ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Задачі векторної алгебри на зовнішньому незалежному оцінюванні в Україні та в атестаційних завданнях з математики в Угорщині

Дмитренко Олександра Олександрівна

Студентка ІІ-го курсу

Освітня програма014 «Середня освіта(Математика)»

Ступінь вищої освіти: магістр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**

ст. викладач

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Задачі векторної алгебри на зовнішньому незалежному оцінюванні в Україні та в атестаційних завданнях з математики в Угорщині

Ступінь вищої освіти: магістр

Виконав: студентка ІІ-гокурсу

Дмитренко Олександра Олександрівна

Освітня програма014 «Середня освіта(Математика)»

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**

ст. викладач

Рецензент: **Орос Віктор Михайлович**

кандидат фізико-математичних наук

Берегове
2021

Зміст

Вступ **8**

1. Структура викладання векторної алгебри в українській освіті 9

1.1. Основи векторної алгебри 9

1.2. Рівняння фігури. Рівняння прямої 14

1.3. Координати та вектори в просторі... 19

1.4. Операції з векторами... 22

1.5. Просторові координати.. 28

2. Структура викладання векторної алгебри в угорській освіті 37

2.1. Поняття вектора.. 38

2.2. Операції з векторами.. 39

2.3. Вектори в декартовій системі координат. Координати вектора............. 41

2.4. Рівняння прямої в системі координат.. 44

3. Експериментальна частина. Опитування, проведені в школах Закарпаття.. 57

3.1. Задачі векторної алгебри на зовнішньому незалежному оцінюванні в Україні 58

3.2. Задачі векторної алгебри в атестаційних завданнях з математики в Угорщині 65

3.3. Результати опитування та аналіз 72

Резюме (на угорській) **103**

Список використаної літератури **104**

Список ілюстрацій **109**

Список таблиць 110

Резюме 112

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

KOORDINÁTAGEOMETRIAI FELADATOK AZ UKRAJNAI ÉS A MAGYARORSZÁGI ÉRETTSÉGI FELADATOKBAN

Szakdolgozat

Képzési szint: mesterképzés

Készítette: Dmitrenko Alexandra

II. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Pallay Dezső

adjunktus

Recenzens: Orosz Viktor

fizika-matematika tudományok kandidátusa

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés **8**

1. A koordinátageometria tanításának felépítése az ukrajnai oktatásban **9**

1.1. A koordinátageometria alapjai 9

1.2. Az alakzat egyenlete. Az egyenes egyenlete 14

1.3. Koordináták és vektorok a térben 19

1.4. A vektorokkal végzett műveletek 22

1.5. Térbeli koordináták 28

2. A koordinátageometria tanításának felépítése a magyarországi oktatásban **37**

2.1. A vektor fogalma 38

2.2. Műveletek vektorokkal 39

2.3. Vektorok a koordináta-rendszerben. Vektor koordinátái 41

2.4. Az egyenes egyenletei a koordináta-rendszerben 44

3. Kutatási rész. Kárpátalja iskoláiban végzett felmérések **57**

3.1. Felmérő dolgozat: Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban 58

3.2. Felmérő dolgozat: Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban 65

3.3. A felmérés eredménye és elemzése 72

Összefoglalás **103**

Irodalomjegyzék **104**

Ábrák jegyzéke **109**

Táblázatok jegyzéke **110**

Összefoglalás (ukrán) **112**

Bevezetés

A koordinátageometria, analitikus geometria a matematika azon ága, amely a koordinátarendszerben vizsgálja a sík- vagy térelemek egymással vett, kölcsönös helyzetét.

A diplomamunkám a koordinátageometriáról, a koordinátageometriai feladatok az ukrajnai független tesztelés feladatsorairól, valamint a magyarországi érettségi feladatairól szól. A diplomamunkám három részből áll. Az első részben megvizsgálom, a koordinátageometria tanításának felépítését az ukrajnai oktatásban, azaz 5. -11. osztályokban. Ebben a részben feltüntettem néhány ukrajnai külső független tesztelés feladatait is. A második részben a magyarországi oktatás koordinátageometria tanításának felépítését tanulmányozom, valamint bemutatok néhány magyarországi érettségi feladatot. Mindkét részben a koordinátageometriai témákat átdolgozva tüntettem fel. Felvázoltam lépésről-lépésre a témakör részeit, az alapoktól kezdve, a teljes áttekintésig.

A diplomamunkám harmadik része egy kutatás, amelyet Kárpátalja néhány magyar tannyelvű, városi oktatási intézményeiben végeztem, a végzős tanulók körében. A kutatás célja a tanulók tudásának felmérése a matematikának, a koordinátageometriai ágában, valamint az ukrajnai és a magyarországi érettségi feladatok megoldása eredményeinek az összehasonlítása. A kutatáshoz két dolgozatot állítottam össze. Az első dolgozatot az elmúlt évek, ukrajnai független tesztelés feladatsoraiból válogattam ki, a másodikat pedig a magyarországi érettségi feladatsoraiból. A harmadik részben a dolgozatok vannak feltüntetve, valamint a felmérés eredménye és annak elemzése.

Köszönöm témavezetőmnek, Pallay Dezső Tanár úrnak, hogy felkeltette figyelmemet a téma iránt, valamint folyamatos figyelmességével, hasznos ötleteivel és szakértő tanácsaival segített munkám megírásában.

1. Fejezet

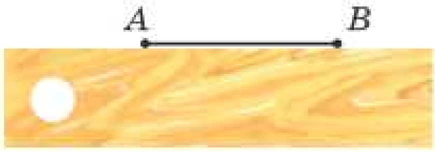
A koordinátageometria tanításának felépítése az ukrajnai oktatásban

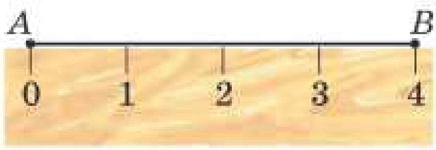
Az ukrajnai koordinátageometria témakör oktatása során bevezetik első lépésben a skála és a számegyenes fogalmát. A számegyenes kezdőpontját, az egységnyi szakaszt és a koordináta fogalmát tanulják meg, ezek után megismerik a koordináta-sík fogalmát. Ismertetik a tanulókkal a derékszögű koordináta-rendszer, azon belül az abszcissza, ordináta, origó és koordináta-negyedek fogalmakat. Megtanulják, hogyan kell leolvasni egy koordináta-rendszerben feltüntetett pont koordinátáit. Elsajátítják és szélesítik a koordinátasíkról szóló ismeretet, majd a szakasz hosszának és felezőpontjának a meghatározását tanulják meg. Elképzelést szereznek a tanulók az alakzat egyenleteiről, azon belül az egyenes, körvonal egyenletével és az egyenes iránytényezőjével foglalkoznak. Bevezetik a térbeli derékszögű koordináta-rendszer fogalmát. Megtanulják meghatározni a pontok térbeli koordinátáit, a szakasz hosszát és felezőpontjának koordinátáit. Elsajátítják a vektorok összeadását és kivonását, számmal való szorzását és a vektorok skaláris szorzatát. Végül ismét bővítik és általánosítják a vektorokról eddig tanultakat: vektorműveleteket és azok tulajdonságait, a vektorok skaláris szorzatát, két pont távolságát, a szakasz felezőpontjának koordinátáit és a vektorok térbeli alkalmazását sajátítják el.

1.1. A koordinátageometria alapjai

A koordinátageometria alapjainak bemutatása az 5. osztályban kezdődik, ahol bevezetik először a skála és a számegyenes fogalmát. A számegyenes kezdőpontját, az egységnyi szakaszt és végül a koordináta fogalmát ismertetik a tanulókkal.

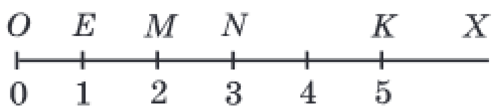
Egy egyenes lécre két pontot veszünk fel és ezeket a pontokat összekötve egy szakaszt rajzolunk. A lécen egy-egy vonalkát húzunk centiméterenként, vagyis egy skálát rajzoltunk, melynek beosztása $1cm$ (1.1. ábra) [1].





1.1. ábra.

Vegyünk egy tetszőleges OX félegyenest és rajta egy E pontot. A 0 számot az O pont alá, az 1-est pedig az E pont alá írjuk. Ha az E ponttól jobbra felmérjük az OE távolságot, akkor megkapjuk az M pontot, amelynek a 2-es szám felel meg (1.2. ábra). Lépésről lépésre haladva megkapjuk a $4, 5, 6, ...$ számokat[1].



1.2. ábra.

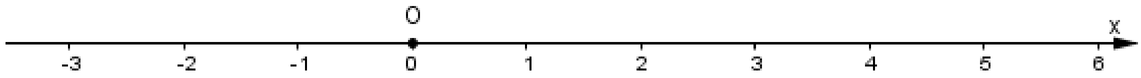
Ezt a végtelen skálát **számegyenesnek**, az O pontot a számegyenes **kezdőpontjának**, az OE szakaszt pedig **egységnyi szakasznak** nevezzük[1].

Koordináta - sík

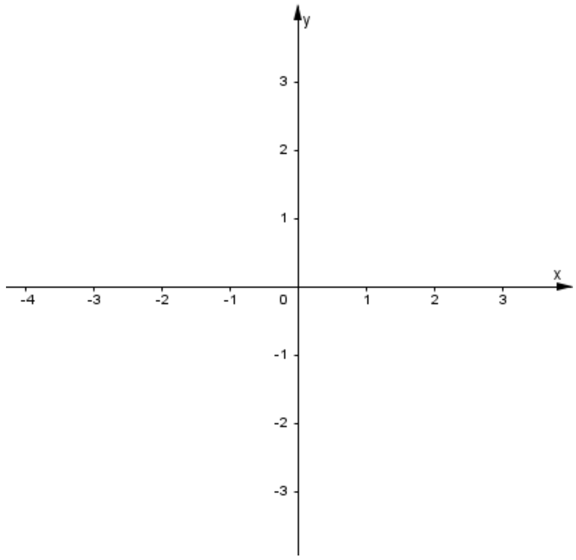
A 6. osztályba bevezetik a koordináta-sík fogalmát. Ismertetik a tanulókkal a derékszögű koordináta-rendszer fogalmát, azon belül az abszcissza, ordináta, origó és koordinátanegyedek fogalmakat. Megtanulják, hogy hogyan kell leolvasni egy koordináta-rendszerben feltüntetett pont koordinátáit.

Az O pont a koordináta-egyenesen a számlálás kezdőpontját, vagyis az origót jelöli. A beosztás az egységet jelöli, a nyíl pedig a számok növekedésének irányát mutatja(1.3. ábra).

A pont helyét a két azonos beosztású számegyenes határozza meg. Ezek a számegyenesek egymásra merőlegesen helyezkednek el, úgy, hogy a két számegyenes kezdőpontja egymásra illeszkedik. Ekkor a két számegyenes a **derékszögű koordináta - rendszert** alkotja(1.4. ábra).

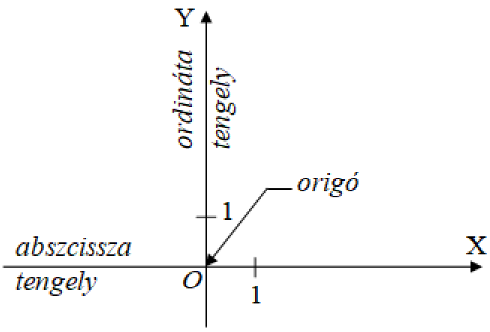


1.3. ábra.



1.4. ábra.

A vízszintes, első koordináta - egyenest **abszcissza tengelynek** nevezzük, melynek jelölése OX tengely. A függőleges, azaz a második koordináta-egyenest **ordináta tengelynek** nevezzük, OY tengely. A **koordináta - rendszer origójának** a számegyenesek közös kezdőpontját nevezzük (1.5. ábra).



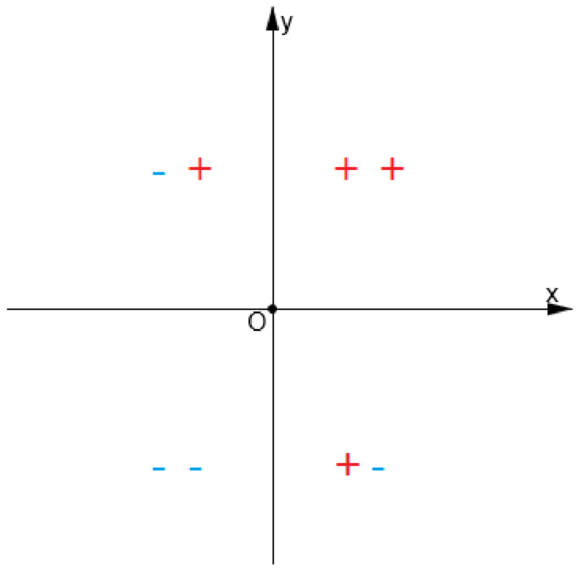
1.5. ábra.

Koordináta - síknak nevezzük azt a síkot, melyben koordináta - rendszert vettünk fel.

A sík bármely pontjához hozzárendelhető egy számpár meghatározott sorrendben, és fordítva, minden számpárnak csak egy pont felel meg a koordináta - síkon. Az ilyen rendezett számpárt nevezzük a **pont koordinátáinak**. Az abszcissza tengely menti koordinátát a pont **abszcisszájának**, az ordináta tengely mentit a pont **ordinátájának** nevezzük[2].

Így írjuk: $A(x; y)$, $B(3; 2)$.

A koordináta-tengelyek négy részre osztják a síkot, és ezeket a részeket **koordináta - negyedeknek** nevezzük. A negyedeket a következőképpen jelöljük: $I.$ negyed, $II.$ negyed, $III.$ negyed, $IV.$ negyed $(1.6.$ ábra)[2].



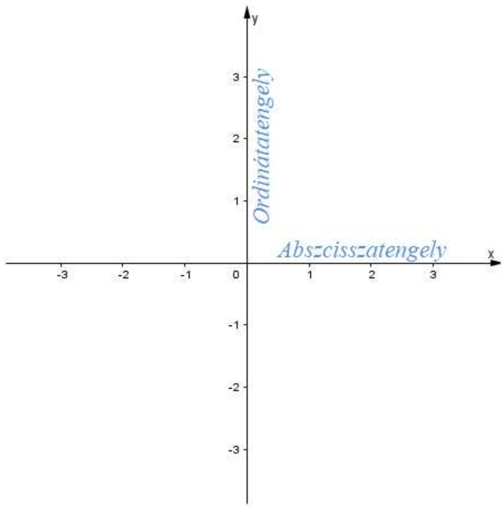
1.6. ábra.

Az $I.$ negyed pontjainak az abszcisszája és ordinátája is pozitív. Ez fordítva is érvényes: ha az abszcissza és az ordináta pont is pozitív, akkor az $I.$ negyedben helyezkednek el. A $II.$ negyed pontjainak negatív az abszcisszája és pozitív az ordinátája, a $III.$ negyedben lévő pontok abszcisszája és ordinátája is negatív, a $IV.$ negyed pontjainak pozitív az abszcisszája és negatív az ordinátája[2].

Két pont közötti távolság. A szakasz felezőpontjának koordinátái

A $9.$ osztályban a tanulók elsajátítják és szélesítik a koordinátasíkról szóló ismeretet. A szakasz hosszának és felezőpontjának a meghatározását tanulják meg. Elképzelést szereznek az alakzat egyenleteiről, azon belül az egyenes, a körvonal egyenletével és az egyenes iránytényezőjével ismerkednek meg.

Azt a síkot, amely tartalmazza az x (abszcissza) és y (ordináta) tengelyeket xy síknak nevezzük(1.7. ábra). **Descartes-féle koordinátáknak** az xy síkon lévő pontok koordinátáit nevezzük[3].



1.7. ábra.

Az $A(x_1)$ és $B(x_2)$ pontok közötti távolságának kiszámítása a következőképpen történik: $AB = |x_2 - x_1|$(1.8. ábra) [3].

1.8. ábra.

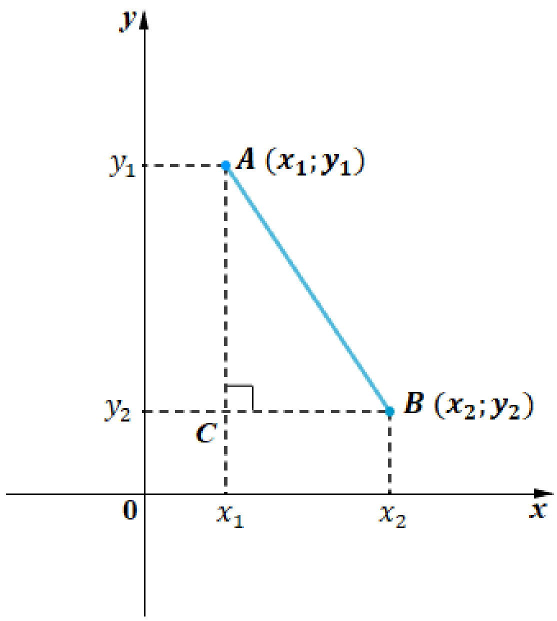
Az xy koordinátasíkon az $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$ végpontú szakasz hossza meghatározásának képlete, amikor az AB szakasz nem párhuzamos egyik koordinátatengellyel sem (1.9. ábra):

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad [3]$$

A képlet akkor is igaz, ha az AB szakasz merőleges valamelyik koordinátatengelyre [3].

Legyenek az $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$ pontok xy koordinátasík pontjai. Az M pont $(x_0; y_0)$ koordinátái, ahol M az AB szakasz felezőpontja:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2};$$



1.9. ábra.

$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$ [3].

A szakasz felezőpontjának koordinátáit megadó képlet akkor is teljesülni fog, ha az AB szakasz merőleges valamelyik koordinátatengelyre[3].

1.2. Az alakzat egyenlete. Az egyenes egyenlete

1.1. Definíció. *Az xy síkon az F* ***alakzat egyenletének*** *azt az x és y kétváltozós egyenletet nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

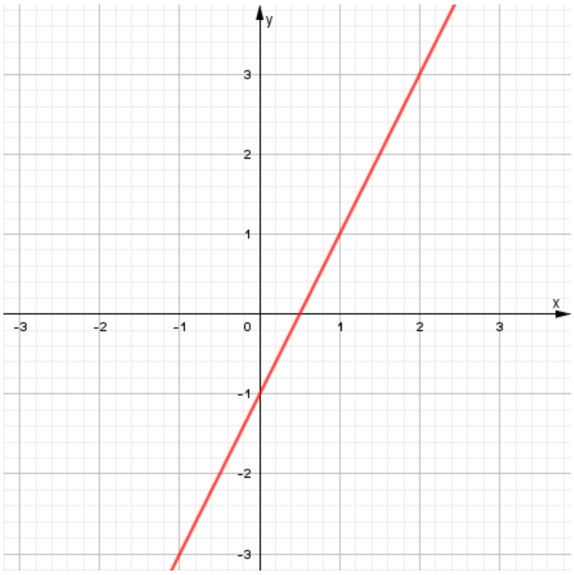
1) ha a pont illeszkedik az F alakzathoz, akkor a koordinátái igazzá teszik az egyenletet;

2) az adott egyenlet bármilyen $(x; y)$ megoldásai az F alakzathoz illeszkedő pont koordinátái lesznek [3].

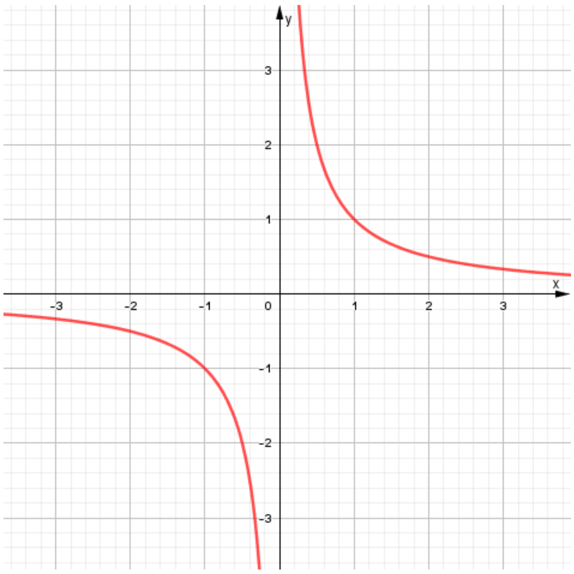
A 1.10. ábrán látható egyenes egyenlete az $y = 2x - 1$, a 1.11. ábrán látható hiperbola egyenlete pedig $y = \frac{1}{x}$. Az $y = 2x - 1$ és $y = \frac{1}{x}$ egyenletek megfelelően egy egyenest és hiperbolát **adnak meg** vagy **írnak le** [3].

Ha az adott egyenlet az F alakzat egyenlete, akkor ezt az alakazatot úgy is vizsgálhatjuk, mint azon pontok mértani helye, melyek igazzá teszik az adott egyenletét[3].

1.1. Tétel. *Az R sugarú és $A(a; b)$ középpontú körvonal egyenlete:*



1.10. ábra.



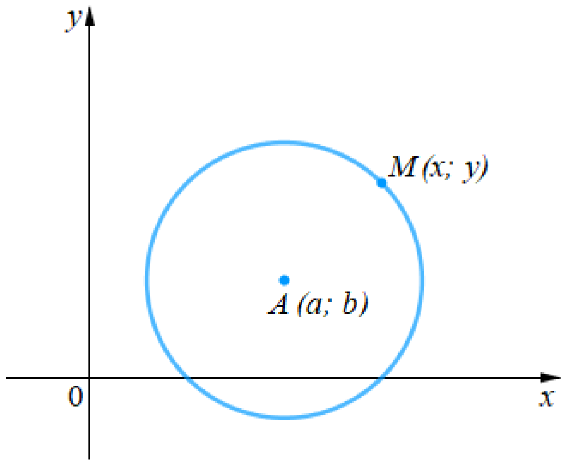
1.11. ábra.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad [3].$$

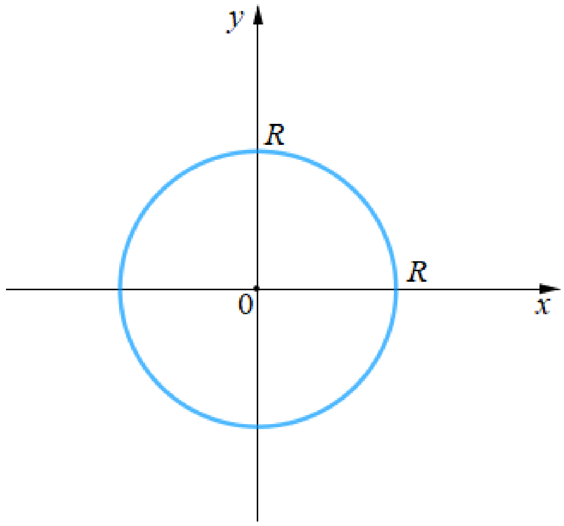
Igaz a következő állítás: bármely $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ alakú egyenlet, ahol a , b és R tetszőleges számok, és $R>0$, egy olyan R sugarú körvonal egyenlete, melynek középpontja az $(a;b)$ koordinátájú pont (1.12. ábra) [3].

Ha a körvonal középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, akkor $a=b=0$ (1.13. ábra). Ebben az esetben a körvonal egyenlete így alakul:

$$x^2+y^2=R^2 \quad [3].$$



1.12. ábra.



1.13. ábra.

Az egyenes egyenlete

1.2. Tétel. *Az egyenes egyenlete a következő alakban írható fel:*

$$ax + by = c,$$

ahol az a, b és c valamilyen szám, de az a és a b egyszerre nem egyenlő nullával [3].

Bármilyen $ax + by = c$ alakú egyenlet, ahol az a, b és c valamely szám, de az a és a b egyidejűleg nem egyenlő nullával, az egyenes egyenlete lesz [3].

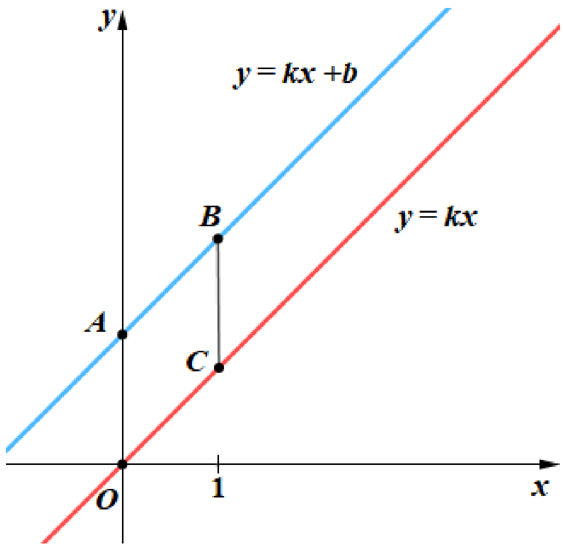
Ha az $a = b = c = 0$, akkor az $ax + by = c$ alakú egyenlet grafikonja az xy koordinátasík. Ha $a = b = 0$ és $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása [3].

Átírjuk az $y = kx + p$ egyenletet a következőképpen: $-kx + y = p$. Megkaptunk egy $ax + by = c$ alakú egyenletet arra az esetre, ha $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Mivel ebben az esetben $b \neq 0$, az egyenes egyenletét kaptuk meg. Ha az $ax+by=c$ egyenes egyenletébe behelyettesítjük a $b=0$, akkor így lehet átírni: $x=\frac{c}{a}$. Az egyenes egyenletének egy olyan alakját kaptuk meg, ahol minden pontjának az abszcisszája ugyanaz a szám lesz (Függőleges). Amikor $b \neq 0$, akkor az $ax+by=c$ egyenes egyenletét a következőképpen lehet átírni: $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. Elvégezve a $-\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{b}=p$ helyettesítéseket, megkapjuk az $y=kx+p$ egyenletet [3].

Ha $b=0$ és $a \neq 0$, akkor az $ax+by=c$ egyenes egyenlete egy függőleges egyenest ad meg; ha $b \neq 0$, akkor pedig (nem függőleges egyenes) egy ferde egyenes lesz[3].

Az egyenes iránytényezője

Megvizsgáljuk az $y=kx$ egyenletet. Ez egy nem függőleges egyenest ad meg, amelyhez illeszkedik a koordináta-rendszer kezdőpontja. Az $y=kx$ és az $y=kx+b$, ahol $b \neq 0$, párhuzamos egyenesek (1.14. ábra) [3].

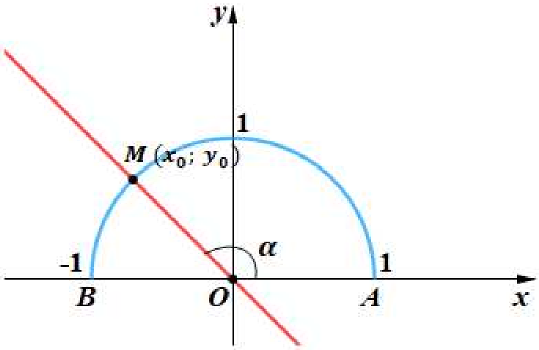


1.14. ábra.

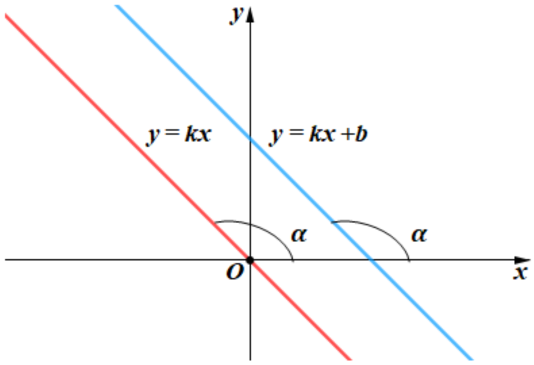
Következtetés: ha $k_1=k_2$ és $b_1 \neq b_2$, akkor az $y=k_1x+b_1$ és az $y=k_2x+b_2$ egyenesek párhuzamosak [3].

Metssze az $y=kx$ egyenes az egységsugarú félkört az $M(x_0;y_0)$ pontban (1.15. ábra). Az AOM szöget **az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szögnek** nevezzük [3].

Ha az $y=kx$ egyenes egybeesik az abszcisszatengellyel, akkor az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög $0°$-kal egyenlő [3].



1.15. ábra.



1.16. ábra.

Ha az $y = kx$ egyenes az abszcisszatengely pozitív irányával α szöget alkot, akkor az $y = kx + b$ egyenes, amely párhuzamos az $y = kx$ egyenessel szintén α szög alatt hajlik az abszcisszatengely pozitív irányához (1.16. ábra) [3].

Vizsgáljuk meg az $y = kx$ egyenlettel megadott MO egyenest (1.15. ábra). Ha $MOA\angle = \alpha$, akkor $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Mivel az $M(x_0; y_0)$ az $y = kx$ egyeneshez illeszkedik, ezért $\frac{y_0}{x_0} = k$. Ebből következik, hogy $k = \tan\alpha$. Tehát az $y = kx+b$ egyenes esetében is

$$k = \tan\alpha,$$

ahol az α az a szög, amely alatt az egyenes az abszcisszatengely pozitív irányához hajlik, ezért a k tényezőt az egyenes **iránytényezőjének** vagy **iránytangensének** nevezzük [3].

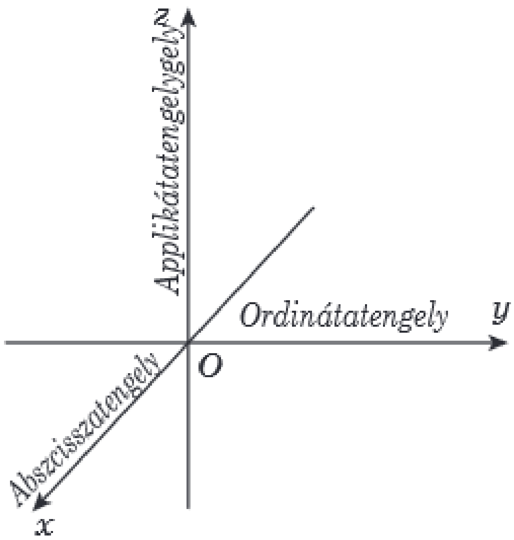
Amikor a nem függőleges egyenesek párhuzamosak, akkor az abszcisszatengely pozitív irányával egyenlő szöget zárnak be. Akkor ezeknek a szögeknek a tangensei is egyenlők, ezért az iránytényezőjük is egyenlő [3].

Ha az $y = k_1x + b_1$ és az $y = k_2x + b_2$ egyenesek párhuzamosak, akkor $k_1 = k_2[3]$.

1.3. Tétel. *Az $y = k_1x + b_1$ és az $y = k_2x + b_2$ egyenesek akkor és csakis akkor lesznek párhuzamosak, ha $k_1 = k_2$ és $b_1 \neq b_2[3]$.*

1.3. Koordináták és vektorok a térben

A 10. osztályban bevezetik a térbeli derékszögű koordináta-rendszer fogalmát. Megtanulják meghatározni a pontok térbeli koordinátáit, a szakasz hosszát és felezőpontjának koordinátáit a térben. Elsajátítják a vektorok összeadását és kivonását, számmal való szorzását és a vektorok skaláris szorzatát. Általánosítják és bővítik a vektorokról tanultakat.

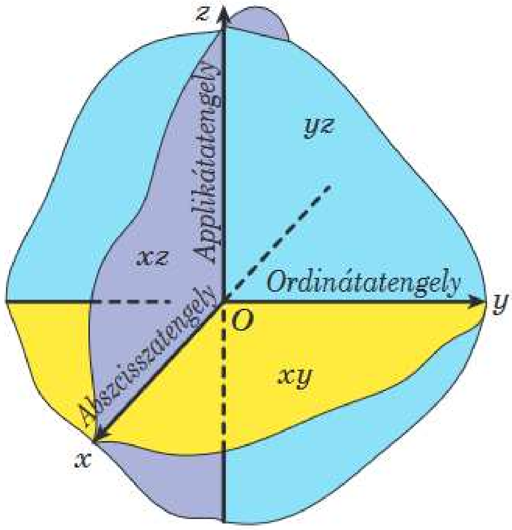


1.17. ábra.

A derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszernek a térben a három egymásra kölcsönösen merőleges koordinátaegyenest nevezzük, melyeknek közös a kezdőpontjuk (1.17. ábra). A három koordinátaegyenes metszéspontját O betűvel jelöljük. **Origónak (koordináta-rendszer kezdőpontjának)** nevezzük. A koordinátaegyeneseket x, y és z betűkkel jelöljük, és megfelelően **abszcisszatengelynek, ordinátatengelynek** és **applikátatengelynek** nevezzük [4].

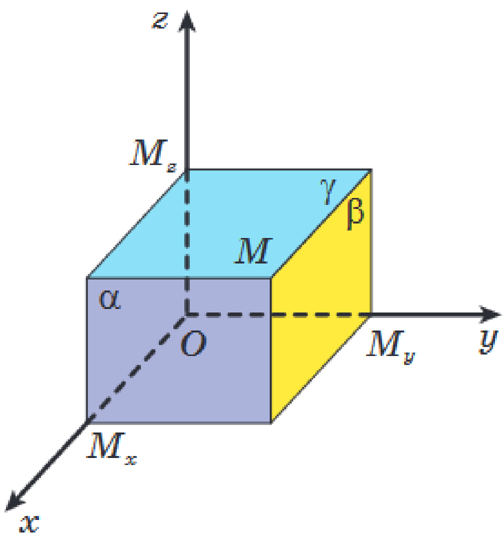
Azokat a síkokat, amelyek illeszkednek az x és y, az x és z, az y és z tengelyekre **koordinátasíkoknak** nevezzük, és megfelelően xy, xz, yz-vel jelöljük (1.18. ábra) [4].

Azt a teret, amelyben meg van adva a koordinátarendszer, **koordinátatérnek** nevezzük. Ha a koordinátatengelyeket az x, y, z betűkkel jelöljük, akkor a koordinátateret xyz-



1.18. ábra.

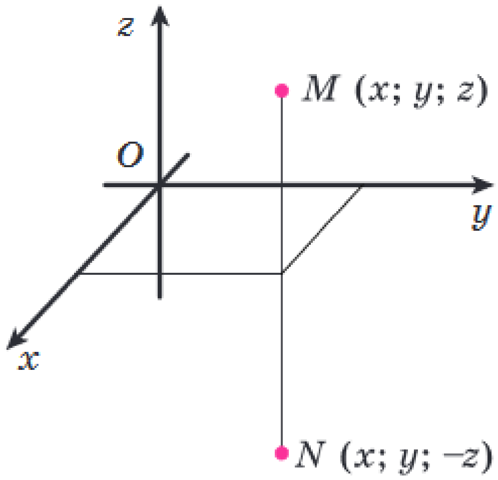
vel jelöljük. Minden M pontnak a koordinátatérben megfelel egy $(x; y; z)$ rendezett számhármas. Az M_x pont koordiánátáját az x tengelyen az M pont **abszcisszájának** nevezzük és x-szel jelöljük. Az M_y pont koordiánátáját az y tengelyen az M pont **ordinátájának** nevezzük és y-nal jelöljük. Az M_z pont koordiánátáját a z tengelyen az M pont **applikátájának** nevezzük és z-vel jelöljük(1.19. ábra) [4].



1.19. ábra.

Az ily módon kapott $(x; y; z)$ számhármast az M **pont térbeli koordinátájának** nevezzük. Így írjuk fel: $M(x; y; z)$ [4].

Ha az M pontnak a koordinátája $M(x; y; z)$, akkor az $|x|$, $|y|$, $|z|$ számok egyenlők lesznek az M pont távolságaival az yz, xz, xy koordinátasíkokig. Az $M(x;y;z)$ és $N(x;y;-z)$ pontok egy egyenesre illeszkednek, amely merőleges az xy síkra, és egyenlő távolságra van ettől a síktól(1.20. ábra). Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az M és N **pontok szimmetrikusak** az xy síkra [4].



1.20. ábra.

Ha a pont a koordinátasíkra vagy a koordinátaegyenesre illeszkedik, akkor valamely koordinátái nullával lesznek egyenlők. Például, az $A(x;y;0)$ pont az xy koordinátasíkra illeszkedik, és a $B(0;0;z)$ pont pedig az applikátatengelyre [4].

Igazak lesznek a következő állítások:

1.4. Tétel. *Az $A(x_1;y_1;z_1)$ és a $B(x_2;y_2;z_2)$ pontok közötti távolság a következő képlettel határozható meg:*

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad [4].$$

1.5. Tétel. *A szakasz felezőpontjának minden koordinátája egyenlők lesznek a szakasz végpontjainak megfelelő koordinátái félösszegével, vagyis az $A(x_1;y_1;z_1)$ és $B(x_2;y_2;z_2)$ pontok felezőpontja a következő pont lesz:*

$$M(\tfrac{x_1+x_2}{2};\tfrac{y_1+y_2}{2};\tfrac{z_1+z_2}{2}) \quad [4].$$

Vektorok a térben

Vizsgáljuk meg az AB szakaszt. Ha az A pontot a szakasz kezdőpontjának tekintjük, a B pontot pedig a végpontjának, akkor az ilyen szakaszt nem csak a hossza, de az A pontból a B pontba való iránya is jellemezi. Ha meg van adva, hogy melyik pont a szakasz kezdőpontja és melyik a szakasz végpontja akkor az ilyen szakaszt **irányított szakasznak** vagy **vektornak** nevezzük. Jelölése: $\overrightarrow{AB}$ [4].

Azt a vektort, melynek a kezdő- és végpontja ugyanaz a pont lesz, **nullvektornak** nevezzük, és $\vec{0}$-val jelöljük [4].

Az $\overrightarrow{AB}$ **vektor modulusának (abszolút értékének)** az AB szakasz hosszát nevezzük. Így jelöljük: $|\overrightarrow{AB}|$. Az $\vec{a}$ abszolút értékét így jelöljük: $|\vec{a}|$. Úgy tekintjük, hogy a nullvektor hossza nullával lesz egyenlő: $|\vec{0}| = 0$ [4].

1.2. Definíció. *Két nem nullvektort* ***kollineárisnak*** *nevezzük, ha párhuzamos egyenesekre vagy egy egyenesre illeszkednek. A nullvektort minden vektorral kollineárisnak tekintjük [4].*

A nem nullvektorok lehetnek **egyirányúak** és **ellentétes irányúak** is. Például $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyirányúak lesznek, jelölése $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ ellentétes irányúak, jelölése: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ [4].

1.3. Definíció. *Két nem nullvektort* ***egyenlőnek*** *nevezünk, ha az abszolút értékük egyenlő és egyirányúak. Bármilyen két nullvektor egyenlő [4].*

1.6. Tétel. *Ha az $A(x_1; y_1; z_1)$ és $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontjai, akkor az $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ és $z_2 - z_1$ számok megfelelően az első, második és harmadik koordinátái lesznek az $\vec{a}$ vektornak [4].*

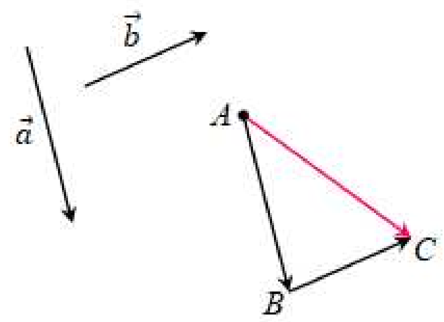
A két pont távolságának képletéből következik, hogy ha az $\vec{a}$ vektornak a koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$, akkor

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad [4].$$

1.4. A vektorokkal végzett műveletek

Legyen adott a térben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. Bármilyen A pontból egy $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort fektetünk. Azután a B pontból egy $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{BC}$ vektort. Az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **vektorok összegének** nevezzük (1.21. ábra) és így írjuk: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ [4].

A két vektor összeadásának fenti algoritmusát **háromszög szabálynak** nevezzük. Bármilyen A, B és C pontokra teljesül az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ egyenlőség[4].



1.21. ábra.

Bármilyen $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokra igazak a következő egyenlőségek:

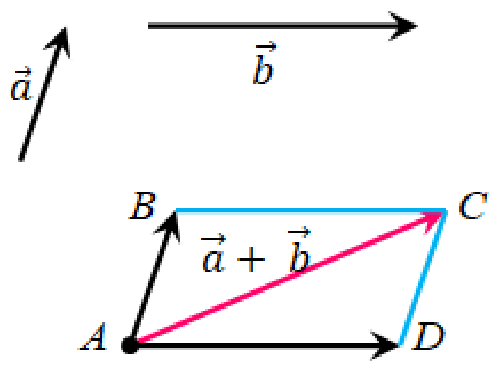
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (felcserélhetőségi tulajdonság);

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (csoportosítási tulajdonság) [4].

Három vagy több vektor összegét a következőképpen határozzuk meg: először összeadjuk az első két vektort, aztán a kapott összeghez hozzáadjuk a harmadik vektort és így tovább. Például, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ [4].

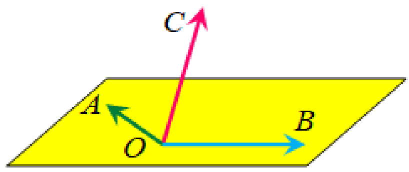
Két nem kollieneáris $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összeadására célszerű alkalmazni a **paralelogramma szabályt** is. Bármilyen A pontból indítjuk az $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort és $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AD}$ vektort (1.22. ábra). Megszerkesztjük az $ABCD$ paralelogrammát. Ekkor az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor egyenlő lesz az $\overrightarrow{AC}$ vektorral [4].



1.22. ábra.

Megvizsgáljuk az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorokat, melyek nem illeszkednek egy síkra (1.23. ábra). Meghatározzuk ezeknek a vektoroknak az összegét [4].

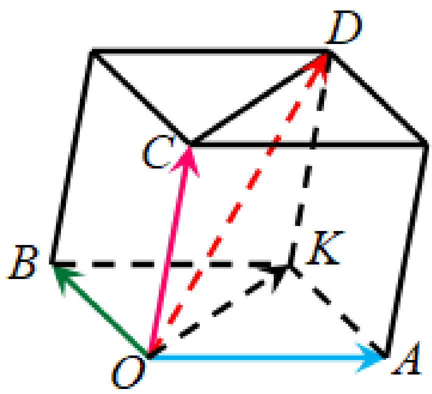
Megszerkesztünk egy paralelepipedont, melynek az OA, OB és OC szakaszok az élei lesznek (1.24. ábra). Az OD szakasz ennek a paralelepipedonnak az átlója lesz. Bebizo-



1.23. ábra.

nyítjuk, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$[4].

Mivel az $OBKA$ négyszög paralelogramma, ezért $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK}$. A következőt kaptuk $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}$. Mivel az $OCDK$ négyszög paralelogramma, ezért $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ [4].



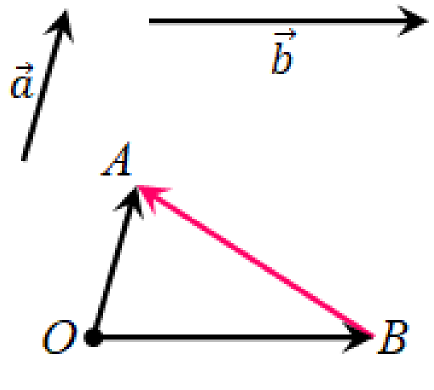
1.24. ábra.

A három vektor összeadásának a fenti módszerét, amely az egy pontból induló és nem egy síkra illeszkedő vektorokról szól **paralelepipedon szabálynak** nevezzük [4].

1.4. Definíció. *Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok **különbségének** azt a $\vec{c}$ vektort nevezzük, melynek a $\vec{b}$ vektorral való összege megadja az $\vec{a}$ vektort [4].*

Ezt így írjuk fel: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (1.25. ábra) [4].

1.7. Tétel. *Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok koordinátái megfelelően $(a_1; a_2; a_3)$ és $(b_1; b_2; b_3)$ akkor az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, és az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor koordinátái pedig $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ koordináták lesznek[4].*



1.25. ábra.

A vektor számmal való szorzása

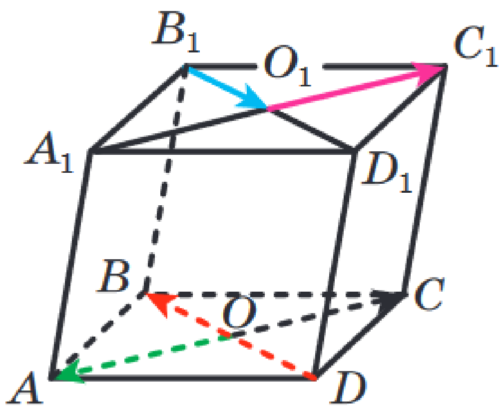
1.5. Definíció. *Az $\vec{a}$ nem nullvektor és a k, nullától különböző szám szorzatának azt a $\vec{b}$ vektort nevezzük, amelyre teljesül, hogy:*

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) ha $k > 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; ha $k < 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ [4].

Így írjuk fel: $\vec{b} = k\vec{a}$. Ha $\vec{a} = \vec{0}$ vagy $k = 0$, akkor $k\vec{a} = 0$ [4].

A 1.26. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon látható, amelyben $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = -2\overrightarrow{OA}$ [4].



1.26. ábra.

A meghatározásból következik, hogy $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ [4].

1.8. Tétel. *Bármilyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra teljesül az $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ egyenlőség [4].*

A $-1 \cdot \vec{a}$ vektort $-\vec{a}$ -nak jelöljük és az $\vec{a}$ vektor **ellentettjének** nevezzük. Például:

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})\ [4].$$

A vektor számmal való szorzásának meghatározásából következik, hogyha $\vec{b} = k\vec{a}$, akkor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak [4].

1.9. Tétel. *Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, emelyre teljesül a $\vec{b} = k\vec{a}$ egyenlőség [4].*

1.10. Tétel. *Ha az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$, akkor $k\vec{a}$ vektor koordinátái $(ka_1; ka_2; ka_3)$ lesznek egyenlők [4].*

Bármilyen k, m számokra és bármilyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

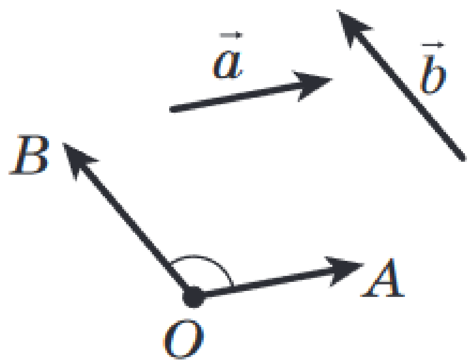
$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (csoportosítási tulajdonság);

$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (az első széttagolási tulajdonság);

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (a második széttagolási tulajdonság)[4].

A vektorok skaláris szorzata

Legyen az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ két nem null- és nem egyirányú vektor. Az O ponttól felmérjük az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal megfelelően egyenlő $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat (1.27. ábra). Az AOB szög mértékét az $\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ **vektorok közötti szögnek** nevezzük. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöget így jelöljük: $(\vec{a}, \vec{b})\angle$ [4].

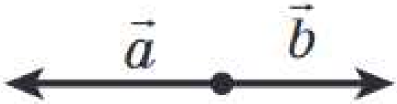


1.27. ábra.

Ha $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, akkor $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 180°$ (1.28. ábra). Ha $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, akkor $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 0°$ [4].

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 0°$[4].

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat **merőlegeseknek** nevezzük, ha a köztük lévő szög $90°$. Ezt így jelöljük: $\vec{a} \perp \vec{b}$ [4].



1.28. ábra.

1.6. Definíció. ***Két vektor skaláris szorzatának*** *nevezzük e vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát [4].*

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát így jelöljük: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Az $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos{(\vec{a}, \vec{b})\angle}$ [4].

Ha az $\vec{a}$ vagy a $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ [4].

Az a $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skaláris szorzatot az $\vec{a}$ vektor **skaláris négyzetének** nevezzük, és $\vec{a}^2$ -tel jelöljük. A vektor skaláris négyzete egyenlő a vektor abszolút értékének a négyzetével, vagyis $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ [4].

1.11. Tétel. *Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha ezek a vektorok merőlegesek egymásra [4].*

1.12. Tétel. *Az $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ vektorok skaláris szorzatát a következő képlettel lehet meghatározni*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad [4].$$

1.13. Tétel. *Az $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ nem nullvektorok közötti szög koszinuszát a következő képlettel lehet kiszámítani:*

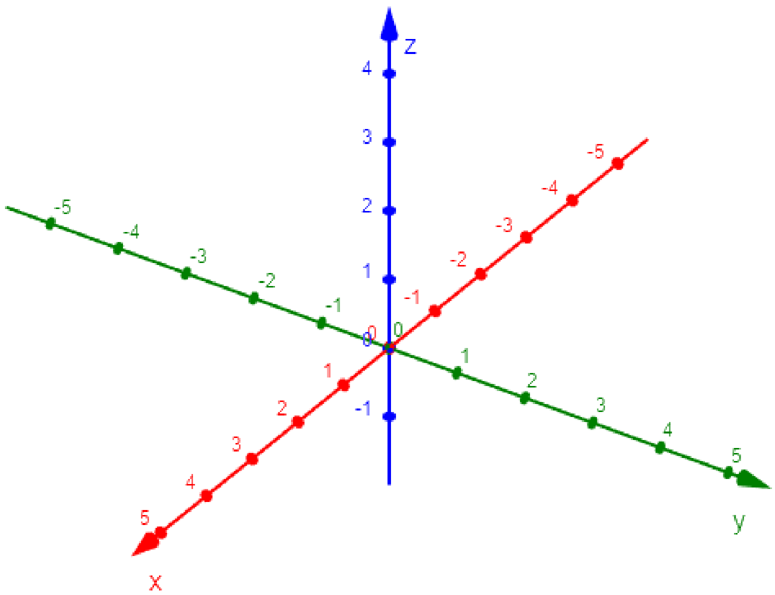
$$cos(\vec{a}, \vec{b})\angle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad [4].$$

Bármilyen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorokra és bármilyen k számra igazak a következő egyenlőségek:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ [4].

1.5. Térbeli koordináták

A 11. osztályban ismét a térbeli koordináta-rendszerrel foglalkoznak. A vektorműveleteket és azok tulajdonságait, a vektorok skaláris szorzatát, két pont távolságát, a szakasz felezőpontjának koordinátáit ismétlik át és a vektorok térbeli alkalmazásával ismerkednek meg.

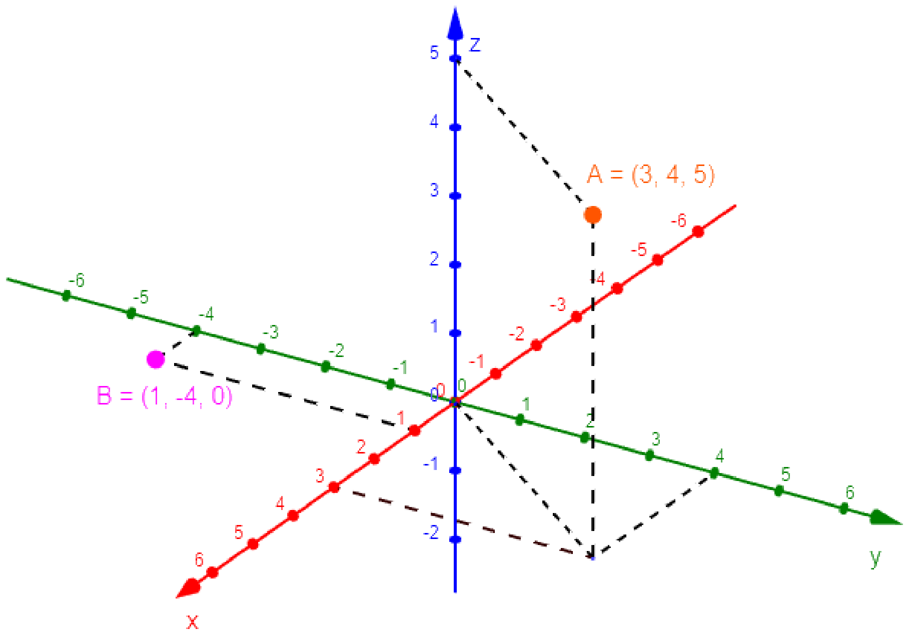


1.29. ábra.

Legyen x, y, z három, páronként egymásra merőleges számegyenes, melyek az O pontban, azaz az origóban metszik egymást (1.29. ábra). Ezeket az egyeneseket **koordinátatengelyeknek** nevezzük: x tengely, y tengely és a z tengely (abszcissza, ordináta és aplikáta tengely) [5].

Három ilyen kölcsönös helyzetű számegyenest **térbeli derékszögű koordináta - rendszernek** nevezzük [5].

Ha adott egy ilyen koordináta-rendszer, akkor a tér minden pontjához hozzárendelhető egyetlen rendezett valós számhármas, minden ilyen számhármashoz pedig a tér egyetlen pontja. Például az $A(3;4;5)$ pont jelöléséhez, az O ponttól 3 egységet kell lépni az x tengely mentén, 4-et az y tengellyel párhuzamosan, majd 5 egységet a z tengellyel párhuzamosan (1.30. ábra). Ahhoz, hogy megjelöljük a $B(1;-4;0)$ pontot 1 egységet kell lépni az x tengely mentén, 4-et párhuzamosan az y tengellyel, de ellenkező irányba, mivel -4 negatív szám [5].



1.30. ábra.

Ha adott két $A(x_1;y_1;z_1)$ és $B(x_2;y_2;z_2)$ pont, akkor

a) az AB szakasz felezőpontja a $C(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2})$ pont;

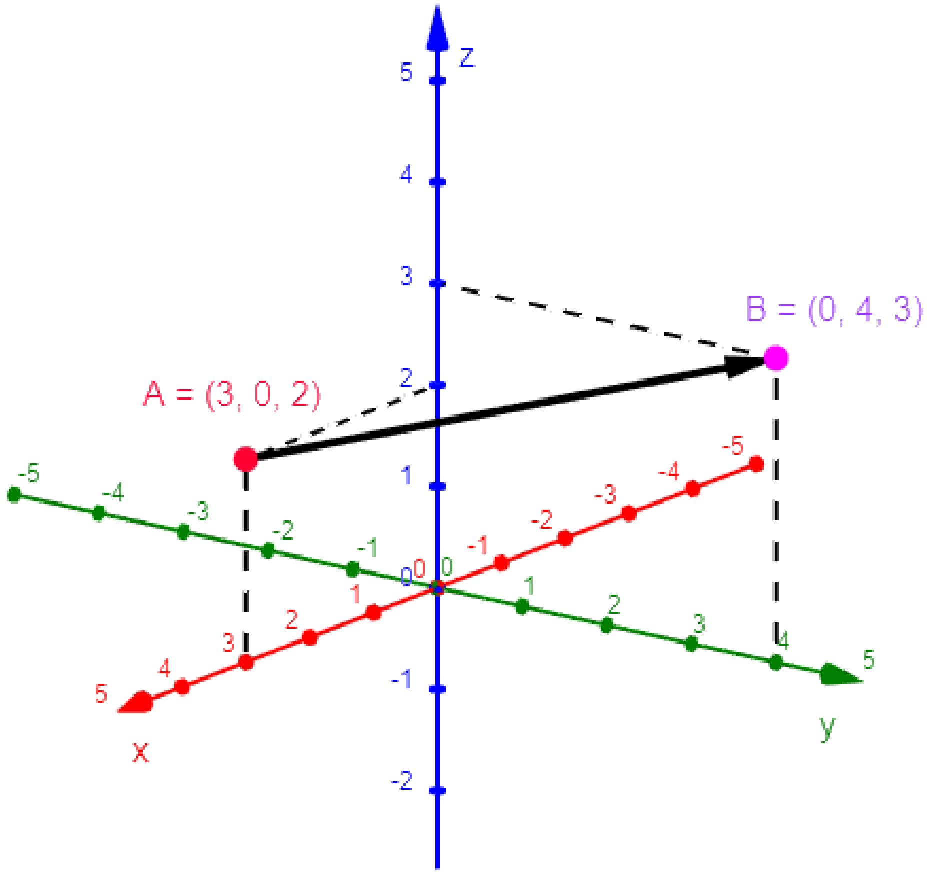
b) az A és B pont közötti távolság négyzete

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad [5].$$

Térbeli vektorok a 11. osztályban

Az $A(x_1;y_1;z_1)$ kezdőpontú és $B(x_2;y_2;z_2)$ végpontú $\overrightarrow{AB}$ **vektor koordinátáinak** nevezzük az $x=x_2-x_1,\ \ y=y_2-y_1,\ \ z=z_2-z_1$ számokat.

Így jelöljük: $\overrightarrow{AB}=(x;y;z)$ vagy $\vec{a}=(x;y;z)$ [5].



1.31. ábra.

Például, ha $A(3;0;2)$ és $B(0;4;3)$ pont az $\overrightarrow{AB}$ vektor kezdő és végpontja (1.31. ábra), akkor $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$. Az $\overrightarrow{AB} = (-3;4;1)$. A -3, 4 és 1 számok az $\overrightarrow{AB}$ koordinátái.

Az $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$ és $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$ **vektor összegének** az alábbi vektort nevezzük:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2) \quad [5].$$

A két vektor különbsége:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2) \quad [5].$$

Bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ [5].

Az $\vec{a}$ vektor hosszát (abszolút értékét) $|\vec{a}|$- val jelöljük. Minden esetben, ha $\vec{a} = (x; y; z)$, akkor

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad [5].$$

A nullvektor hossza 0: $\vec{0} = (0; 0; 0), \quad |\vec{0}| = 0 \quad$ [5].

Két vektor egyenlő, ha irányuk és hosszuk egyenlő. Ha két vektor hossza egyenlő, de ellenkező irányú, akkor az ilyen vektorokat ellentett vektoroknak nevezzük. Két nem nullvektor **kollineáris**, ha egyirányúak vagy ellentétes irányúak. A nullvektor bármely vektorral kollineáris [5].

Ahhoz, hogy egy vektort megszorozzunk egy számmal, skalárral, a vektor minden koordinátáját meg kell szorozni ezzel a számmal: ha $\vec{a} = (x; y; z)$, akkor $m\vec{a} = (mx; my; mz)$ [5].

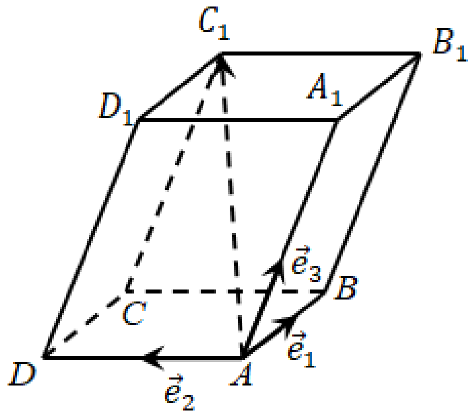
Bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra, valamint m és n valós számra igaz, hogy

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$;
- $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$;
- $|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}| \quad$ [5].

Két, $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektor, akkor és csak akkor kollineáris, ha $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektorok akkor és csak akkor kollineárisak, ha megfelelő koordinátáik arányosak, vagyis $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad$ [5].

Három nullától különböző vektor komplementáris, ha a vektorokat jelölő irányított szakaszok egy síkhoz vagy párhuzamos síkokhoz tartoznak. Bármely térbeli vektor felbontható három nem komplementáris vektorra [5].

Legyen $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ és $\vec{e_3}$ három nem komplementáris vektor (1.32. ábra). Ha ezt a három egységvektort és egy tetszőleges AC_1 vektort egy A ponttól felmérjük, akkor a három egységvektorra és az AC_1 irányított szakaszra paralelepipedon szerkeszthető, melynek AC_1 az átlója. Minden esetben egyértelműen meghatározható k_1, k_2 és k_3 valós számhármas úgy, hogy $\vec{e_1}k_1 = \overrightarrow{AB}, \ \ \vec{e_2}k_2 = \overrightarrow{AD}, \ \ \vec{e_3}k_3 = \overrightarrow{AA_1}$. Ekkor $\overrightarrow{AC_1} = \vec{e_1}k_1 + \vec{e_2}k_2 + \vec{e_3}k_3$. Ez az $\overrightarrow{AC_1}$ vektor felbontása három nem komplementáris vektorra[5].



1.32. ábra.

Térbeli vektorok alkalmazása

A koordinátageometria és a vektorok jó eszköz, mellyel a fizika, a csillagászat, a geodézia és más gyakorlati tudomány fontos és érdekes feladatait meg lehet oldani. A matematikának azt a részét, amely a koordinátageometriával foglalkozik, **analitikus geometriának** nevezzük. Ezt a tárgyat az egyetemek, főiskolák, műszaki oktatási intézmények matematika szakjain oktatják[5].

Ha egy feladatot vektorral oldunk meg, először a feladatot kell értelmezni a vektor nyelvén, figyelembe véve az alábbi tulajdonságokat:
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ - az A és B pont egybeesik;
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ - az AB és a CD egyenesek párhuzamosak;
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ - az A, B és a C pontok egy egyenesre illeszkednek;
$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$ - az O, A, B és C pontok egy síkra illeszkednek;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ - az AB és CD egyenesek merőlegesek;
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ - az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge φ [5].

1.7. Definíció. ***Két nem nullvektor hajlásszögének*** *nevezzük a vektorokkal egyirányú, közös kezdőpontú irányított szakaszok hajlásszögét[5].*

Két ellentétes irányú vektor hajlásszöge $180°$. Két egyirányú vektor hajlásszöge $0°$ [5].

1.8. Definíció. *Két nem nullvektor* ***skaláris szorzata*** *a vektorok hosszainak és hajlásszögük koszinuszának szorzatával egyenlő [5].*

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hajlásszöge φ, akkor ezen vektorok skaláris szorzata

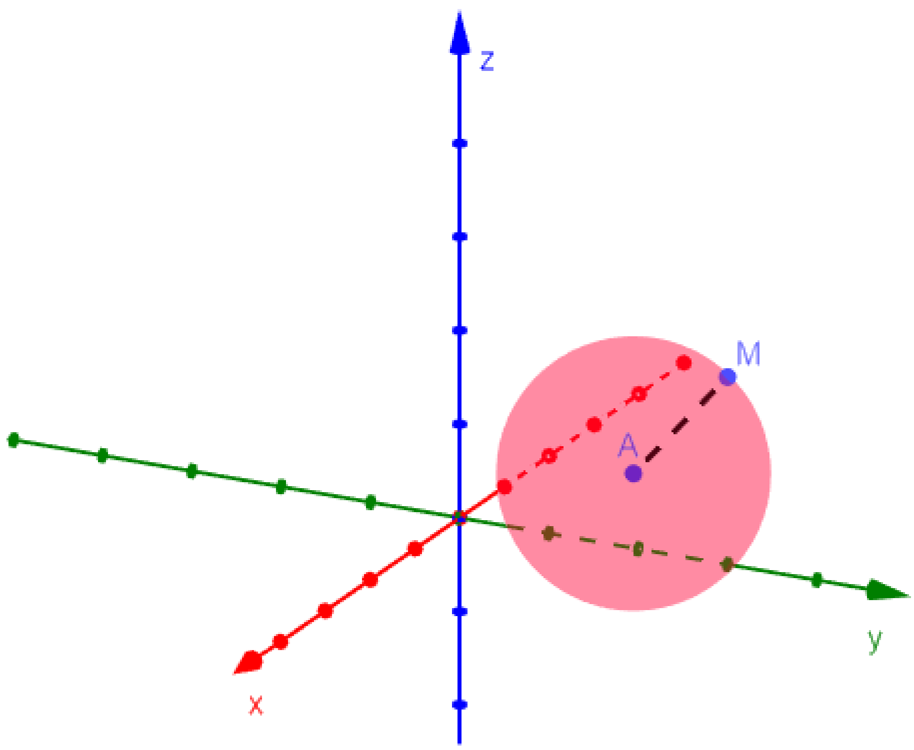
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \quad [5].$$

Az $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ vektorok skaláris szorzata az $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ összeggel egyenlő [5].

1. Következmény. *Bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra teljesül:*

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ *[5].*

Ha két nem nullvektor hajlásszöge $90°$, akkor skaláris szorzatuk 0, mivel $\cos 90° = 0$ és fordítva, ha két nem nullvektor skaláris szorzata 0, akkor a hajlásszögük koszinusza 0. Ez azt jelenti, hogy a vektorok $90°$-os szöget zárnak be, tehát merőlegesek. Két nem nullvektor, akkor és csak akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk nulla [5].



1.33. ábra.

Az r sugarú és $A(a; b; c)$ középpontú gömbfelület azon pontok halmaza, melyek r távolságra vannak az A ponttól. Ezért a gömbfelület tetszőleges $M(x; y; z)$ pontjára teljesül az alábbi egyenlőség:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad [5].$$

Ez az r sugarú $A(a;b;c)$ középpontú gömbfelület egyenlete. Ha $a=b=c=0$, akkor egy r sugarú origó középpontú gömbfelület egyenletét kapjuk:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad [5].$$

Ukrajnai érettségi feladatok

1. Az x mely értéke esetén lesznek az $\vec{a}(2;x)$ és $\vec{b}(-4;10)$ vektorok merőlegesek [10]?

   Megoldás:

   Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek, ha skaláris szorzatuk nullával egyenlő. Vagyis

   $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$

   $2\cdot(-4)+x\cdot 10=0$

   $-8+10x=0$

   $10x=8$

   $x=\frac{8}{10}$

   $x=0{,}8.$

   Felelet: x = 0,8 esetén lesznek a vektorok merőlegesek.

2. A C pont a derékszögű koordinátarendszer x tengelyén fekszik, és 5 egységre van az $A(-2;4)$ ponttól. Az AC szakasz metszi az y tengelyt. Határozza meg a C pont koordinátáit [10]!

   Megoldás:

   Adva van az $A(-2;4)$ pont és $AC=5$

   Mivel a C pont a derékszögű koordinátarendszer x tengelyén fekszik, ezért $C(x;0)$ koordinátájú lesz.

   Tudjuk, hogy $AC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

   Behelyettesítjük:

   $AC=\sqrt{(x-(-2))^2+(0-4)^2}$

$5 = \sqrt{(x-(-2))^2+16}$- ezt négyzetre emelve kapjuk, hogy:

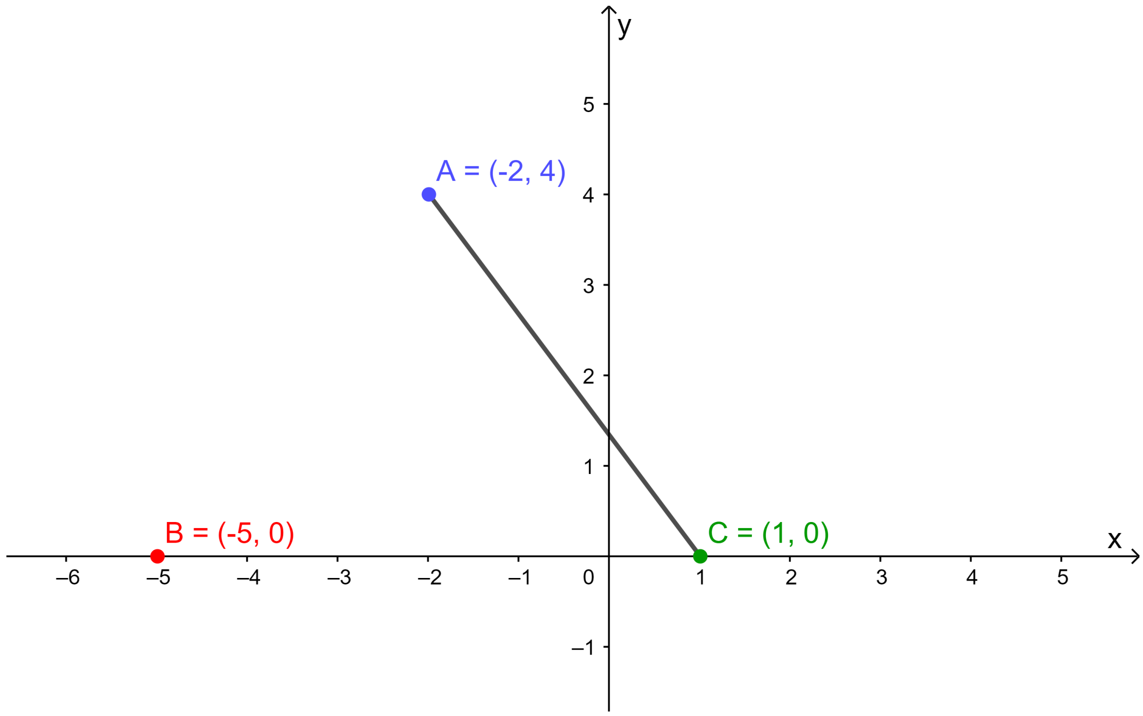
$25 = (x+2)^2 + 16$

$(x+2)^2 = 9$

$x + 2 = \pm 3$

$x + 2 = 3 \qquad$ vagy $\qquad x + 2 = -3$

$x = 1 \qquad\qquad\qquad x = -5$



Tehát a $C(1;0)$ vagy $C(-5;0)$. A feladatban meg van adva, hogy az AC szakasz metszi az y tengelyt, ezért csak a $C(1;0)$ pont elégíti ki az adott feltételt.

Felelet: $C(1;0)$.

3. A derékszögű koordináta rendszerben a síkon egymásra kölcsönösen merőleges $\overrightarrow{AB}$ és $\vec{a}(4;3)$ vektort adtak meg. Határozd meg a B pont abszcisszáját, ha $A(-2;0)$, a B pont pedig $y = 2x$ egyenesen fekszik [10]!

Megoldás:

Mivel az $\overrightarrow{AB}$ és $\vec{a}$ vektorok egymásra kölcsönösen merőlegesek, ezért skaláris szorzatuk egyenlő 0-val:

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{a} \longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 0.$

Adott az $\vec{a}(4;3)$, legyen $B(x;y)$. Mivel $y = 2x$, ezért $B(x;2x)$.

Ha $A(-2;0)$ és $B(x;2x)$, akkor $\overrightarrow{AB}(x+2;2x)$.

Megvizsgáljuk az $\overrightarrow{AB}$ és $\vec{a}$ vektorok skaláris szorzatát:

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 4(x-2) + 3(2x) = 4x + 8 + 6x$

$4x + 8 + 6x = 0$

$10x + 8 = 0$

$10x = -8 \; x = -0{,}8$

Felelet: $x = -0{,}8$.

4. A derékszögű koordináta rendszerben a síkon adott egy $x^2 - 4x + y^2 + 12y = 9$ egyenletű kör. A kör O középpontja egybeesik az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontjával. Határozd meg a $C(x_c;y_c)$ csúcs koordinátáját, ha $\overrightarrow{OA}(-1;2)$. A feleletben írja le a $x_c \cdot y_c$ szorzat eredményét [10].

Megoldás:

Az adott $x^2 - 4x + y^2 + 12y = 9$ kör egyenletét rendezzük: $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + {} + 12y + 36 - 36 = 9$, ebből kapjuk $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 49$

A kör középpontja $O(2;-6)$ pont. A $C(x_c;y_c)$ és $O(2;-6)$ pontok felhasználásával megtaláljuk a $\overrightarrow{OC} = (x_c - 2; y_c + 6)$.

Mivel $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorok egyenlőek, de ellentétes az irányuk, ezért $x_c - 2 = 1$ és $y_c + 6 = -2$. Innen kapjuk, hogy $x_c = 3$ és $y_c = -8$.

Tehát a C pont koordinátája $(3;-8)$.

$x_c \cdot y_c = 3 \cdot (-8) = -24.$

Felelet: -24.

2. Fejezet

A koordinátageometria tanításának felépítése a magyarországi oktatásban

Az magyarországi kooordinátageometria témakör oktatása során először a koordináta-rendszerrel, azon belül a pont ábrázolásával foglalkoznak. A vektor fogalmát, azok összeadását, kivonását, a skaláris szorzást sajátítják el. Megtanulják a vektorok felbontását, ábrázolását a koordináta-rendszerben. Elsajátítják két pont távolságának meghatározását, megtanulják az egyenes és a kör egyenletét.

Polárkoordinátákkal, koordináta-transzformációval foglalkoznak. Ismertetik a derékszögű és polárkoordináta-rendszer kapcsolatát. Megtanulják meghatározni két pont különbségvektorát, távolságát. Elsajátítják az adott arányban osztó pont koordinátáinak a meghatározását.

A 11-12. évfolyamon koordinátageometriával, azon belül térgeometriával foglalkoznak, ahol a matematika tantárgy alapóraszáma 186 óra. Rendszerező összefoglalásra, az érettségi vizsgára történő felkészítésre a 12. évfolyam végén 38 óra áll rendelkezésre. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre. A koordinátageometriára javasolt óraszám 14 darab [12].

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- Ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- Ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- Alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- Megad pontot és vektort koordinátáival a derékszögű koordináta-rendszerben;

- Koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- Koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- Ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- Egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- Kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- Megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- Felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot [12].

2.1. A vektor fogalma

A vektor fogalmát a párhuzamos eltolás segítségével vezetik be. Megadunk egy szakaszt, és annak két végpontját megkülönböztetjük: kezdőpont és végpont. Ezzel megadták a kezdőpontból a végpontba mutató **irányított szakaszt** [6].

2.1. Definíció. *Ha egy szakasz két végpontját megkülönböztetjük egymástól oly módon, hogy az egyik pont a kezdőpont, a másik pont a végpont, akkor irányított szakaszt kapunk [7].*

2.2. Definíció. *Egy irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy vektort [6].*

2.3. Definíció. *Két vektor egyenlő, ha ugyanazt a párhuzamos eltolást határozzák meg [6].*

Ha egy irányított szakasz kezdőpontja A, végpontja pedig B, akkor az általa meghatározott vektort a következőképpen jelöljük: $\overrightarrow{AB}$("AB vektor")[6].

2.4. Definíció. *A vektort meghatározó irányított szakasz hosszát a vektor abszolútértékének nevezzük. Jelölése* $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$, $|\boldsymbol{a}|$ [6].

2.5. Definíció. *Két vektor párhuzamos, ha az őket meghatározó irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak [6].*

Két vektor úgy is párhuzamos lehet, ha azok ellenkező irányba mutatnak. Mielőtt definiálnánk két vektor egyirányúságát, az őket meghatározó irányított szakaszok egyirányúságát kell definiálnunk [6].

2.6. Definíció. *Két nem egy egyenesre illeszkedő irányított szakasz egyirányú, ha egyeneseik párhuzamosak és a két kezdőpontot illetve a két végpontot összekötő két szakasznak nincs közös belső pontja [6].*

2.7. Definíció. *Két egy egyenesre illeszkedő irányított szakasz egyirányú, ha van olyan, másik egyenesre illeszkedő irányított szakasz, amelyikkel mindkettő egyirányú[6].*

2.8. Definíció. *Két vektor egyirányú, ha az őket meghatározó irányított szakaszok egyirányúak[6].*

2.9. Definíció. *Két vektor ellentétes irányú, ha párhuzamosak, de nem egyirányúak [6].*

2.10. Definíció. *Ha két vektor egyenlő abszolútértékű és ellentétes irányú, akkor a két vektor egymás ellentettje. Jelölése: az $\vec{a}$ ellentettje $-\vec{a}$ [6].*

2.11. Definíció. *Két vektor egyenlő, ha egyirányúak, és abszolútértékük egyenlő [6].*

Egymással egyenlő hosszú és egyirányú irányított szakaszok egyanazt a vektort határozzák meg[6].

2.2. Műveletek vektorokkal

Vektorok összege

Legyen adott egy ABC háromszög, valamint egy $\vec{a}$ és egy $\vec{b}$ vektort. A háromszöget toljuk el az $\vec{a}$-ral, majd az így kapott $A'B'C'$ háromszöget $\vec{b}$ vektorral. A két párhuzamos eltolás helyettesíthető egyetlen párhuzamos eltolással, amelyet a következő vektor határoz meg: $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{CC''}$. Ennek észrevételével definiáljuk két vektor összegét[6].

2.12. Definíció. *Az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok összege (jelölése: $\vec{a} + \vec{b}$) azon párhuzamos eltolás vektora, amellyel az $\vec{a}$-ral és a $\vec{b}$-ral meghatározott párhuzamos eltolások egymásutánja helyettesíthető[6].*

Vektorok összeadásának háromszög szabálya: Ha a két vektort egymás után vesszük fel, az összegvektor az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutat[6].

Vektorok összeadásának paralelogramma-szabálya: Ha két vektort közös kezdőpontból vesszük fel, akkor az összegvektor a két közös kezdőpontú vektor által kifeszített paralelogrammának a közös kezdőpontból kiinduló átlóvektora lesz [6].

Két vektor összege független az összeadandók sorrendjétől, vagyis a vektorok összeadása kommutatív művelet: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Az összeadandó vektorokat tetszőlegesen csoportosíthatjuk, azaz a vektorok összeadása asszociatív művelet:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ [6].

Két vektor különbsége

2.13. Definíció. *Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége (jelölése: $\vec{a} - \vec{b}$) az $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektor [6].*

Két vektort közös kezdőpontból kiindulva vesszük fel, és a különbségvektor a kivonandó vektor végpontjából a kisebbítendő vektor végpontjába mutat [6].

2.14. Definíció. *Azt a vektort, amelynek abszolútértéke 0, nullvektornak nevezzük. (Jelölése: $\vec{0}$ vagy 0)[6].*

A $\vec{0}$ iránya tetszőleges, vagyis bármilyen vektorral egyirányú [6].

Vektor szorzása számmal

Ha $\vec{a}$ egy tetszőleges vektor, akkor $\vec{a} + \vec{a}$ a háromszögszabály alkalmazásával meghatározva egy olyan vektor, amelyik $\vec{a}$-ral egyirányú, és abszolútértéke az $\vec{a}$ abszolútértékének kétszerese. Ezt a vektort célszerű $2 \cdot \vec{a}$-nak tekinteni. Tekintsünk egy $\vec{a}$-t és egy α valós számot [6].

2.15. Definíció. *1. Ha $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor $\alpha \cdot \vec{a}$ olyan vektor, amelynek abszolútértéke $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, és $a > 0$ esetén $\vec{a}$-ral egyirányú, $\alpha < 0$ esetén $\vec{a}$-ral ellentétes irányú [6].*

2. Ha $\vec{a} = \vec{0}$, akkor $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$ bármely α valós szám esetén [6].

Vektor számmal(skalárral) való szorzás esetén teljesülnek az alábbi azonosságok:

1. $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{a}$;
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$;
3. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ [6].

2.3. Vektorok a koordináta-rendszerben. Vektor koordinátái

A derékszögű koordináta-rendszerben lehetőségünk van a vektorokat számokkal, koordinátákkal jellemezni és nem csak ábrázolni az őket reprezentáló irányított szakasszal [6].

Ha egy adott vektort előállító irányított szakasz kezdőpontja az origó, végpontja pedig az $(x_0; y_0)$ **pont, akkor ugyanezt a vektort előállító,** $(a; b)$ **kezdőpontú irányított szakasz végpontja az** $(x_0 + a; y_0 + b)$ **pont**[6].

A derékszögű koordináta-rendszerben a vektor origó kezdőpontú reprezentánsával végpontjának koordinátái egyértelműen megadják a vektort [6].

2.16. Definíció. *A derékszögű koordináta-rendszerben egy vektor koordinátái megegyeznek origó kezdőpontú reprezentánsa végpontjának koordinátáival. Jelölése:* $\vec{a}(a_1; a_2)$ *[6].*

Minden ponthoz hozzárendelhetjük azt a vektort, amelyik az origóból a tekintett pontba mutat [6].

2.17. Definíció. *A derékszögű koordináta-rendszerben egy pont helyvektora az origóból a pontba mutató vektor [6].*

A sík egy pontjának és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek[6].

Vektorok összegének és különbségének koordinátái

2.18. Definíció. *Ha adottak az* $\vec{a}(a_1; a_2)$ *és* $\vec{b}(b_1; b_2)$ *vektorok, akkor* $\vec{a}+\vec{b} = (a_1 i + a_2 j) + (b_1 i + b_2 j) = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j$*, azaz az összegvektor első koordinátája az összeadandó vektorok első koordinátájának, második koordinátája az összeadandó vektorok második koordinátájának összege [7].*

2.19. Definíció. *Ha adottak az* $\vec{a}(a_1; a_2)$ *és* $\vec{b}(b_1; b_2)$ *vektorok, akkor* $\vec{a}-\vec{b} = (a_1 i + a_2 j) - (b_1 i + b_2 j) = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j$*, azaz a különbségvektor első koordinátája a megfelelő első koordináták különbsége, második koordinátája a megfelelő második koordináták különbsége [7].*

2.20. Definíció. *Az adott* $\vec{a}(a_1; a_2)$ *és* λ *valós szám.* $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 i + a_2 j) = (\lambda \cdot a_1)i + (\lambda \cdot a_2)j$*, azaz egy vektor* λ*-szorosának koordinátái a koordináták* λ*-szorosai [7].*

Az $\vec{a}(a_1; a_2)$ *vektor ellentettje a* $-\vec{a}(-a_1; -a_2)$ *vektor, azaz ellentett vektor koordinátái az eredeti vektor koordinátáinak* -1*- szeresei [8].*

A skaláris szorzat

2.21. Definíció. *Két vektor skaláris szorzatán értjük azt a valós számot, melyet úgy kapunk, hogy a két vektor abszolútértékét és bezárt szögük koszinuszát összeszorozzuk:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

ahol α a vektorok közös kezdőpontú reprezentánsai által bezárt szög nagysága *($0 \leq \alpha \leq 180$) [8].*

A skaláris szorzat tulajdonságai:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, azaz a skaláris szorzat kommutatív;

2. $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$, tetszőleges λ szám esetén;

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, azaz a skaláris szorzat disztributív;

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$, azaz $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ [8].

2.1. Tétel. *Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor* 0*, ha merőlegesek egymásra [8].*

A skaláris szorzat koordinátákkal kifejezve:

Ha $\vec{a} = a_1 i + a_2 j$ és $\vec{b} = b_1 i + b_2 j$, akkor

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

azaz a két vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege [8].

A skaláris szorzat akkor pozitív, ha α hegyesszög, és akkor negatív, ha α tompaszög [8].

2.22. Definíció. *Az $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza (abszolútértéke): $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ [8].*

Két vektor hajlásszögének meghatározása koordináta-rendszerben:

$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ [8].

Két pont távolsága

A derékszögű koordináta-rendszerben, a síkon az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ **pontok távolsága**(az egyik pontból a másikba mutató vektor hossza):

$$AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \quad [9].$$

A térbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1;a_2;a_3)$ és $B(b_1;b_2;b_3)$ **pontok távolsága**:

$$AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} \quad [9].$$

A szakasz felezőpontja

A derékszögű koordináta-rendszerben, a síkon az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok helyvektorai rendre $\vec{a}$ és $\vec{b}$, az AB szakasz $F(x;y)$ felezőpontjának helyvektora $\vec{f}$. A szakasz felezőpontjának helyvektora: $\vec{f}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ [9].

Vektorok összegének és vektor számszorosának koordinátáira vonatkozó összefüggések alapján:

$$x=\tfrac{a_1+b_1}{2} \text{ és } y=\tfrac{a_2+b_2}{2},$$

azaz **a felezőpont koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepeként adódnak** [8].

A szakasz harmadolópontja

Az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok által meghatározott szakasz harmadolópontja a $H_1(x_1;y_1)$ és $H_2(x_2;y_2)$, a megfelelő helyvektorok $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{h_1}$ és $\vec{h_2}$ [9].

A harmadolópontok helyvektorai a végpontok helyvektoraival kifejezve:

$$\vec{h_1}=\tfrac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}}{3} \text{ és } \vec{h_2}=\tfrac{\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{3},$$

a harmadolópontok koordinátáira nézve:

$$H_1(\tfrac{2\cdot a_1+b_1}{3};\tfrac{2\cdot a_2+b_2}{3}) \text{ és } H_2(\tfrac{a_1+2\cdot b_1}{3};\tfrac{a_2+2\cdot b_2}{3}) \quad [9].$$

A szakaszt $p:q$ arányban osztó pont koordinátái

Az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok által meghatározott szakaszt $p:q$ arányban osztó $R(x;y)$ pont helyvektora:

$$\vec{r}=\tfrac{q\cdot\vec{a}+p\cdot\vec{b}}{p+q},$$

koordinátákra nézve:

$$R(\tfrac{q\cdot a_1+p\cdot b_1}{p+q};\tfrac{q\cdot a_2+p\cdot b_2}{p+q}) \quad [9].$$

2.4. Az egyenes egyenletei a koordináta-rendszerben

2.23. Definíció. *A síkbeli koordináta-rendszerben elhelyezkedő görbe(vonal) egyenlete olyan kétismeretlenes egyenlet, amelyet a görbe $P(x;y)$ pontjainak koordinátái kielégítenek, más pontok koordinátái viszont nem elégítenek ki [9].*

2.24. Definíció. *Egy egyenes irányvektora bármely, az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor. Jelölése: $\vec{v}(v_1;v_2)$. Ha a $\vec{v}$ az e egyenesnek irányvektora, akkor $\lambda\cdot\vec{v}$ is irányvektora e-nek, bármely valós $\lambda\neq 0$ szám esetén [9].*

Ha az e egyenes két különböző pontja $P_1(x_1;y_1)$ és $P_2(x_2;y_2)$, akkor e egyenes irányvektora $\vec{v}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ [8].

2.25. Definíció. *A síkban egy egyenes normálvektora bármely, az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\vec{n}(A;B)$ [9].*

Ha $\vec{n}$ normálvektora az e egyenesnek, akkor bármely $\lambda\neq 0$ valós szám esetén $\lambda\cdot\vec{n}$ is normálvektora e-nek [9].

2.26. Definíció. *Ha az e egyenes egy irányvektora $\vec{v}(v_1;v_2)$, akkor az $\vec{n}(v_2;-v_1)$, illetve az $\vec{n}(-v_2;v_1)$ vektorok az e normálvektorai [8].*

2.27. Definíció. *A síkbeli koordináta-rendszerben egy egyenes irányszöge és az x tengely pozitív félegyenese (pozitív iránya) által bezárt előjeles szög [9].*

Az α irányszögre nézve $-\frac{\pi}{2}<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ és α pozitív, vagy negatív aszerint, hogy az x tengely pozitív, illetve negatív irányban kell elforgatnunk az origó körül a megengedett intervallumba eső szöggel ahhoz, hogy elforgatott képe az egyenessel párhuzamos legyen [9].

2.28. Definíció. *Egy egyenes irányszögének tangensét az egyenes iránytangensének vagy meredekségének nevezzük. Az α irányszögű egyenes iránytangense: $m=\tan\alpha$ [9].*

Az y tengely irányszöge $\frac{\pi}{2}$, ezért az y tengellyel párhuzamos egyeneseknek nem létezik iránytangense [9].

Ha az e egyenes két különböző pontja $P_1(x_1;y_1)$ és $P_2(x_2;y_2)$, ahol $x_1\neq x_2$, akkor az e iránytangense

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad [8].$$

Ha az e egyenes egy irányvektora $\vec{v}(v_1; v_2)$, egy normálvektora $\vec{n}(A; B)$ és $v_1 \neq 0$, akkor az e iránytangense

$$m = \frac{v_2}{v_1} \text{ és } m = -\frac{A}{B} \quad [8].$$

Ha az e egyenes iránytangense m, akkor a $\vec{v}(1; m)$ egy irányvektora, az $\vec{n}(m; -1)$ (vagy $\vec{n}(-m; 1)$) egy normálvektora e-nek [8].

Összefüggések az egyenes irányát meghatározó adatok között

A $\vec{v}(v_1; v_2)$ - az y tengellyel nem párhuzamos e egyenes egy irányvektora, $\vec{n}(A; B)$ - normálvektora, m - iránytangense, $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ - két pontja [9]. Érvényesek a következő összefüggések:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{A}{B} \quad [9].$$

Két egyenes párhuzamosságának, illetve merőlegességének feltételei

Az y tengellyel nem párhuzamos e_1 és e_2 egyenesek irányát meghatározó adatok legyenek α_1, m_1, $\vec{v_1}$, $\vec{n_1}$ és α_2, m_2, $\vec{v_2}$, $\vec{n_2}$ [9].

Szükséges és elégséges feltételek az e_1 és e_2 egyenesek párhuzamosságához:

- $\alpha_1 = \alpha_2$;
- $m_1 = m_2$;
- Létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, hogy $\vec{v_1} = \lambda \cdot \vec{v_2}$;
- Létezik olyan $\mu \neq 0$ valós szám, hogy $\vec{n_1} = \mu \cdot \vec{n_2}$ [9].

Szükséges és elégséges feltételek az e_1 és e_2 egyenesek merőlegességéhez:

- $m_1 \cdot m_2 = -1$;
- $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$;
- $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ [9].

Két, a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha iránytangenseik szorzata -1 [8].

2.29. Definíció. *Egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben elhelyezkedő alakzat egyenlete egy olyan kétismeretlenes egyenlet, amelyet az alakzat $P(x; y)$ pontjainak koordinátái kielégítenek, más pontok koordinátái viszont nem elégítenek ki [8].*

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az **egyenes egyenlete** olyan

$$Ax + By + C = 0$$

alakú ismeretlen egyenlet, amelyben A és B közül legalább az egyik 0-tól különböző [9].

- **Az egyenes egyenletének normálvektoros alakja:**

  Legyen adott az e egyenes, $P_0(x_0; y_0)$ tetszőleges pontja és $\vec{n}(A; B)$ normálvektora, akkor az egyenlete:

  $$Ax + By = Ax_0 + By_0 \quad [9].$$

- **Az egyenes egyenletének irányvektoros alakja:**

  Az e egyenes, $P_0(x_0; y_0)$ tetszőleges pontja és $\vec{v}(v_1; v_2)$ irányvektora, akkor az egyenlete:

  $$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0 \quad [9].$$

- **Az egyenes egyenletének iránytényezős alakja:**

  Az e egyenes, mely nem párhuzamos az y tengellyel, $P_0(x_0; y_0)$ tetszőleges pontja és m iránytangense, akkor az egyenlete:

  $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \quad [9].$$

  Ha az e egyenes az y tengelyt a $P_0(0; b)$ pontban metszi és az iránytangense m, akkor az egyenlete:

  $$y = mx + b \quad [9].$$

  Ha az e egyenes párhuzamos az y tengellyel, akkor az egyenlete:

  $$x = x_0 \quad [9].$$

- **Az egyenes egyenletének két pontjával meghatározott alakja:**

  Legyen adott az e egyenes és két pontja: $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, akkor az egyenlete:

  $$(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \quad [9].$$

- **Az egyenes egyenletének tengelymetszetes alakja:**

  Az e egyenes az x tengelyt az $A(a; 0)$ pontban, az y tengelyt a $B(0, b)$ pontban metszi, akkor az egyenlete:

  $$\tfrac{x}{a} + \tfrac{y}{b} = 1 \quad [9].$$

  Két síkbeli metsző egyenes metszéspontjának koordinátái a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai [9].

Magyarországi érettségi feladatok

1. Adott két egyenes: $e: 5x - 2y = -14{,}5$, $f: 2x + 5y = 14{,}5$.

   a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit!

   b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek!

   c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét [11]!

   Megoldás:

   a) Oldjuk meg az egyenletrendszert:

   $e: 5x - 2y = -14{,}5 \quad / \cdot 2$

   $f: 2x + 5y = 14{,}5 \quad / \cdot 5$

   $e: 10x - 4y = -29$

   $f: 10x + 25y = 72{,}5$

   Kivonjuk az f egyenletből az e egyenletet:

   $29y = 101{,}5$

   $y = 3{,}5$

   Ezt behelyettesítjük az e egyenletbe, akkor $x = -1{,}5$.

   A P metszéspontjának koordinátái $(-1{,}5; 3{,}5)$.

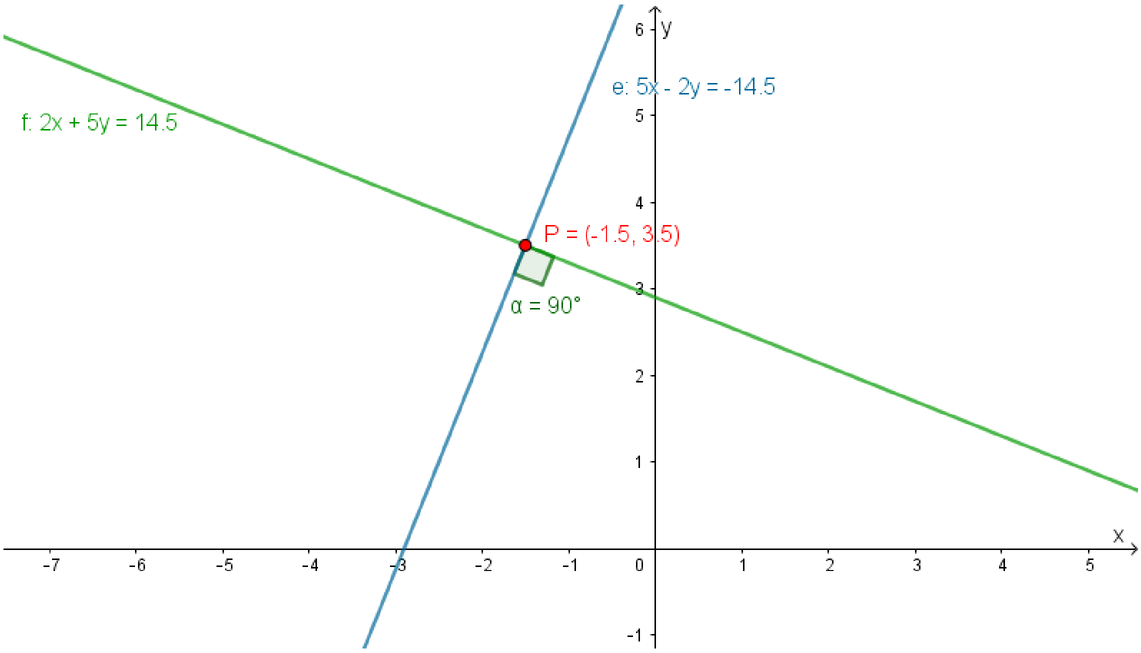
b) Az e egyenes normálvektora $\vec{n_e}(5;-2)$, az f egyenes normálvektora $\vec{n_f}(2;5)$. Ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk 0-val egyenlő. Vagyis $\vec{n_e} \perp \vec{n_f} \Leftrightarrow \vec{n_e} \cdot \vec{n_f} = 0$

$\vec{n_e} \cdot \vec{n_f} = 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 = 0.$

Ebből az következik, hogy $\vec{n_e} \perp \vec{n_f}$ merőlegesek, vagyis az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek.

c) Az e egyenes irányvektora $\vec{v_e}(2;5)$. $\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{2}$

$\alpha = 68{,}2.$



2.1. ábra.

2. Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-3)$ és $B(7;-1)$.

a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét!

b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az

$x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát! Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.

c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit [11]!

Megoldás:

a) Felírjuk az egyenes egyenletét két ponton keresztül $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Akkor:

$\frac{x-1}{7-1} = \frac{y+3}{-1+3}$

$\frac{x-1}{6} = \frac{y+3}{2}$

$2(x-1) = 6(y+3)$

$2x-2 = 6y+18$

$2x-6y-20 = 0.$

b) Ahhoz, hogy az A és B pontok illeszkedjenek az $x^2+y^2-6x-2y = 10$ egyenletű körre a pontok koordinátái ki kell, hogy elégítsék a kör egyenletét.

$A(1;3)$ pont koordinátáit behelyettesítjük a kör egyenletébe:

$1^2+(-3)^2-6\cdot 1-2\cdot(-3) = 10$

$1+9-6+6 = 10$

$10 = 10.$

$B(7;1)$. pont koordinátáit behelyettesítjük a kör egyenletébe:

$7^2+(-1)^2-6\cdot 7-2\cdot(-1) = 10$

$49+1-42+2 = 10$

$10 = 10.$

Tehát az A és a B pont is illeszkedik a körre.

Az AB húr hossza egyenlő az A és a B pontok közötti távolságával, ami egyenlő: $AB = \sqrt{(7-1)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$.

c) Az f egyenes normálvektora az $\overrightarrow{AB} = (6;2)$ vektorral egyenlő és az A pont illeszkedik erre az egyenesre, akkor felírjuk az egyenes normálvektoros egyenletét:

$6(x-1)+2(y+3) = 0$

$6x-6+2y+6 = 0$

$6x+2y = 0$

az f egyenes egyenelete: $3x+y = 0$.

Ahhoz, hogy megkeressük az egyenes és a kör metszéspontjának koordinátáit, az egyenes egyenletéből kifejezzük az y -t és behelyettesítjük a kör egyenletébe.

$3x + y = 0$

$y = -3x$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$

$x^2 + 9x^2 - 6x + 6x = 10$

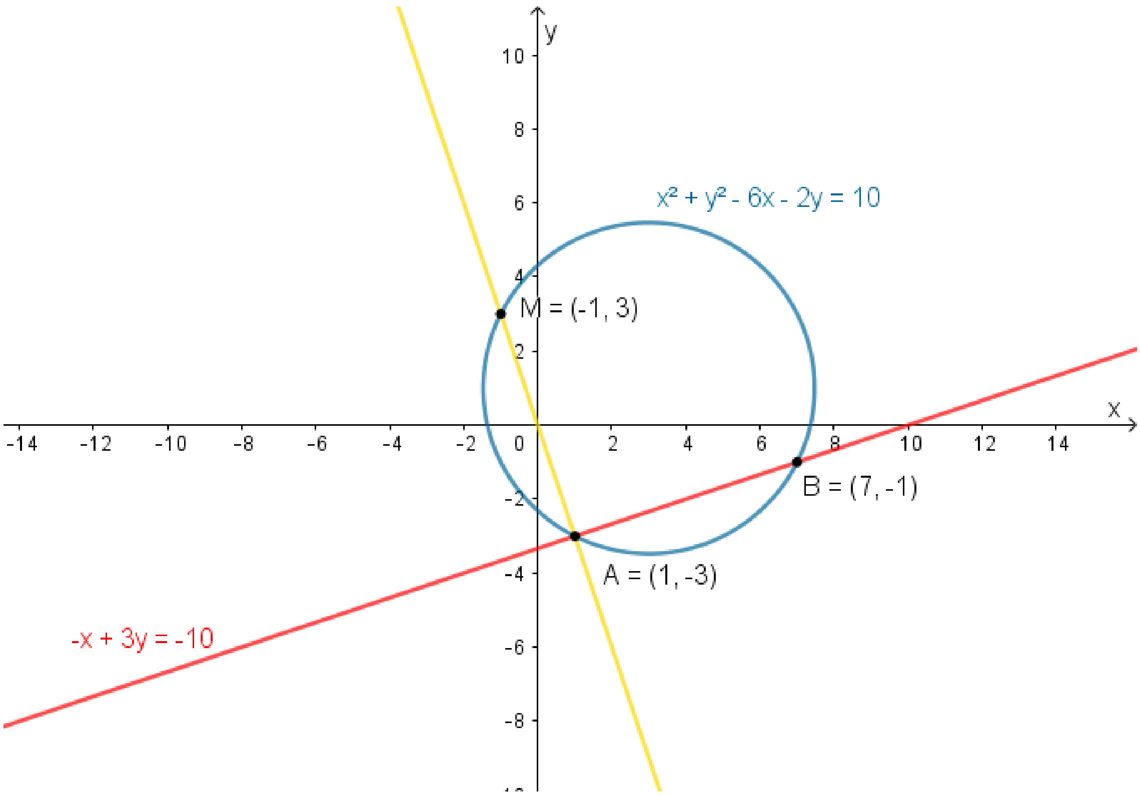
$10x^2 = 10$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Ezt visszahelyettesítve az $y = -3x$ egyenletbe $y = 3$ vagy $y = -3$

Tehát a metszéspontok $A(1; -3)$ és a keresett metszéspont $M(-1; 3)$.



2.2. ábra.

3. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok $120°$-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4;3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7;1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

c) Adja meg a P, az R és az S csúcsok koordinátáit [11]!

Megoldás:

a) Az $ABCD$ paralelogrammát felépítjük, ami egy rombusz, mivel minden oldala egyforma. A $CAB\angle = 120°$, $CAD\angle = 60°$, mivel a rombusz átlói felezik a szöget. $DAC\angle = 60°$. A rombusz belső szögeinek összege egyenlő $360°$ és szemközti szögei egyenlőek, ezért $C\angle = B\angle$, $360° - 240° = 120°$. $C\angle = 60°$. Az ABC háromszög egyenlő oldalú, ezért $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 5$.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 5$.

b) Mivel a rombusz átlói felezik egymást, ezért számítsuk ki a $\overrightarrow{CB}$ vektor felét az ADC háromszögben: $\frac{x}{5} = \sin 60°$

$x = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$|\overrightarrow{CB}| = 5 \cdot \sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 5\sqrt{3}$.

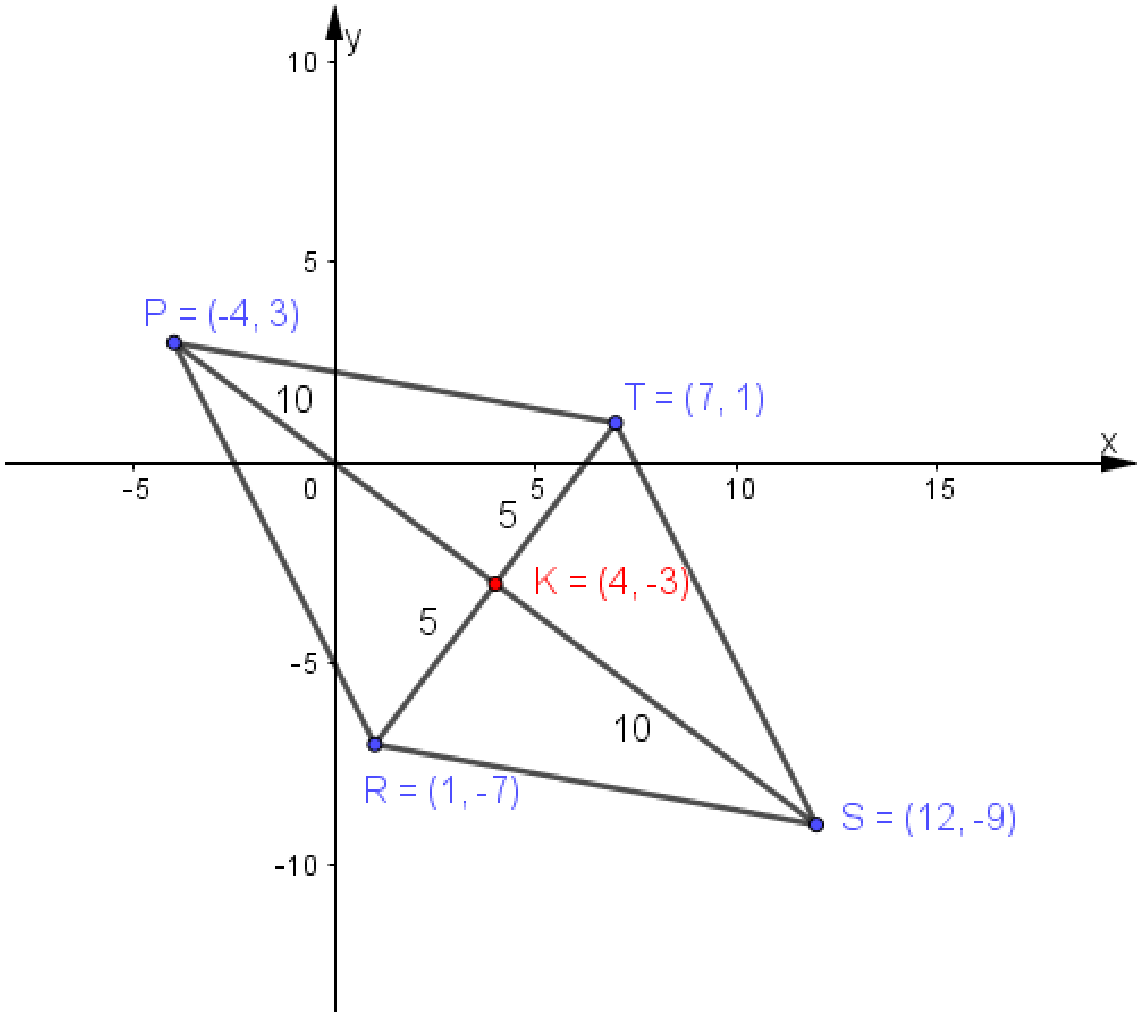
c) A K pont felezi az RT szakaszt. Legyen $R(x;y)$, akkor:

$\frac{x+7}{2} = 4$ és $\frac{y+1}{2} = -3$ ebből kapjuk, hogy $x = 1$, $y = -7$. Tehát $R(1;-7)$.

$\overrightarrow{KT} = (3;4)$, ha $\overrightarrow{KT}$ vektort elforgatjuk $90°$-kal, akkor $\overrightarrow{KT} = (4;-3)$, innen

$\overrightarrow{KS} = (8;-6)$ és $\overrightarrow{KS} = (-8;6)$;

$S(12;-9)$, $P(-4;3)$.



2.3. ábra.

4. Adott az $x + 2y = 13$ egyenletű e egyenes és az $x^2 + (y + 1)^2 - 45 = 0$ egyenletű k kör.

   a) Adja meg az e egyenes meredekségét, és azt a pontot, ahol az egyenes metszi az y tengelyt!

   b) Határozza meg a k kör középpontját és sugarának hosszát!

   c) Számítással igazolja, hogy az e egyenesnek és a k körnek egyetlen közös pontja van [11]!

Megoldás:

a) Ahhoz, hogy meghatározzuk az e egyenes meredekségét, és azt a pontot, ahol az egyenes metszi az y tengelyt alkalmazzuk az egyenes általános iránytényezős egyenletét: $y = kx + b$. Rendezzük az egyenes egyenletét: $x + 2y = 13$

$2y = 13 - x$

$y = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}x$

Az egyenes meredeksége $k = -\frac{1}{2}$. A $(0; \frac{13}{2})$ pontban metszi az y tengelyt.

b) a kör egyenletének képlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2$, ahol $C(u; v)$ a kör középpontja, R pedig a sugara.

Rendezzük a kör $x^2 + (y + 1)^2 - 45 = 0$ egyenletét: $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. A kör középpontja: $(0; -1)$, sugara $R = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

c) Ahhoz, hogy meghatározzuk az e egyenesnek és a k körnek a közös pontját, oldjuk meg az egyenleteikből alkotott egyenletrendszert:

$x + 2y = 13$

$x^2 + (y + 1)^2 - 45 = 0$

$x = 13 - 2y$

$x^2 + (y + 1)^2 - 45 = 0$

Az x-et helyettesítsük be a kör egyenletébe:

$(13 - 2y)^2 + (y + 1)^2 = 45$

$169 - 52y + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 = 45$

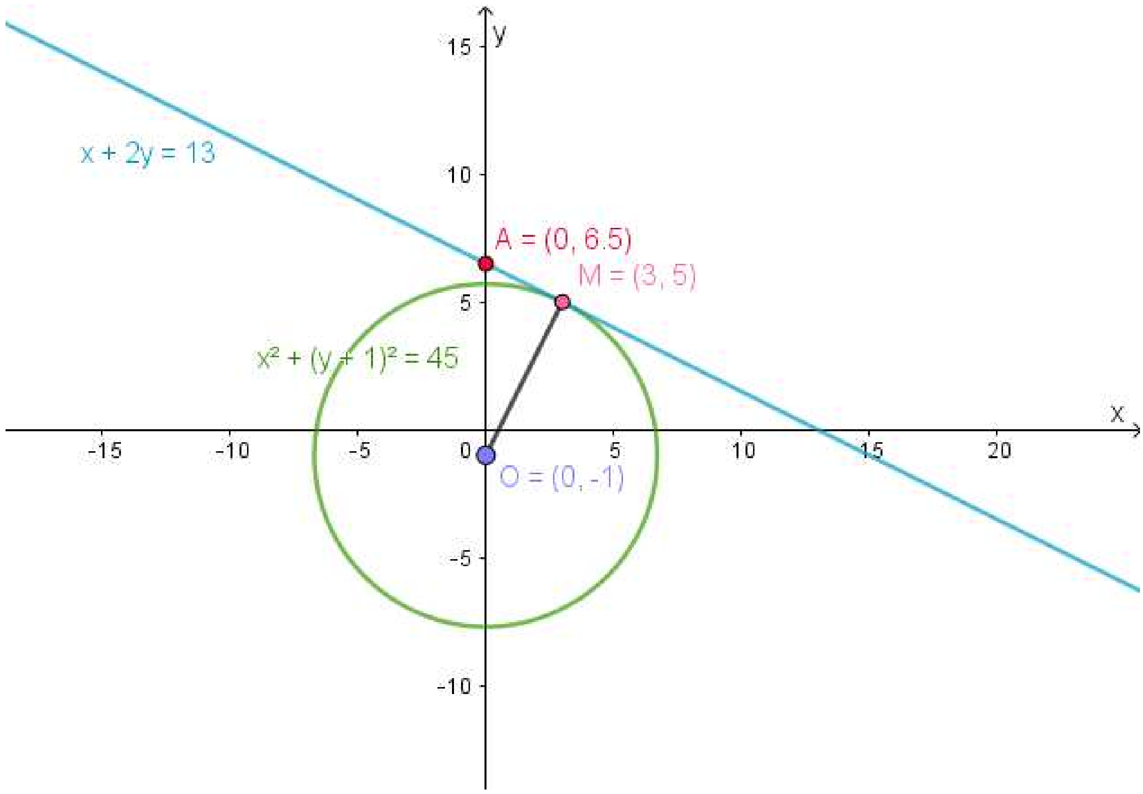
$5y^2 - 50y + 125 = 0$

$y^2 - 10y + 25 = 0$

$D = \sqrt{100 - 100} = 0$

Tehát az egyenletrendszernek egy megoldása van, az $y = 5$, így az e egyenesnek és a k körnek valóban egy közös metszéspontja van.

Az e egyenesnek és a k körnek egyetlen közös pontja a $(3; 5)$ pont.



2.4. ábra.

5. A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2; 9)$ és $T(4; 1)$ pont. Az A pont az origóban van [11].

   a) Igazolja, hogy az ATC szög derékszög!

   Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

   b) Számítsa ki a B pont koordinátáit!

   c) Határozza meg az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit [11]!

Megoldás:

Ahhoz, hogy az ATC szög derékszög, azaz $\overrightarrow{AT}$ és $\overrightarrow{CT}$ vektorok merőlegesek legyenek szükséges és elégséges, hogy a skaláris szorzatuk egyenlő legyen 0-val: az $\overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{CT} \Leftrightarrow \overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{CT} = 0$.

$A(0;0)$

$\overrightarrow{AT} = (4;1)$ és $\overrightarrow{CT} = (2;-8)$

$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{CT} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 8 - 8 = 0.$

Tehát az ATC szög derékszög.

b) Mivel az ATC szög derékszög, ezért az A pontból bocsátott merőleges talppontja a T pont (az e egyenesen), a T pont felezi az AB szakaszt.

Adott a $T(4;1)$ pont és legyen $B(x;y)$, ekkor $\frac{0+x}{2} = 4$ és $\frac{0+y}{2} = 1$, innen $x = 8$, $y = 2$.

A B pont koordinátái $(8;2)$.

c) Az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával egyenlő. Mivel az ABC háromszög egyenlőszárú, ezért az e egyenes az egyik oldalfelező merőleges. Határozzuk meg az AC oldalfelező merőlegesét, először meghatározzuk az AC oldal felezőpontját: $F = \frac{2+0;9+0}{2}$, $F(1;\frac{9}{2})$.

A keresett egyenes normálvektora $\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (2;9)$. Felírjuk az egyenes normálvektoros egyenletét az $F(1;\frac{9}{2})$ pont és az $\vec{n}(2;9)$ normálvektor felhasználásával: $2(x-1) + 9(y - \frac{9}{2}) = 0.$

$2x - 2 + 9y - \frac{81}{2} = 0$

$4x - 4 + 18y - 81 = 0$

$4x + 18y - 85 = 0$

A két oldalfelező merőleges egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk:

$4x + 18y = 85$

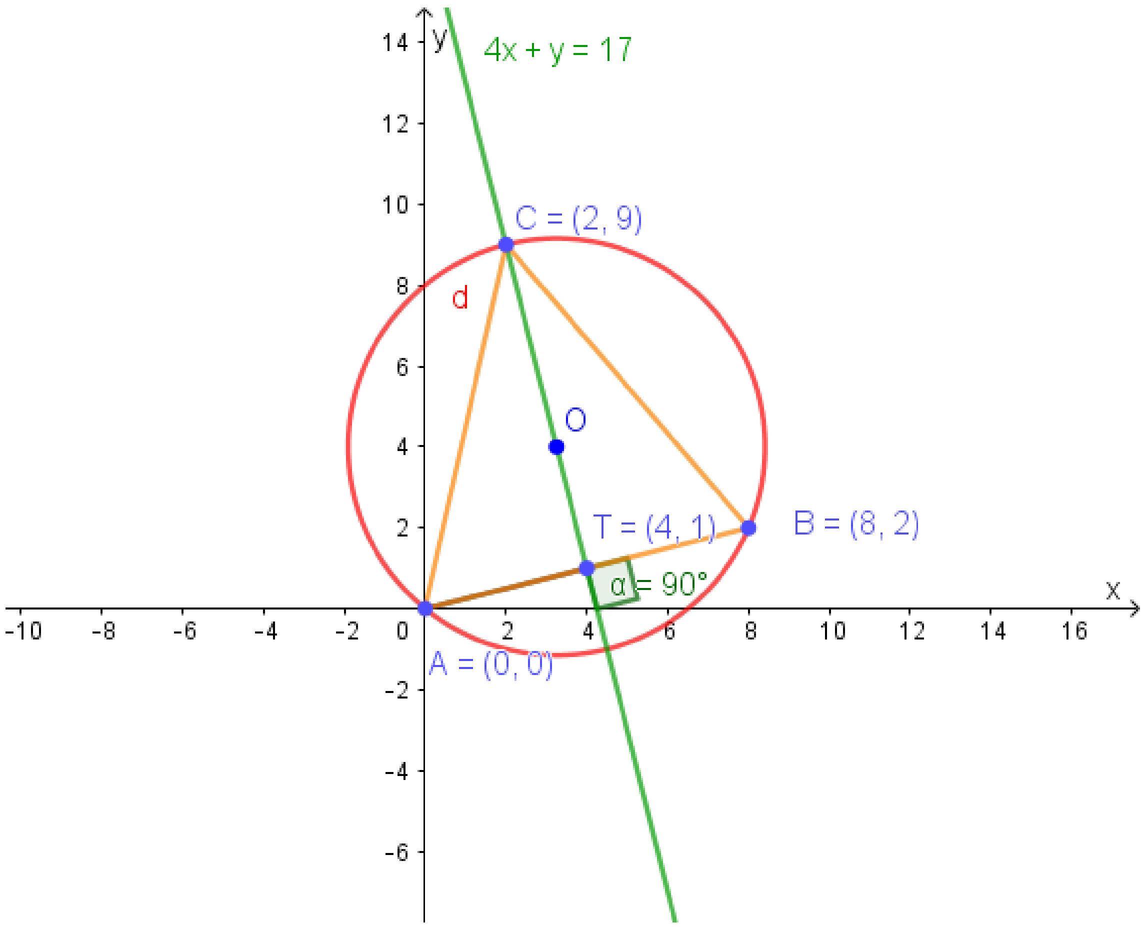
$4x + y = 17$

Vonjuk ki az első egyeneletből a második egyenletet:

$17y = 68$

$y = 4$, akkor $x = \frac{13}{4}$.

Az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontja $O(\frac{13}{4};4)$.



y
4x + y = 17
C = (2, 9)
d
O
T = (4, 1)
B = (8, 2)
α = 90°
x
A = (0, 0)
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16

2.5. ábra.

3. Fejezet

Kutatási rész. Kárpátalja iskoláiban végzett felmérések

A felmérést Kárpátalja néhány magyar tannyelvű, városi oktatási intézményében végeztem, ezek a következőek:

- Ungvári 10. Számú Dayka Gábor Magyar Tannyelvű Középiskola
- Ungvári Magyar Tannyelvű Elemi Iskola és Drugeth Gimnázium
- Munkácsi Szent István Líceum
- Munkácsi 3. Számú II. Rákóczi Ferenc Középiskola
- Beregszászi Bethlen Gábor Líceum
- Beregszászi Kossuth Lajos Líceum
- II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Alkalmazott matematika, Számvitel és adóügy, Szociális munka, Turizmus és Óvodapedagógia szak.

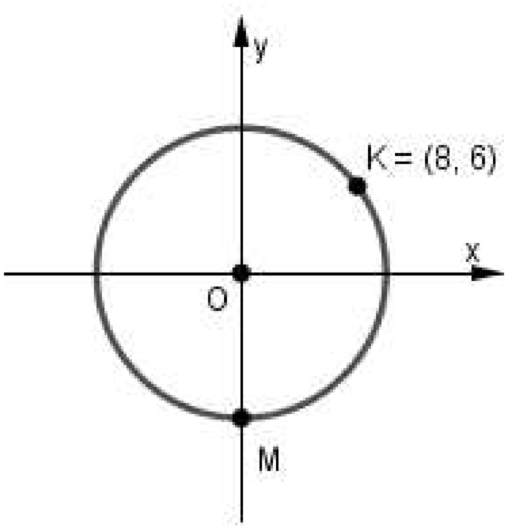
A kutatás célja az volt, hogy általános képet szerezzek a diákok koordinátageometriával kapcsolatos ismereteikről, valamint felmérjem és összehasonlítsam az ukrajnai- és a magyarországi érettségi feladatok megoldását a tanulók által. Megvizsgáljam, hogy elegendőek-e az óraszámok az adott témakör oktatására, mivel a koordinátageometria témakör oktatására az ukajnai tanterv szerint elég kevés tanóra jut alapszinten. Ezek: az 5.

és 6. osztályokban a 140 óraszámból 2-3 óraszám, a 7. és 8. osztályokban nem foglalkoznak a témával. A 9. osztályban 23 óraszám(10 óra koordináták és 13 óra vektorok), míg a 10. és 11. oszályokban megfelelően 10-10 óraszám a 70 mértan tanórából.

A dolgozatok a következők:

3.1. Felmérő dolgozat: Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban

1. Az xy koordinátasíkban ábrázoltak egy körvonalat, amelynek a középpontja a koordinátarendszer kezdőpontjában van (lásd a rajzot!). A $K(8;6)$ és $M(x;y)$ pontok ezen a körön fekszenek. Határozza meg az M pont koordinátáit [10]!



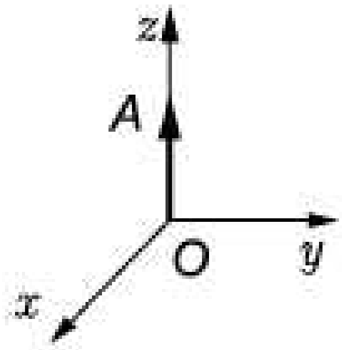
3.1. ábra.

A	B	C	D	E
(-10; 0)	(10; 0)	(0; -14)	(0; -10)	(0; 10)

2. Az $\overrightarrow{OA}$ vektor a térbeli derékszögű koordinátarendszer z tengelyén fekszik (lásd a rajzot!), és a kezdete egybeesik a koordinátarendszer kezdőpontjával. Határozza meg az $\overrightarrow{OA}$ vektor koordinátáit, ha hosszúsága egyenlő 3 [10]!

A	B	C	D	E
(1; 1; 1)	(0; 3; 0)	(0; 0; 3)	(3; 0; 0)	(3; 3; 3)

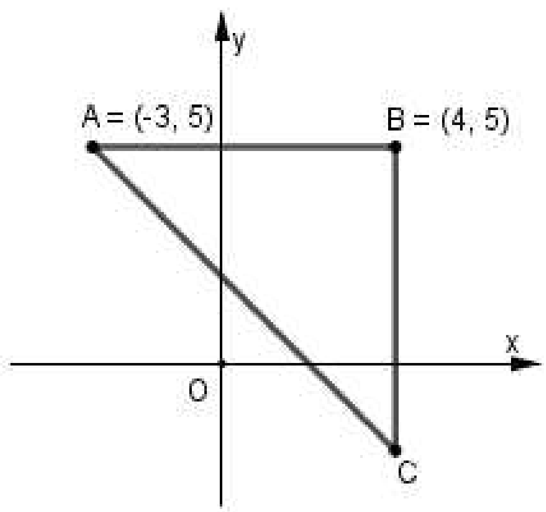
3. A felsorolt pontok közül melyik fekszik a térbeli derékszögű koordinátarendszer Oxz síkjában [10]?



3.2. ábra.

A	B	C	D	E
(0 ; -3 ; 0)	(0 ; 4 ; -3)	(-3 ; 3 ; 3)	(-4 ; 3 ; 0)	(3 ; 0 ; -4)

4. A derékszögű koordinátarendszerben ábrázolták az ABC egyenlőszárú derékszögű



3.3. ábra.

háromszöget, amelyikben $A(-3; 5)$ és $B(4; 5)$ (lásd a rajzot !). Határozza meg a C pont koordinátáit [10] !

A	B	C	D	E
(4 ; -3)	(-2 ; 4)	(4 ; -1)	(5 ; -3)	(4 ; -2)

5. Számítsa ki az $\vec{a}(-3; 2; -1)$ és a $\vec{b}(-1; -4; 5)$ vektorok skaláris szorzatát [10] !

A	B	C	D	E
-16	-10	0	26	120

6. A derékszögű koordinátarendszerben a térben megadtak egy gömbfelszínt, amelynek a középpontja az origó, és áthalad az $A(0; 0; -5)$ ponton. A felsorolt pontok közül melyik illeszkedik erre a gömbfelszínre [10]?

A	B	C	D	E
K(5 ; 5 ; 0)	L(0 ; 1 ; 4)	M(0 ; 0 ; 10)	N(0 ; 0 ; 5)	P(5 ; 5 ; 5)

7. A térbeli derékszögű xyz koordinátarendszerben megadták az $A(2; 0; 0)$ és $B(-4; 2; 6)$ pontokat. Az (1-4) megkezdett mondatokhoz válassza ki annak az (A-E) befejezését, hogy igaz állítás jöjjön létre [10]!

A mondat kezdete	A mondat befejezése
1. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái	A - $(-1; 1; 3)$
2. Az AB szakasz felezőpontja	B - $(-6; 2; 6)$
3. A B pont vetülete az y tengelyre	C - $(-4; 0; 6)$
4. A B pont vetülete az xz síkra	D - $(0; 2; 0)$
	E - $(-2; 2; 6)[10]$

8. A derékszögű koordináta rendszerben a síkon megadták az $ABCD$ paralelogrammát, $\cos A\angle = 0{,}4$. Határozza meg a paralelogramma BD átlójának a hosszát, ha $\overrightarrow{AB}(6; -8)$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok skaláris szorzata egyenlő 96 [10]!

Felmérő dolgozat megoldása: Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban

1. $|R| = |OK|$ - a kör sugara.

Meghatározzuk a kör sugárát a $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ képlettel:

$R = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

$|OK| = |OM|$

$|OM| = 10$

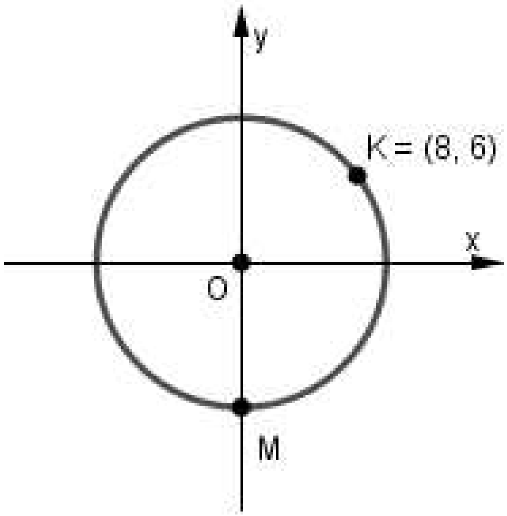
$|OM| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{100}$

$x^2 = 100$

$x = \pm 10$

Tehát a keresett $M(x; y)$ pont koordinátája ki kell, hogy elégítse a $\sqrt{x^2 + y^2} = 10$ feltételt. Mivel az M pont - a rajzon látható - az y tengelyen fekszik és 10 egységre van a koordináta-rendszer kezdőpontjától, ezért $M(0; -10)$.

Felelet: $D)(0; -10)$.

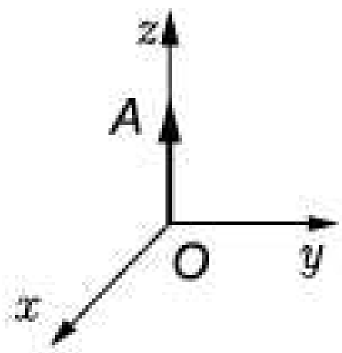


3.4. ábra.

2. A koordinátarendszer kezdőpontja az $O(0;0;0)$ pont.

Az A pont koordinátája $(0;0;3)$ mivel a térbeli derékszögű koordinátarendszer z tengelyén fekszik 3 egységre van a koordinátarendszer kezdőpontjától.

$\overrightarrow{OA} = (0-0;0-0;3-0) = (0;0;3)$

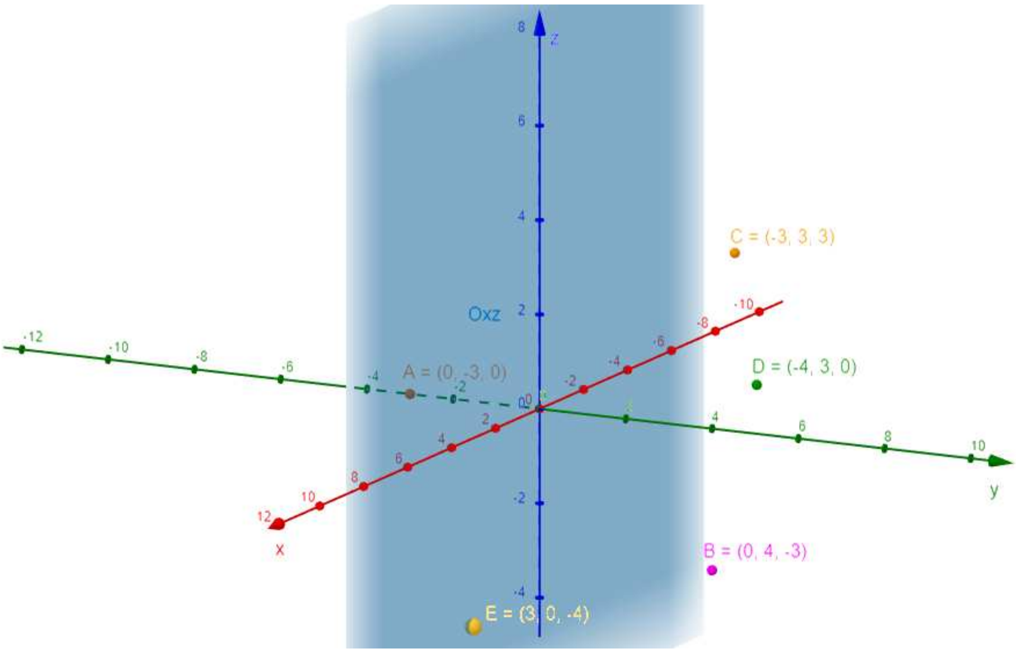


3.5. ábra.

Felelet: $C)(0;0;3)$.

3. Ha a pont az O_{xz} síkban fekszik, akkor $y=0$. A helyes válasz az $(3;0;-4)$ pont.

Felelet: $E)(3;0;-4)$.



3.6. ábra.

4. $A(-3; 5)$

$B(4; 5)$

$|AB| = |BC|$

Meghatározzuk az AB hosszát:

$|AB| = \sqrt{(4-(-3))^2 + (5-5)^2} = \sqrt{49+0} = 7$

$|BC| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{49}$

$\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{49}$

Mivel $B(4; 5)$, ezért a keresett $C(4; y)$ koordinátájú, mivel az x koordináta megegyezik.

$\sqrt{(4-4)^2 + (y-5)^2} = 7$

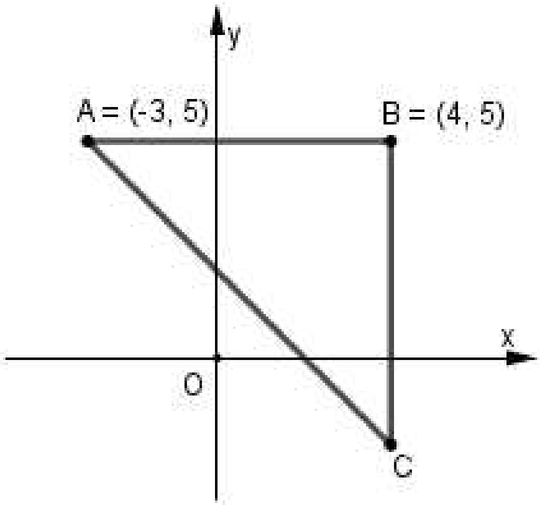
$(y-5)^2 = 49$

$y - 5 = \pm 7$

$y = 12 \quad$ vagy $y = -2$

A rajz alapján $C(4; -2)$.

Felelet: $E)(4; -2)$.



3.7. ábra.

5. Adottak az $\vec{a}(-3;2;-1)$ és a $\vec{b}(-1;-4;5)$ vektorok. E vektorok skaláris szorzata: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-3)\cdot(-1) + 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 5 = 3 + (-8) + (-5) = -10.$

Felelet: $B) - 10.$

6. A gömbfelszín egyenlete, melynek a középpontja az origó: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Meghatározzuk a sugárt az $A(0;0;-5)$ pont segítségével:

$0^2 + 0^2 + (-5)^2 = 25$

$R = 5$

Megvizsgáljuk, hogy melyik pont koordinátái elégítik ki a $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ feltételt. A $D(0;0;5)$ pont koordinátái elégítik ki az adott feltételt.

Felelet: $D)(0;0;5)$.

7. $A(2;0;0)$ és $B(-4;2;6)$

1) $\overrightarrow{AB} = (-4-2; 2-0; 6-0) = (-6;2;6)$;

2) $\frac{\overrightarrow{AB}}{2} = (\frac{2-4}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+6}{2}) = (-1;1;3)$;

3) A B pont vetülete az y tengelyre a $B(0;2;0)$ pont;

4) A B pont vetülete az xz síkra a $B(-4;0;6)$ pont.

Felelet: $1)B(-6;2;6)$;

$2)A(-1;1;3)$;

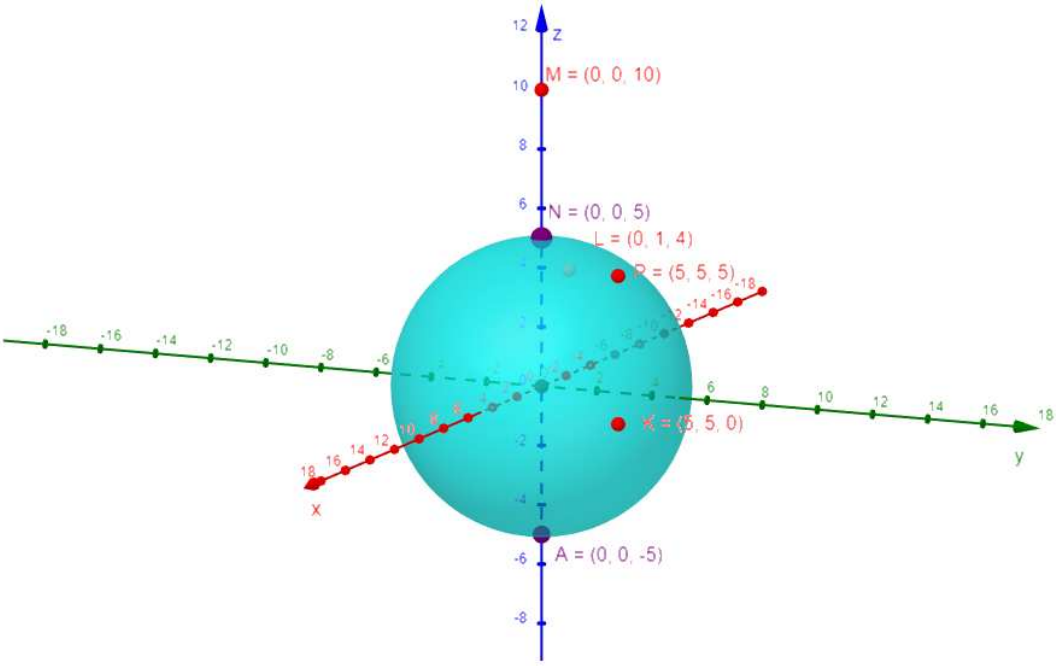
$3)D(0;2;0)$;

$4)C(-4;0;6)$.

8. Adott:

$ABCD$ - paralelogramma

$\cos\alpha = 0{,}4$



3.8. ábra.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 96$

$\overrightarrow{AB}(6; -8)$

BD -?

Mivel meg van adva a skaláris szorzat, ezért felírjuk a képletet:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos\alpha$

Meghatározzuk az $\overrightarrow{AB}$ hosszát:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$96 = 10 \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot 0{,}4$

$|\overrightarrow{AD}| = \frac{96}{10 \cdot 0{,}4}$

$|\overrightarrow{AD}| = \frac{96}{4}$

$|\overrightarrow{AD}| = 24$

Felhasználjuk a koszinusztételt:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$

$BD^2 = 10^2 + 24^2 - 2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 0{,}4$

$BD^2 = 100 + 576 - 192$

$BD^2 = 484$

$BD = 22$

Felelet: $BD = 22$.

3.2. Felmérő dolgozat: Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban

1. Adottak az $\vec{a} = (6;4)$ és az $\vec{a} - \vec{b} = (11;5)$ vektorok. Adja meg a $\vec{b}$ vektort a koordinátáival [11]!

A	B	C	D	E
(5 ; 1)	(17 ; 9)	(-5 ; -1)	(-5 ; 1)	(5 ; 17)

2. Fejezze ki az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ vektorok segítségével a $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vektort, ha $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ és $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ [11]!

A	B	C	D	E
$\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$	$\vec{c} = 7\vec{i} - 9\vec{j}$	$\vec{c} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$	$\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j}$	$\vec{c} = 9\vec{i} - 2\vec{j}$

3. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(3;-5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel [11]!

A	B	C	D	E
$4x + 5y = 8$	$4x + 5y = 34$	$x + y = 10$	$4x+5y = -13$	$4x + 5y = -9$

4. Adja meg az $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit [11]!

A	B	C	D	E
$(9;0)$	$(0;18)$	$(0;9)$	$(2;9)$	$(5;9)$

5. Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja [11]!

6. Az $ABCD$ négyzet középpontja K, az AB oldal felezőpontja F. Legyen $\vec{a} = KA$ és $\vec{b} = KB$. Fejezze ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{KF}$ vektort [11]!

A	B	C	D	E
$\overrightarrow{KF} = \vec{a} + \vec{b}$	$\overrightarrow{KF} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$	$\overrightarrow{KF} = 2\vec{a}+2\vec{b}$	$\overrightarrow{KF} = \vec{a} - \vec{b}$	$\overrightarrow{KF} = 2\vec{a} - \vec{b}$

7. Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

   $A)$ Az $(1;-1)$ pont rajta van az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenesen;

   $B)$ Ha $A(-2;5)$ és $B(2;-3)$, akkor az AB szakasz felezőpontja a $(0;2)$ pont;

   $C)$ Az $x + 2y = 7$ és a $2x + 4y = 7$ egyenletű egyenesek párhuzamosak [11].

8. Ábrázolja koordináta-rendszerben az e egyenest, melynek egyenlete

   $4x+3y = 11$. Számítással döntse el, hogy a $P(100;-136)$ pont rajta van-e az egyenesen! Az egyenesen levő Q pont ordinátája (második koordinátája) 107. Számítsa ki a Q pont abszcisszáját (első koordinátáját)!

   $a)$ Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$. Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön!

   $b)$ Adja meg az ABC háromszög C csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja [11]!

Felmérő dolgozat megoldása: Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban

1. Adott az $a = (6;4)$ és az $a - b = (11;5)$ vektor. Behelyettesítjük az a koordinátáit:

   $6 - b_1 = 11$ és $4 - b_2 = 5$.

   $b_1 = -11 + 6$, akkor $b_1 = -5$

   és $b_2 = -5 + 4$, $b_2 = -1$.

   $\vec{b} = (-5;-1)$.

   Felelet: $C)$ $\vec{b} = (-5;-1)$.

2. Adottak az $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ és $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ vektorok, behelyettesítjük a $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vektor helyére:

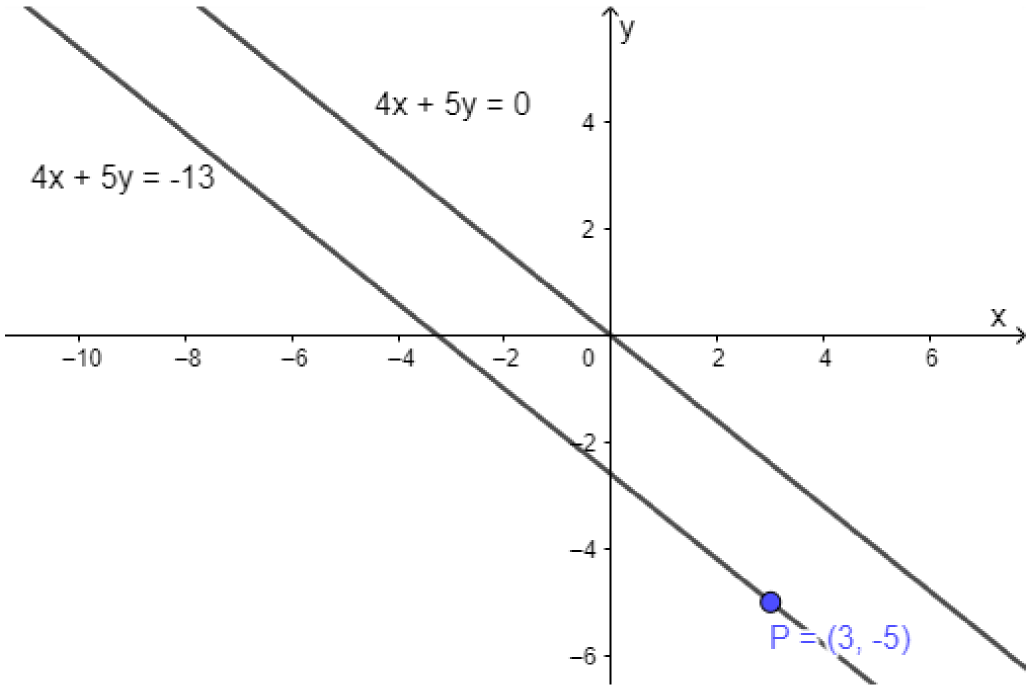
   $\vec{c} = 2(3\vec{i} - 2\vec{j}) - (-\vec{i} + 5\vec{j})$

$\vec{c} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{i} - 5\vec{j}$

$\vec{c} = 7\vec{i} - 9\vec{j}$.

Felelet: $B)$ $\vec{c} = 7\vec{i} - 9\vec{j}$.

3. Az adott $4x + 5y = 0$ egyenes normálvektora $(4; 5)$. Mivel ez az egyenes párhuzamos a keresett egyenessel, ezért a keresett egyenes normálvektora $(4; 5)$, vagyis az egyenlete $4x + 5y = C$ alakú. Mivel átmegy a $P_0(3; -5)$ ponton, a pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét: $4 \cdot 3 + 5 \cdot (-5) = C$, vagyis $C = -13$. A keresett egyenes egyenlete: $4x + 5y = -13$.

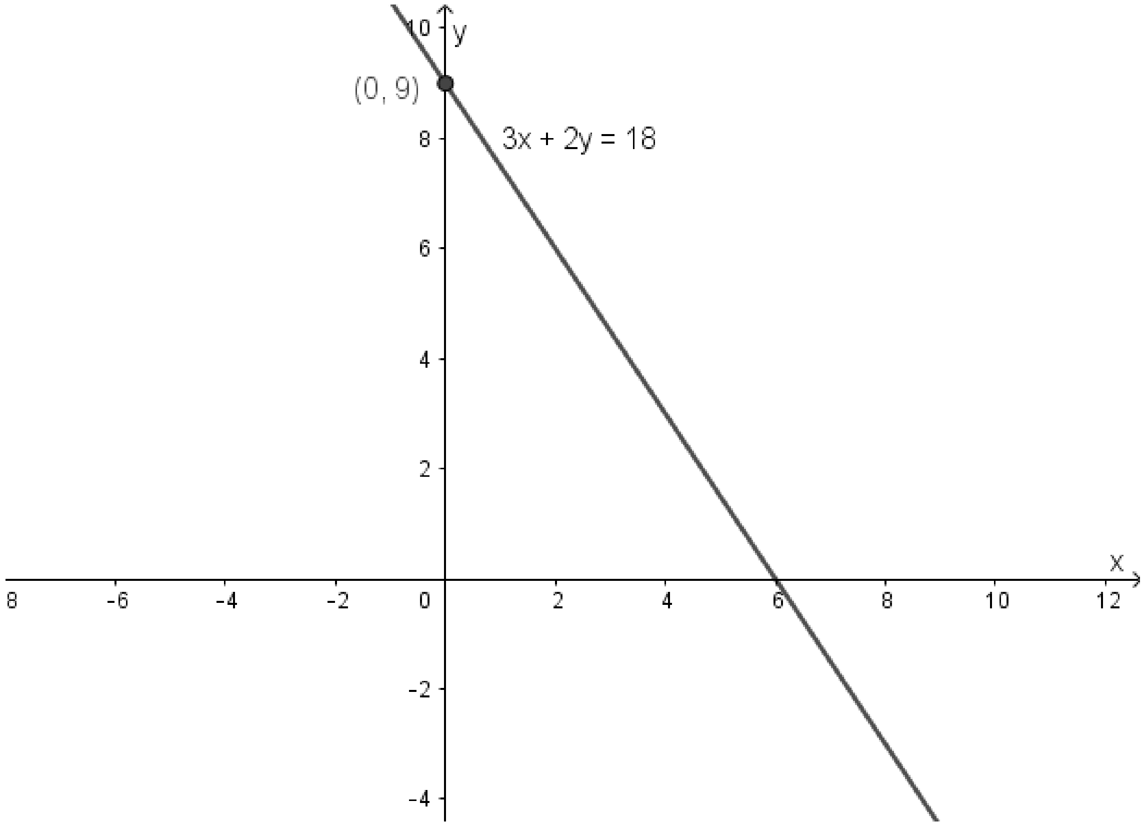


3.9. ábra.

Felelet: $D)$ $4x + 5y = -13$.

4. Mivel az $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes metszi az y tengelyt, ezért $x = 0$. Ezt behelyettesítve az egyenletbe: $3 \cdot 0 + 2y = 18$, ebből $y = 9$. Tehát a metszéspont $(0; 9)$.

Felelet: $C)$ $(0; 9)$.



3.10. ábra.

5. A középpont a húr felező merőlegesén van. Az adott a $(1;0)$ és $(7;0)$ pontok segítségével írjuk fel a kör egyenletét:

   $(1-u)^2+u^2=r^2$

   $1-2u+u^2+u^2=r^2$

   $1-2u+2u^2=r^2 \quad (1)$

   és

   $(7-u)^2+u^2=r^2$

   $49-14u+u^2+u^2=r^2$

   $49-14u+2u^2=r^2 \quad (2)$

   Kivonjuk a (2) egyenletből az (1) egyenletet:

   $48-12u=0$

   $12u=48$

$u = 4$

Visszahelyettesítjük az $(1-u)^2 + u^2 = r^2$ egyenletbe:

$(1-4)^2 + 4^2 = r^2$

$9 + 16 = r^2$

$r^2 = 25$

$r = 5, r > 0.$

A $(4;4)$ pont $(u = v)$ lesz a kör középpontja, mely az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

Felelet: $O(4;4)$.

6. Az $ABCD$ négyzet középpontja K, az AB oldal felezőpontja F. Az $\vec{a} = KA$ és $\vec{b} = KB$ vektorok segítségével szerkesztünk egy paralelogrammát. A $\overrightarrow{KA}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{BM}$ vektort, a $\overrightarrow{KB}$ vektorral pedig $\overrightarrow{AM}$ vektort szerkesztünk. A $\overrightarrow{KM} = = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{a} + \vec{b}$. A $\overrightarrow{KF} = \frac{\overrightarrow{KM}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

   Felelet: $B)$ $\overrightarrow{KF} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

7. $A)$ Ha az $(1;-1)$ pont rajta van az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenesen, akkor a pont koordinátái kielégítik az egyenletet. $5 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5 + 3 = 8 \neq 2$. Tehát a pont nincs rajta az egyenesen. Az állítás hamis.

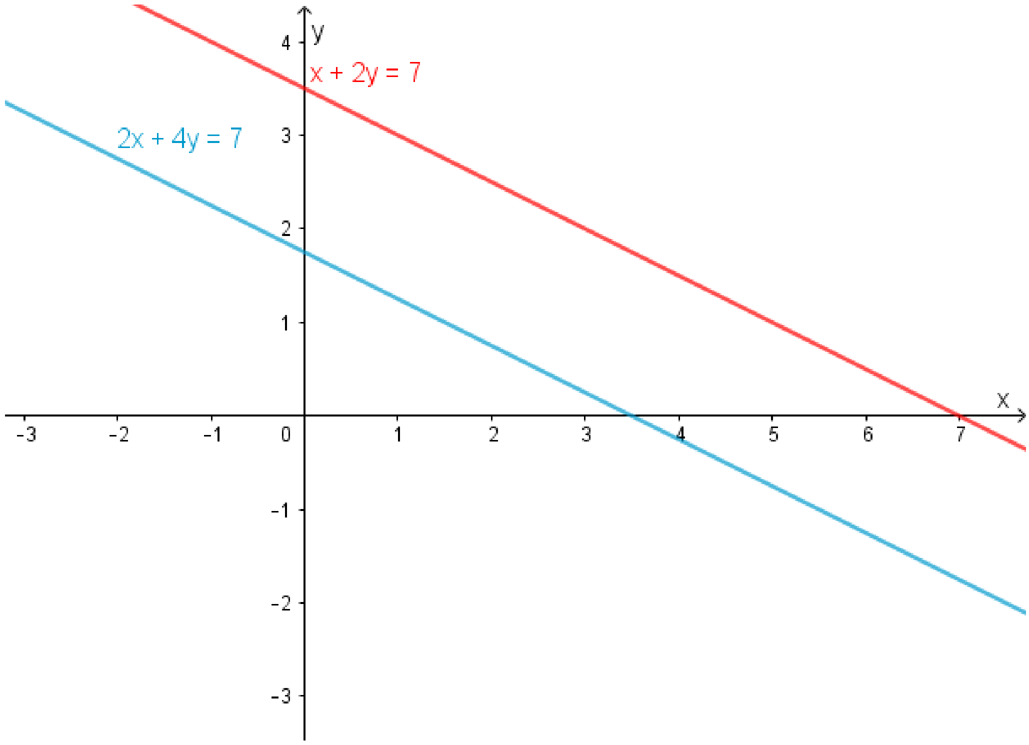
   $B)$ Az AB szakasz felezőpontja: $(\frac{-2+2}{2}; \frac{5+(-3)}{2}) = (0;1)$. Tehát az AB szakasz felezőpontja $(0;1)$. Az állítás hamis.

   $C)$ Két egyenes akkor párhuzamos, ha normálvektoraik arányosak.

   Az $x + 2y = 7$ egyenletű egyenes normálvektora $n_1 = (1;2)$ és a

   $2x + 4y = 7$ egyenletű egyenes normálvektora $n_2 = (2;4)$. A $n_1 = (1;2)$ és $n_2 = (2;4)$ normálvektorok arányosak, tehát párhuzamosak is. Az egyenesek párhuzamosak. Az állítás igaz.

   Felelet: $A)$ állítás hamis; $B)$ állítás hamis; $C)$ állítás igaz.



3.11. ábra.

8. Adott a $4x + 3y = -11$ egyenletű egyenes és a $P(100; -136)$ pont. A P pont nincs rajta az egyenesen, mivel $4 \cdot 100 + 3 \cdot (-136) \neq -11$.

   Mivel a Q pont ordinátája 107, ezért $4x + 3 \cdot 107 = -11$, innen $4x = -332$, $x = -83$. A Q pont abszcisszája -83.

   a) Az AB szakasz felezőpontja $P(-2; -1)$.

   A kör sugara $r = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

   A kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

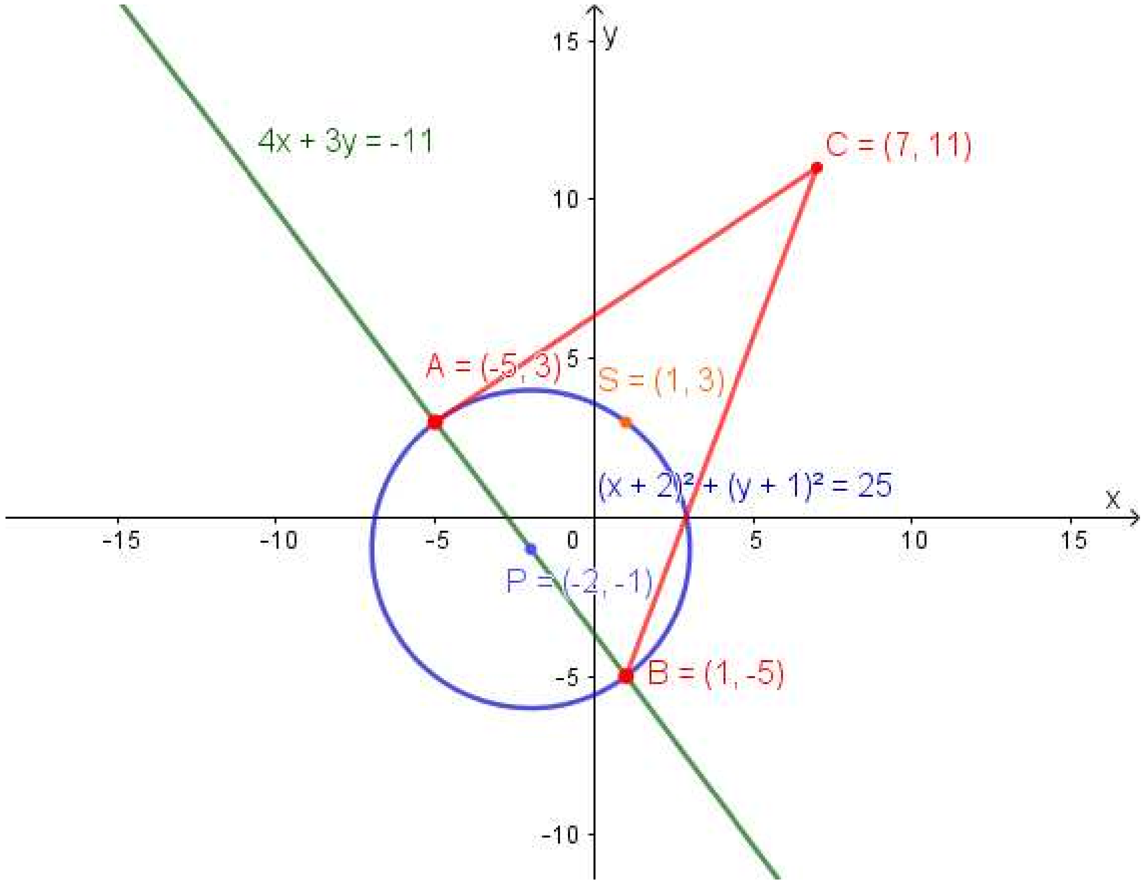
   Adott az $S(1; 3)$ pont rajta van a körön, mivel $(1+2)^2 + (3+1)^2 = 25$.

   c) Legyen a C pont koordinátája $(x; y)$, az S pontra felírhatjuk:

   $1 = \frac{-5+1+x}{3}$; $3 = \frac{3+(-5)+y}{3}$.

   Innen $x = 7$, $y = 11$.

   $C(7; 11)$.



3.12. ábra.

3.3. A felmérés eredménye és elemzése

A felméréshez egy ukrajnai és egy magyarországi koordinátageometriai feladatokból álló dolgozatot állítottam össze, amely az elmúlt évek érettségi feladatait tartalmazza. A dolgozatokat a 11. osztályos tanulók körében irattam meg, valamint a II.RFKMF Szakgimnáziumának II. évfolyamos hallgatóival, mivel a matematika(algebra/mértan) tanterv megegyezik mindegyik oktatási intézményben, viszont az óraszám eltérő. Míg egy középiskolában, líceumban heti 3 vagy 4(fakultatív) óraszámban tanulják a matematika típusú tantárgyakat (ebben a félévben 2 algebra és 1 mértan), addig a II.RFKMF Szakgimnáziumában 6 tanórában tanítják, melyek közül 3 óra az ukrajnai érettségire (külső független tesztelés) való felkészülés. A Beregszászi Bethlen Gábor Líceum reál típusú osztályának végzős tanulói szintén előnyben voltak a dolgozat megírásában, mivel itt is heti 8 óraszámban tanulják a matematika tantárgyakat (5 óra algebra és 3 óra mértan).

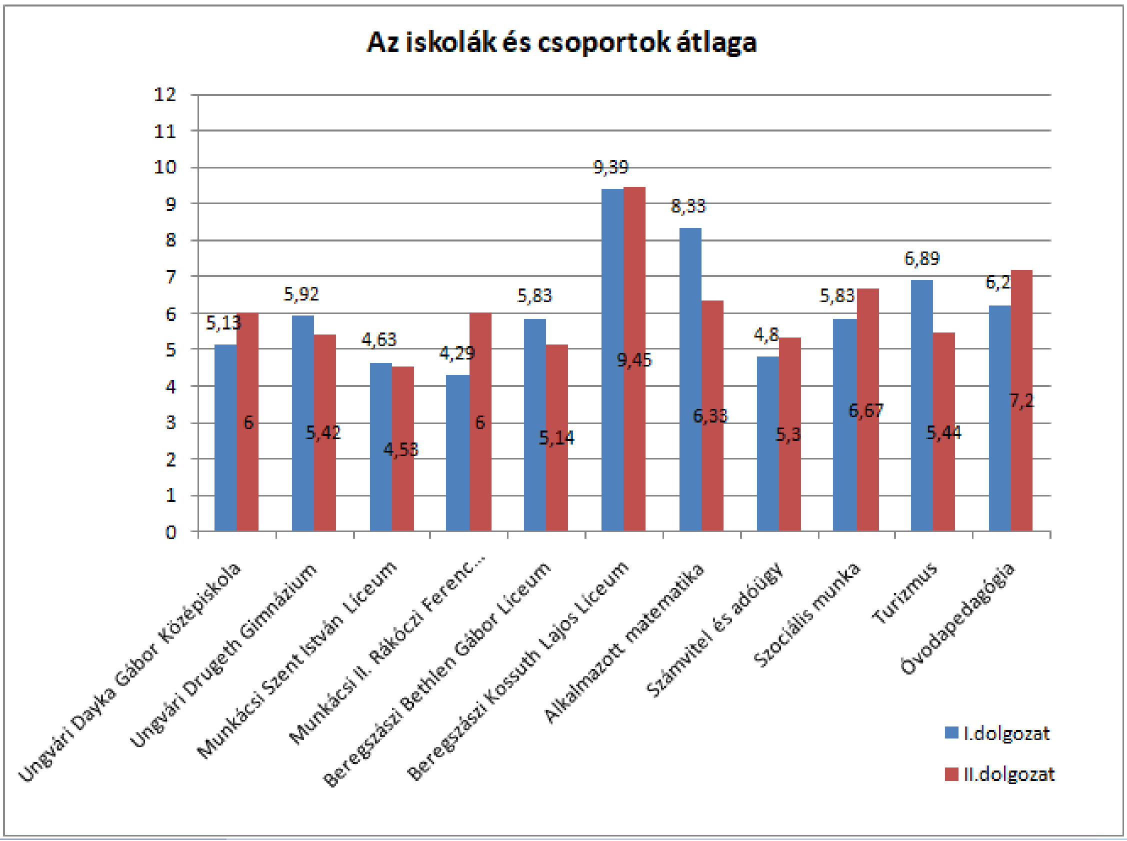
A ukrajnai dolgozat három részből áll. Az első rész tesztes formájú, ahol egy helyes válasz van és mindegyik feladat külön-külön 1 pontot ér. A második rész párosítás, ahol 4 pontot érhettek el a tanulók. A harmadik rész kidolgozós, amiért 2 pontot lehetett szerezni.

A magyarországi dolgozat két részből áll. Az első rész tesztes, valamint kidolgozós típusú feladatokat tartalmaz, amelyért megfelelően 1 és 2 pontot lehetett szerezni. A harmadik rész egy kidolgozós, 3 részből álló feladatot tartalmazott, amely 3 pontot ért. Mindkét dolgozatban a feladatok között voltak síkbeli-, de ugyanúgy térbeli koordinátageometriai feladatok is.

Megjegyezném, hogy az oktatási intézmények között voltak matematika beállítódású osztályok/csoportok, valamint a dolgozatokat a járványügyi helyzetre való tekintettel online formában tudtam megiratni, ezért is jelentős eltérések születtek végeredményül.

A dolgozatokat 45-45 percig lehetett írni. A diákok 12 pontot szerezhettek egy dolgozatban.

A továbbiakban az ukrajnai feladatokból összeállított dolgozatot I. dolgozatként, a magyarországi feladatokból összeállított dolgozatot pedig II. dolgozatnak fogom címezni. Az oktatási intézményekben eléggé eltérő eredmények születtek. Az iskolák és csoportok I. és II. dolgozatának átlagát a következő táblázat szemlélteti:



3.13. ábra.

A Kossuth Lajos Líceum érte el a legjobb eredményt mindkét dolgozatban, 9,39 és 9,45 átlagokkal. A tanulók ebben az iskolában folyamatosan oldják az érettségi feladatokat a sikeres felvételi eredmény eléréseért.

A következő helyen a II. RFKMF Szakgimnáziumának Alkalmazott matematika szakjának tanulói vannak 8,33 átlaggal, majd a Turizmus szak 6,89 átlaggal. A negyedik és ötödik helyen az Óvodapedagógia szak és az Ungvári Drugeth Gimnázium tanulói. A Szociális munka szak és a Beregszászi Bethlen Gábor Líceum tanintézményekben a tanulók átlagban nézve egyformán teljesítettek, amely 5,83-al egyenlő. A legkevesebb pontot az Ungvári Dayka Gábor Középiskola 5,13 -, Számvitel és adóügy szak 4,8 -, Munkácsi Szent István Líceum 4,63 - és a Munkácsi II. Rákóczi Ferenc Középiskola 4,29 - átlaggal érte el.

A II. dolgozatban a második helyen az Óvodapedagógia szak 7,2-, majd a Szociális munka és Alkalmazott matematika tanulói megfelelően 6,67 és 6,33 átlaggal. Az Ungvári Dayka Gábor Középiskola és a Munkácsi II. Rákóczi Ferenc Középiskola tanulói egyformán teljesítettek 6-s átlaggal. 5,44 és 5,42 értékekkel szinte egyformán teljesített a Turizmus csoport és az Ungvári Drugeth Gimnázium. A Számvitel és adóügy csoport, Beregszászi Bethlen Gábor és a Munkácsi Szent István Líceumok tanulói érték el a legkevesebb pontot.

Megemlíteném, hogy a II.RFKMF Szakgimnáziumának tanulói az iskolákhoz képest elég jól teljesített, mivel itt is folyamatosan gyakorolják a külső független tesztelés előző évi feladatainak megoldását. Az itt tanuló diákok csak sikeres érettségi vizsgák leadásával kerülhetnek be a Szakgimnáziumba, így valószínű, hogy jóval motiváltabbak az átlagos középiskolás diákokhoz képest.

A Beregszászi Bethlen Gábor Líceum reál típusú osztályában történt a dolgozat megírása. Itt az alapszinthez szinthez képeset több óraszámban tanulják a matematika típusú tantárgyakat, ahol: heti 5 algebra és 3 mértan óra van, valamint 9. osztályig 3 algebra és 2 mértan órájuk volt. A szakdolgozatomban szintén egy felmérést végeztem Beregszász városának iskoláiban, csak az ukrajnai koordinátageometriával foglalkoztam. A felmérésben akkor a Beregszászi Bethlen Gábor Líceum(akkor még Gimnázium) érte el a legjobb eredményt 9,4 átlaggal. Most nem teljesítettek jól, mivel a diákok annak tudatában voltak, hogy a nevüket nem használják fel, ezért is könnyedén vették a feladatok megoldását.

Az oktatási intézmények tanulóinak pontszámát a következő ábrákon láthatjuk:

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban								
Ungvári 10. Számú Dayka Gábor Középiskola								
Tanulók								
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
1.	1	1	1	0	1	1	1	1
2.	0	0	1	0	1	1	1	1
3.	0	0	1	0	1	1	1	1
4.	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	0	0	1	0	1	0	1	0
6.	0	1	1	1	1	1	0	0
7.	0	1	3	1	3	3	2	3
8.	0	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,08**	**0,25**	**0,67**	**0,17**	**0,67**	**0,58**	**0,50**	**0,50**
Összeg	**1**	**3**	**8**	**2**	**8**	**7**	**6**	**6**

3.1. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban								
Ungvári 10. Számú Dayka Gábor Középiskola								
Tanulók								
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
1.	1	0	0	1	1	1	1	1
2.	1	0	1	1	1	1	0	0
3.	1	0	1	1	1	1	1	0
4.	1	0	1	1	1	0	1	1
5.	0	0	0	0	0	0	0	0
6.	0	0	0	1	1	0	0	0
7.	2	0	2	2	2	2	0	2
8.	1	0	1	3	3	1	0	2
Átlag	**0,58**	**0,00**	**0,50**	**0,83**	**0,83**	**0,50**	**0,25**	**0,50**
Összeg	**7**	**0**	**6**	**10**	**10**	**6**	**3**	**6**

3.2. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban												
Ungvári Magyar Tannyelvű Drugeth Gimnázium												
Tanulók												
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
1.	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4.	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5.	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
7.	0	3	0	3	1	1	1	1	1	4	4	4
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,00**	**0,75**	**0,08**	**0,58**	**0,42**	**0,42**	**0,42**	**0,42**	**0,42**	**0,83**	**0,83**	**0,75**
Összeg	**0**	**9**	**1**	**7**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**10**	**10**	**9**

3.3. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban												
Ungvári Magyar Tannyelvű Drugeth Gimnázium												
Tanulók												
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
1.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
3.	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
4.	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
5.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
6.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7.	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Átlag	**0,33**	**0,33**	**0,25**	**0,42**	**0,42**	**0,33**	**0,33**	**0,42**	**0,75**	**0,67**	**0,75**	**0,42**
Összeg	**4**	**4**	**3**	**5**	**5**	**4**	**4**	**5**	**9**	**8**	**9**	**5**

3.4. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban																
Munkácsi Szent István Líceum																
Tanulók																
Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1.	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
2.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
3.	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
4.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
5.	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
6.	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7.	1	0	0	1	2	2	1	2	2	3	3	3	1	3	2	3
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,33**	**0,25**	**0,25**	**0,25**	**0,33**	**0,25**	**0,25**	**0,33**	**0,25**	**0,58**	**0,58**	**0,58**	**0,25**	**0,50**	**0,58**	**0,58**
Összeg	**4**	**3**	**3**	**3**	**4**	**3**	**3**	**4**	**3**	**7**	**7**	**7**	**3**	**6**	**7**	**7**

3.5. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban															
Munkácsi Szent István Líceum															
Tanulók															
Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
1.	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
2.	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
3.	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
4.	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
5.	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0
6.	0	0	0	1	0	1	1	1	-	0	1	0	1	1	1
7.	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	2	0	2	2
8.	0	0	0	0	0	3	2	2	0	0	0	1	2	1	0
Átlag	**0,08**	**0,08**	**0,00**	**0,58**	**0,00**	**0,83**	**0,50**	**0,50**	**0,42**	**0,00**	**0,33**	**0,58**	**0,50**	**0,67**	**0,58**
Összeg	**1**	**1**	**0**	**7**	**0**	**10**	**6**	**6**	**5**	**0**	**4**	**7**	**6**	**8**	**7**

3.6. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban							
Munkácsi 3. Számú II. Rákóczi Ferenc Középiskola							
Tanulók							
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
1.	0	0	0	1	1	1	0
2.	1	1	0	0	0	1	1
3.	1	1	0	0	0	1	0
4.	1	0	0	0	0	1	0
5.	1	0	0	1	0	1	0
6.	0	1	0	1	0	1	1
7.	1	3	0	1	1	4	1
8.	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,42**	**0,50**	**0,00**	**0,33**	**0,17**	**0,83**	**0,25**
Összeg	**5**	**6**	**0**	**4**	**2**	**10**	**3**

3.7. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban						
Munkácsi 3. Számú II. Rákóczi Ferenc Középiskola						
Tanulók						
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
1.	0	0	0	1	0	1
2.	1	0	1	1	1	1
3.	1	0	0	1	0	1
4.	1	1	1	1	1	1
5.	2	0	0	2	0	1
6.	1	0	1	1	0	1
7.	2	0	0	2	2	0
8.	1	0	0	2	0	2
Átlag	**0,75**	**0,08**	**0,25**	**0,92**	**0,33**	**0,67**
Összeg	**9**	**1**	**3**	**11**	**4**	**8**

3.8. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban						
Beregszászi Bethlen Gábor Líceum						
	Tanulók					
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
1.	1	0	1	0	0	1
2.	1	1	0	0	1	1
3.	1	1	0	0	0	1
4.	0	1	0	0	0	1
5.	1	1	1	0	1	1
6.	1	1	0	1	0	1
7.	4	4	1	1	3	1
8.	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,75**	**0,75**	**0,25**	**0,17**	**0,42**	**0,58**
Összeg	**9**	**9**	**3**	**2**	**5**	**7**

3.9. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban							
Beregszászi Bethlen Gábor Líceum							
Tanulók							
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
1.	1	1	0	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	0	0	1
3.	1	1	1	1	0	1	1
4.	1	1	0	1	1	1	0
5.	0	0	1	1	0	0	0
6.	1	1	1	1	0	1	1
7.	2	0	2	0	0	0	0
8.	0	0	1	0	0	1	0
Átlag	**0,58**	**0,42**	**0,58**	**0,50**	**0,17**	**0,42**	**0,33**
Összeg	**7**	**5**	**7**	**6**	**2**	**5**	**4**

3.10. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban																		
Kossuth Lajos Líceum																		
Tanulók																		
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**
1.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4.	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5.	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
6.	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
7.	4	4	4	2	4	0	4	3	4	3	3	4	4	4	4	4	3	4
8.	2	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	1	2
Átlag	**1,00**	**0,75**	**0,83**	**0,42**	**0,83**	**0,33**	**0,75**	**0,75**	**1,00**	**0,92**	**0,75**	**0,83**	**0,75**	**0,83**	**0,75**	**0,83**	**0,75**	**1,00**
Összeg	**12**	**9**	**10**	**5**	**10**	**4**	**9**	**9**	**12**	**11**	**9**	**10**	**9**	**10**	**9**	**10**	**9**	**12**

3.11. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban											
Kossuth Lajos Líceum											
Tanulók											
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**
1.	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4.	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
5.	0	2	0	2	2	1	1	0	2	2	2
6.	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
7.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8.	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1
Átlag	**0,75**	**0,75**	**0,50**	**0,83**	**0,83**	**0,83**	**0,83**	**0,75**	**0,83**	**0,92**	**0,83**
Összeg	**9**	**9**	**6**	**10**	**10**	**10**	**10**	**9**	**10**	**11**	**10**

3.12. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban									
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Alkalmazott matematika szak									
Tanulók									
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
1.	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.	1	1	1	1	1	0	1	1	1
4.	0	1	1	1	1	1	1	0	1
5.	0	1	0	1	1	1	1	1	0
6.	0	1	1	1	1	1	1	0	1
7.	3	1	4	4	3	1	4	1	1
8.	2	1	0	2	1	2	0	0	0
Átlag	**0,58**	**0,67**	**0,75**	**1,00**	**0,83**	**0,67**	**0,83**	**0,42**	**0,50**
Összeg	**7**	**8**	**9**	**12**	**10**	**8**	**10**	**5**	**6**

3.13. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban									
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Alkalmazott matematika szak									
Tanulók									
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
1.	1	0	1	1	0	1	1	0	1
2.	1	1	0	1	0	1	1	0	1
3.	0	0	1	1	0	0	0	1	1
4.	1	0	1	1	1	1	1	1	1
5.	2	1	1	2	2	1	0	1	1
6.	1	1	0	1	0	1	0	1	0
7.	0	0	2	2	2	2	2	0	2
8.	0	2	0	2	0	0	0	0	1
Átlag	**0,50**	**0,42**	**0,50**	**0,92**	**0,42**	**0,58**	**0,42**	**0,33**	**0,67**
Összeg	**6**	**5**	**6**	**11**	**5**	**7**	**5**	**4**	**8**

3.14. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban															
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Számvitel és adóügy szak															
Diákok															
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
1.	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
2.	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
3.	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
4.	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
5.	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
6.	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
7.	1	1	2	0	0	1	1	3	1	3	1	2	3	1	3
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,33**	**0,42**	**0,42**	**0,17**	**0,17**	**0,17**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,67**	**0,50**	**0,17**	**0,50**
Összeg	**4**	**5**	**5**	**2**	**2**	**2**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**8**	**6**	**2**	**6**

3.15. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban										
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Számvitel és adóügy szak										
	Tanulók									
Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
2.	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
3.	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
4.	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
5.	0	2	0	2	0	1	0	0	1	0
6.	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
7.	0	2	2	2	2	0	0	0	2	0
8.	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0
Átlag	**0,08**	**0,58**	**0,33**	**0,83**	**0,33**	**0,67**	**0,33**	**0,08**	**0,83**	**0,33**
Összeg	**1**	**7**	**4**	**10**	**4**	**8**	**4**	**1**	**10**	**4**

3.16. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban																		
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Szociális munka szak																		
	Tanulók																	
Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
1.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4.	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5.	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
6.	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
7.	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
8.	1	1	0	1	1	1	1	2	2	2	1	2	0	1	1	0	1	1
Átlag	**0,58**	**0,50**	**0,25**	**0,50**	**0,42**	**0,67**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,75**	**0,42**	**0,58**	**0,25**	**0,50**	**0,67**	**0,42**	**0,42**	**0,33**
Összeg	**7**	**6**	**3**	**6**	**5**	**8**	**6**	**6**	**6**	**9**	**5**	**7**	**3**	**6**	**8**	**5**	**5**	**4**

3.17. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban																		
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Szociális munka szak																		
Tanulók																		
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**
1.	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
3.	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4.	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
5.	2	0	1	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	2	0	1	0	0
6.	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
7.	0	2	2	2	2	0	2	0	2	2	2	2	2	2	0	2	2	0
8.	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	1	0	0
Átlag	**0,50**	**0,50**	**0,67**	**0,50**	**0,58**	**0,42**	**0,50**	**0,42**	**0,75**	**0,83**	**0,83**	**0,58**	**0,58**	**0,67**	**0,33**	**0,67**	**0,25**	**0,42**
Összeg	**6**	**6**	**8**	**6**	**7**	**5**	**6**	**5**	**9**	**10**	**10**	**7**	**7**	**8**	**4**	**8**	**3**	**5**

3.18. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban																		
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Turizmus szak																		
Diákok																		
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**
1.	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
2.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
3.	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
4.	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
5.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
6.	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7.	0	2	4	4	4	1	4	0	4	4	4	0	4	3	0	4	4	1
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,33**	**0,42**	**0,75**	**0,67**	**0,67**	**0,33**	**0,75**	**0,33**	**0,83**	**0,75**	**0,92**	**0,33**	**0,75**	**0,58**	**0,25**	**0,83**	**0,75**	**0,08**
Összeg	**4**	**5**	**9**	**8**	**8**	**4**	**9**	**4**	**10**	**9**	**11**	**4**	**9**	**7**	**3**	**10**	**9**	**1**

3.19. táblázat.

Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban																
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Turizmus szak																
Diákok																
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**
1.	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
3.	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
4.	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
5.	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
7.	0	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,25**	**0,67**	**0,42**	**0,50**	**0,17**	**0,42**	**0,58**	**0,58**	**0,33**	**0,42**	**0,50**	**0,50**	**0,42**	**0,42**	**0,58**	**0,50**
Összeg	**3**	**8**	**5**	**6**	**2**	**5**	**7**	**7**	**4**	**5**	**6**	**6**	**5**	**5**	**7**	**6**

3.20. táblázat.

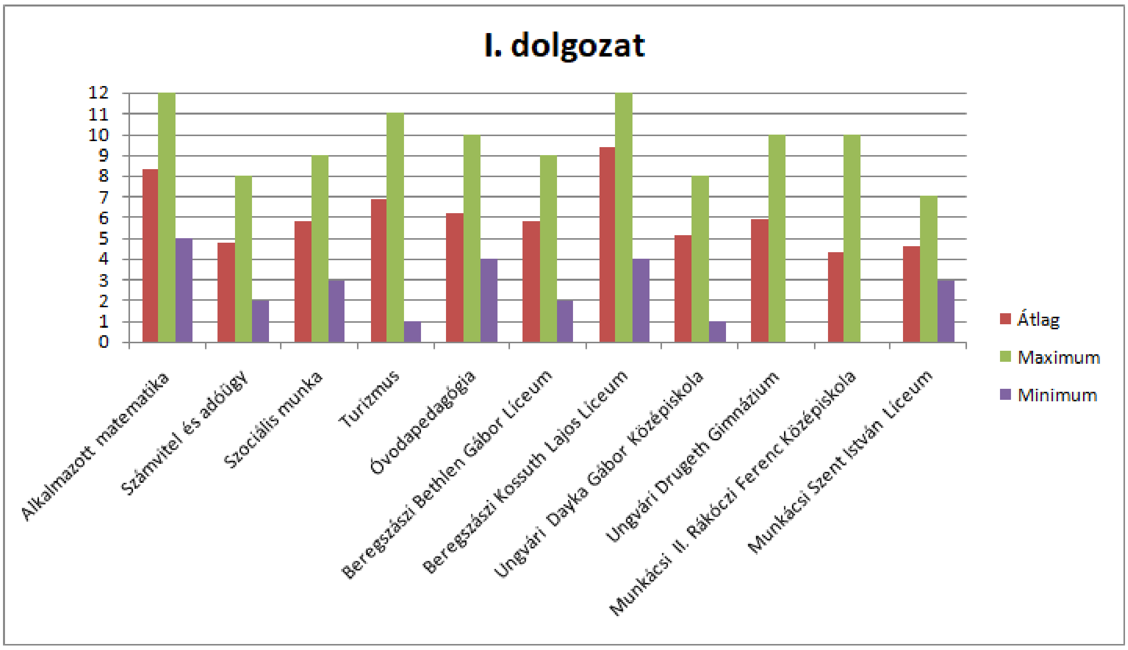
Koordinátageometriai feladatok az ukrajnai érettségi feladatokban																									
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Óvodapedagógia szak																									
Tanulók																									
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**	**21.**	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**
1.	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4.	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
5.	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
6.	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
7.	1	1	1	1	4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1
8.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
Átlag	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,42**	**0,83**	**0,50**	**0,33**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,75**	**0,50**	**0,50**	**0,42**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,50**	**0,75**	**0,50**	**0,42**
Összeg	**6**	**6**	**6**	**5**	**10**	**6**	**4**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**9**	**6**	**6**	**5**	**6**	**6**	**6**	**6**	**9**	**6**	**5**

3.21. táblázat.

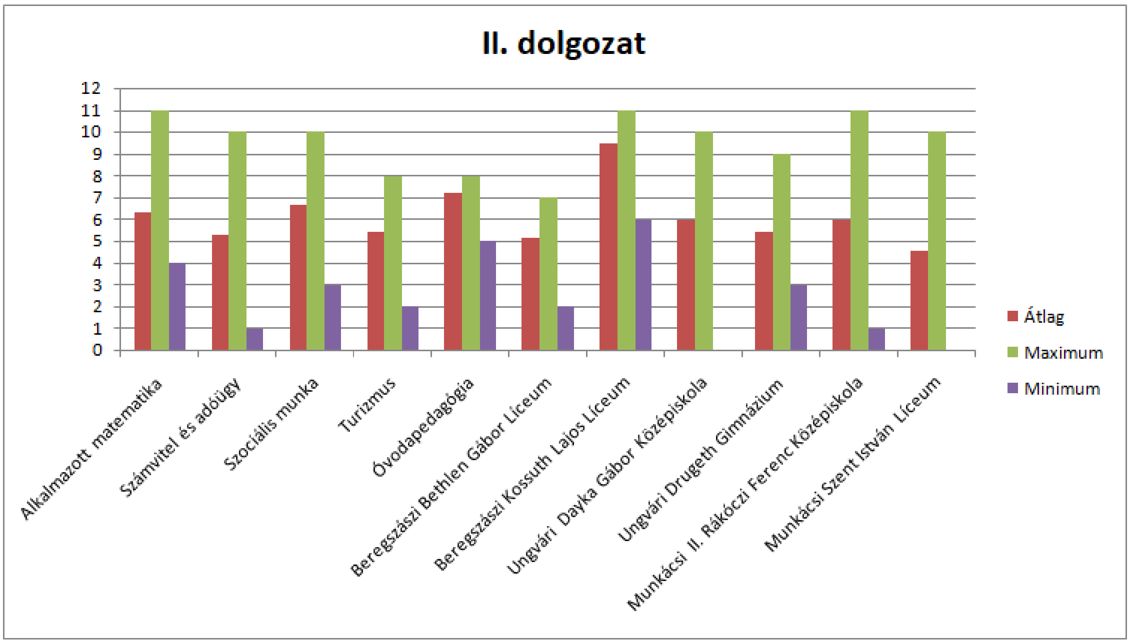
Koordinátageometriai feladatok a magyarországi érettségi feladatokban																									
II. RFKMF Szakgimnáziuma. Óvodapedagógia szak																									
Tanulók																									
Feladatok	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**	**21.**	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**
1.	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
2.	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
3.	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4.	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
5.	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	0	2	0	2	2	2	1	2	2	1	0	1	2
6.	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
7.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2
8.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Átlag	**0,58**	**0,58**	**0,58**	**0,58**	**0,58**	**0,67**	**0,67**	**0,58**	**0,58**	**0,58**	**0,58**	**0,67**	**0,50**	**0,67**	**0,50**	**0,67**	**0,67**	**0,67**	**0,67**	**0,67**	**0,67**	**0,58**	**0,50**	**0,42**	**0,58**
Összeg	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**8**	**8**	**7**	**7**	**7**	**7**	**8**	**6**	**8**	**6**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**7**	**6**	**5**	**7**

3.22. táblázat.

Az oktatási intézmények pontszámainak átlagát, a legnagyobb és legkisebb pontszámot az alábbi táblázat foglalja össze:



3.14. ábra.



3.15. ábra.

A felmérés elemzése

A felmérés elsődleges célja a diákok meglévő tudásának, tapasztalatainak felmérése koordinátageometria témakörből, amelyet az elmúlt évek folyamán sajátítottak el. A másik célja az volt, hogy összehasonlítsam az ukrajnai és a magyarországi érettségi feladatok által összeállított dolgozatokban elért eredményeket. Az ukrajnai és a magyarorszagi koordinátageometria témakör részei nagyban hasonlítanak egymásra, csak a jelölésekben térnek el egymástól, viszont Magyarországon sokkal több óraszámba veszik az adott témakör tanítását.

Mindkét dolgozatban az első feladatok(1-7 feladatok) nem igényeltek komolyabb számításokat. E feladatok megoldásánál csak az alapfogalmak, tulajdonságok, képletek felidézésére volt szükség. Az utolsó feladat már összetett volt, itt sokkal több tulajdonságot kellett észre venni és felhasználni a megoldásban.

Hipotézisek a felmérés eredményeire vonatkozóan:

- Múlt éven a Covid vírus miatt a tanulók nem jutottak megfelelő oktatáshoz. Az online oktatás során a tananyag elsajátítása némi nehézséggel jár. A számonkérés nehezebben valósult meg, és a diákok nem vették eléggé komolyan.

- Kevés a koordinátageometria oktatására szánt óraszám, ezért is a tanulók nem gyakorolják be eléggé a megszerzett tudást.
- A tanulókat évről évre egyre nehezebb motiválni. A tanulók figyelmét elveszik az infokommunikációs eszközök, ezért is könnyebben jutnak el a kész megoldáshoz és nem gondolkoznak a feladatokon.

A dolgozatok eredményeinek összesített elemzése

Az I. dolgozatban 152 tanuló vett részt. A dolgozatot 45 percig lehetett írni. Nézzük a feladatok elemzését:

1. feladat. A tanulók 77% oldotta meg jól a feladatot. Akik helytelen választ adtak nem használták fel a kör képletét, nem tudták meghatározni a kör sugarát.

2. feladat. Ebben a feladatban a tanulók $87{,}5\%$-a tudta a helyes választ. A feladatban egy adott hosszúságú vektor koordinátáit kellett meghatározni, ami a térbeli derékszögű koordináta-rendszer z tengelyén fekszik. Ebben az esetben - azoknál, akik nem válaszoltak helyesen - az volt a probléma, hogy a tanulók nem tudják meghatározni a vektor koordinátáit a térbeli derékszögű koordinátarendszerben, abban az esetben ha valamelyik koordináta-tengelyen fekszik vagy összekeverik az x, y és z koordinátákat.

3. feladat. A tanulók $50{,}7\%$-a meghatározta a keresett pontot, míg a maradék nem. Azt a pontot kellett kiválasztani, amelyik a térbeli derékszögű koordinátarendszer O_{xz} síkjában fekszik. A tanulók nagyrésze összekeverte azokat a tulajdonságokat, amikor a pont a síkban vagy a tengelyen helyezkedik el, azaz $35{,}5\%$-a azt a pontot választotta ki, ahol az x és z koordináták 0-val egyenlők.

4. feladat. $59{,}9\%$-a a tanulóknak meg tudta oldani ezt a feladatot. A feladatban meg kellett határozni az egyenlőszárú derékszögű háromszög harmadik csúcsát, 26 tanuló valószínűleg eltévesztette a pont ordinátáját, viszont a koordináta negyedet jól határozták meg.

5.feladat. Ebben a feladatban a skaláris szorzat képletét kellett alkalmazni és a diákok 77%-a megoldotta ezt a feladatot.

6. feladat. Ebben a feladatban a gömb egyenletének ismeretére volt szükség. A tanulók $67{,}8\%$-a válaszolt helyesen, míg 16 tanuló hasonló típusú választ adott, viszont z koordinátája nem egyezett meg a helyes válasszal.

7. feladat. A feladat párosítás volt, ahol összesen 4 pontot lehetett elérni. A feladatban, a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a vektor koordinátáit, a szakasz felezőpont-

ját és a pont vetületét tengelyre/síkra kellett meghatározni. A tanulók $40{,}8\%$-a megtudta határozni a vektor koordinátáit. $77{,}6\%$-uk megtudta határozni a szakasz felezőpontját. A diákok $38{,}8\%$-a meghatározta a pont vetületét az y tegelyre, míg 54 tanuló ($35{,}5\%$) összekeverte a tulajdonságokat, és azt a pontot választotta, ahol az $y = 0$. A diákok közül 67-en ($44{,}1\%$) jól választották ki a pont vetületét az xz síkra.

8. feladat. Ebben a feladatban a tanulónak fel kellett használni a skaláris szorzat képletét és a koszinusztételt és 2 pontot lehetett szerezni. A tanulók $70{,}3\%$-a bele se kezdett a feladatba. Mindössze 11 tanuló tudta megoldani a feladatot, azaz $7{,}2\%$-a a tanulóknak. A maradék 34 tanuló 1 pontot kapott.

A magyarországi, azaz a II. dolgozatban 137 tanuló vett részt. Ezt a dolgozatot is 45 percig lehetett írni. A feladatok elemzése a következő:

1. feladat. A tanulók $72{,}9\%$-a határozta meg jól a keresett vektor koordinátáit.

2. feladat. A feladatban ki kellett fejezni a vektort az adott vektorokon keresztül. 114 (83,2%) diák válaszolt helyesen.

3. feladat. Az egyenes egyenletét kellett felírni, amely átmegy az adott ponton és párhuzamos az adott egyenessel. $78{,}1\%$-a a diákoknak helyesen válaszolt, míg 32 tanuló helytelen választ adott meg. 23 tanuló helyesen határozta meg a normálvektort, de valószínűleg a pont koordinátáival rosszul számolt.

4. feladat. Az egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit kellett meghatározni. 107 tanuló (78,1%) válaszolt helyesen, míg 10 tanuló felcserélte a koordinátákat.

5. feladat. Kidolgozós kérdés, ahol a kör középpontjának koordinátáit kellett felírni, mely az $y = x$ egyenesre illeszkedik. A tanulók $55{,}5\%$-a bele se kezdett a feladat megoldásába. $24{,}8\%$-a megoldotta a feladatot. 27 tanuló ($19{,}7\%$) 1 pontot szerzett, mivel elkezdték jól megoldani a feladatot, felírták a megfelelő képletet.

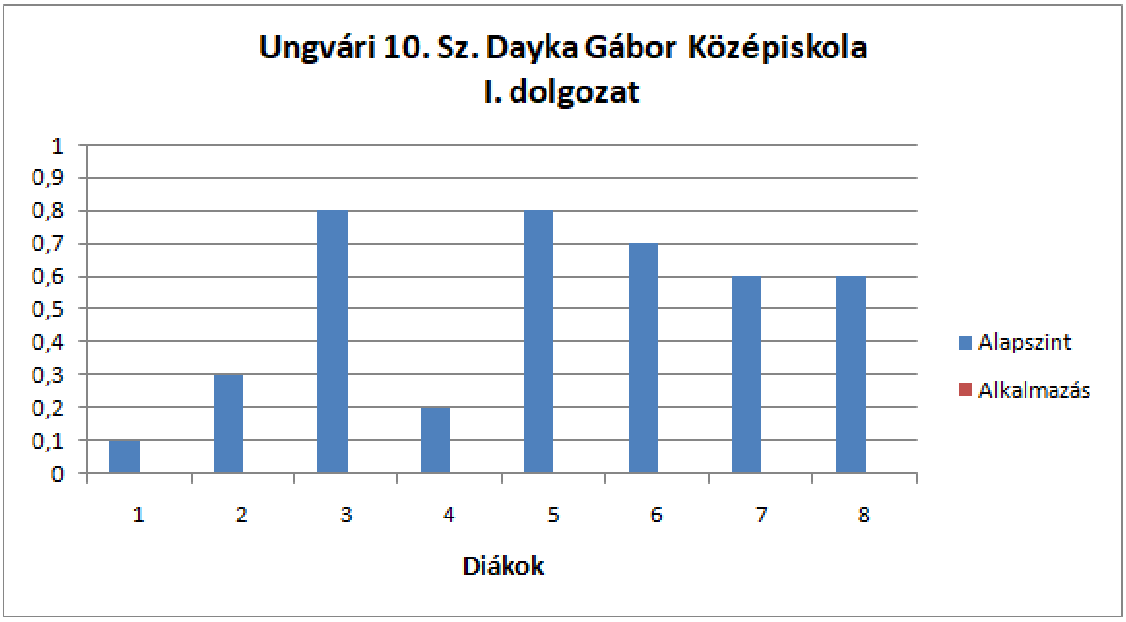
6. feladat. A négyzet középpontja és egyik oldalának felezőpontja segítségével ki kellett fejezni a keresett vektort, a tanulók $81{,}8\%$-nak sikerült megoldani, de 31 tanuló nem tudta megoldani a feladatot.

7. feladat. Ebben a feladatban a tanulónak ki kellett választani a három állítás közül a helyeset, amiért 2 pontot lehetett kapni, a tanulók $73{,}7\%$-a válaszolt helyesen. 44 tanuló nem tudta meghatározni a helyes állítást.

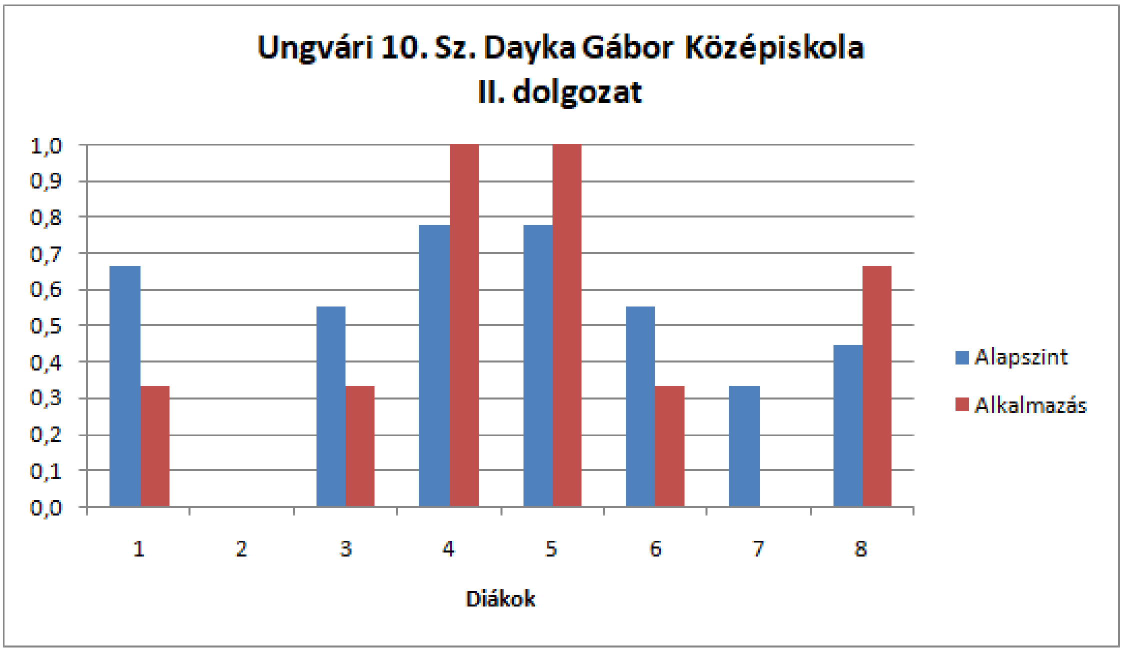
8. feladat. A feladat három részből állt, amelyben 3 pontot lehetett szerezni, minden rész 1 pontot ért. A tanulók $69{,}3$-a(95 tanuló) nem oldotta meg. Mindössze 3 tanuló oldotta meg jól a feladatot. 19 diák szerzett 2 pontot a feladatban. 20 tanuló csak 1 pontot

szerzett.

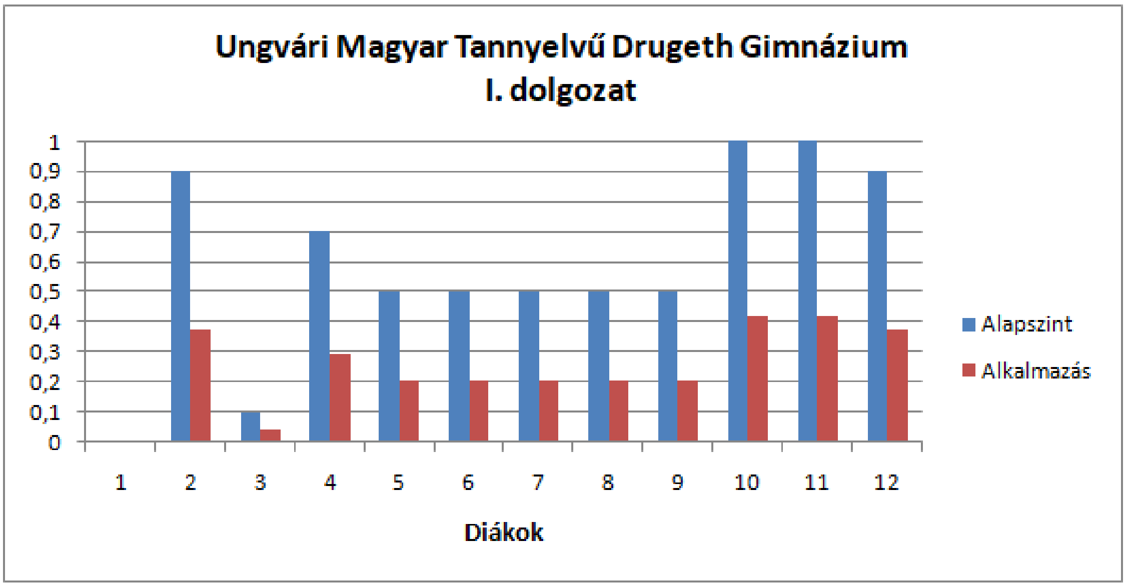
A következő diagramokon ábrázoltam az iskolák és csoportok átlagait. A következőképpen vizsgáltam ezeket: az 1.-7.feladatokból vontam átlagot, mivel itt csak képletek alkalmazására van szükség. A 8. feladatból külön vontam átlagot, mivel ez több időt, gondolkodást igényelt a képletek felhasználása mellett. Látható a diagramokon, hogy a tanulók nagy része az utolsó feladatokat nem vette komolyan, mivel bele se kezdtek a feladat megoldásába.



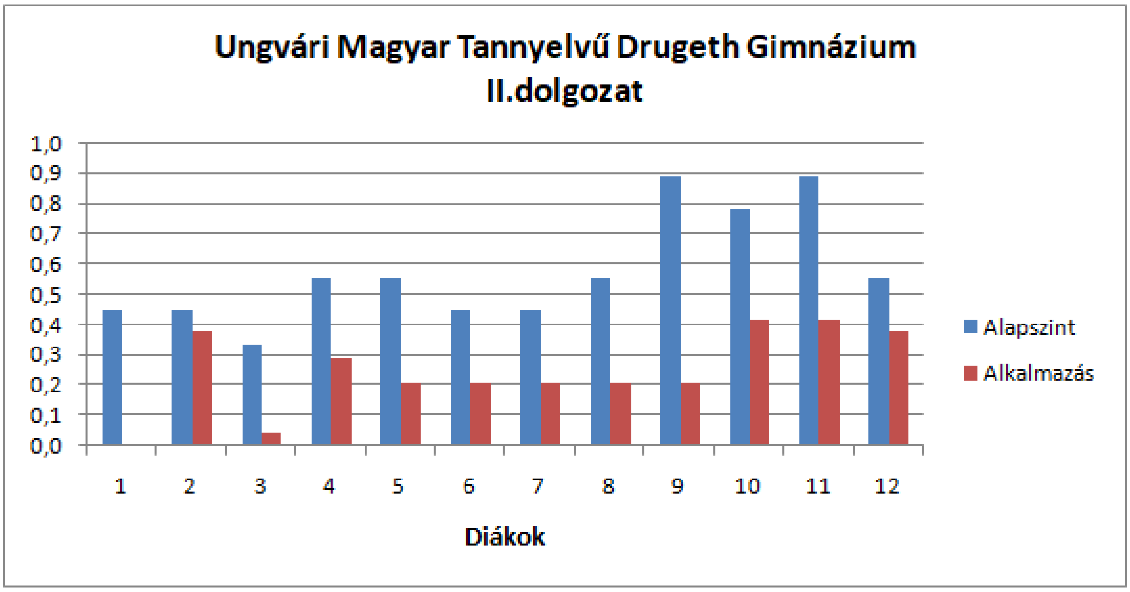
3.16. ábra.



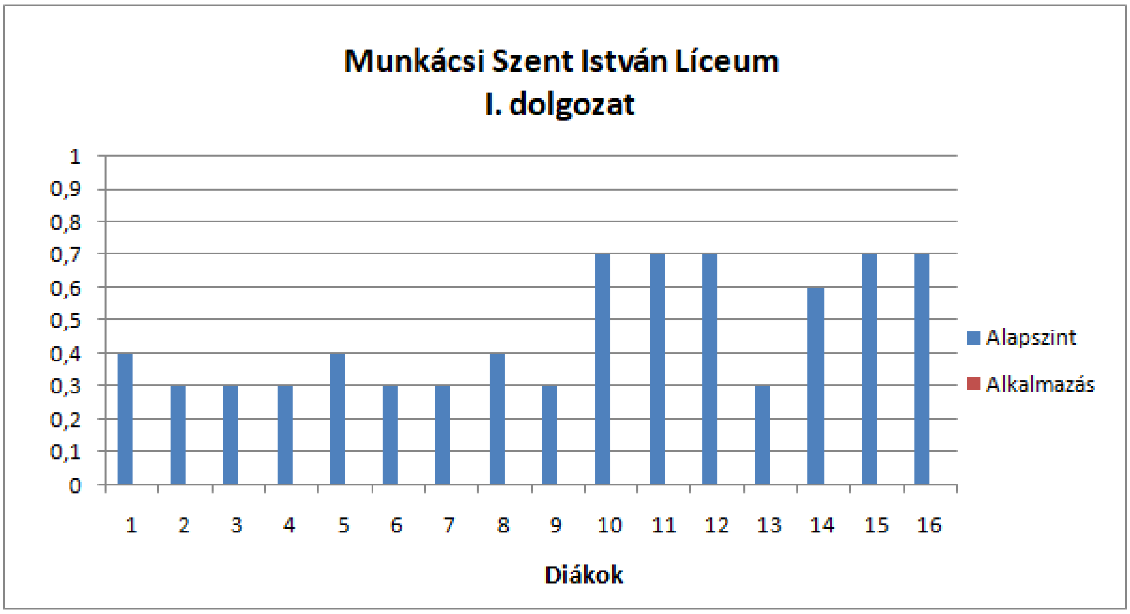
3.17. ábra.



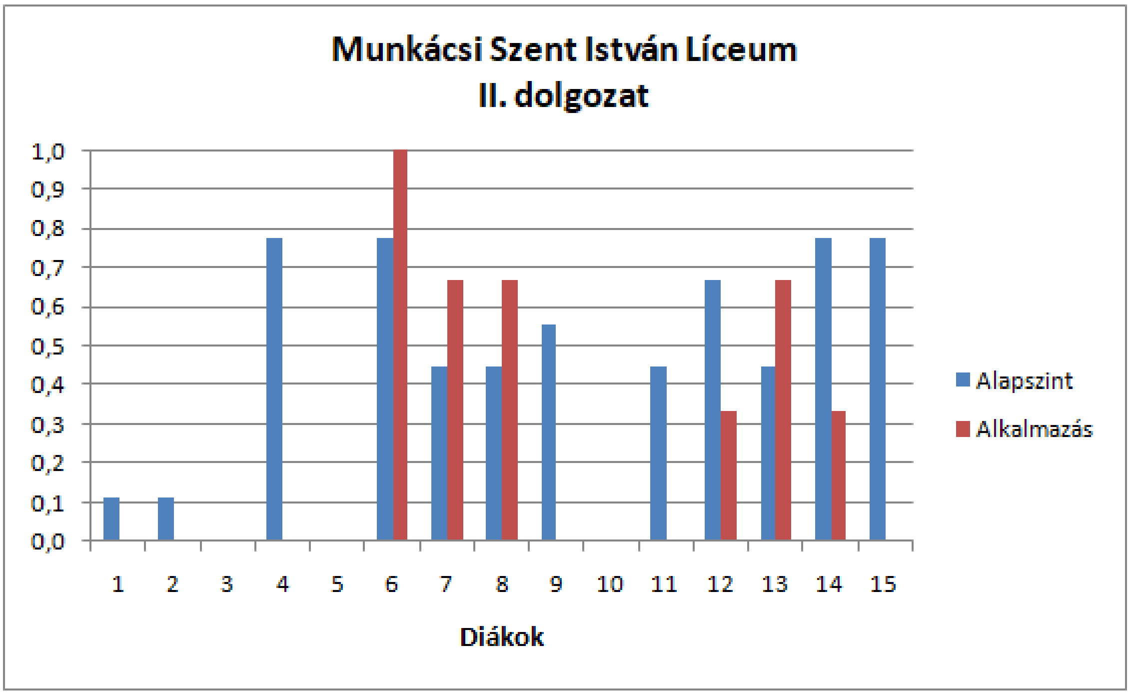
3.18. ábra.



3.19. ábra.



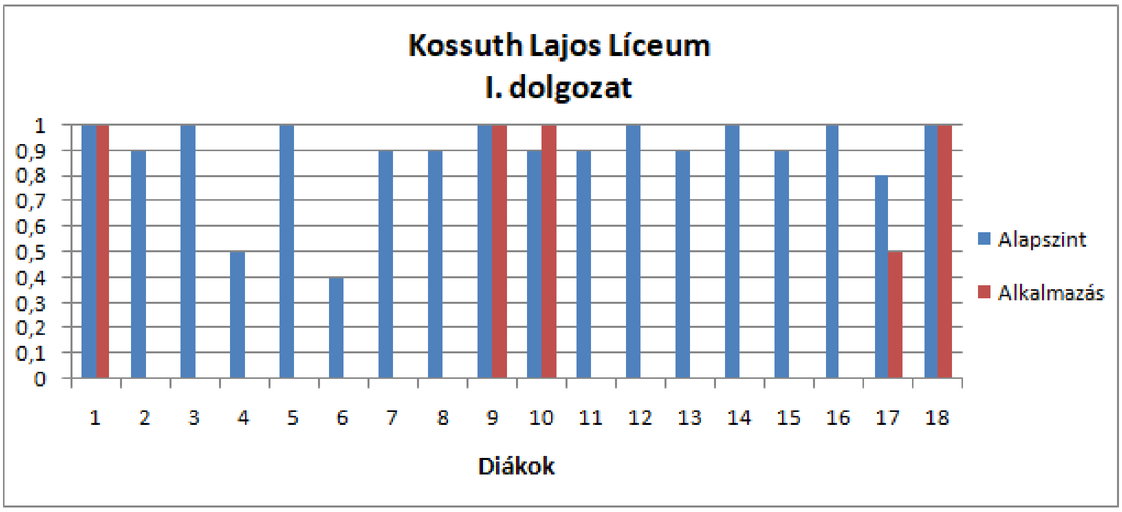
3.20. ábra.



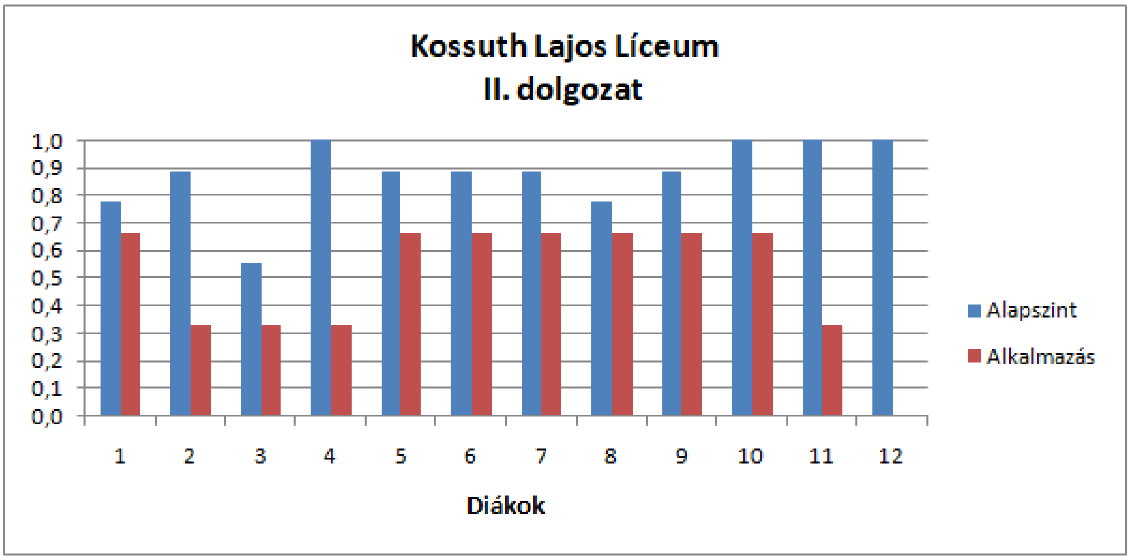
3.21. ábra.

3.22. ábra.

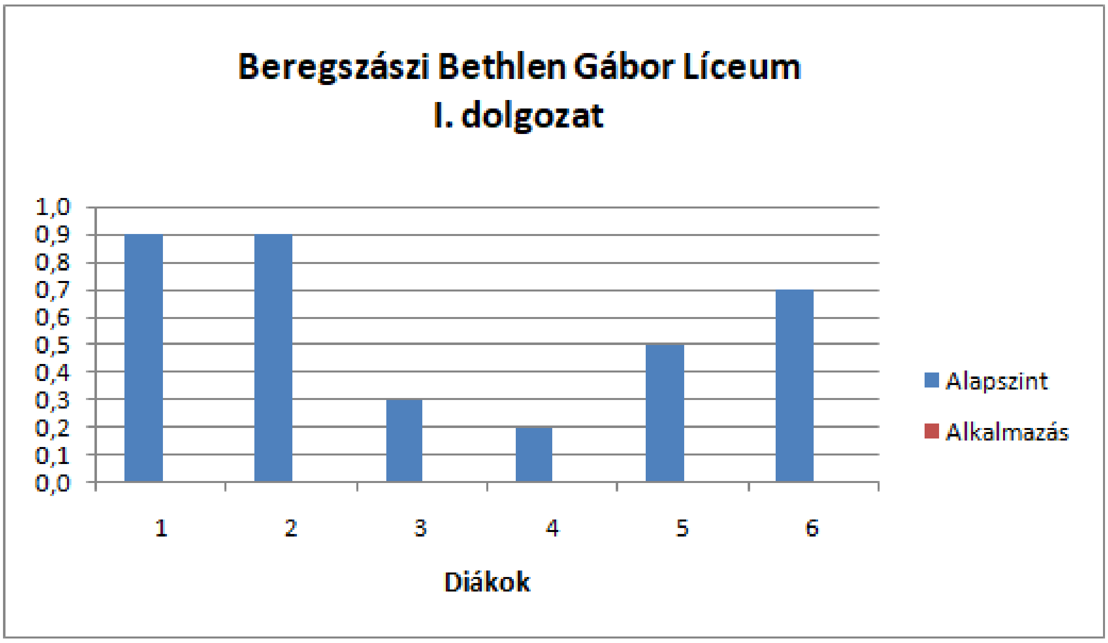
3.23. ábra.



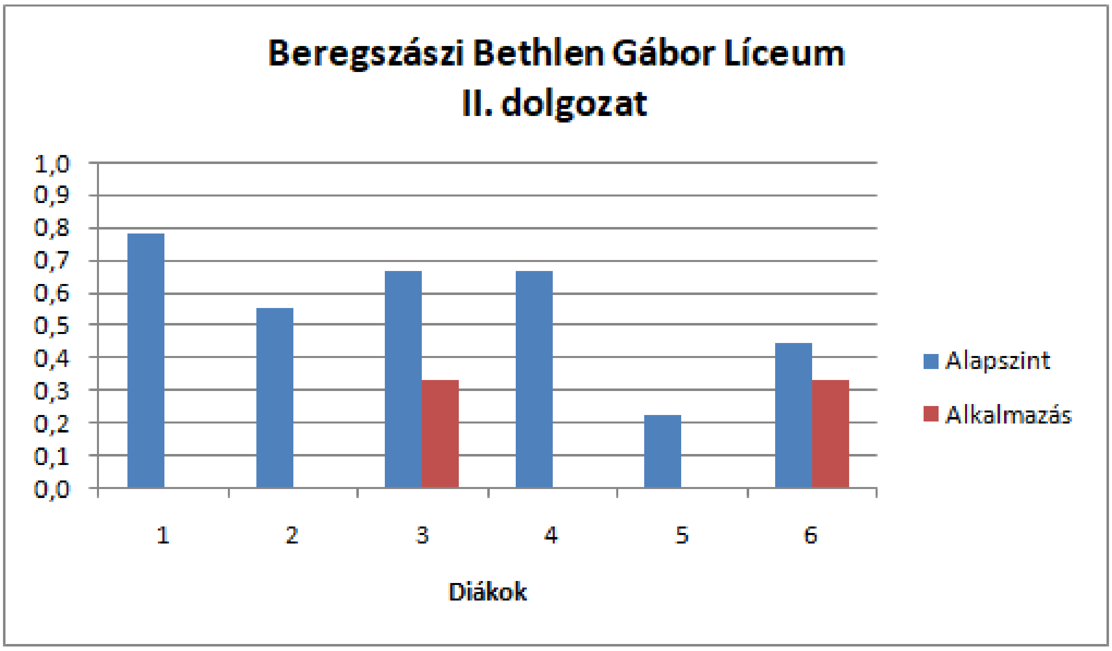
3.24. ábra.



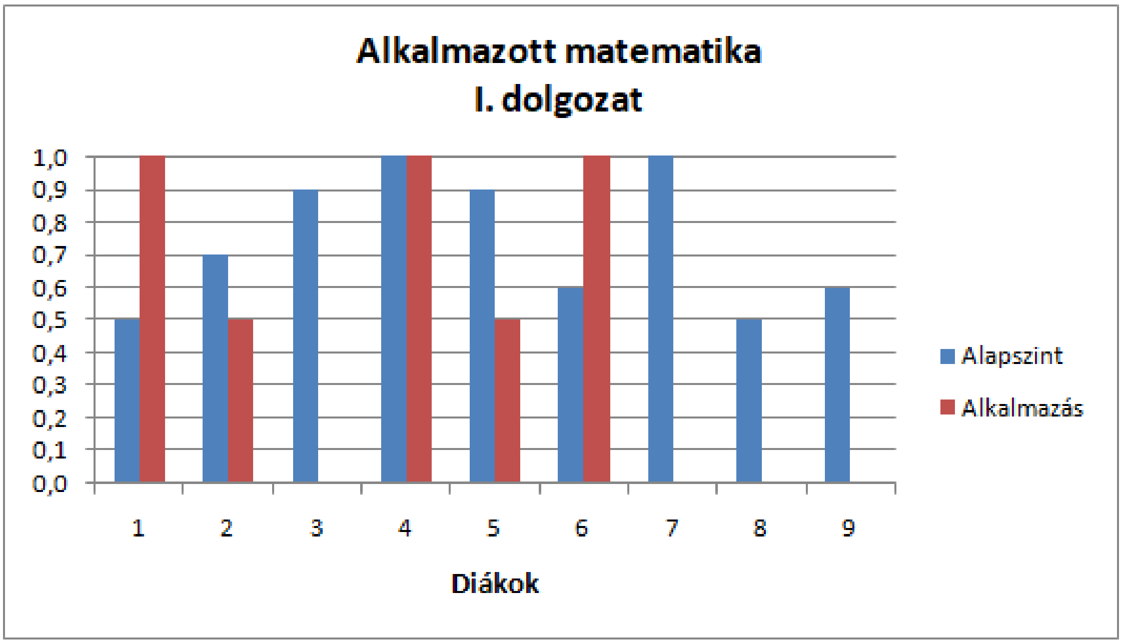
3.25. ábra.



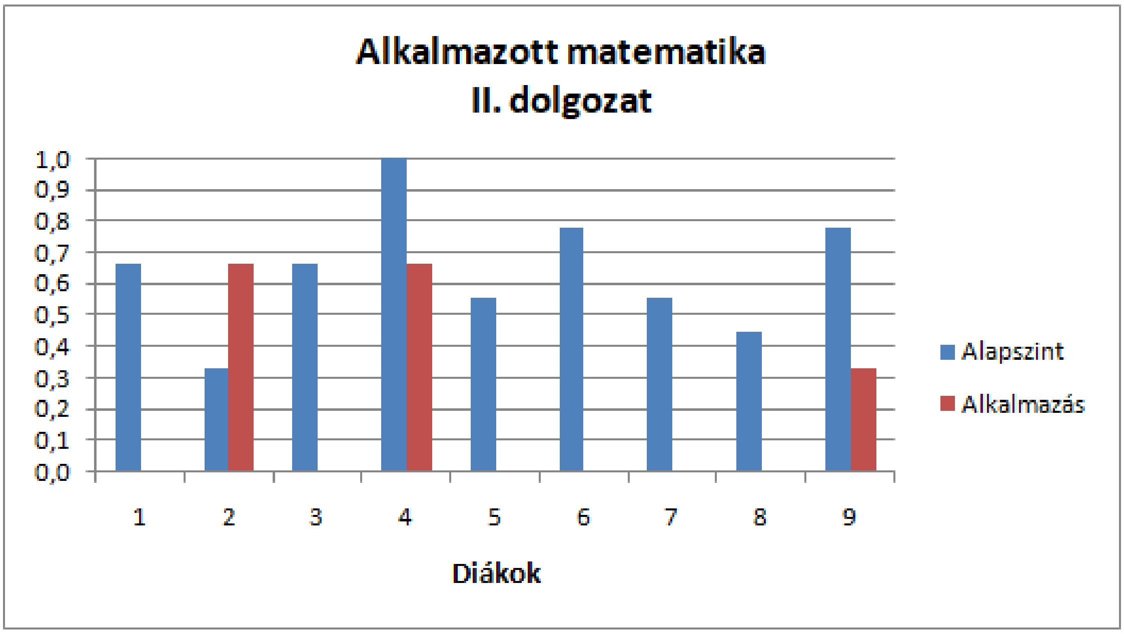
3.26. ábra.



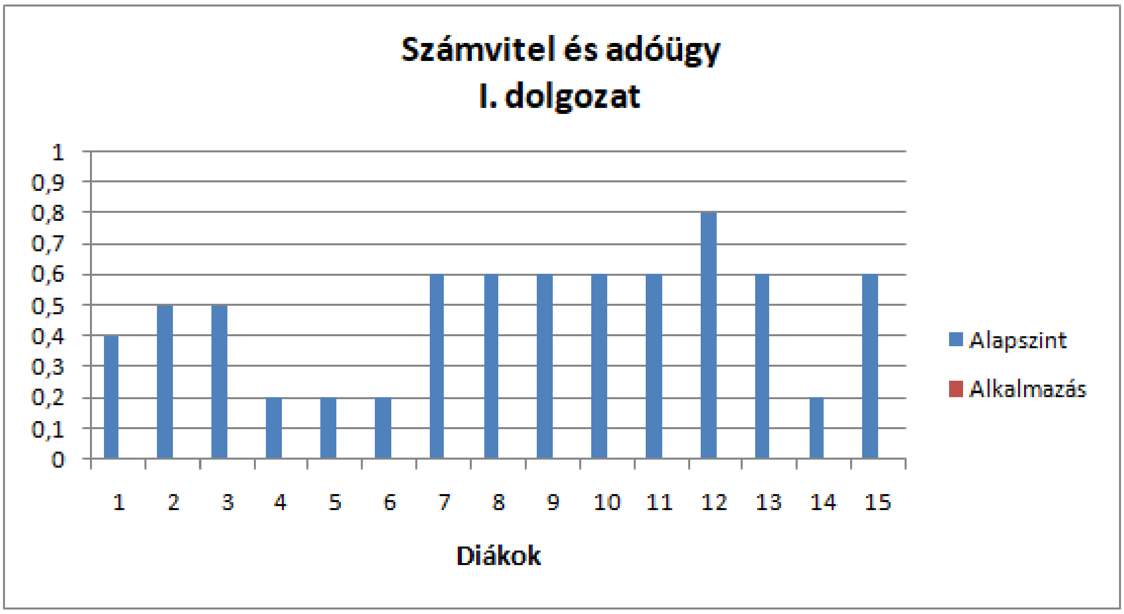
3.27. ábra.



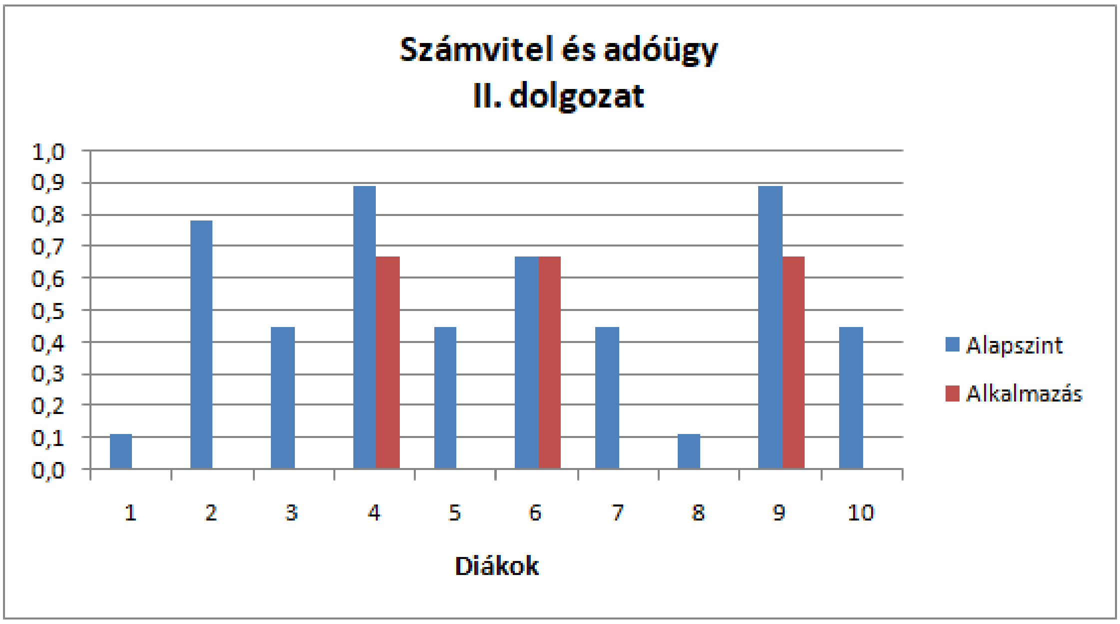
3.28. ábra.



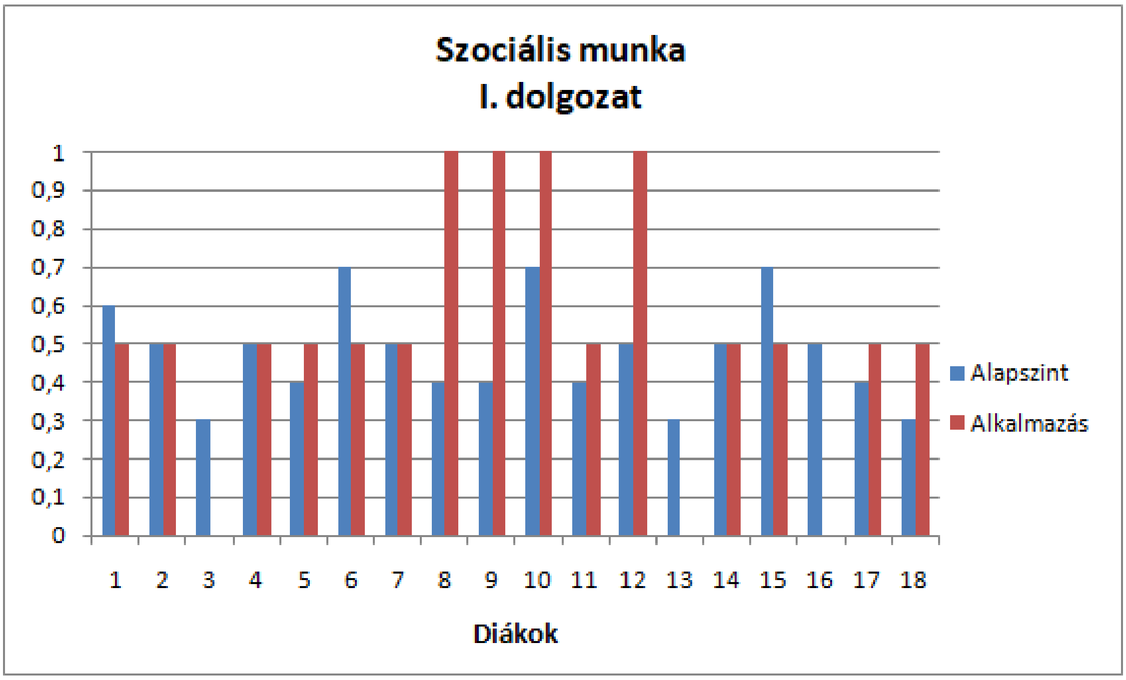
3.29. ábra.



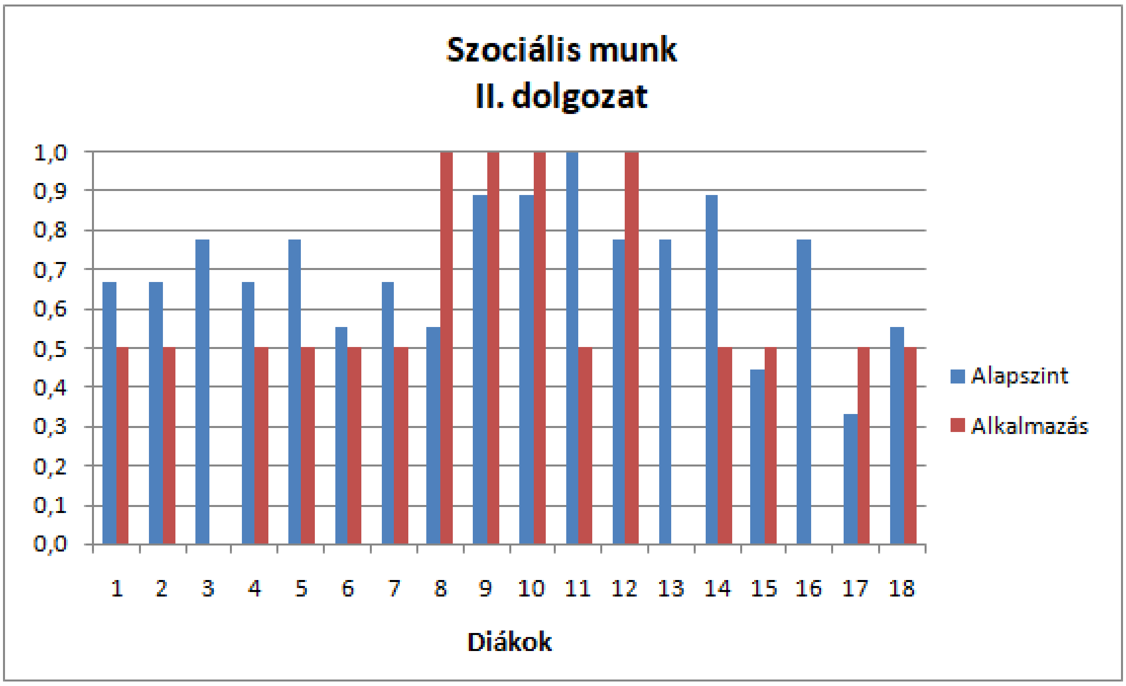
3.30. ábra.



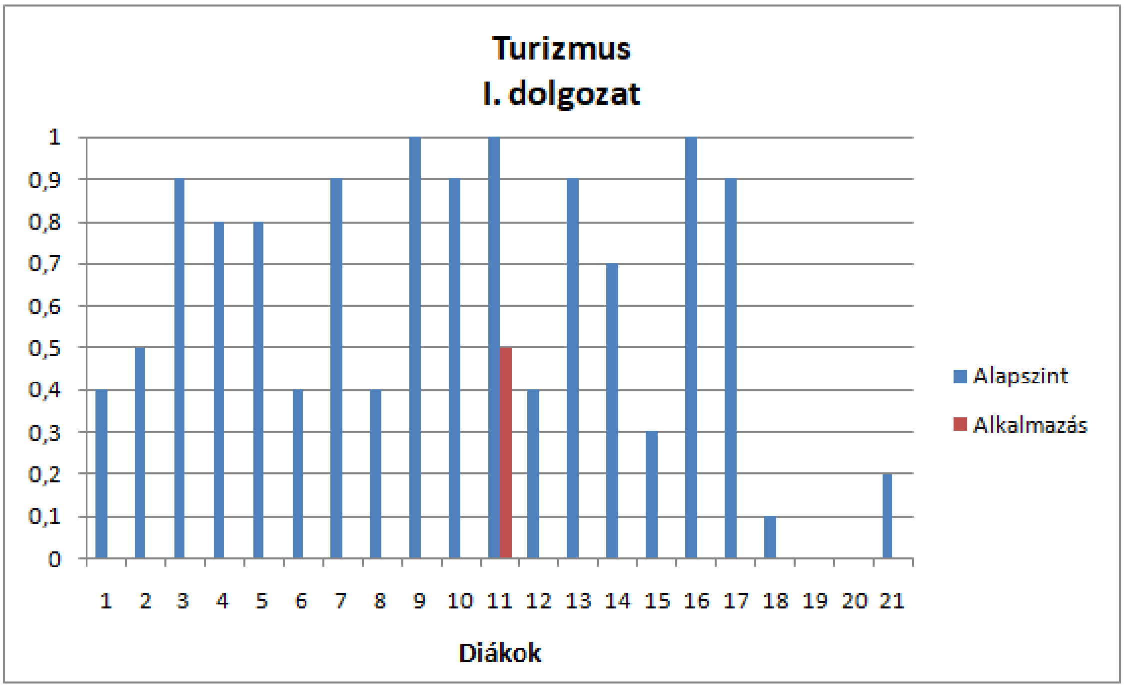
3.31. ábra.



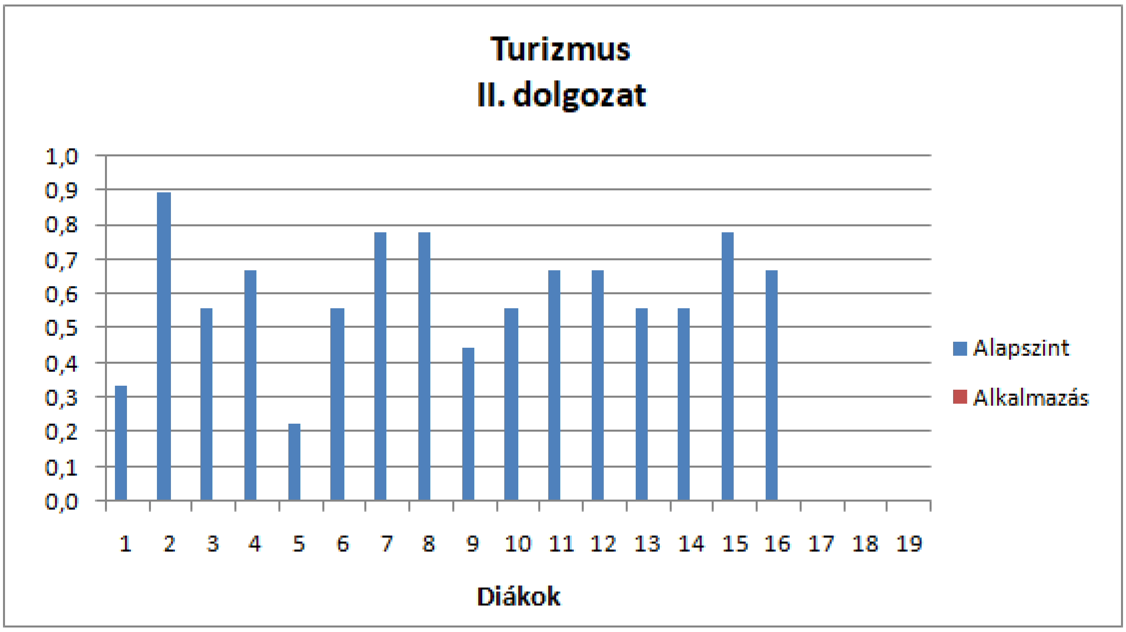
3.32. ábra.



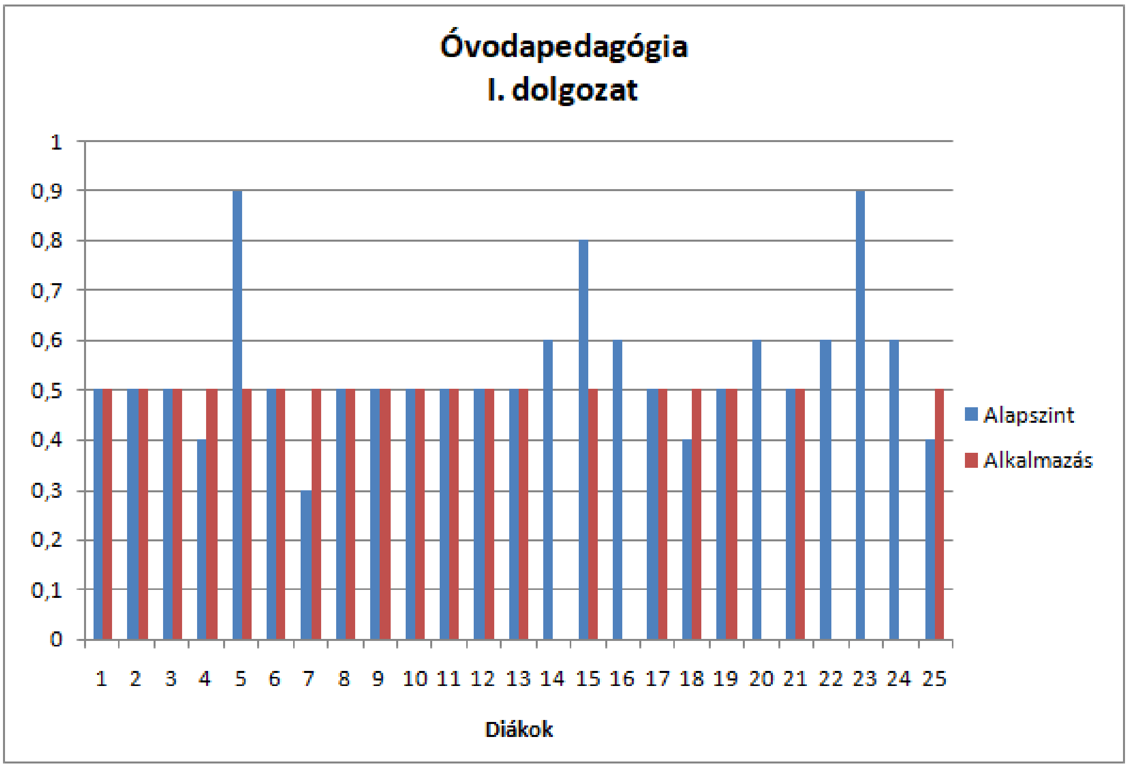
3.33. ábra.



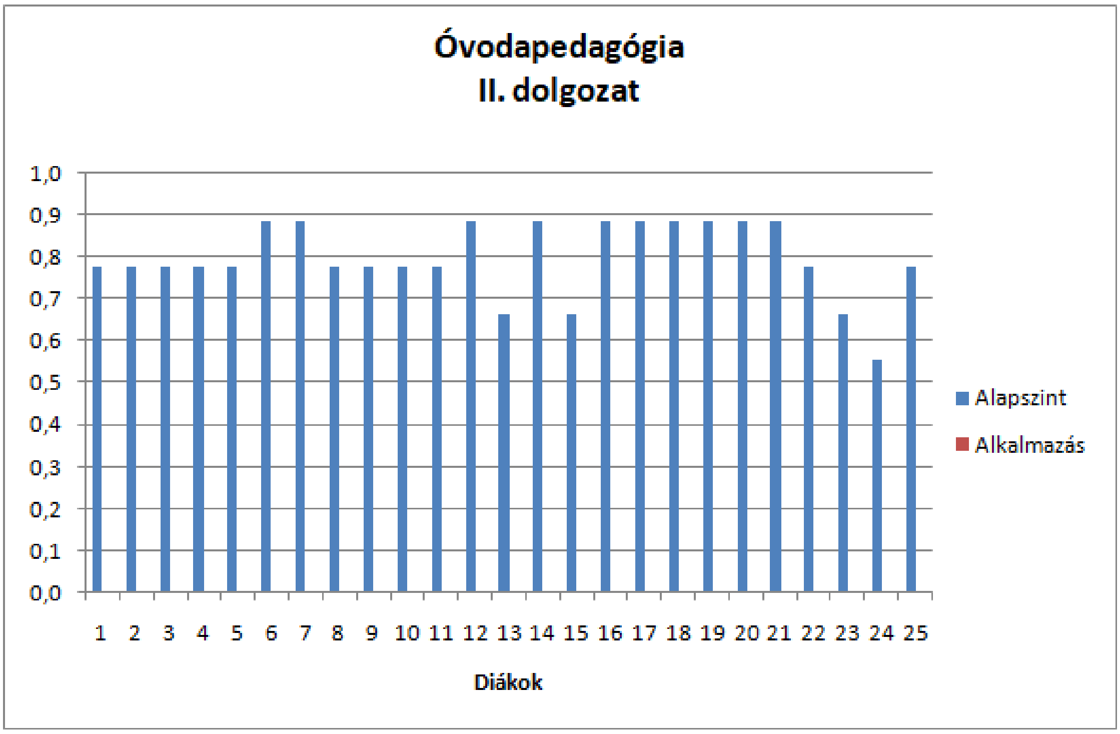
3.34. ábra.



3.35. ábra.



3.36. ábra.


Óvodapedagógia
II. dolgozat
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
Diákok
Alapszint
Alkalmazás

3.37. ábra.

Összefoglalás

A diplomamunkám témája ma nagyon aktuális. Kutatásom során tanulmányoztam és összehasonlító elemzést készítettem a koordinátageometria oktatásának módszertanáról Ukrajna és Magyarország iskoláiban. Általam szintén vizsgálva volt a koordinátageometria oktatásának néhány szempontja Kárpátalja 11. osztályos tanulóinál. A szakirodalom elemzése-, a kísérleti kutatás elvégzése után az alábbi következtetéseket vontam le:

1. A koordinátageometria tanítási folyamata és tanítási módszere Ukrajna és Magyarország iskoláiban gyakorlatilag nem különbözik. Habár Magyarország iskoláiban az adott téma oktatására több időt szánnak, ezért van lehetőség az adott anyag részletesebb áttekintésére, hangsúlyozva a tanulóknak a fontos definíciókat, tulajdonságokat, tételeket és azok gyakorlati alkalmazását.

2. A statisztikák szerint, azonban a magyarországi középszintű és az ukrajnai külső független érettségi vizsgák feladatait a kárpátaljai érettségizők hasonló eredménnyel tudják megoldani.

3. A kutatás során arra a következtetésre lehet jutni, hogy a tanulók legtöbb része nem tudja felhasználni a korábban szerzett ismereteket, megfelelő képleteket, nem sajátították el megfelelő szinten a tananyagot. Ezt bizonyítja az a tény, hogy a tanulók jelentős része az utolsó feladatokba bele se kezdett.

4. Külön figyelmet igényel az a tény, hogy a vizsgált dolgozatok, azokat a diákokat érintette, akik online tanultak (COVID-19 járványügyi helyzete miatt) csaknem egy évet, ami azt jelenti, hogy a legtöbb esetben a tanórák csak fele volt csak aktív tanulás, egy részét pedig önállóan dolgozták fel.

5. Szerintem szükséges változtatás az oktatási tervben, változtatás az óraszámokban ebben vagy más témában, és az oktatás folytatása nem online formában, hanem „élőben", ahol a közvetlen „tanár-diák" kapcsolat jelen van.

6. A kutatás számomra nagyon érdekes volt. Érdemes lenne folytatni a kutatást a továbbiakban is, az eredményeket közölni az intézményekkel.

Irodalomjegyzék

[1] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, Matematika 5. osztály. "CBIT"'kiadó, Lemberg, 2018.

[2] N. A. Taraszenkova, I. M. Bohatirjova, O. M. Kolomijec, Z. O. Szergyuk, Matematika 6. osztály. Bukrek kiadó, Csernyivci, 2014.

[3] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir, Mértan 9. osztály. "CBIT"'kiadó, Lemberg, 2017.

[4] A. H. Merzljak, Matematika. Algebra és az analízis elemei. Térmértan 10. osztály. "CBIT"'kiadó, Lemberg, 2018.

[5] H. P. Bevz, H. V. Bevz, Matematika 11. osztály. Lemberg, "CBIT"'kiadó, 2011.

[6] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István. Sokszínű matematika 9. osztály. Második javított kiadás. Mozaik kiadó, Szeged, 2002.

[7] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István. Sokszínű matematika 10. osztály. Tizedik, változatlan kiadás. Mozaik kiadó, Szeged, 2011.

[8] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István. Sokszínű matematika 11. osztály. Kilencedik, változatlan kiadás. Mozaik kiadó, Szeged, 2011.

[9] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István. Sokszínű matematika 12. osztály. Negyedik, változatlan kiadás. Mozaik kiadó, Szeged, 2007.

[10] https://zno.osvita.ua/mathematics/

(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[11] https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok

(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

[12] https://www.crnlg.hu/$_{u}ser/browser/File/Helyi_{t}antervek_{2}020/11_{M}atematika_{1}1_{1}2.pdf$

(utolsó megtekintés: 2021.05.26.)

Ábrák jegyzéke

1.1. Az AB szakasz 10

1.2. A számegyenes 10

1.3. A koordináta - egyenes 11

1.4. A derékszögű koordináta - rendszer 11

1.5. Az abszcissza, az ordináta és az origó 11

1.6. Az abszcissza és ordináta előjele a negyedekben 12

1.7. A koordinátasík 13

1.8. Az AB szakasz 13

1.9. A koordináta - tengelyekkel nem párhuzamos AB szakasz felezőpontja . 14

1.10. Az egyenes 15

1.11. A hiperbola 15

1.12. Az R sugarú és $A(a; b)$ középpontú körvonal 16

1.13. Az R sugarú és origó középpontú körvonal 16

1.14. A párhuzamos egyenesek 17

1.15. Az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög 18

1.16. Az egyenesek és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti α szög 18

1.17. Az abszcissza-, az ordináta- és az applikátatengely 19

1.18. A koordinátatér 20

1.19. A pont koordinátái a térben 20

1.20. Szimmetrikus pontok a síkra 21

1.21. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege 23

1.22. Az $ABCD$ paralelogramma 23
1.23. Az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorok 24
1.24. A paralelepipedon 24
1.25. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége 25
1.26. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon 25
1.27. Az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok 26
1.28. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög. 27
1.29. Térbeli derékszögű koordináta - rendszer 28
1.30. Az A és B pontok a térbeli derékszögű koordináta - rendszerben 29
1.31. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor 30
1.32. Az $\overrightarrow{AC_1}$ vektor felbontása három nem komplementáris vektorra 32
1.33. Az r sugarú $A(a; b; c)$ középpontú gömbfelület 33

2.1. 1. feladat 48
2.2. 2. feladat 50
2.3. 3. feladat 52
2.4. 4. feladat 54
2.5. 5. feladat 56

3.1. I. dolgozat, 1. feladat 58
3.2. I. dolgozat, 2. feladat 59
3.3. I. dolgozat, 4. feladat 59
3.4. I. dolgozat megoldása, 1. feladat 61
3.5. I. dolgozat megoldása, 2. feladat 61
3.6. I. dolgozat megoldása, 3. feladat 62
3.7. I. dolgozat megoldása, 4. feladat 63
3.8. I. dolgozat megoldása, 6. feladat 64
3.9. II. dolgozat megoldása, 3.feladat 67
3.10. II. dolgozat megoldása, 4.feladat 68

3.11. II. dolgozat megoldása, 7.feladat 70
3.12. II. dolgozat megoldása, 8.feladat 71
3.13. Az iskolák és csoportok átlaga 73
3.14. Az iskolák I. dolgozatban szerzett átlaga, legnagyobb és legkisebb pontszáma 87
3.15. Az iskolák II. dolgozatban szerzett átlaga, legnagyobb és legkisebb pontszáma 88
3.16. Ungvári Dayka Gábor Középiskola tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 91
3.17. Ungvári Dayka Gábor Középiskola tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 92
3.18. Ungvári Drugeth Gimnázium tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 92
3.19. Ungvári Drugeth Gimnázium tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 93
3.20. Munkácsi Szent István Líceum tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 93
3.21. Munkácsi Szent István Líceum tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 94
3.22. Munkácsi II. Rákóczi Ferenc Középiskola tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 94
3.23. Munkácsi II. Rákóczi Ferenc Középiskola tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 95
3.24. Kossuth Lajos Líceum tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva . 95
3.25. Kossuth Lajos Líceum tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva . 96
3.26. Beregszászi Bethlen Gábor Líceum tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 96
3.27. Beregszászi Bethlen Gábor Líceum tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 97

3.28. Alkalmazott matematika szak tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva . . . 97
3.29. Alkalmazott matematika szak tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva . . . 98
3.30. Számvitel és adóügy szak tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 98
3.31. Számvitel és adóügy szak tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 99
3.32. Szociális munka szak tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva . . 99
3.33. Szociális munka szak tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva . . 100
3.34. Turizmus szak tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva 100
3.35. Turizmus szak tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva 101
3.36. Óvodapedagógia szak tanulóinak átlaga az I. dolgozatban csoportosítva . 101
3.37. Óvodapedagógia szak tanulóinak átlaga a II. dolgozatban csoportosítva . 102

Táblázatok jegyzéke

3.1. Ungvári 10. Számú Dayka Gábor Középiskola tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban . . . 75

3.2. Ungvári 10. Számú Dayka Gábor Középiskola tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban . . . 76

3.3. Ungvári Magyar Tannyelvű Elemi Iskola és Drugeth Gimnázium tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban . . . 76

3.4. Ungvári Magyar Tannyelvű Elemi Iskola és Drugeth Gimnázium tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban . . . 77

3.5. Munkácsi Szent István Líceum tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban . . 77

3.6. Munkácsi Szent István Líceum tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban . . 78

3.7. Munkácsi 3. Számú II. Rákóczi Ferenc Középiskola tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban . . . 78

3.8. Munkácsi 3. Számú II. Rákóczi Ferenc Középiskola tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban . . . 79

3.9. Beregszászi Bethlen Gábor Líceum tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 80

3.10. Beregszászi Bethlen Gábor Líceum tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 81

3.11. Beregszászi Kossuth Lajos Líceum tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 81

3.12. Beregszászi Kossuth Lajos Líceum tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 82

3.13. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Alkalmazott matematika szak tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 82

3.14. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Alkalmazott matematika szak tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 83

3.15. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Számvitel és adóügy szak tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 83
3.16. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Számvitel és adóügy szak tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 84
3.17. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Szociális munka szak tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 84
3.18. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Szociális munka szak tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 85
3.19. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Turizmus szak tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 85
3.20. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Turizmus szak tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 86
3.21. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Óvodapedagógia szak tanulóinak pontszáma az I.dolgozatban 86
3.22. II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziuma: Óvodapedagógia szak tanulóinak pontszáma a II.dolgozatban 87

Резюме

Тема моєї дипломної роботи є дуже актуальна на сьогоднішній час. В своєму дослідженні я вивчила і зробила порівняльний аналіз методики викладання аналітичної геометрії в школах України та Угорщини. Мною також було досліджено деякі аспекти методики викладання аналітичної геометрії в учнів 11 класів деяких шкіл Закарпаття. Проаналізувавши літературні джерела, проводячи експериментальні дослідження, мною зроблено такі висновки:

1. Процес викладання та методика викладання аналітичної геометрії в школах України та в Угорщини практично не відрізняється. Хоча в школах Угорщини на вивчення даної теми відводиться більше часу, тому є змога розглянути даний матеріал більш докладно, наголошуючи учням при цьому на важливі означення, властивості, теореми та їх практичне застосування.
2. Однак, згідно зі статистикою, закарпатські випускники можуть вирішити завдання іспитів середнього рівня в Угорщині та зовнішніх незалежних іспитів в Україні із подібними результатами.
3. В процесі дослідження можна зробити висновок, що велика кількість учнів не можуть використовувати раніше набуті знання, відповідні формули, не володіють матеріалом на достатньому рівні. Про це свідчить той факт, що значна частина учнів навіть не починають робити останні завдання.
4. Окрему увагу хочеться звернути на той факт, що розглянуті вибірки стосувалися учнів, які навчалися онлайн (у зв'язку з епідеміологічною ситуацією COVID-19) майже рік, а це означає, що в більшості випадків лише половина уроків у них була активною, а решта – індивідуальне опрацювання матеріалу.
5. На мою думку, потрібні зміни в навчальній програмі, зміни годин на вивчення тієї чи іншої теми, і продовження навчання не в онлайн режимі, а «вживу», де присутній безпосередній зв'язок «вчитель-учні».
6. Дослідження було для мене дуже цікавим. Варто було б продовжити його, донести результати до відповідних установ.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
21.05.2021 16:03:28 EEST

Дата звіту:
21.05.2021 16:08:09 EEST

ID **перевірки:**
1007967207

Тип перевірки:
Doc vs Internet

ID **користувача:**
100006701

Назва документа: Dmitrenko_Alexandra (1)

Кількість сторінок: 112 **Кількість слів:** 14239 **Кількість символів:** 89707 **Розмір файлу:** 1.14 MB ID **файлу:** 1008060521

15.2% Схожість

Найбільша схожість: 4.06% з Інтернет-джерелом (https://kmksz.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika-2018...

15.2% Джерела з Інтернету | 519 ...... Сторінка 114

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0.58% Цитат

Цитати | 4 ...... Сторінка 115

Не знайдено жодних посилань

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 24

Nyilatkozat

Alulírott, Dmitrenko Alexandra 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikaiés Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MScdiploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.