ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

КОЛОЖВАРІ ГАБРІЕЛЛА ОТТІВНА

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**

ст. викладач

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконала: студентка IV-го курсу

Коложварі Габріелла Оттівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**
ст. викладач

Рецензент: **Орос Віктор Михайлович**
кандидат фізико-математичних наук

Берегове
2021

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A FÜGGVÉNY GRAFIKONJÁNAK TRANSZFORMÁCIÓI

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Kolozsvári Gabriella

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Pallay Dezső

adjunktus

Recenzens: Orosz Viktor

fizika-matematika tudományok kandidátusa

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Amikor megfigyeljük a természeti jelenségeket és folyamatokat könnyen észrevehetjük, hogy az egyik mennyiség változása maga után vonja a másik változását, tehát mondhatjuk azt, hogy vannak mennyiségi összefüggések közöttük. A mennyiségek közötti összefüggés a matematikában egy fontos fogalom. Így nem hiába a Függvények az egyik legfontosabb téma az algebra oktatásában.

A szakdolgozat témájaként A függvény grafikonjának transzformációi témát választottam. A függvény megadásának többféle módja ismert: analitikus, táblázat formájában, utasítással, grafikusan. Néha a grafikus módszer az egyetlen, amivel megadhatjuk. Széles körű felhasználása van nem csak a matematikában, hanem más különböző tudományágokban is. Ezért ezt a témát célszerű megvizsgálni.

A munka célja: röviden összefoglalni a függvényekről való ismeretek tanítását a középiskolákban; elemezni a oktatási tantervet; felmérni a Függvénytranszformációk témájának oktatását a Beregszászi járás középiskoláiban és a téma elsajátítását a tanulók által.

Israel Gelfand a következőképpen fogalmazott a függvények grafikonjának ábrázolásáról: "A függvény ábrázolásának a folyamata a képletek és utasítások mértani rajzá alakításának egyik módja. Ez az ábrázolás lehetőséget ad arra, hogy megfigyeljük a képleteket és a függvényeket, valamint azt is, hogyan változnak meg a függvények. Például, ha le van írva $y = x^2$, akkor egy parabolát képzelnek el; ha $y = x^2 - 4$, akkor látnak egy parabolát, amely 4 egységgel lejjebb van; ha pedig $y = 4 - x^2$, akkor az előző parabolát látja, mely lefelé mutat. Ez a képesség, amellyel egyszerre látja a képletet is meg a geometriai interpretációját, nemcsak a matematika tanulmányozására, hanem más tantárgyak számára is fontos. Ez olyan készség, amely egy életen át Önnel marad, akárcsak a kerékpározás, gépelés vagy autóvezetés."

1. fejezet

A függvények tanítása az iskolában

1.1. Függvények az általános iskolában

A függvényekről való ismeretek tanítását az általános oktatási rendszerű tanintézetek 5–9. osztályosok számára az Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által készült matematika tantervben találhatjuk. A következő oldalokon a [15] tantervben leírt ismereteket foglaljuk össze.

A tanterv szerint 7. osztályban vezetjük be a matematika egyik alapfogalmát – a függvény fogalmát. Még ebben az osztályban tanítjuk a lineáris függvényt és annak grafikonját. Ezeket az ismereteket felhasználjuk ahhoz, hogy ábrázoljuk az egyváltozós lineáris függvény és a kétváltozós lineáris egyenletrendszer grafikus megoldását. A többi függvény a későbbi témakörökbe vannak beleolvadva. 8. osztályban a Racionális kifejezések és a Négyzetgyök témakörben a tanulók megismerkednek az $y = \frac{k}{x}$, az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ függvényekkel és azok tulajdonságaival. 9. osztályban a másodfokú függvényt tanulmányozzák. Tulajdonságaik megismerése elsősorban a másodfokú egyenlőtlenségek megoldása során válnak hasznossá.

Ezáltal a függvényekről való ismeretek az egész algebrai kurzust áthaladják. A függvények tulajdonságait általában grafikonjuk által határozzuk meg, azaz vizuális ábrázolás alapján, és csak néhány tulajdonságot adunk meg analitikusan. Amint a tanulók elsajátítják az elméleti anyagot, a tulajdonságok száma fokozatosan növekszik. A függvények tanulása során kiemelkedő helyet kap a függvények grafikonjának megszerkesztése és elemzése, a függvények által leírt folyamatok elemzése, a függvények, mint valós folyamat matematikai modelljének megértése.

A függvények tanításának többféle módja ismert a közoktatásban. Van olyan elképzelés, hogy speciális alapfüggvényekkel, sorozatokkal vezetik be a függvényeket, (például egyenes arányosság, fordított arányosság, abszolútérték stb.), konkrét mintapéldákon szemléltetve a függvények lényeges jegyeit, majd később általánosítják ezeket a tulajdonságokat, aminek alapján létrejön a függvények fogalmának szintézise. Tehát már függvényről beszélnek akkor, amikor még nem értelmezték pontosan a függvényt. Egyébként ez az út is járható, hiszen a tanulókhoz közelálló, korábbi ismereteiket meg nem haladó, konkrét példákon keresztül juttatjuk el az ismereteket hozzájuk. A másik út a függvények fogalomrendszerének felépítése a rendezett elempárok halmazától a függvények, sorozatok tulajdonságainak bemutatásáig. Az első felépítési módban a részismeretek összességéből tevődik össze a fogalomrendszer, a másik esetben az eredetet, a felépítésmódot, az egymásraépítettséget hangsúlyozzuk. [2]

Az Ukrajnai oktatási program struktúrája:

A program táblázat formában van kidolgozva, mely két részből áll: a tanulók tanulási és kognitív tevékenységének várható eredményeiből és a tananyag tartalmából. Az Oktatási Minisztérium szabad kezet ad a tanároknak a feladatok kiválasztásában, melyek megfelelőek lesznek az adott osztálynak és tanulóknak. A tananyag tartalma a témák szerint van felosztva, melyek tanítására meg van határozva a minimális óraszám, viszont minden tantárgyból a tanár rendelkezésére áll néhány fennmaradó óra, melyet szabadon felhasználhat valamely témakörre. [15]

Nézzük részletesebben meg, hogyan vázolja fel a tanterv a függvények tanítását az általános iskolában. Vizsgáljuk meg, hogy mit tanítunk különböző osztályokban a függvényekről.

1.1.1. Függvények a 7. osztályban

7.osztályban vezessük be a függvény fogalmát. Az 1.1. táblázat magába foglalja, milyen eredmények várhatók a tanulóktól és milyen témákat tartalmaz a tananyag 7. osztályban. A tanterv szerint a Függvények témakörre itt 10 óra áll rendelkezésre. Ezen a 10 órán belül a tanulók tanulmányozzák a mennyiségek közötti összefüggéseket, megismerkednek a függvények fogalmával, megadási módjaival, grafikonjával.

Röviden összefoglalva a [8] tankönyv alapján, az alábbi ismeretekkel gazdagodnak a 7.-es diákok:

1.1. definíció. *Függvénynek nevezzük azt a megfeleltetést, amikor a független változó tetszőleges értékének a függvény egyetlen értéke felel meg.*

1.2. definíció. *Az argumentum által felvett értékek alkotják a függvény értelmezési tartományát. A függvény által felvehető értékeket értékkészletnek nevezzük.*

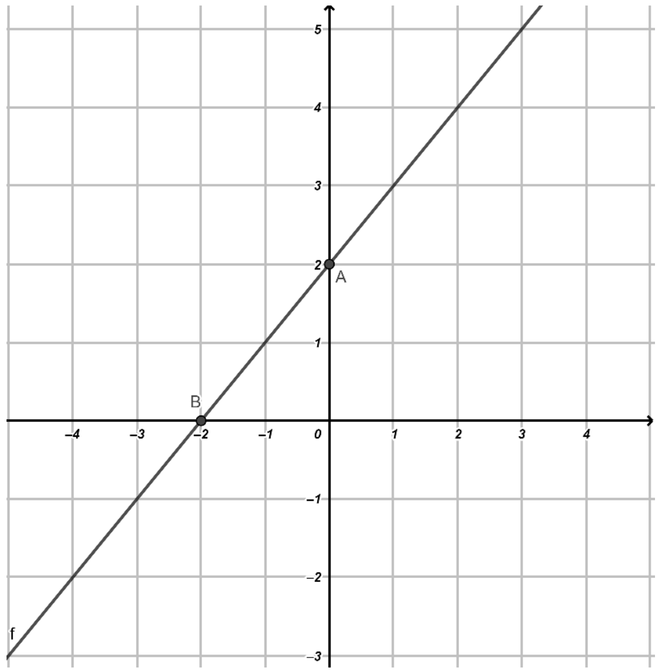
A tanulók tanulási és kognitív tevékenységének várható eredményei	A tananyag tartalma
2.téma FÜGGVÉNYEK (*10 óra*)	
A tanuló: **példákot hoz fel:** mennyiségek közötti összefüggésekre, lineáris függvényekre **meg tudja magyarázni,** mi az az argumentum; a függvény; a függvény értelmezési tartománya; a függvény értékkészlete; a függvény grafikonja; **megfogalmazza** a függvény; a függvény grafikonja; lineáris függvény; az egyenes arányosság fogalmát; **megnevezi és példákon keresztül bemutatja** a függvények megadási módjait; **leírja** a függvény grafikon ábrázolásának lépéseit, ezen belül a lineáris és az egyenes arányosság függvényekét; **feladatokat old, melyek magába foglalják:** a függvény értemezési tartományának meghatározását; a függvényérték meghatározását adott argumentum során; a lineáris függvény grafikonjának ábrázolását; a függvényérték meghatározását a grafikon alapján adott argumentum során és fordítva; a függvény néhány tulajdonságának meghatározását a grafikon alapján (pozitív és negatív értékek); **összeállítja és megoldja a következőket tartalmazó feladatokat:** tapasztalata alapján összeállított egyenes arányosság; valós folyamatok ábrázolása lineáris függvények grafikonja segítségével stb	Mennyiségek közötti összefüggések, mint valós folyamatok matematikai modellje. Függvények. A függvény értelmezési tartománya és értékkészlete. A függvény megadási módjai. A függvény grafikonja. Lineáris függvény, annak grafikonja és tulajdonságai.

1.1. táblázat. Függvények a 7. osztályban

A függvény megadásának módjai: utasítással; képlet segítségével; táblázat formájában; grafikusan.

1.3. definíció. *Az f függvény grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amely azokból és csakis azokból a pontokból áll, melyek abszcisszája az f függvény argumentumával, ordinátája pedig az f függvény megfelelő értékeivel egyenlő.*

1.4. definíció. *Az $y = kx+b$ képlettel megadható függvényt, ahol k és b – számok, x – független változó, lineáris függvénynek nevezzük. (1.1. ábra)*



1.1. ábra. Az $y = kx + b$ függvény grafikonja

1.5. definíció. *Az $y = kx$ képlettel megadott lineáris függvényt, ahol $k \neq 0$, egyenes arányosságnak nevezzük.*

1.1.2. Függvények a 8. osztályban

Az 1.2. táblázat hasonlóan, mint az előzőekben magába foglalja, milyen eredmények várhatók a tanulóktól és milyen témákat tartalmaz a tananyag a függvényekre vonatkozóan a 8. osztályban. Ezen a szakaszon a tanulók megismerkednek az $y = \frac{k}{x}$, az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ függvényekkel, azok grafikonjával és tulajdonságaival. Az $y = \frac{k}{x}$ függvényt a Racionális kifejezések témakörön belül tanulmányozzák, az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ függvényeket pedig a Négyzetgyök. Valós számok c. témakörben.

Röviden összefoglalva a [9] tankönyv alapján, az alábbi ismeretekkel gazdagodnak a 8.-os diákok:

1.6. definíció. *Azt a függvényt, melyet az $y = \frac{k}{x}$ képlettel lehet megadni, ahol $k \neq 0$, fordított arányosságnak nevezzük.*

Az $y = \frac{k}{x}$ függvény tulajdonságai:

Értelmezési tartomány: bármely szám, kivéve a 0-t

Értékkészlet: bármely szám, kivéve a 0-t

Grafikon: hiperbola (1.2. ábra)

A tanulók tanulási és kognitív tevékenységének várható eredményei	A tananyag tartalma
1.téma RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK *(24 óra)*	
A tanuló: **leírja** az $y=\frac{k}{x}$ függvény tulajdonságait grafikonja alapján; **feladatokat old, melyek magába foglalják:** az $y=\frac{k}{x}$ függvény grafikonjának ábrázolását	Az $y=\frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény, annak grafikonja és tulajdonságai
2.téma NÉGYZETGYÖK. VALÓS SZÁMOK *(10 óra)*	
A tanuló: **elemzi:** az $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ függvények tulajdonságait grafikonjuk alapján; **feladatokat old, melyek magába foglalják:** az $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ függvények grafikonjának ábrázolását	Az $y=x^2$ függvény, annak grafikonja és tulajdonságai Az $y=\sqrt{x}$ függvény, annak grafikonja és tulajdonságai

1.2. táblázat. Függvények a 8. osztályban

Zérushely: nincs

A grafikon tulajdonsága: ha az $A(x_0; y_0)$ pont illeszkedik az $y = \frac{k}{x}$ hiperbolára, akkor a $B(-x_0; -y_0)$ pont is illeszkedik erre a hiperbolára.

Az $y = x^2$ függvény tulajdonságai:

Értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$.

Értékkészlete: a nemnegatív számok halmaza.

Grafikonja: parabola. (1.3. ábra)

Zérushelye: $x = 0$.

A grafikon tulajdonsága: ha az $A(x_0; y_0)$ pont rajta van a függvény grafikonján, akkor a $B(-x_0; -y_0)$ pont is illeszkedik erre a parabolára.

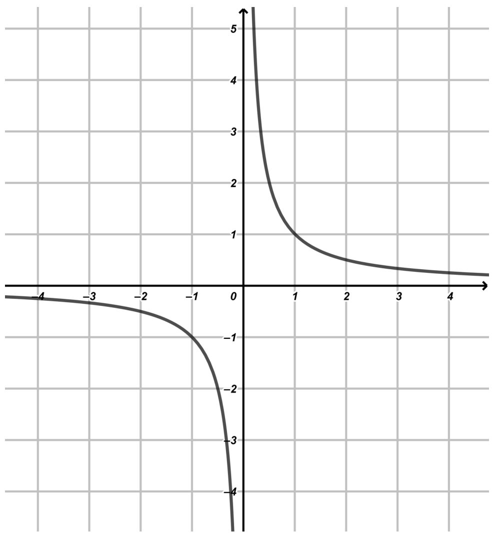
Az $y = \sqrt{x}$ függvény tulajdonságai:

Értelmezési tartománya: a nemnegatív számok halmaza.

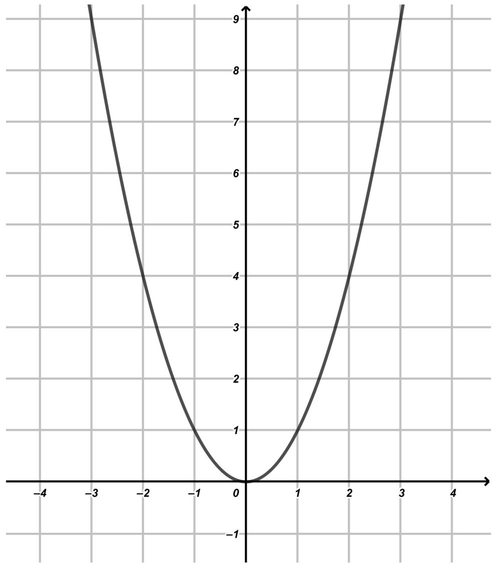
Értékkészlete: a nemnegatív számok halmaza.

Grafikonja: parabola ágai (1.4. ábra)

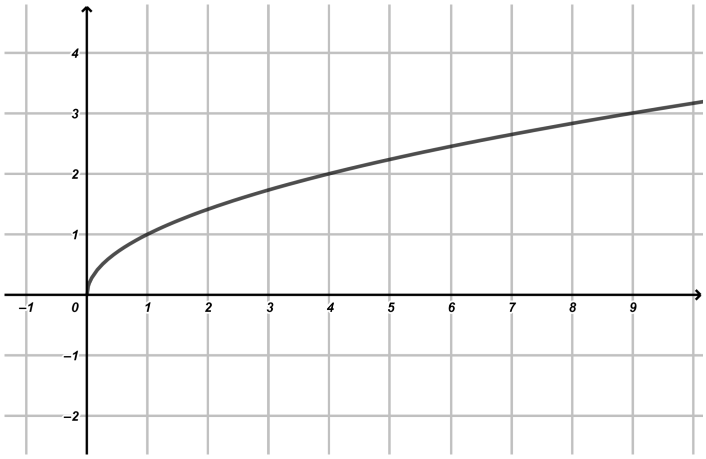
Zérushelye: $x = 0$.



1.2. ábra. Az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonja



1.3. ábra. Az $y = x^2$ függvény grafikonja



1.4. ábra. Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja

1.1.3. Függvények a 9. osztályban

Az 1.3. táblázat, mint az eddigiekben is láthattuk magába foglalja, milyen eredmények várhatók a tanulóktól és milyen témákat tartalmaz a tananyag a függvényekre vonatkozóan a 9. osztályban. A másodfokú függvény témakörön belül a diákokkal megismételjük és kibővítjük a függvényekről való tanultakat. Megtanulják, hogyan kell az $y = f(x)$ függvény grafikonja segítségével ábrázolni az $y = kf(x), y = f(x) + b, y = f(x + a)$ függvényeket. Megtanítjuk, melyik függvényt nevezzük másodfokúnak, mi a grafikonja, milyen tulajdonságai vannak és hogyan kell alkalmazni azokat.

A [10] tankönyv összefoglalása szerint:

A tanulók tanulási és kognitív tevékenységének várható eredményei	A tananyag tartalma
2. téma MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY (*20 óra*)	
A tanuló: **példákat hoz fel** másodfokú függvényre; **meghatározza** a függvény értékét adott pontban **magyarázza** a függvénytranszformációkat: $f(x) \to f(x)+a$; $f(x) \to f(x+a)$; $f(x) \to kf(x)$, $f(x) \to -f(x)$; a másodfokú függvény grafikonjának ábrázolási algoritmusát; **jellemzi** a függvényt grafikonja alapján **feladatokat old, melyek magába foglalják: a** másodfokú függvény grafikonjának ábrázolását; másodfokú egyenlőtlenségek megoldását; a kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldását, melyek közül legalább az egyik másodfokú; a kétismeretlenes egyenletrendszerek mint alkalmazott matematikai modellek megoldását	Függvénytulajdonságok. Zérushely, a függvény növekedési és csökkenési intervallumai, a függvény minimuma és maximuma. Függvénytranszformációk. Másodfokú függvény, annak grafikonja és tulajdonságai. Másodfokú egyenlőtlenségek. Kétismeretlenes egyenletrendszerek A kétismeretlenes egyenletrendszerek mint alkalmazott matematikai modellek

1.3. táblázat. Függvények a 9. osztályban

1.7. definíció. *Legyen X a független változó értékeinek halmaza, Y a függő változó értékeinek halmaza. A függvény olyan egyértelmű hozzárendelés, amely az X halmaz minden eleméhez megfelelteti az Y halmaz egyetlen elemét.*

1.8. definíció. *Az argumentum azon értékét, melyre a függvényérték nulla, a függvény zérushelyének nevezzük*

1.9. definíció. *Azt az intervallumot, amelyen a függvényérték előjele nem változik, állandó előjelű intervallumnak nevezzük.*

1.10. definíció. *Egy függvény növekvő az adott intervallumon, ha bármely, az intervallumhoz tartozó nagyobb argumentumértékhez nagyobb függvényérték tartozik.*

Egy függvény csökkenő az adott intervallumon, ha bármely, az intervallumhoz tartozó nagyobb argumentumértékhez kisebb függvényérték tartozik.

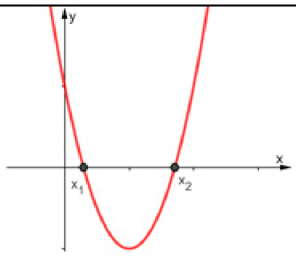
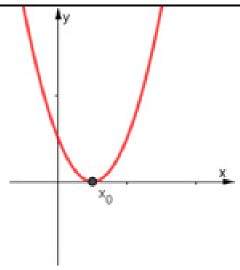
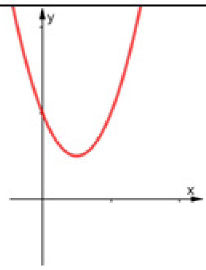
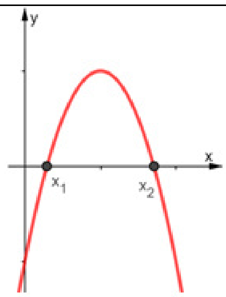
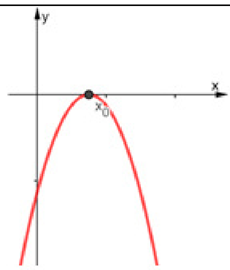
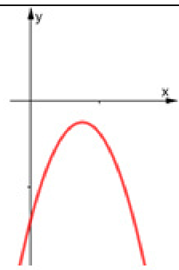
A függvénytranszformációkat a következő fejezetben részletesen taglaljuk.

1.11. definíció. *Az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel megadható függvényt, ahol x a független változó a, b és c bármely szám, $a \neq 0$, másodfokú függvénynek nevezzük.*

A másodfokú függvény grafikonja a parabola, melynek a csúcsa az (x_0, y_0) koordinátájú pont, ahol

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola elhelyezkedése a koordinátasíkon az a és a D értékektől függ: a D diszkrimináns előjelétől függően a parabola vagy metszi az Ox tengelyt ($D > 0$) vagy nem metszi ($D < 0$) vagy érinti azt ($D = 0$). Ezt az 1.4. táblázatban láthatjuk.

	$\boldsymbol{D > 0}$	$\boldsymbol{D = 0}$	$\boldsymbol{D < 0}$
$\boldsymbol{a > 0}$			
$\boldsymbol{a < 0}$			

1.4. táblázat. A parabola elhelyezkedése a koordinátasíkon

Az adott függvény grafikonját a következő algoritmus szerint ábrázolhatjuk:

1. *meghatározzuk a parabola csúcsának az (x_0, y_0) koordinátáját és feltüntetjük a koordinátarendszerben;*
2. *meghatározzuk a parabola szárainak irányát (ha $a > 0$, akkor a parabola szárai felfelé mutatnak, ha $a < 0$, akkor pedig lefelé);*
3. *meghatározunk még néhány olyan pontot, melyek illeszkednek a grafikonra, például a parabola és az abszcisszatengely metszéspontjait, vagy a parabola és az ordinátatengely metszéspontjának koordinátáit; feltüntetjük ezeket a pontokat a koordinátarendszeren;*
4. *folytonos vonallal összekötjük a feltüntetett pontokat.*

A másodfokú függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekkel is ábrázolhatjuk. Vizsgáljuk meg, milyen átalakításokat kell végeznünk az $y = x^2$ parabolán, hogy az y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola általános alakjához, az $y = ax^2 + bx + c$ függvényhez jussunk.

1. az x^2 függvény minden egyes ordinátájának a-szorosát vesszük. Így az $y = ax^2$ függvényhez jutunk.

2. az ax^2 függvényt önmagával párhuzamosan eltoljuk az x-tengely mentén nagyság és irána szerint $-\frac{b}{2a}$ távolsággal. Így az $y = a(x + \frac{b}{2a})^2$ függvényhez jutunk.

3. az $y = a(x+\frac{b}{2a})^2$ függvény minden egyes függvényértékéhez hozzáadjuk a $\frac{4ac-b^2}{4a}$ értéket. Így az
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
függvényhez jutunk. Valóban: az azonos átalakításokat elvégezve
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} =$$
$$= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + c$$
az általános másodfokú függvényhez jutunk. [3]

Példa: Ábrázoljuk az $y = 3 - 2x - x^2$ függvényt! [13]

Megoldás:

Az adott függvény másodfokú. Átírjuk a következő alakban: $y = -x^2 - 2x + 3$. Ebben az esetben az $a = -1, b = -2, c = 3$. Ennek a függvénynek a grafikonja - parabola. Ábrázoljuk a koordinátarendszerben:

1. Meghatározzuk a parabola csúcsának a koordinátáját:

   $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot(-1)} = -1$

   $y_0 = y(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$

   Tehát a parabola csúcsa a $(-1, 4)$ koorinátájú pont.

2. Mivel $a < 0$, a parabola ágai lefelé mutatnak.

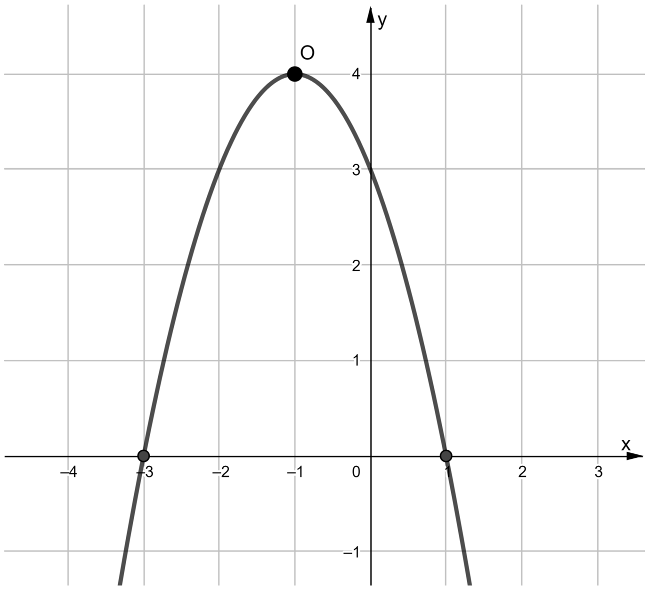
3. Meghatározzuk a parabola és a koordinátatengelyek metszéspontjait:

   az Ox tengellyel: $-x^2 - 2x + 3 = 0 \qquad x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad x_1 = -3, x_2 = 1.$

   az Oy tengellyel: $x = 0 \qquad y = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$

   Felvesszük ezeket a pontokat a koordinátarendszeren.

4. folytonos vonallal összekötjük a feltüntetett pontokat.



1.5. ábra. Az $y = 3 - 2x - x^2$ függvény grafikonja

2. fejezet

A függvény grafikonjának transzformációja

A függvények ábrázolásával nagyon sok információt tudhatunk meg a függvényről csupán ránézve a grafikonra. Gyakran a grafikon segít a legjobban és legkönnyebben meghatározni a feladat megoldását. Ezért fontos leegyszerűsíteni a függvények grafikonjának ábrázolását, felhasználva néhány transzformációt.

Néha ahhoz, hogy ábrázoljunk egy függvény grafikonját teljes függvényvizsgálatot kell végeznünk, melyben meg kell határozni az értelmezési tartományt, az értékkészletet, növekvési és csökkenési intervallumokat és stb. De sokszor el lehet kerülni ezeket a lépéseket és néhány transzformációt alkalmazni, mellyel már egy ismert függvényt alakíthatunk át.

Tehát egyes függvények grafikonjainak ismeretében bizonyos más függvények grafikonjait is könnyű elkészíteni. [1]

Függvénytranszformációkkal egy-egy függvénytípus valamely függvényéből, a hozzárendelési szabály bizonyos megváltoztatásával ugyanolyan típusú függvényeket állíthatunk elő. A hozzárendelési szabály megváltoztatása kétféle módon történhet:

- a függvényérték megváltoztatásával (függvényérték-transzformáció)

$$f(x) + c; -f(x), c \cdot f(x), |f(x)|$$

- a függvényváltozó megváltoztatásával (függvényváltozó-transzformáció)

$$f(x + c); f(-x), f(c \cdot x), f(|x|).$$

A függvénytranszformációk egy-egy geometriai transzformációt jelentenek. [5]

Ezeket a transzformációkat a 9. osztályban tanítjuk. A függvény grafikonjának transzformációja elég nehéz lehet, mivel nem felelnek meg az algebra és mértan egyes témakörei a 9. osztályban. A fő figyelmet arra fordítjuk, hogy a tanulók ismerjék fel és sajátítsák el a függvény egyenlete és a függvény grafikonjának bizonyos típusú transzformációja közötti kapcsolatot. A transzformáció típusa és a függvény egyenlete közötti összefüggést úgy vizsgáljuk, hogy kiszámoljuk a függvény értékeit bizonyos pontokban, és megfigyeljük a függvényérték változását ezekben a pontokban.

Ahhoz, hogy a tanulók könnyebben elsajátítsák a tananyagot, célszerű számítógép segítségével ábrázolni ezeket a transzformációkat. Ahhoz, hogy elkezdjük tanítani az elemi függvények átalakítását geometriai transzformációk segítségével érdemes az előző órákon megismételni az elemi függvények típusait és tulajdonságait. A transzformáció lépéseinek elsajátítása mellett párhuzamosan fel kell hívni a tanulók figyelmét a függvény egyenletére, mely megfelel a transzformációnak. Ezért a tanárnak mind a szóbeli, mind az írásbeli feladatok végrehajtása során meg kell követelnie a tanulóktól, hogy először elemezzék ennek a függvénynek az egyenletét, majd ennek megfelelően válasszák ki a geometriai transzformációt, mely szükséges a függvény grafikonjának ábrázolására. Ez a megközelítés egyrészt elősegíti az óra anyagának gyorsabb elsajátítását, másrészt segít megelőzni azokat a hibákat, amelyek gyakran előfordulnak.

Vizsgáljuk meg milyen módosítások mennek végbe a függvény grafikonján, ha egy kicsit változtatunk a függvény hozzárendelési szabályán.

2.1. Értéktranszformációk

Megvizsgálunk olyan négy függvénytranszformációt, amelyeknél az eredeti grafikont az Oy tengely irányában fogunk megváltoztatni, azaz az eredeti függvény értékeit fogjuk transzformálni. Ezeket a függvénytranszformációkat **értéktranszformációknak** nevezzük. [7]

2.1.1. Az $y = f(x) + c$ függvény ábrázolása

Figyeljük meg két alapfüggvény alapján, hogyan változik meg a függvény grafikonja, ha a függvényértékhez hozzáadunk egy számot. Vegyük példának a következő függvényeket:

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^2 - 1, \quad f_3(x) = x^2 + 2.$$

$$g_1(x) = |x|, \quad g_2(x) = |x| - 1, \quad g_3(x) = |x| + 2.$$

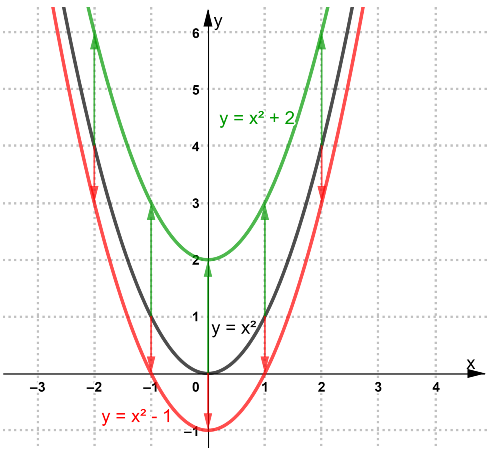
Adjuk meg ezeket a függvényeket táblázati alakban. Ezt a 2.1 és a 2.2 táblázatokban tűntetjük fel. Ezután ábrázoljuk a függvényeket, amit a 2.1. és 2.2. ábrán láthatunk.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
x^2-1	8	3	0	-1	0	3	8
x^2+2	11	6	3	2	3	6	11

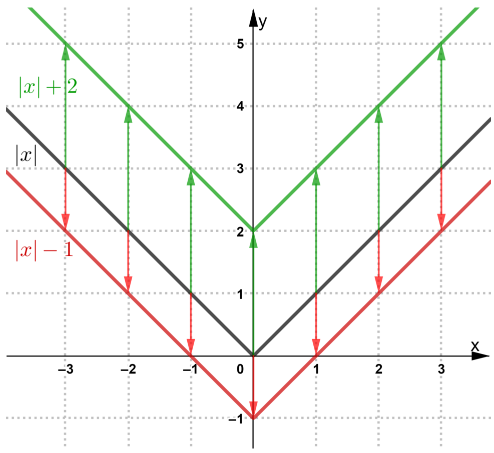
2.1. táblázat. Az $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 - 1$, $f_3(x) = x^2 + 2$ függvények értéktáblázata

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert-1$	2	1	0	-1	0	1	2
$\lvert x\rvert+2$	5	4	3	2	3	4	5

2.2. táblázat. Az $g_1(x) = |x|$, $g_2(x) = |x| - 1$, $g_3(x) = |x| + 2$ függvények értéktáblázata



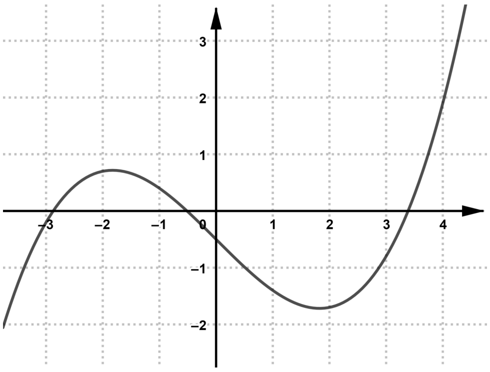
2.1. ábra. Az $f(x) = x^2$ függvénygörbe eltolása az y tengely mentén



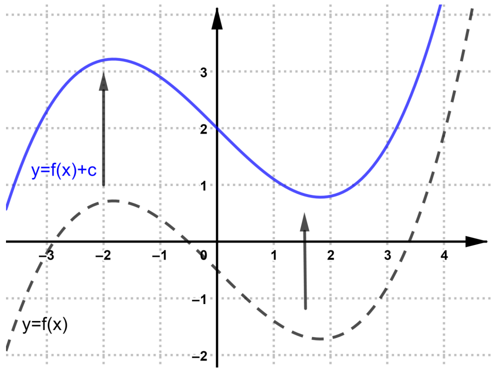
2.2. ábra. Az $g(x) = |x|$ függvénygörbe eltolása az y tengely mentén

Mindkét esetben különböző függvényt vettünk alapul, de eredménynek ugyanazt az eltolást kaptuk. Arra a következtetésre jutottunk, hogy ha ismerjük egy tetszőleges függvény grafikonját, akkor ábrázolni tudjuk a tőle csak egy konstansban különbözőt. [6]

2.1. definíció. *Az $y = f(x) + c$ függvény grafikonját párhuzamos eltolással kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, azaz ha a grafikont párhuzamosan eltoljuk az Oy tengely mentén c egységgel. Ha $c > 0$-felfelé, ha $c < 0$-lefelé. [12]*



2.3. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.4. ábra. Az $y = f(x) + c$ függvény grafikonja

2.1.2. Az $y = -f(x)$ függvény ábrázolása

Vizsgáljunk meg két alapfüggvény alapján, hogyan változik meg a függvény grafikonja, ha negatív előjellel vesszük. Vegyük példának újra az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = |x|$ függvényeket:

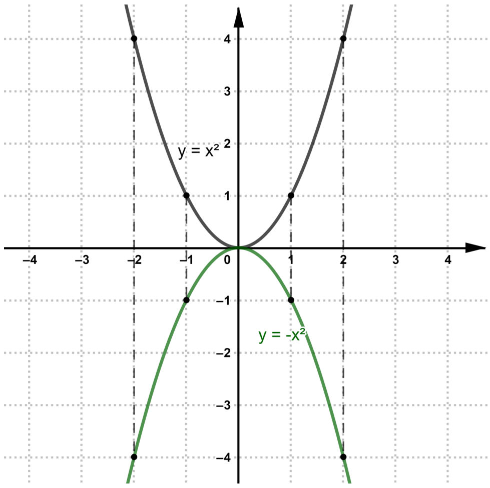
$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = -x^2,$$

$$g_1(x) = |x|, \quad g_2(x) = -|x|.$$

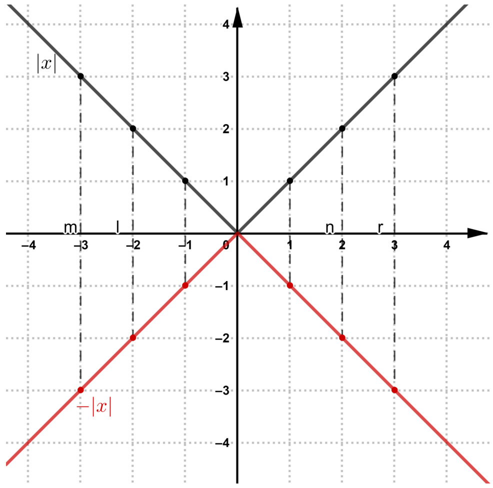
Adjuk meg ezeket a függvényeket táblázati alakban. Ezt a 2.3 táblázatban tűntetjük fel. Ábrázoljuk a függvényeket a koordinátasíkon. (2.5. és 2.6. ábrák)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3
$-\lvert x\rvert$	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

2.3. táblázat. Az $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2, g_1(x) = |x|, g_2(x) = -|x|$ függvények értéktáblázata



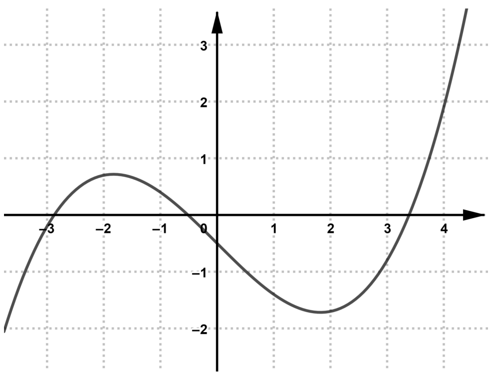
2.5. ábra. Az $f(x) = -x^2$ függvény grafikonja



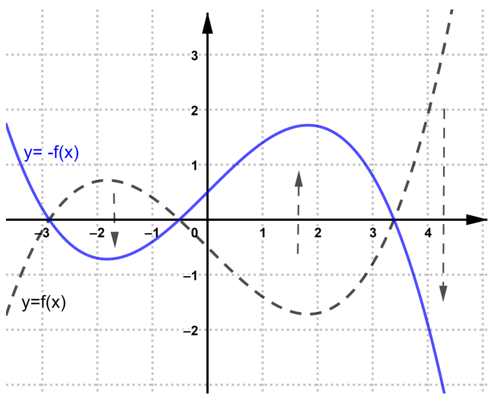
2.6. ábra. Az $g(x) = -|x|$ függvény grafikonja

Szemmel látható a grafikonokon, hogy a negatív előjellel vett függvény grafikonja a tükörképe az eredetinek az Ox tengelyre.

2.2. definíció. *Az $y = -f(x)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, ha tükrözzük az Ox tengelyre. [12]*



2.7. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.8. ábra. Az $y = -f(x)$ függvény grafikonja

2.1.3. Az $y = c \cdot f(x)$ függvény ábrázolása

Nézzük meg, mi történik a függvény grafikonjával, ha a függvény képletét megszorozzuk egy számmal.

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 2x^2, \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

$$g_1(x) = |x|, \quad g_2(x) = 2|x|, \quad g_3(x) = \frac{1}{2}|x|.$$

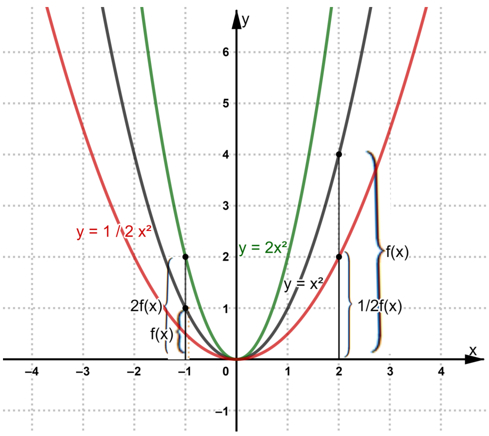
Adunk értékeket a függvényeknek. Ezt a 2.4 és a 2.5 táblázatokban tűntetjük fel. Ezután ábrázoljuk a függvényeket (2.9. és 2.10. ábrák).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

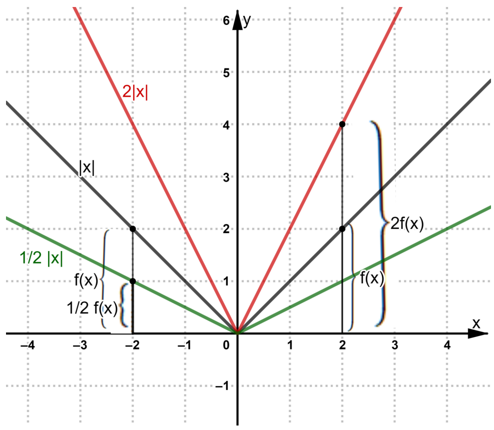
2.4. táblázat. Az $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$ függvények értéktáblázata

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3
$2\lvert x\rvert$	6	4	2	0	2	4	6
$\frac{1}{2}\lvert x\rvert$	1,5	1	0,5	0	0,5	1	1,5

2.5. táblázat. A $g_1(x) = |x|$, $g_2(x) = 2|x|$, $g_3(x) = \frac{1}{2}|x|$ függvények értéktáblázata



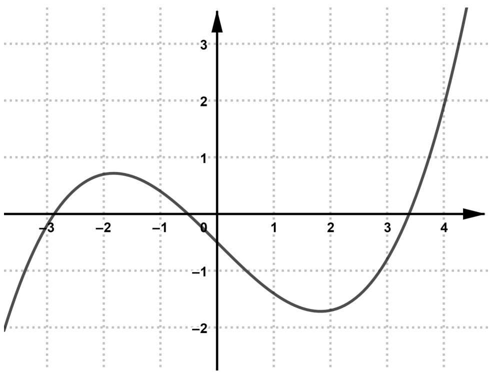
2.9. ábra. Az $f(x) = c \cdot x^2$ függvény grafikonja



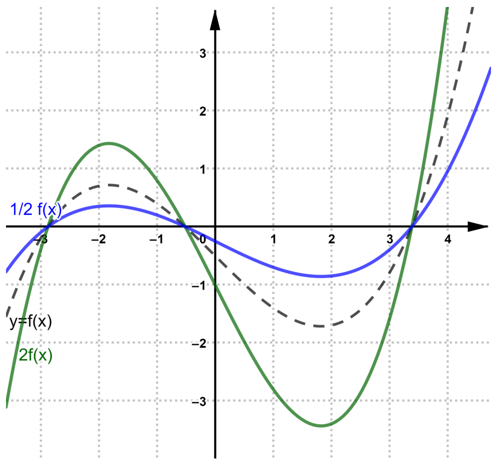
2.10. ábra. Az $g(x) = c \cdot |x|$ függvény grafikonja

A függvénynek hozzárendelési szabálya csak annyiban változott, hogy megszoroztuk egy pozitív számmal. A rajzokon jól látható, hogy ebben az esetben a grafikon pontjai egy függőleges egyenes mentén mozdulnak el. Az Ox tengelytől mért előjeles távolságuk változik pontosan annyiszorosára, mint amennyivel a függvényt szoroztuk. A tengelyen lévő pontok helyben maradnak. Ha egynél nagyobb számmal szorzunk, akkor a pontok távolodnak a tengelytől, és ezt nyújtásnak fogjuk nevezni. Ha egynél kisebb ez a szám, akkor zsugorításról beszélünk. [6]

2.3. definíció. *Az $y = c \cdot f(x)$ ($c > 1$ esetén) függvény grafikonját megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját az Oy tengely mentén megnyújtjuk ($k > 1$ esetén k-szorosan) vagy összenyomjuk ($0 < k < 1$ esetén $\frac{1}{k}$-szorosan). [12]*



2.11. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.12. ábra. Az $y = c \cdot f(x)$ függvény grafikonja

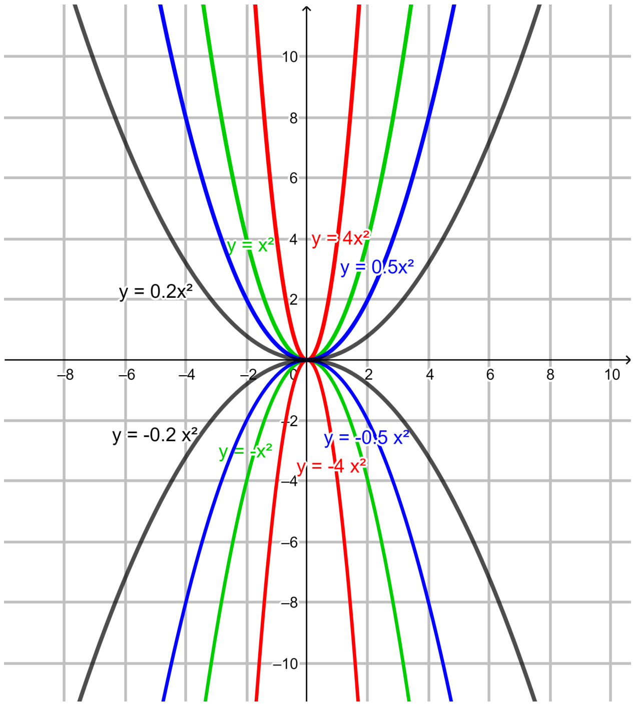
Jó példának szolgál az $y = ax^2$ függvény, melynek grafikonja a 2.13. ábrán látható különböző a értékekre. Ezeknek a függvényeknek a grafikonját **parabolának** nevezzük. Ha $a > 0$, akkor a parabola szárai felfelé mutatnak, ha $a < 0$, akkor pedig lefelé. A 2.6 táblázatban össze vannak foglalva az $y = ax^2$ függvény tulajdonságai. [10]

2.1.4. Az $y = |f(x)|$ függvény ábrázolása

Figyeljük meg, mi változik a függvény grafikonján, ha a függvény hozzárendelési szabályának az abszolút értékét vesszük. Vegyünk alapfüggvénynek az $f(x) = x$ és az $g(x) = x^2 - 2$ függvényeket. Adjunk értékeket az x-nek, ezt a 2.7 és a 2.8 táblázatokban számoljuk ki. Ábrázoljuk a függvényeket a koordinátasíkon. (2.14 és 2.15 ábrák)

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = |x|,$$

$$g_1(x) = x^2 - 2, \quad g_2(x) = |x^2 - 2|.$$



2.13. ábra. Az $y = ax^2$ függvény grafikonja

Tulajdonságok	$a > 0$	$a < 0$
Értelmezési tartomány	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Értékkészlet	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Zérushely	$x = 0$	$x = 0$
Állandó előjelű	$y > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$	$y < 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$
Növekvő	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Csökkenő	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

2.6. táblázat. Az $y = ax^2$ függvény tulajdonságai

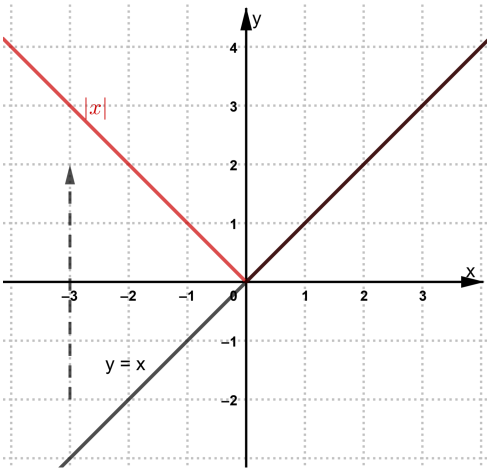
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3

2.7. táblázat. Az $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ függvények értéktáblázata

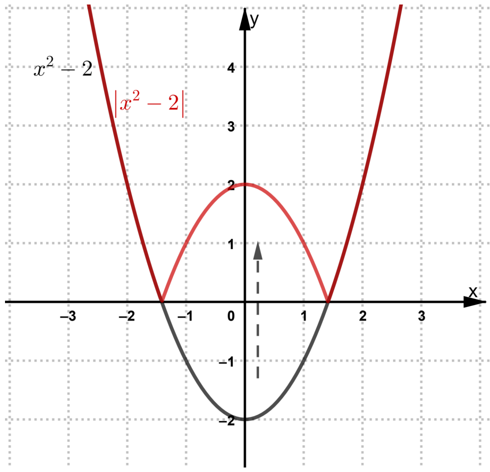
Az $y = |f(x)|$ függvényt úgy kapjuk az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, hogy a görbének azt a részét, amely az Ox tengelyen alatt van, azaz ahol $y = f(x)$ negatív értéket vesz fel, tükrözzük az Ox tengelyre. A görbének azt a részét, ahol $y = f(x)$ nemnegatív értékeket vesz fel, változatlanul hagyjuk. [7]

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
x^2-2	7	2	-1	-2	-1	2	7
$\lvert x^2-2\rvert$	7	2	1	2	1	2	7

2.8. táblázat. A $g_1(x) = x^2 - 2, g_2(x) = |x^2 - 2|$ függvények értéktáblázata



2.14. ábra. Az $f(x) = |x|$ függvény grafikonja



2.15. ábra. Az $g(x) = |x^2 - 2|$ függvény grafikonja

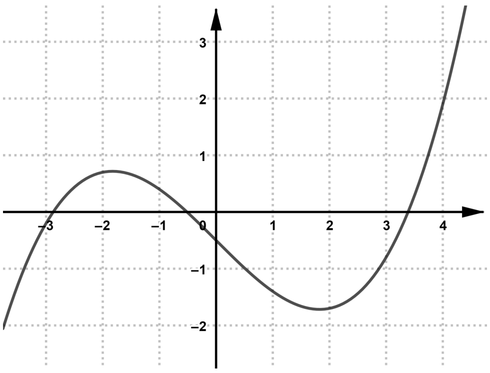
Az abszolút érték meghatározásából kapjuk a következőt [13]:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & ha\ f(x) \geqslant 0 \ \text{(a függvény grafikonja változatlan),} \\ -f(x), & ha\ f(x) < 0 \ \text{(tükrözés az } Ox \text{ tengelyre).} \end{cases}$$

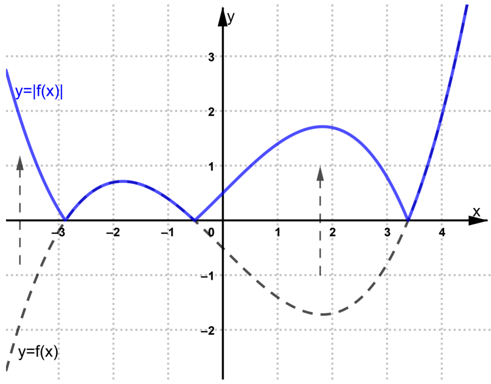
2.4. definíció. *Az $y = |f(x)|$ függvény grafikonját a következőképpen kaphatjuk meg: az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az a része, amely az Ox tengely felett (illetve magán a tengelyen) helyezkedik el, változatlanul megmarad, az Ox tengely alatti részét pedig tükrözzük ugyanerre a tengelyre. [12]*

2.2. Változótranszformációk

Megvizsgálunk olyan négy függvénytranszformációt, amelyeknél az eredeti grafikont az Ox tengely irányában fogunk megváltoztatni, azaz az eredeti függvény értelmezési tartományának



2.16. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.17. ábra. Az $y = |f(x)|$ függvény grafikonja

elemeit fogjuk transzformálni. Ezeket a függvénytranszformációkat **változótranszformációknak** nevezzük. [7]

2.2.1. Az $y = f(x + c)$ függvény ábrázolása

Hasonlóan, mint az értéktranszformációknál, figyeljük meg két alapfüggvény alapján, hogyan változik meg a függvény grafikonja, ha a változóhoz adunk hozzá egy számot. Vegyük példának a következő függvényeket:

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = (x-1)^2, \quad f_3(x) = (x+2)^2.$$

$$g_1(x) = |x|, \quad g_2(x) = |x-1|, \quad g_3(x) = |x+2|.$$

Adunk értékeket a függvényeknek, amit a 2.9 és a 2.10 táblázatokban összesítünk. Ábrázoljuk a függvényeket a koordinátasíkon. (2.18 és 2.19 ábrák)

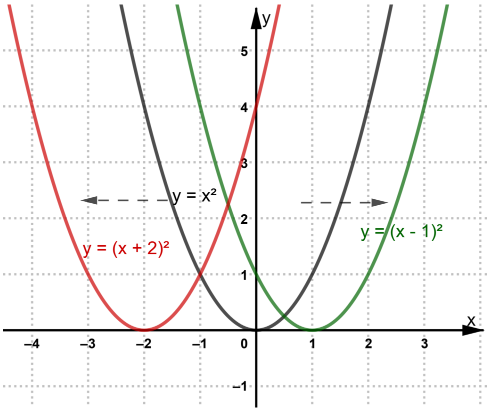
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4
$(x+2)^2$	11	6	3	2	3	6	11

2.9. táblázat. Az $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-1)^2$, $f_3(x) = (x+2)^2$ függvények értéktáblázata

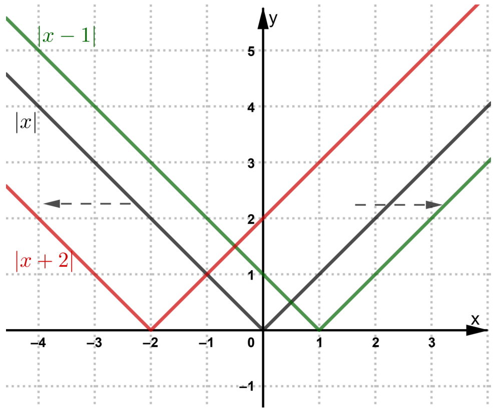
A grafikonokon láthatjuk, hogy párhuzamos eltolással kaptuk meg az új függvényt az eredetiből. A függvény képletében a változó helyére egy új változót helyettesítetünk. Tehát az

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$\|x-1\|$	4	3	2	1	0	1	2
$\|x+2\|$	1	0	1	2	3	4	5

2.10. táblázat. A $g_1(x) = |x|, g_2(x) = |x-1|, g_3(x) = |x+2|$ függvények értéktáblázata



2.18. ábra. Az $f(x) = x^2$ függvénygörbe eltolása az x tengely mentén



2.19. ábra. Az $g(x) = |x|$ függvénygörbe eltolása az x tengely mentén

eredeti függvény grafikonjét el kell toltunk c egységgel az Ox tengely mentén. Ha $c > 0$, akkor negatív irányba kell eltolnunk, ha $c < 0$, akkor pedig pozitív irányba. [6]

2.5. definíció. *Az $y = f(x+c)$ függvény grafikonját párhuzamos eltolással kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, azaz, ha a grafikont párhuzamosan eltoljuk Ox tengely mentén c egységgel. [12]*

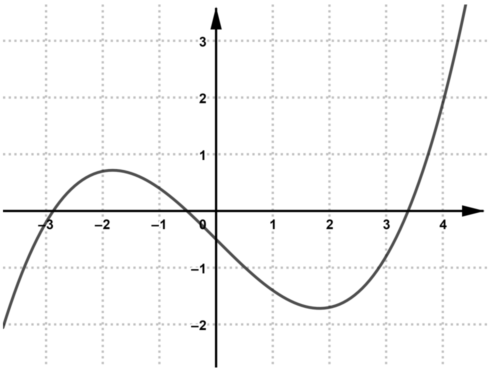
2.2.2. Az $y = f(-x)$ függvény ábrázolása

Vizsgáljunk meg a $y = \sqrt{x}$ alapfüggvény alapján, hogyan változik meg a függvény grafikonja, ha a változót negatív előjellel vesszük.

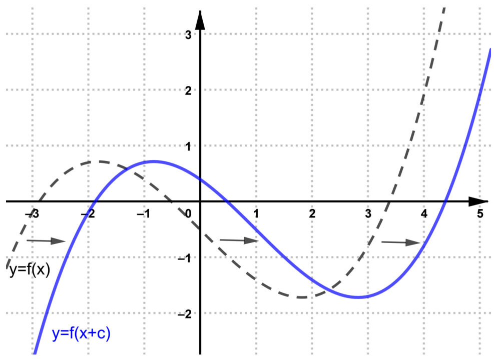
$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sqrt{-x},$$

Adjunk értékeket a függvénynek, amit a 2.11 táblázatban tűntetjük fel. A függvény grafinoját a 2.22. ábrán láthatjuk.

Szemmel látható a grafikonokon, hogy az új függvény grafikonja a tükörképe az eredetinek az Oy tengelyre.



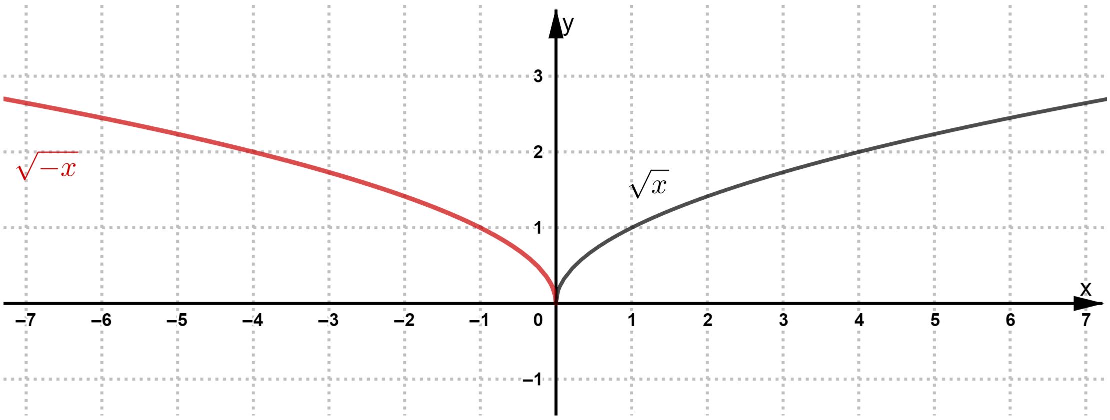
2.20. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.21. ábra. Az $y = f(x + c)$ függvény grafikonja

x	-9	-4	-1	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	-	-	-	0	1	2	3
$\sqrt{-x}$	3	2	1	0	-	-	-

2.11. táblázat. Az $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{-x}$ függvények értéktáblázata



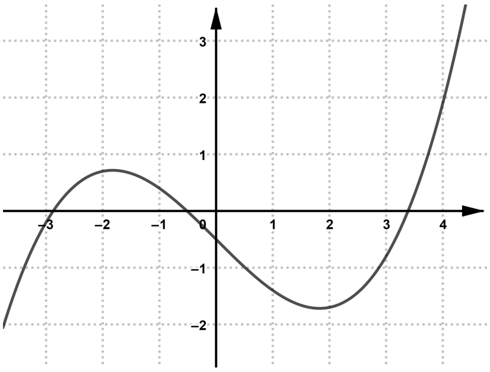
2.22. ábra. Az $y = \sqrt{-x}$ függvény grafikonja

2.6. definíció. *Az $y = f(-x)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, ha tükrözzük az Oy tengelyre. [12]*

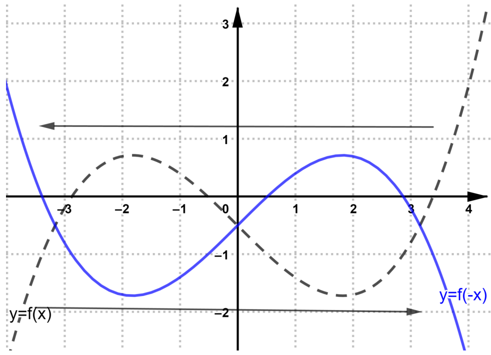
2.2.3. Az $y = f(c \cdot x)$ függvény ábrázolása

Nézzük meg a $y = \sqrt{x}$ alapfüggvény alapján, hogyan változik meg a függvény grafikonja, ha a függvény változóját megszorozzuk egy számmal.

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sqrt{2x}, \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$$

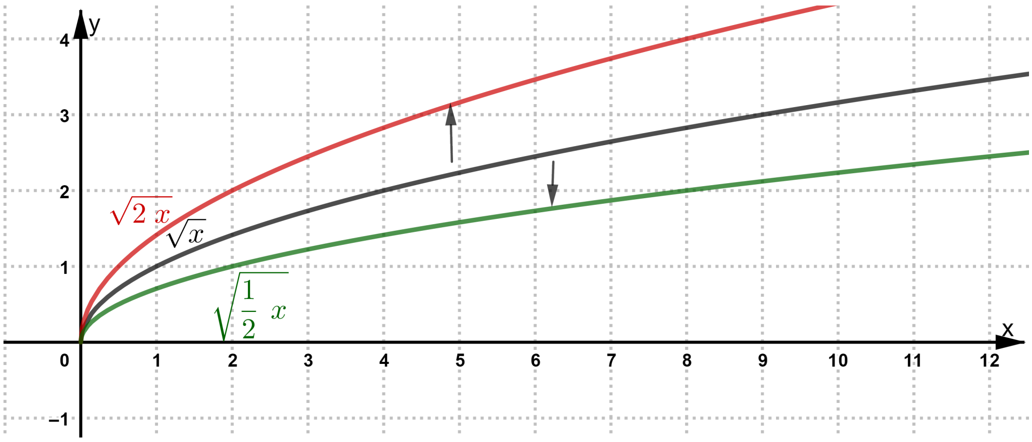


2.23. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.24. ábra. Az $y = f(-x)$ függvény grafikonja

A függvény grafinoját a 2.25. ábrán láthatjuk.



2.25. ábra. Az $y = \sqrt{c \cdot x}$ függvény grafikonja

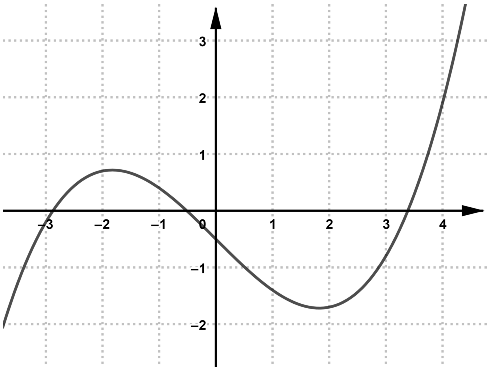
A rajzon jól látható, hogy ebben az esetben a grafikon pontjai egy vízszintes egyenes mentén mozdulnak el.

2.7. definíció. *($c > 0$ esetén) az $y = f(c \cdot x)$ függvény grafikonját megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját az Ox tengely mentén megnyújtjuk ($0 < c < 1$ esetén $\frac{1}{c}$-szeresen) vagy összenyomjuk ($c > 1$ esetén c-szeresen). [12]*

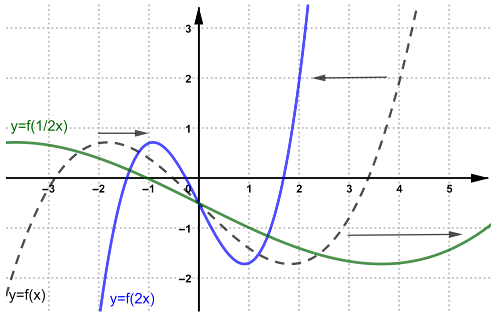
2.2.4. Az $y = f(|x|)$ függvény ábrázolása

Figyeljük meg, mi változik a függvény grafikonján, ha a függvény változójának az abszolút értékét veszük. Vegyünk alapfüggvénynek az $f(x) = (x-2)^2$ függvényt. Adjunk értékeket az x-nek, ezt a 2.12 táblázatban számoljuk ki. A függvény grafinoját a 2.28. ábrán láthatjuk.

$$f_1(x) = (x-2)^2, \quad f_2(x) = (|x|-2)^2,$$



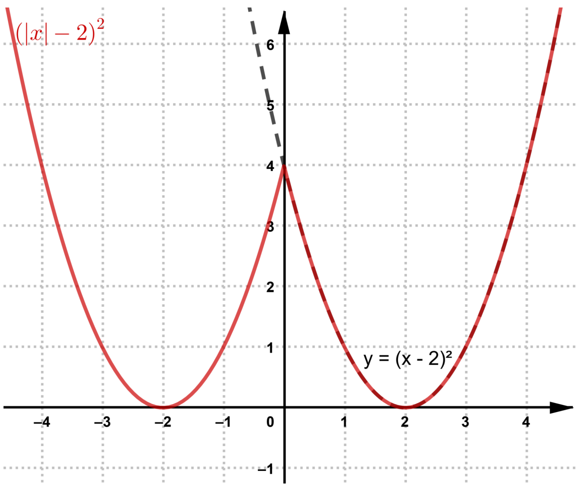
2.26. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.27. ábra. Az $y = f(c \cdot x)$ függvény grafikonja

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-2)^2$	25	16	9	4	1	0	1
$(\lvert x\rvert-2)^2$	1	0	1	4	1	0	1

2.12. táblázat. Az $f_1(x) = (x-2)^2$, $f_2(x) = (|x|-2)^2$ függvények értéktáblázata

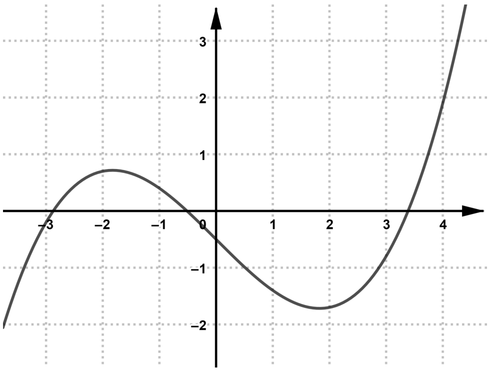


2.28. ábra. Az $y = (|x|-2)^2$ függvény grafikonja

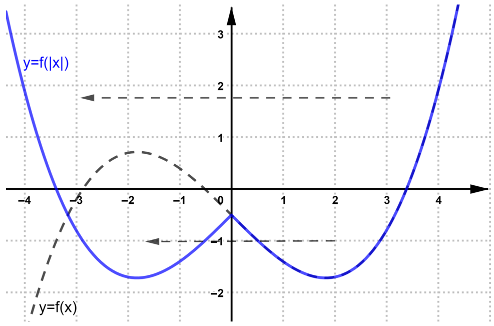
Az abszolút érték meghatározásából felírhatjuk a következőt [13]:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & ha\ x \geqslant 0 \text{ (a függvény grafikonja változatlan),} \\ f(-x), & ha\ x < 0 \text{ (tükrözés az } Oy \text{ tengelyre).} \end{cases}$$

2.8. definíció. *Az $y = f(|x|)$ függvényt úgy állítjuk elő az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, hogy $x \geqslant 0$ helyekhez tartozó görbedarabot tükrözzük az Oy tengelyre, a negatív x helyekhez tartozó részt pedig elhagyjuk. [7]*



2.29. ábra. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja



2.30. ábra. Az $y = f(|x|)$ függvény grafikonja

2.3. Példák függvénytranszformációkra

Egy függvényábrázolás során lehet, hogy ezeket a transzformációkat többször kell alkalmaznunk egymás után. A következő példák jól szemléltetik ezt. [4]

1. feladat: Készítsük el az $f(x) = x^2 - 4x + 1$ függvény grafikonját! [4]

Megoldás:

A függvény ebben az alakban nem teszi lehetővé, hogy rájöjjünk arra, hogy milyen átalakításokat kell elvégeznünk. Algebrai tanulmányaink soárn megismerkedtünnk a másodfokú kifejezés azonos átalakításaival. Ezek közül most a teljes négyzetté alakítást fogjuk használni. Alakítsuk át teljes négyzetté:

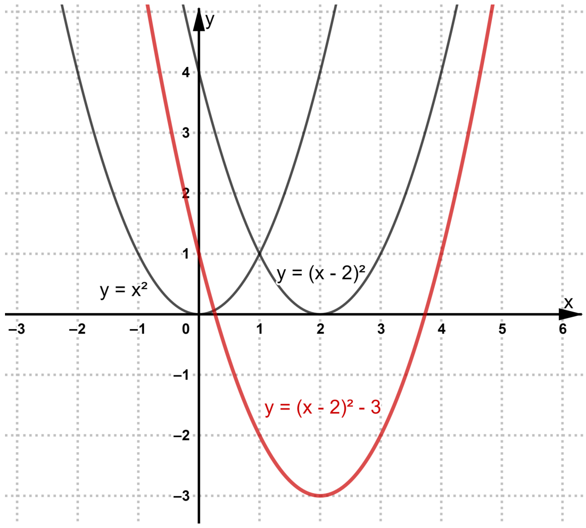
$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x - 2)^2 - 3.$$

Ennek ábrázolására a következő lépések segítségével oldható meg. Az $f(x) = x^2$ görbéjét ismerjük. Az $f(x) = (x-2)^2$ görbéje ebből úgy kapható, hogy a parabolát két egységgel jobbra toljuk. Ebből viszont az $f(x) = (x-2)^2-3$ grafikonja úgy keletkezik, hogy az előzőben kapott görbét 3 egységgel lefelé toljuk az Oy tengely mentén.

Az itt leírtakat röviden így szimbolizáljuk:

$$x^2 \Longrightarrow (x - 2)^2 \Longrightarrow (x - 2)^2 - 3.$$

Az egyes transzformációk eredményeit közös koordinátarendszerben ábrázoljuk (2.31. ábra). Az ábrából láthatjuk, hogy az eredmény egy ugyanolyan parabola, mint az $f(x) = x^2$ görbéje, csak két eltolás segítségével más helyre került.



2.31. ábra. Az $f(x) = (x-2)^2 - 3$ függvény grafikonja

2. feladat: Ábrázoljuk az $y = 8x - 2x^2$ függvényt! [14]

Megoldás:

Újra teljes négyzetté alakítjuk a függvényünket. Kiemeljük először az x^2 együtthatóját:

$$y = 8x - 2x^2 = -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) = -2[(x-2)^2 - 4].$$

Ebből látható, hogy az adott függvény grafikonját az $y = x^2$ görbéjéből kapjuk meg a következő transzformációkkal: párhuzamos eltolás az Ox tengely mentén 2 egységgel jobbra, párhuzamos eltolás az Oy tengely mentén 4 egységgel le, 2-szeres nyújtás az Oy tengely mentén, tükrözés az Ox tengelyre. (2.32. ábra)

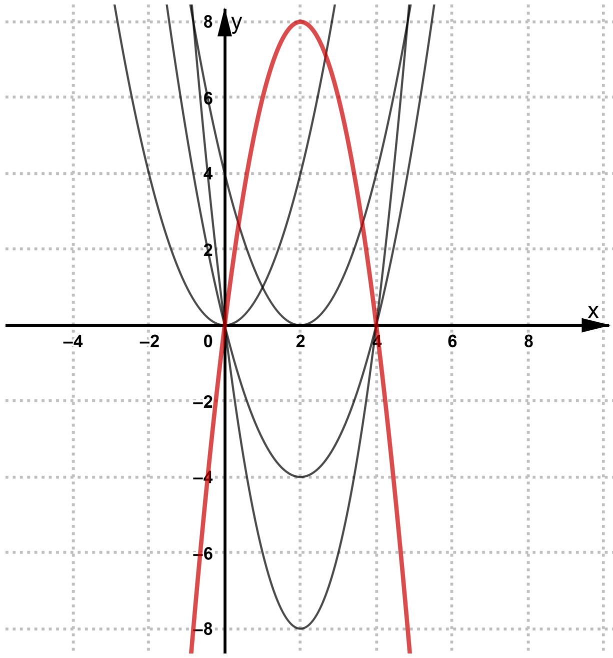
$$x^2 \Longrightarrow (x-2)^2 \Longrightarrow (x-2)^2 - 4 \Longrightarrow 2[(x-2)^2 - 4] \Longrightarrow -2[(x-2)^2 - 4].$$

3. feladat: Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{-x+3} - 2$ függvény grafikonját!

Megoldás:

Nézzük meg, hány transzformációs lépést kell végrehajtanunk, hogy eljussunk ehhez a függvényhez, ha a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját vesszük alapul:

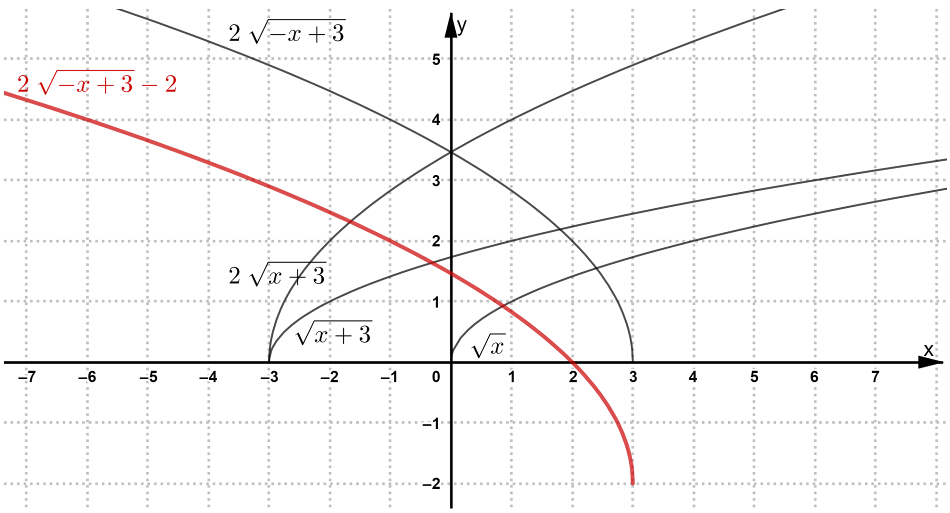
$$\sqrt{x} \Longrightarrow \sqrt{x+3} \Longrightarrow 2\sqrt{x+3} \Longrightarrow 2\sqrt{-x+3} \Longrightarrow 2\sqrt{-x+3} - 2.$$



2.32. ábra. Az $y = 8x - 2x^2$ függvény grafikonja

Tehát először eltoljuk 3 egységgel balra az Ox tengely mentén, majd nyújtjuk kétszeresére, ezután tüközzük az Oy tengelyre, végül párhuzamosan eltoljuk 2 egységgel lefelé az Oy tengely mentén. (2.33. ábra)

Megjegyzés: Ugyanazt a grafikont fogjuk kapni eredményként, ha más sorrendben hajtjuk végre az ábrázolást.



2.33. ábra. Az $f(x) = 2\sqrt{-x+3} - 2$ függvény grafikonja

4. feladat: Ábrázoljuk az $y = \frac{3x-13}{x-4}$ függvényt! [6]

Megoldás:

Itt szintén nem tudjuk rögtön leolvasni a transzformációs lépéseket. Szükségünk van némi átalakításra. Jelöljük ki az egész részt a törtből:

$$\frac{3x-13}{x-4}=\frac{3(x-4)-1}{x-4}=\frac{3(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}=3-\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{x-4}+3.$$

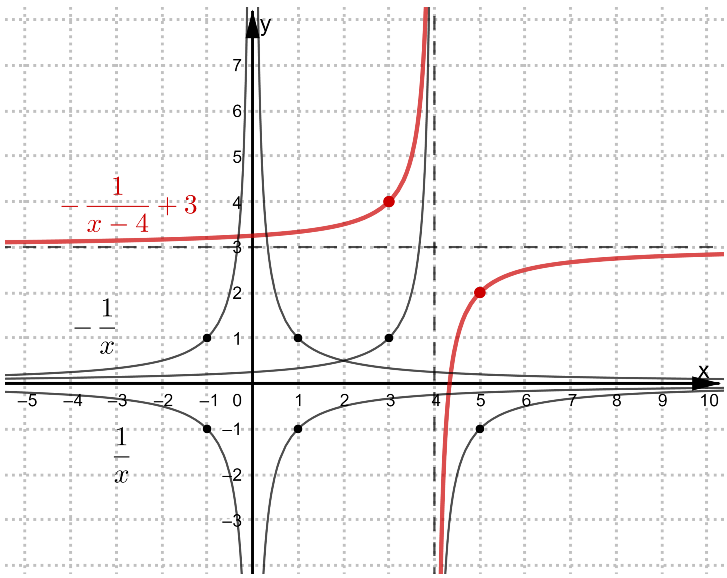
Végeredményben egy olyan törtet kaptunk, ahol a számlálóból eltűnt az x.

Így már fel tudjuk írni a transzformáció lépéseit:

$$\frac{1}{x}\Longrightarrow-\frac{1}{x}\Longrightarrow-\frac{1}{x-4}\Longrightarrow-\frac{1}{x-4}+3.$$

A hiperbolát először tükrözzük az Ox tengelyre, majd eltoljuk balra 4 egységgel, végül pedig 3-al eltoljuk felfelé. (2.34. ábra)

Megjegyzés: Egyszerűbb eltolni nem a grafikont, hanem a koordinátatengelyeket. Ahelyett, hogy a hiperbolát eltoljuk 4 egységgel balra és 3 egységgel felfelé, elegendő párhuzamosan eltolni az Ox és az Oy tengelyeket ugyanolyan távolságokra. Így kapunk egy új (segéd) koordinátarendszert. Ahhoz, hogy ne veszítsük el az eredeti koordinátarendszert, célszerű az újat szaggatott vonallal megrajzolni és ezután ábrázolni a függvény grafikonját. [11]



2.34. ábra. Az $y=\frac{3x-13}{x-4}$ függvény grafikonja

5. feladat: Ábrázoljuk az $y=\mid x^2-4|x|+2\mid$ függvényt!

Megoldás:

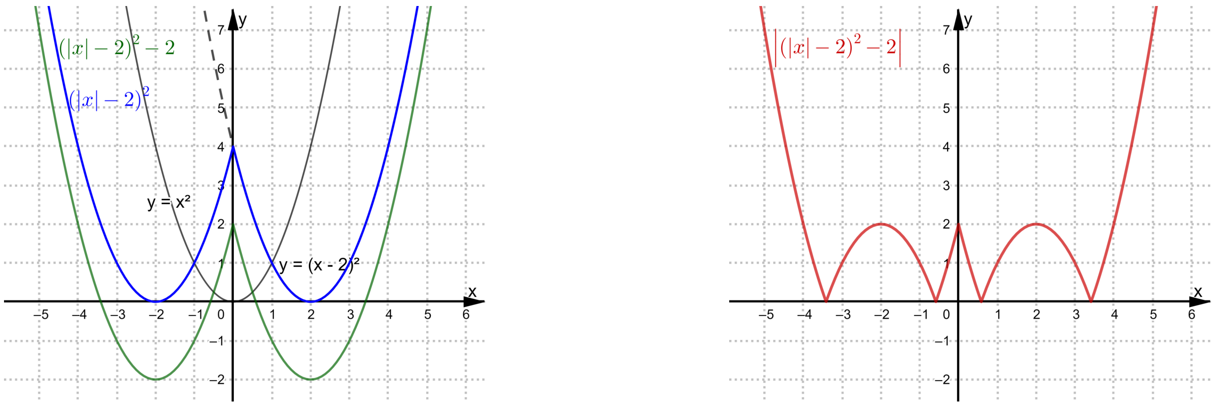
Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$\mid x^2-4|x|+2=\mid |x|^2-4|x|+2\mid=\mid |x|^2-4|x|+4-2\mid=\mid (|x|-2)^2-2\mid.$$

Felírjuk a transzformáció lépéseket:

$$x^2\Longrightarrow(x-2)^2\Longrightarrow(|x|-2)^2\Longrightarrow(|x|-2)^2-2\Longrightarrow\mid(|x|-2)^2-2\mid.$$

Először eltoljuk az Ox tengely mentén 2 egységgel jobbra, majd ahol az $x \geqslant 0$ helyekhez tartozó görbedarabot tükrözzük az Oy tengelyre, ezután az Oy tengely mentén 2 egységgel lefelé, végül azt a részét, amely az Ox tengely alatt van, tükrözzük az Ox tengelyre.



2.35. ábra. Az $y = \mid x^2 - 4|x| + 2 \mid$ függvény grafikonja

3. fejezet

Függvénytranszformációk oktatása a Beregszászi járás középiskoláiban

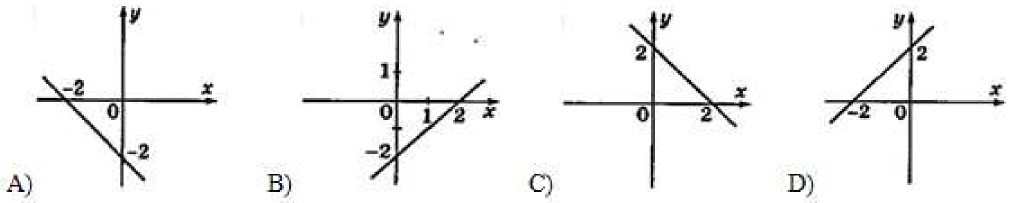
Kutatásunk során felmérést végeztünk a Beregszászi járás középiskoláiban, melynek célja felmérni a Függvénytranszformációk témájának oktatását a középsikolákban és a téma elsajátítását a tanulók által. Ehhez 5 iskolában a 9. osztályos tanulókkal irattunk meg egy felmérő dolgozatot. A következő iskolák vettek részt ennek lebonyolításában: a Beregszászi Bethlen Gábor Líceum, a Beregszászi 4. sz. Kossuth Lajos Líceum, a Nagyszőlősi 3.sz. Perényi Zsigmond Középiskola, a Karácsfalvai Sztojka Sándor Görögkatolikus Líceum és a Bátyúi Középiskola. A dolgozat megíratása néhány iskolában helyben történt, néhányban pedig elektronikusan Google Űrlap formájában.

3.1. A feladatlap elemzése

A felmérő dolgozat az *1. sz. mellékletben* található. A függvénytranszformációk oktatására nem sok óra áll rendelkezésre, így kevés példa oldható meg, és nem mindig tudjuk bemutatni ennek a szépségét a tanulóknak. Ezért érdemes a matematikai szakkörökön jobban belemélyülni ebbe a témába. Így célszerűbbnek tartottuk a felmérő dolgozatokban olyan feladatokat kiválasztani, amilyen típusút a diákok tanultak a tanórákon.

A feladatlap összesen 7 feladatból áll, melyek közül az 1-4. tesztfeladat, az 5-6. eredménybeírós, a 7. pedig a teljes megoldás leírását igényli. Összesen 12. pont szerezhető: a tesztfeladatok 1-1 pontot érnek, az eredménybeírós feladatok 2-2 pontot, az utolsó pedig 4. pontot. Figyeljük meg a feladatokat részletesebben.

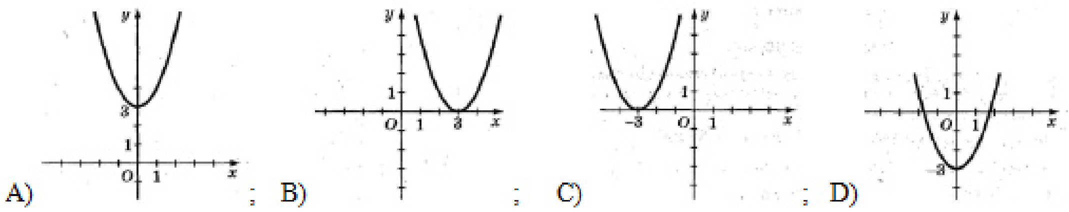
1. Melyik ábrán látható az $y = x - 2$ függvény grafikonja?



3.1. ábra. Az 1. feladat válaszlehetőségei

Ebben a feladatban a **B)** válasz a helyes, hisz a függvény hozzárendelési szabálya az $f(x) = f(x) + c$ képlettel van megadva, ami azt jelenti, hogy az eredeti függvényt el kell tolni az Oy tengely mentén c egységgel. Ez esetben a c értéke -2, tehát $c < 0$, ezért a függvényt lefelé toljuk, ami a B) válasz.

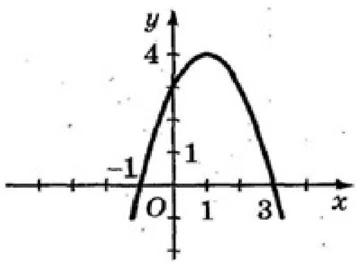
2. Melyik ábrán látható az $f(x) = (x+3)^2$ függvény grafikonját?



3.2. ábra. A 2. feladat válaszlehetőségei

A 2. feladat helyes válasza a **C)**. Jelen esetben a függvény az $f(x) = f(x+c)$ egyenlettel van megadva, amiből arra következtetünk, hogy a függvényt az Ox tengely mentén kell eltolnunk 3 egységgel balra, hisz a c pozitív szám.

3. Melyik képlet adja meg azt a függvényt, amelynek a grafikonja az ábrán látható?



3.3. ábra. A 3. feladathoz szükséges ábra

A) $-(x-1)^2 + 4$	B) $(x+1)^2 - 4$
C) $-(x+1)^2 + 4$	D) $(x-1)^2 - 4$

Az ábrát megfigyelve láthatjuk, hogy a parabola ágai lefelé mutatnak, így biztos, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény képletében ebben az esetben az a együtthatója negatív. Ezzel már kizárhatjuk a B) és D) válaszlehetőségeket. Továbbá két függvénytranszformáció is ment végbe, ami a párhuzamos eltolás az Ox és Oy tengely mentén. Az Ox tengelyen: 1 egységgel jobbra, tehát $-x^2 \implies -(x-1)^2$. Az Oy tengelyen: 4 egységgel felfelé, tehát $-x^2 \implies -(x-1)^2 \implies -(x-1)^2 + 4$. Így a helyes válasz az **A)**.

4. Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonját párhuzamosan eltolták 3 egységgel balra és 4 egységgel fel. Melyik függvény grafikonját kapták?

A) $\sqrt{x+3} + 4$	B) $\sqrt{x-3} + 4$
C) $\sqrt{x+3} - 4$	D) $\sqrt{x-3} - 4$

Ebben a feladatban is két függvénytranszformációs lépés szükséges a megoldáshoz. Az alapfüggvényt 3 egységgel balra tolták, ami azt jelenti, hogy az Ox tengely mentén, és mivel balra, ezért $\sqrt{x} \implies \sqrt{x+3}$ kapjuk; felfelé az Oy tengely mentén 4 egységgel, mivel felfelé, ezért a pozitív irányba $\sqrt{x+3} \implies \sqrt{x+3} + 4$. A helyes válasz az **A)**.

5. Határozd meg az $y = x^2 - 8x + 13$ parabola csúcspontjának az (x_0, y_0) koordinátáit! Írd be melyik koordinátanegyedben helyezkedik el és az $x_0 + y_0$ értéket!

Megoldás: Ennek a feladatnak két megoldása is lehet.

Az első az, hogy átalakítsuk a függvény hozzárendelési szabályát:

$$y = x^2 - 8x + 13 = x^2 - 8x + 16 - 3 = (x-4)^2 - 3.$$

Ebből már megmondhatjuk, hogy a parabola csúcspontja az $O(4, -3)$ pont, mivel párhuzamosan eltoljuk balra 4 egységgel és lefelé 3 egységgel. A csúcspont a IV. koordinátanegyedben helyezkedik el, mivel az x koordináta pozitív, az y pedig negatív. Az $x_0 + y_0 = 4 - 3 = 1$

A második módszer annyival különbözik, hogy a parabola csúcspontját a képlet szerint számoljuk ki:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4$$

$$y_0 = y(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 13 = 16 - 32 + 13 = -3$$

Ezzel meghatároztuk a parabola csúcspontját, ami az $O(4, -3)$ koordinátájú pont.

Felelet: IV. koordinátanegyedben ehlyezkedik el, csúcspontjának koorinátáinak összege pedig 1.

6. Határozd meg az $y = -x^2 + 5x - 3$ parabola növekedési intervallumát! Add meg azt a legnagyobb egész számot, amely hozzátartozik ehhez az intervallumhoz!

   Megoldás:

   Mivel az $a < 0$, ezért a parabola ágai lefelé mutatnak. Tehát a növekedési intervallum $(-\infty; x_0)$, ahol az x_0 a parabola csúcsának a koordinátája. Így elegendő meghatározni az x_0 értékét.

   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot (-1)} = 2,5$$

   Tehát a növekedési intervallum $(-\infty; 2,5)$. A legnagyobb egész szám, mely hozzátartozik ehhez az intervallumhoz: 2.

   Felelet: 2.

7. Add meg az alábbi függvény hozzárendelési szabályát $y = a(x - m)^2 + n$ alakban, majd ábrázold az $y = ax^2$ függvény grafikonjának transzformálásával: $y = x^2 + 6x + 5$! Olvasd le a grafikonról:

   - melyik intervallumon növekvő, és melyik intervallumon csökkenő a függvény;
   - azon argumentumértékeket, amelyekre a függvény pozitív értéket vesz fel, és azokat, amelyekre negatív értéket vesz fel!

   Megoldás:

   Végezzünk azonos átalakítást a függvény hozzárendelési szabályán:

   $$y = x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 4 = (x + 3)^2 - 4.$$

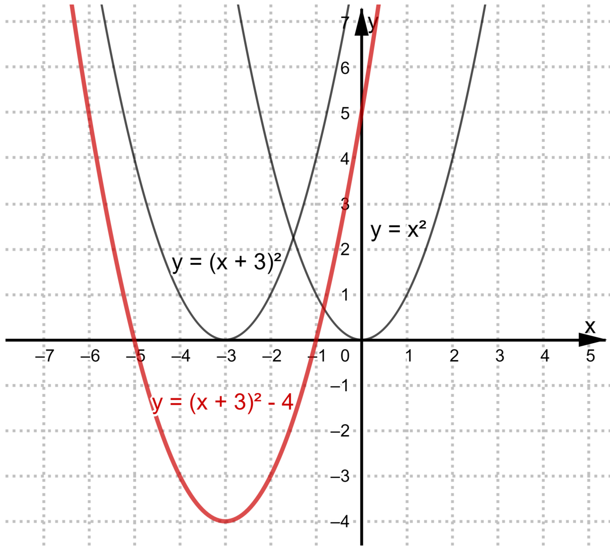
   Ezzel előállítottuk a függvényt az $y = a(x - m)^2 + n$ alakban.

   A transzformáció lépései a következőek:

   $$x^2 \Longrightarrow (x + 3)^2 \Longrightarrow (x + 3)^2 - 4$$

   Először párhuzamosan eltoljuk az Ox tengely mentén 3-al balra, majd pedig 4-el lefelé az Oy tengely mentén. (3.4. ábra)

   A grafikonról leolvassuk függvény növekedési és csökkenési intervallumait, illetve hol pozitív és hol negatív a függvény:



3.4. ábra. Az $y = x^2 + 6x + 5$ függvény grafikonja

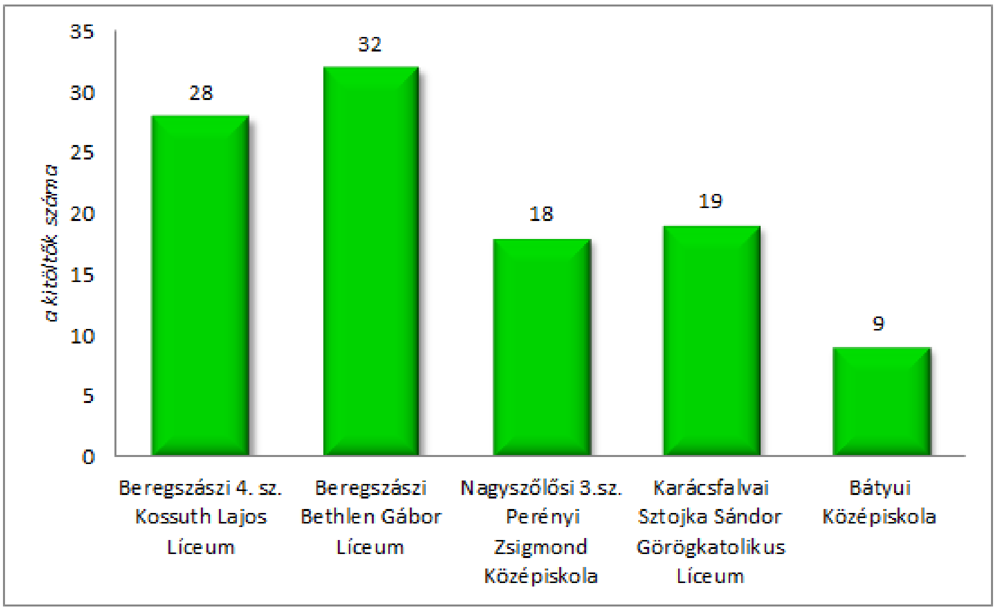
- csökken a $(-\infty; -3]$ intervallumon;
- növekszik a $(-3; +\infty)$ intervallumon;
- $y > 0$ a $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$ intervallumon;
- $y < 0$ a $(-5; -1)$ intervallumon.

Ezzel meg van oldva a feladat.

A dolgozat javítása során az 5-7. feladatokban részpontokat is kaptak a tanulók. Az 5. feladatban maximális pontszám elérhető, ha a tanuló meghatározza azt, hogy melyik koordinátanegyedben helyezkedik el a parabola csúcspontja és a koorinátáinak az összegének az értékét. 1,5 pont kaphat, ha csak nem számolja ki a csúcspotnjának a koordinátáinak az összegét. 1 pont pedig akkor, ha vagy csak a koordinátanegyedet írja le vagy az $x_0 + y_0$ értékét. A 6. feladatban 2 pont kapható, ha a diák meghatározza a legnagyobb egész számot, amely a növekvési intervallumhoz tartozik. 1,5 pont adható az intervallum meghatározására. Az utolsó feladatban maximális pontszám kapható, ha a feladat teljes mértékben meg van oldva. A függvény hozzárendelési szabályának átalakítása – +1 pont, a grafikon ábrázolása – +1 pont, növekvő és csökkenő intervallum meghatározása – +1 pont, azon argumentumértékek meghatározása, ahol a függvény pozitív vagy negatív – +1 pont, így jön ki összesen 4 pont.

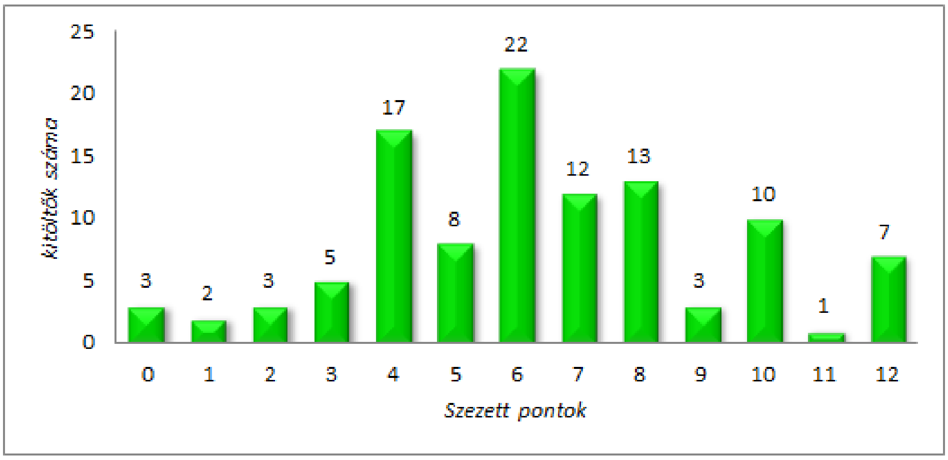
3.2. Az eredmények elemzése

Összesen 106 választ sikerült összegyűjteni az öt iskolán belül. A kitöltők száma iskola megoszlás szerint a 3.5. ábrán látható. A legtöbb dolgozatot a Beregszászi Bethlen Gábor Líceumban sikerült megíratni.

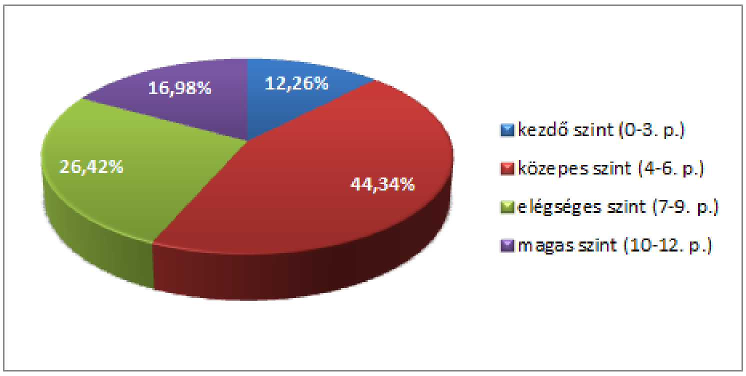


3.5. ábra. A kitöltők száma iskola megoszlás szerint

Az összpontszám eloszlása a 3.6. ábrán van feltűntetve. Mint látható, a pontok szórása nagyban eltér egymástól. Az átlag eredmény 6,35 pont a 12-ből. Az eredmények minősítése látható a diagrammon (3.7.ábra), amiből arra következtetünk, hogy a tanulók többnyire közepes szinten teljesítették a feladatot..

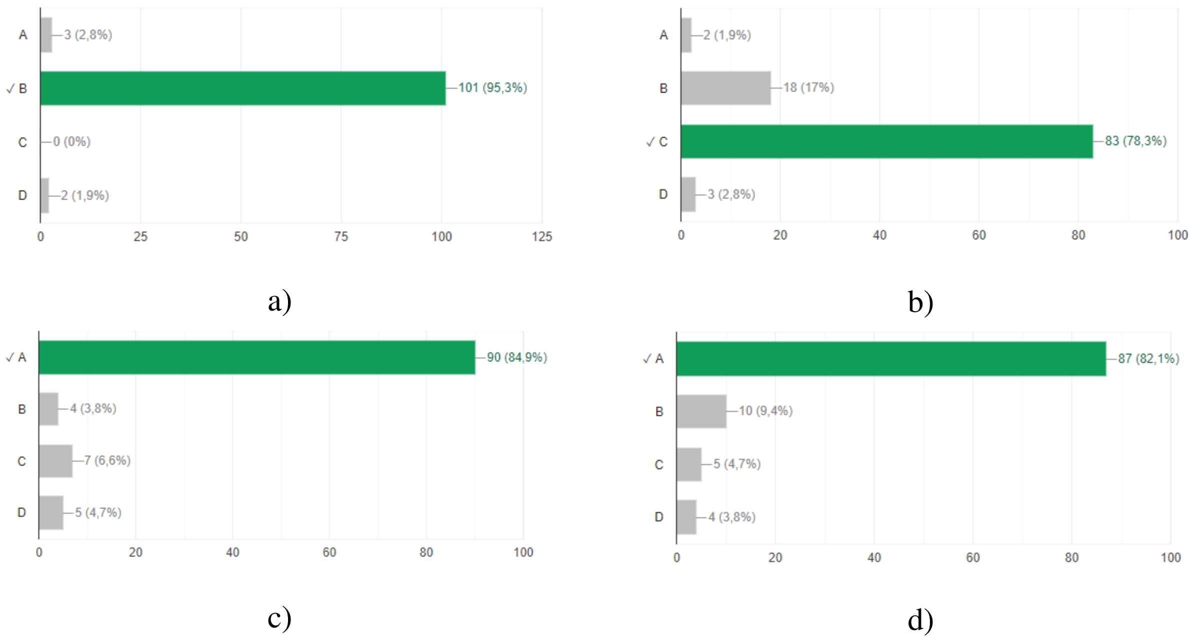


3.6. ábra. Az összpontszám eloszlása



3.7. ábra. Az eredmények minősítése

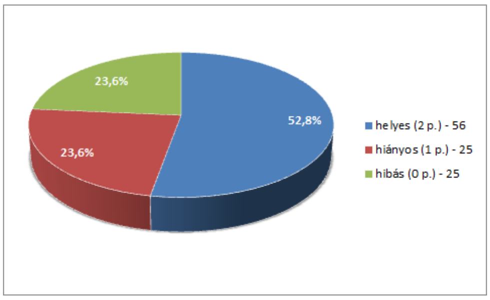
A 3.8. ábrán fel van tűntetve a tesztfeladatok kitöltésének elemzése. Az 1. feladatban 101 diák adott helyes válasz, ami összesen 95,3 % teszi ki. A 2. feladatban már nagyobb a megoszlás a válaszok között: 83/106 helyes válasz, ami a válaszok 78,3 %. A feladatban az $f(x) = (x + 3)^2$ függvénnyel megadott grafikont kellett felismerni a diákoknak, ami azt jelenti, hogy a grafikon balra tolódik. Viszont a képletben + jel szerepel, ami bezavarhatja a tanulót, hisz a plusz jelet a "jobb oldallal", a "jóval", a "pozitívval" asszociáljuk, ezért gyakran az agyunk bezavarodhat, így e matika feladat megoldásában a tudatalattink jobbra fogja tolni a grafikont. Ez magyarázhatja azt, hogy tanulók 17% a B) választ jelölte. A 3. feladatban a helyes válaszok száma 90, ami a válaszok 84,9 %. A 4. feladatban 87/106 a helyes válaszok száma, ami a kitöltések 82,1 %. Ebben a két feladatban is bezavarodhat a tanuló a grafikon jobb és a balra tolásánál.



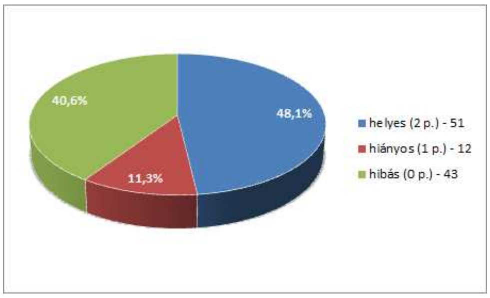
3.8. ábra. A tesztfeladatok kitöltésének eredményei: a) 1. feladat, b) 2. feladat, c) 3. feladat, d) 4. feladat.

Az 5. feladat eredményei a 3.9. ábrán láthatóak. A diákok 52,8 % adott helyes választ. A hiányos válaszokban a tanulók nem írták le, melyik koordinátanegyedben helyezkedik el a csúcspont. A hibás válaszokban legtöbbször nem a számítással volt a probléma, hanem azzal, hogy a diákok üresen hagyták a feleletre kijelölt helyet, tehát nem oldották meg, ez a kitöltők 23,6 %.

A 6. feladat eredményei a 3.10. ábrán vannak feltűntetve. Mint látható az eredményekből ez a feladat nehezebb volt a tanulók számára. Mindössze 48,1 % helyes válasz született. A hiányos válaszoknál leginkább az volt a hiba, hogy a tanulók nem tudták meghatározni a legnagyobb egész számot, amely hozzátartozott a növekvési intervallumon. A hibás válaszok aránya is elég magas, 40,6 %.

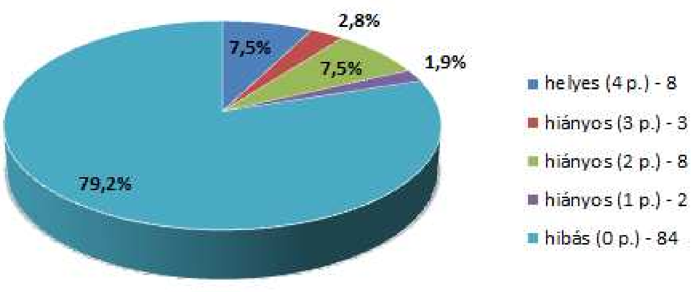


3.9. ábra. Az 5. feladat válaszainak elemzése



3.10. ábra. A 6. feladat válaszainak elemzése

A 7. feladat eredményeit a kördiagram szemlélteti (3.11. ábra). Mint látjuk, kevés tanuló fogott hozzá ennek a feladatnak a megoldásához (79,2 % nem oldotta meg). A tanulók 7,5 % teljesen megoldotta a feladatot 4 pontot szerezve ezzel. Úgyszintén 7,5 % azok, akik megszerkesztették helyesen a függvény grafikonját. Némely diáknál problémát okozott az intervallumok helyes felírása, így több pontott veszítettek ezzel.



3.11. ábra. A 7. feladat válaszainak elemzése

3.3. Következtetések

A dolgozatok elemzése után azokra a következtetésekre jutottunk, hogy a Beregszászi járás középiskoláiban a Függvénytranszformációk témáját viszonylag jól sajátították el a 9. osztályos tanulók. Vannak hibák, amelyek felmerülnek a diákoknál, de ez magyarázható a karantén helyzettel is, mely mutatkozik a tanulók eredményein. A másik befolyásoló tényező maguktól a diákoktól származik: gyenge a motivációjuk a tanulásra és az érdeklődésük a téma iránt.

Ahhoz, hogy kiküszöböljük ezeket a problémákat, a következőket tehetjük:

- több időt szánjunk az elméleti anyag ismétlésére és rendszerezésére;
- találjunk ki több érdekes típusú feladatot, nem csak ugyanolyan feladatokat oldjunk a tanulókkal;
- figyeljünk jobban oda minden egyes tanulóra, találjunk hozzájuk megfelelő módszert;
- aktivizáljuk a tehetséges tanulókat: adjunk számukra magasabb nehezségű- és versenyfeladatokat.
- ha szükséges, tartsunk órák kívüli foglalkozást, ahol igyekezzünk felzárkóztatni a tanulókat az eredményekben.

Összefoglalás

A munka elvégzése után a következő feladatok valósultak meg:

1. röviden össze vannak foglalva a függvényekről való ismeretek
2. elemezve van az Ukrajna oktatási tanterve matematikából
3. megvalósult a különböző transzformációk elemzése
4. felmérve a Függvénytranszformációk témájának oktatását a Beregszászi járás középiskoláiban és a téma elsajátítása a tanulók által.

A Függvénytranszformációk téma jelentős szerepet tölt be az algebra oktatásában. A dolgozatban le van írva az összes típusú fügvénytranszformáció példával együtt. A kutatás eredményeiből rájöttem, hogy a tanulók jól elsajátították a témát, de viszont vannak hibák is, melyeket a jövőben lehet javítani.

Irodalomjegyzék

[1] BELLAY ÁGNES, RÁBAI IMRE: Ez is, az is az elemi matematikából. Gondolat, Budapest, 1975.

[2] CZEGLÉDY ISTVÁN: Rendszerszemlélet a matematika tanításában. 2010: https://matinf.uni-eszterhazy.hu/public/uploads/rendszerszemlelet-a-matematika-tanitasaban-tamop-eger-harmadik-resz_5847d2db83678.pdf

[3] CSER ANDOR, L. ZIERMANN MARGIT, REMÉNYI GUSZTÁV: Matematikai zsebkönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[4] DENKINGER GÉZA: Matematikai alapismeretek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

[5] GERŐCS LÁSZLÓ, VANCSÓ ÖDÖN: Matematika. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2010.

[6] JUHÁSZ ISTVÁN, OROSZ GYULA, PARÓCZAY JÓZSEF, SZÁSZNÉ DR.SIMON JUDIT: Matematika 9. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2009.

[7] KOSZTOLÁNYI JÓZSEF, KOVÁCS ISTVÁN, PINTÉR KLÁRA, URBÁN JÁNOS, VINCZE ISTVÁN: Sokszínű matematika tankönyv 9. osztály. Mozaik Kiadó, Szeged, 2013.

[8] А. Г. МЕРЗЛЯК, В. Б. ПОЛОНСЬКИЙ, М. С. ЯКІР ; ПЕР. І. Й. БЕРЕГІ, А. А. БУРКУШ: Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. угорською мовою. «Світ», Львів, 2015.

[9] А. Г. МЕРЗЛЯК, В. Б. ПОЛОНСЬКИЙ, М. С. ЯКІР. : ПЕР. Ю. І. КУЛІН: Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. угорською мовою. «Світ», Львів, 2016.

[10] А. Г. МЕРЗЛЯК, В. Б. ПОЛОНСЬКИЙ, М. С. ЯКІР; ПЕР. Ю. І. КУЛІН: Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою. «Світ», Львів, 2017.

[11] Г. П. БЕВЗ: Методика розв'язування алгебраїчних задач у 6-8 класах. «Радянська школа», Київ, 1975

[12] Є. П. НЕЛІН, ПЕРЕКЛАД УГОРСЬКОЮ МОВОЮ Д. Ф. ПОЛЛОЇ, Ю. І. КУЛІН: Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. із навчанням угорською мовою: академ. рівень. «Світ», Львів, 2010.

[13] М. А. Волосюк: Алгебра. 9 клас. Усе, що необхідно для підготовки до ДПА та ЗНО. ТОВ «Українська книжкова мережа», Харків, 2009.

[14] Н. А. Вирченко, И. И. Ляшко, К. И. Швецов: Графики функций: Справочник – 2-е изд. стереот. «Наукова Думка», Киев, 1981.

[15] Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів 5-9 класи, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804 https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Резюме

Поняття функції є одним з фундаментальних понять в математиці. Тема «**Функції**» пронизує весь шкільний курс алгебри, і супроводжує учнів в подальшому навчанні.

Тема кваліфікаційної роботи: **«Перетворення графіка функції».** Побудова графіків функції необхідна для якісного аналізу властивостей функцій, вона дає можливість дослідити залежності між величинами. Графік чітко показує нам стан і розвиток досліджуваного явища, дозволяє візуалізувати числову інформацію та помітити закономірності.

Мета дослідження – систематизувати знання про перетворення графіків функції та дослідити викладання теми у загальноосвітніх начальних закладах Берегівського району.

Для досягнення поставлених цілей використовувались наступні ***методи досліджень***: теоретичні – аналіз навчально-методичної літератури, емпіричні – спостереження за процесом навчання учнів та аналіз контрольних робіт.

Робота складається з вступу, трьох розділів, узагальнення, списку використаних джерел, ілюстрацій, таблиць та додатків. У першому розділі розглянутий аналіз шкільної програми математики у 7-9 класах, коротко систематизовано зміст навчального матеріалу. Другий розділ присвячений перетворенню графіків функції з прикладами побудови. У третьому розділі проаналізовані контрольні роботи з даної теми учнів навчальних закладів Берегівського району. Дана робота містить 16 таблиць, 51 рисунок, 15 літературних джерел та 1 додаток.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1007785623

Дата перевірки:
09.05.2021 00:24:14 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2021 00:33:45 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: Kolozsvari_Gabriella_A-fuggveny_grafikonjanak_transzformacioi

Кількість сторінок: 53 **Кількість слів:** 8643 **Кількість символів:** 65666 **Розмір файлу:** 9.16 MB **ID файлу:** 1007884570

7.86% Схожість

Найбільша схожість: 1.62% з Інтернет-джерелом (https://kmksz.com.ua/wp-content/uploads/2017/11/Algebra-A.-H.-Mer...

7.86% Джерела з Інтернету | 209 .... Сторінка 55

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 1

Nyilatkozat

Alulírott, Kolozsvári Gabriella 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

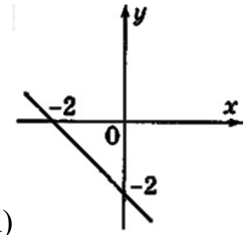
Melléklet

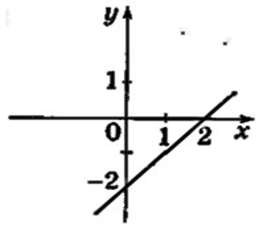
Függvénytranszformációk

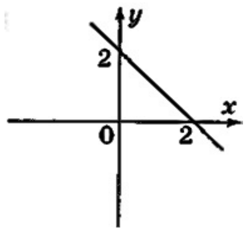
Iskola neve: ____ Osztály: __________

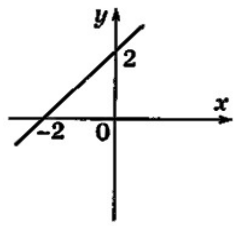
Név:____ Dátum: _____________________

1. Melyik ábrán látható az $\boldsymbol{y = x - 2}$ függvény grafikonja? *(1 pont)*

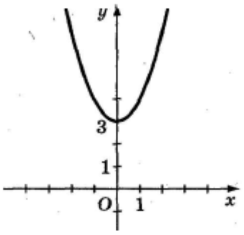
A) 

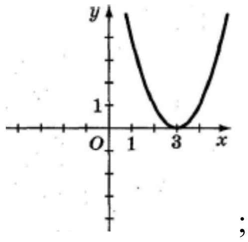
B) 

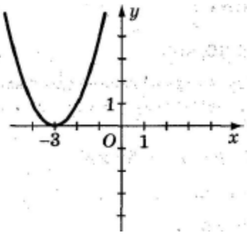
C) 

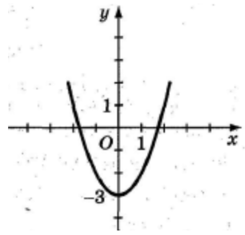
D) 

2. Melyik ábrán látható az $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + \mathbf{3})^2$ függvény grafikonját? *(1 pont)*

A) 

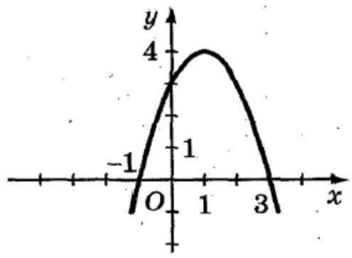
; B) 

; C) 

; D) 

.

3. Melyik képlet adja meg azt a függvényt, amelynek a grafikonja az ábrán látható? *(1 pont)*



A) $-(x-1)^2 + 4$; B) $(x+1)^2 - 4$;

C) $-(x+1)^2 + 4$; D) $(x-1)^2 - 4$.

4. Az $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ függvény grafikonját párhuzamosan eltolták 3 egységgel balra és 4 egységgel fel. Melyik függvény grafikonját kapták? *(1 pont)*

A) $y = \sqrt{x+3} + 4$; B) $y = \sqrt{x-3} + 4$;

C) $y = \sqrt{x+3} - 4$; D) $y = \sqrt{x-3} - 4$;

5. Határozd meg az $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 13}$ parabola csúcspontjának az (x_0, y_0) koordinátáit! Írd be melyik koordinátanegyedben helyezkedik el és az $x_0 + y_0$ értéket! *(2 pont)*

Felelet: ____

6. Határozd meg az $\boldsymbol{y = -x^2 + 5x - 3}$ parabola növekedési intervallumát! Add meg azt a legnagyobb egész számot, amely hozzátartozik ehhez az intervallumhoz! *(2 pont)*

Felelet: ____

7. Add meg az alábbi függvény hozzárendelési szabályát $y = a(x - m)^2 + n$ alakban, majd ábrázold az $y = ax^2$ függvény grafikonjának transzformálásával: $\boldsymbol{y = x^2 + 6x + 5}$**!** Olvasd le a grafikonról:

- melyik intervallumon növekvő, és melyik intervallumon csökkenő a függvény;
- azon argumentumértékeket, amelyekre a függvény pozitív értéket vesz fel, és azokat, amelyekre negatív értéket vesz fel! *(4 pont)*