékosra: $(s_1, s_2) \to_R (s'_1, s'_2)$ teljesül, ha vagy $s_1 \to_{R_1} s'_1$ és $s_2 = s'_2$ vagy $s_2 \to_{R_2} s'_2$ és $s_1 = s'_1$.*

Játékok között működik a kivonás művelete is: $g_1 + (-g_2)$.

Egyszerűbben megfogalmazva a g_1 és g_2 játékok összege alatt egy olyan játékot értünk, amelyben a bal oldali és a jobb oldali játékos párhuzamosan játsszák a g_1 és a g_2 játékot, mégpedig úgy, hogy a soron következő játékosnak csak az egyik játékban kell lépnie. Ha egyik játékban sem tud lépni, akkor veszít.

Bevezetjük a következő jelöléseket, amelyeket a későbbiekben osztályoknak nevezünk:

1. $g > 0$ – a játékban a Bal (L) játékosnak van nyerő stratégiája;
2. $g < 0$ – a játékban a Jobb (R) játékosnak van nyerő stratégiája;
3. $g = 0$ – a játékban a második játékosnak van nyerő stratégiája (nem az a játékos, aki kezd);
4. $g \| 0$ – a játékban az első játékosnak van nyerő stratégiája (aki kezd); [1]

Ezeket a jelöléseket kombinálhatjuk is:

1. $g \geq 0$ azt jelenti, hogy $g > 0$ vagy $g = 0$;
2. $g \leq 0$ azt jelenti, hogy $g < 0$ vagy $g = 0$;
3. $g \rhd 0$ azt jelenti, hogy $g > 0$ vagy $g \| 0$;
4. $g \lhd 0$ azt jelenti, hogy $g < 0$ vagy $g \| 0$; [1]

6. Tétel. *([1]) Minden g játék besorolható valamelyik fent említett osztályba.*

Bizonyítás. A tétel állítása ekvivalens azzal, hogy $\forall g$ játékra igaz, hogy $g \geq 0$ vagy $g \lhd 0$; vagy $g \leq 0$ vagy $g \rhd 0$. Feltételezzük, hogy ez igaz $\forall g_L, g_R$ esetén. Akkor, ha $\forall G_L \geq 0$, ami azt jelenti, hogy a bal oldali játékosnak (L) van nyerő stratégiája vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája, akkor a bal oldali játékos meg tudja nyerni a játékot, ha ezt a g_L opciót választja, a jobb oldali játékos (R) kezdi a játékot. Ha ez nem teljesül, akkor $g_L \lhd 0$, tehát a jobb oldali játékosnak (R) van nyerő stratégiája és a bal oldali játékos (L) kezdi a játékot.Ebben az esetben R megvárja, hogy L megtegye a kezdőlépést, majd alkalmazza a nyerő stratégiáját. [1] ■

Definíció. *([1]) A 0 Conway-játéknak megfeleltetett játékot zérójátéknak nevezzük. Jelölése: 0.*

7. Tétel. *([8]) Legyen g tetszőleges játék, L a bal oldali játékos, R a jobb oldali játékos.*

$$g - g = 0.$$

Bizonyítás. A $g - g = 0$ azt jelenti, hogy a $g - g$ játékban a második játékosnak van nyerő stratégiája. $-g$ a g játék ellentettje. Tehát a másodjára lépő játékosnak annyi dolga van, hogy másolja a másik játékos lépéseit. Például, ha L (ő kezdi a játékot) lép a g_L-be, akkor R-nek a $-g_L$-t kell választania a $-g$ játékban. Ezzel a módszerrel a második játékos sosem fogja elveszíteni a játékot. [8] ■

8. Tétel. *([8]) Legyenek g és h játékok, L a bal oldali játékos, R a jobb oldali játékos. Ha $g \geq 0$ és $h \geq 0$, akkor*

$$g + h \geq 0.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy L-nek a g és a h játékban is van nyerő stratégiája, ha R kezd. Ekkor L megnyeri $g + h$ játékot is, ha R minden lépésére ugyanabban a komponensben válaszol, mint amiben R lépett, az ottani nyerő stratégiáját követve. Tehát L nem tudja elveszíteni sem a g, sem a h játékot és a két játék összegét sem. [8] ■

Az összeadás, ellentettképzés, kivonás (tulajdonságaikkal együtt) ugyanúgy teljesül a játékokra, mint a szürreális számokra, viszont játékok esetében a rendezés csak részben rendezés.

3. fejezet

Numerikus játékok és ekvivalenciaosztályok

3.1. Részben rendezés és ekvivalenciaosztályok

Definíció. *([7]) Legyenek g és h játékok. A részben rendezést a következőképpen adjuk meg:*

1. $g \geq h$ *akkor és csak akkor, ha* $g - h \geq 0$;
2. $g \leq h$ *akkor és csak akkor, ha* $g - h \leq 0$;
3. $g > h$ *akkor és csak akkor, ha* $g - h > 0$;
4. $g < h$ *akkor és csak akkor, ha* $g - h < 0$.

2. Lemma. *[8] Bármilyen g játék esetén teljesül:*

$$g + 0 \rhd g.$$

Állítás. *[8] Az "=" ekvivalenciareláció a játékok felett.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy az "=" ekvivalenciareláció legyen eleget kell tennie a következő feltételeknek: reflexivitás, szimmetrikusság, tranzitivitás. Legyenek g, h, j tetszőleges játékok.

- reflexivitás: $g = g$;

  Ez a tulajdonság a 7. tétel következménye, mivel ha $g - g = 0$, akkor ebből az következik, hogy $g = g$.

- szimmetrikusság: ha $g = h$, akkor $h = g$;

  Feltételezzük, hogy $g = h$. Akkor $g - h = 0$. Mivel tudjuk, hogy $\forall g : g - g = 0$, ezért felírhatjuk a következő kifejezést: $g - h - (g - h) = 0$.

  Innen tudjuk, hogy $g - h = 0$ és $-(g - h) = h - g = 0$, tehát $h = g$.

- tranzitivitás: ha $g = h$ és $h = j$, akkor $g = j$;

  Feltételezzük, hogy $g = h$ és $h = j$. Akkor $g - h = 0$ és $h - j = 0$. Ezek alapján felírhatjuk a következő kifejezést: $g - h + h - j = 0$.

  Mivel tudjuk, hogy $-h + h = 0$, azt kapjuk, hogy $g - j = 0$. Ebből következik, hogy $g = j$.

Mivel teljesülnek az ekvivalencia feltételei, kijelenthetjük, hogy az "=" ekvivalenciareláció a játékok felett. [8] ■

Tehát az [1], [7], [8] irodalmak szerint belátható, hogy a $g > 0$, $g < 0$, $g = 0$ jelölések egybevágnak a részben rendezés definíciójában említett összehasonlításokkal.

Állítás. *([7])* $\forall g, h, k$ *játékokra igazak a következő állítások:*

(1) ha $g \geq h$, *akkor* $-h \geq -g$,

(2) ha $g \geq h$, *akkor* $g + k \geq k + h$.

Bizonyítás. (1) A $g - h$ játékot felírhatjuk $g + (-h)$ alakban, ami az összeadás kommutativitása miatt felírható $-h + g$ formában is. A részben rendezés definíciója szerint ha $g \geq h$, akkor $g - h \geq 0$, vagyis $-h + g \geq 0$. Ebből következik, hogy $-h \geq -g$.
(2) A $g \geq h$ felírható $g - h \geq 0$ alakban és $k - k \geq 0$ mindig igaz, ezért $(g - h) + (k - k) \geq 0$. Felhasználva az összeadás tulajdonságait, azt kapjuk, hogy a $(g - h) + (k - k) \geq 0$ kifejezés átalakítható $(g + k) - (h + k) \geq 0$ formára. Ebből következik, hogy $g + k \geq k + h$. [7] ■

3.2. Numerikus játékok

Definíció. *[8] A g játékot numerikus játéknak nevezzük, ha* $\forall g_{L_i}$ *és* $\forall g_{R_j}$ *esetén* $g_{L_i} < g_{R_j}$.

A továbbiakban jelölje Γ az összes numerikus játékok osztályát. Hogy könnyebb legyen a játékok és a numerikus játékok közötti megkülönböztetés, a későbbiekben a numerikus játékok x, y, z jelölést kapnak a g, h, j helyett.

3. Lemma. *[8]* Γ *zárt az összeadásra nézve.*

Bizonyítás. Legyen $x = \{x_L|x_R\}$ és $y = \{y_L|y_R\}$ numerikus játékok. Az összeadás definíciója szerint: $x + y = \{x + y_L, x_L + y|x + y_R, x_R + y\}$. A numerikus játék definíciója szerint: $\forall y_{L_m}$: $y_{L_m} < y$ és $\forall x_{L_m}$: $x_{L_m} < x$.
A 8. tétel következtében $x + y_{L_m} < x + y$. Hasonlóan $\forall x_{L_i}$: $x_{L_i} + y < x + y$.
Hasonlóan járunk el a jobb oldali összetevővel is: $\forall y_{R_n}$: $y_{R_n} < y$ és $\forall x_{R_j}$: $x_{R_j} < x$. Ebből azt kapjuk, hogy $x + y < x + y_{R_n}$ és $x + y < x_{R_j} + y$.
Ezekből az következik, hogy $x+y$ is numerikus játék. Tehát a numerikus játékok osztálya zárt összeadásra nézve. [8] ■

Állítás. *[8] Legyen* $x = \{x_L|x_R\}$ *és* $y = \{y_L|y_R\}$ *numerikus játékok és legyen* $x < y$. *Akkor* $-y < -x$.

Bizonyítás. Ha $x < y$, akkor $x - y < 0$ és a játék ellentettjének definíciója szerint $-x =$
$= \{-x_R| - x_L\}$.
Viszont tudjuk, hogy $-(-x_{R_j}) = x_{R_j}$ és $-(-x_{L_i}) = x_{L_i}$, amelyből következik, hogy $-(-x) = x$.
Vagyis $-y - (-x) = -y + x$. Mivel tudjuk, hogy az összeadás kommutatív művelet a játékok felett: $-y + x = x - y < 0$.
Tehát azt kaptuk, hogy $-y - (-x) < 0$, ebből következik, hogy $-y < -x$. [8] ■

Következmény. *Ha* $x = \{x_L|x_R\}$ *numerikus játék, akkor* $-x = \{-x_R| - x_L\}$ *is.*

9. Tétel. *[8] A "$\leq$" egy rendezés a* Γ *felett és az összeadás művelete nem bontja meg a rendezést. Tehát a "$\leq$" kielégíti a következő feltételeket:*

1. *tranzitivitás:* $\forall x, y, z$ *numerikus játékok esetén ha* $x \leq y$ *és* $y \leq z$, *akkor* $x \leq z$;
2. $\forall x, y$ *numerikus játékok esetén a következő három állítás közül pontosan egy teljesül:* $x > y$, $x < y$ *vagy* $x = y$.
3. *ha* $x \leq y$, *akkor* $x + z \leq y + z$, $\forall x, y, z \in \Gamma$.

Bizonyítás. 1. Adott, hogy $\forall x, y, z$, ahol $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$. Akkor tudjuk, hogy $x - y \leq 0$ és $y - z \leq 0$. Felírhatjuk a következő kifejezést: $x - y + y - z = x - z \leq 0$. Tehát $x \leq z$.
2. A tétel állítása ekvivalens a következő állítással: $\forall x, y \in \Gamma$: $x - y \leq 0$ vagy $x - y \geq 0$.

Az összeadás definíciója szerint: $x - y = x + (-y) = \{x_L - y, x - y_R | x_R - y, x - y_L\}$ és tudjuk, hogy $x - y$ is numerikus játék.
Akkor a tranzitív tulajdonság miatt $x - y$ bármelyik bal oldali összetevője kisebb, mint az $x - y$ bármely jobb oldali összetevője. Ez azt vonja maga után, hogy az $x - y \| 0$ nem lehetséges.
Tehát $x - y \leq 0$ vagy $x - y \geq 0$.
3. Adott $\forall x, y, z \in \Gamma$, ahol $x \leq y$. Akkor $x - y \leq 0$. És tudjuk, hogy $z - z = 0$. Vizsgáljuk az alábbi kifejezést: $x - y + z - z \leq x - y \leq 0$.
Akkor az asszociativitás tudatában felírhatjuk, a következőt: $x - y + z - z = x + z - y - z$.
Vagyis $x + z - y - z \leq 0$.
Ebből következik, hogy $x + z \leq y + z$. [8] ■

Következmény. *[8] A Γ rendezett Ábel-monoid (kommutatív egységelemes félcsoport) az összeadás műveletre nézve.*

A numerikus játékok felhasználhatók szürreális számok konstruálására.

Definíció. *[8] A szürreális számok osztályának azt az osztályt nevezzük, amely numerikus játékok ekvivalenciaosztályaiból áll. Jelölése: No.*
Tehát egy szürreális szám egy numerikus játékokból álló ekvivalenciosztálynak felel meg és kétféleképpen írható le:

1. *a szám, hozzárendelve az ekvivalenciosztályához, például a 0;*
2. *egy numerikus játék az adott szürreális szám ekvivalenciaosztályában.*

Definíció. *[8] Összeadás és rendezés a No felett:*

1. *összeadás: Legyenek a és b numerikus játékok ekvivalenciaosztályai. Akkor $a + b = x + y$, ahol x és y numerikus játékok és $x = a$, $y = b$;*
2. *rendezés: Legyenek a és b numerikus játékok ekvivalenciaosztályai. Akkor $a > b$, $a < b$ vagy $a = b$ akkor és csak akkor, ha $\forall x \in \Gamma$: $x = a$ és $\forall y \in \Gamma$: $y = b$, akkor $x > y$, $x < y$ vagy $x = y$ megfelelően.*

10. Tétel. *[8] A szürreális számok osztálya rendezett Ábel-csoportot alkot az összeadás műveletre nézve.*

Bizonyítás. Legyenek a, b, c numerikus játékok ekvivalenciaosztályai.

Ahhoz, hogy a $(No; +)$ rendezett Ábel-csoportot alkosson az alábbi feltételeket kell vizsgálni:

1. Rendezettség: legyenek x, y, z numerikus játékok és legyen $x = a$, $y = b$, $z = c$.
   Mivel a 9. tétel alapján tudjuk, hogy a numerikus játékok osztálya rendezett, ezért a szürreális számok osztálya is rendezett;

2. Kommutativitás: $a + b = b + a$.
   Legyenek x_1, x_2, y_1, y_2 nem feltétlenül ugyanazok a numerikus játékok és $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = a$, $y_2 = b$.
   Akkor nyilvánvaló, hogy $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
   A kapott kifejezésben az $x_1 + y_1$ numerikus játék és az $x_2 + y_2$ numerikus játék ugyanabban az ekvivalenciaosztályban van.
   Tehát $a + b = b + a$;

3. Asszociativitás: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   Legyenek $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ nem feltétlenül ugyanazok a numerikus játékok és $x_1 = a$, $y_1 = b$, $z_1 = c$, $x_2 = a$, $y_2 = b$, $z_2 = c$.
   Be kell bizonyítanunk, hogy $(x_1 + y_1) + z_1 = x_2 + (y_2 + z_2)$.
   A numerikus játékokról tudjuk, hogy $x_2 + (y_2 + z_2) = (x_2 + y_2) + z_2$, de azt is tudjuk, hogy $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.
   Innen már egyenesen következik, hogy $(x_1 + y_1) + z_1 = x_2 + (y_2 + z_2)$. Vagyis $(a + b) + c = a + (b + c)$;

4. Neutrális elem létezése: $a + 0 = 0 + a = a$.
   Legyen x egy numerikus játék és legyen $x = a$.
   Nyilvánvaló, hogy $x + 0 = x$, bármilyen ekvivalenciaosztály eleméhez, ha hozzáadjuk a zérójátékot, az eredmény ugyanahhoz az ekvivalenciaosztályhoz fog tartozni.
   Tehát $a + 0 = 0 + a = a$;

5. Inverzelem létezése: $\forall a \in No\ \exists -a \in No$: $a + (-a) = -a + a = 0$.
   Legyen x numerikus játék, melynek ellentettje $-x$ és x-et úgy választottuk ki, hogy $x = a$.
   Az előző oldalakon már bizonyítottuk, hogy $-x$ is numerikus játék és $x + (-x) = 0$.
   Ha $-x$-et $-a$-val jelöljük, akkor $a + (-a) = -a + a = 0$.

Mivel mindegyik feltétel teljesül, megkaptuk, hogy a szürreális számok osztálya, a No rendezett Ábel-csoportot alkot összeadásra nézve. [8] ■

Összegzés

A munka megírása során megismerkedtem a matematika egy viszonylag új területével, a szürreális számokkal. A szürreális számok fogalmának megalkotója, John Horton Conway az 1970-es években dolgozta ki az elméletét és különböző kétszemélyes játékok nyerő stratégiáinak vizsgálatára használta azokat. A szakdolgozat három fejezetből áll.

Az első fejezet tartalmazza a szürreális számok definícióját, konstruálásának menetét, a szürreális számokkal elvégezhető alapvető műveleteket, valamint ezek tulajdonságait.

A második fejezet a játékelmélet alapjait taglalja. Ebben a fejezetben bemutatásra kerülnek a kétszemélyes játékoktól elvárt feltételek, a játékokkal kapcsolatos alapfogalmak, példák játékokra és a játékokkal elvégezhető műveletek közül az összeadás, kivonás és ellentettképzés.

A harmadik fejezet a játékok egy osztályának, a numerikus játékok vizsgálatát és annak a szürreális számokkal való kapcsolatát tartalmazza. Emellett ez a fejezet tartalmaz számos tételt, amely bemutatja a játékokon elvégezhető részben rendezést és ennek következményeit a numerikus játékokra és az ekvivalenciaosztályokra nézve.

Irodalomjegyzék

[1] John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters Ltd., 2000

[2] Donald E. Knuth: *Számok valóson innen és túl.* Gondolat, 1987

[3] Hajnal András, Hamburger Péter: *Halmazelmélet.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 3.kiadás, 1994

[4] Donald E. Knuth: *Surreal Numbers.* Addison Wesley, 1974

[5] Joshua Hostetler: *Surreal Numbers.* Virginia Commonwealth University, 2012

[6] Jim Simons: *Meet the Surreal Numbers.,* 2017
`https://www.m-a.org.uk/resources/downloads/4H-Jim-Simons-Meet-the-surreal-numbers.pdf`

[7] Dierk Schleicher, Michael Stoll: *An Introduction to Conway's Games and Numbers.,* 2005
`http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/papers/games12.pdf`

[8] Michael Cronin: *Combinatorial Games and Surreal Numbers.,* 2016
`http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Cronin.pdf`

Резюме

Під час написання роботи я ознайомилась із доволі новою частиною математики, із сюрреальними числами. Творець концепції сюрреальних чисел Джон Хортон Конвей розробив свою теорію в 1970-х роках і використовував її для вивчення виграшних стратегій різних двомісних ігор. Дипломна робота складається з трьох розділів.

Перший розділ містить визначення сюрреальних чисел, процес їх конструкції, основні операції з ними, також властивості цих операцій.

В другому розділі йдеться про основи теорії ігор. В цьому розділі представляються потрібні умови теорії ігор, основні поняття ігор, приклади ігор, також із можливих операцій з іграми – додавання, віднімання та протилежна форма.

У третьому розділі йдеться про клас числових ігор, ознайомлення з ними і їх зв'язок із сюрреальними числами. Також цей розділ містить чимало теорем, які показують часткове впорядкування ігор і наслідки з них, по відношенню до числових ігор та класів еквівалентності.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
09.05.2021 00:29:01 EEST

Дата звіту:
09.05.2021 01:03:07 EEST

ID перевірки:
1007785645

Тип перевірки:
Doc vs Internet

ID користувача:
100006701

Назва документа: Baksa_Adrien_Szürreális_számok_és_kétszemélyes_játékok

Кількість сторінок: 19 **Кількість слів:** 6382 **Кількість символів:** 29522 **Розмір файлу:** 299.81 KB **ID файлу:** 1007884562

2.48% Схожість

Найбільша схожість: 1.47% з Інтернет-джерелом (http://www.coursehero.com/file/218325/Advanced-Calculus-Schaums-...

2.48% Джерела з Інтернету 192 .... Сторінка 21

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи 2

Nyilatkozat

Alulírott, Baksa Adrien 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.