ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Унітарна підгрупа групових алгебр

Мозговой Іштван Степанович

Студент IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник: **Кудлотяк Чаба Анталович**
ст. викладач

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**
к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Унітарна підгрупа групових алгебр

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

Мозговой Іштван Степанович

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Кудлотяк Чаба Анталович**
ст. викладач

Рецензент: **Орос Віктор Михайлович**
кандидат фізико-математичних наук

Берегове
2021

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A CSOPORTALGEBRÁK UNITÉR RÉSZCSOPORTJAI

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Mozgovoj István

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Kudlotyák Csaba

adjunktus

Recenzens: Orosz Viktor

fizika-matematika tudományok kandidátusa

Beregszász – 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A csoportalgebra fogalmát Frobenius alkotta meg XX. században. Ez az új algebrai konstrukció igen hasznosnak bizonyult a véges csoportok reprezentációinak tanulmányozása során, így először csak gyakorlati jelentőségük miatt vizsgálták a csoportgyűrűket. A későbbiekben, azonban a vizsgálatok áttevődtek a végtelen csoportok csoportalgebráira. Később három fő kutatási iránya alakult ki a csoportalgebráknak: a csoportgyűrűk gyűrűelméleti tulajdonságainak tanulmányozása, a csoportgyűrűk egységcsoportjának vizsgálata, a csoportgyűrűk izomorfia problémája. A csoportgyűrűk egységcsoportjának vizsgálata az 1940-es években az algebrai topológia hatására kezdődött G. Higman kutatásainak köszönhetően és máig igen sok megválaszolatlan problémát tartalmaz.

Célunk meghatározni az egységek rendjét, számát és alakját a kételemű test feletti nyolcad rendű diéder- és kvaterniócsoport csoportalgebrájának egységcsoportjában.

1. A csoportgyűrű fogalma

Bódi Béla "Bevezetés a csoportgyűrűk elméletébe"[1] c. könyvében az alábbi definícióját olvashassuk a csoportgyűrűnek.

Legyen G csoport a szorzás műveletére és K egységelemes asszociatív gyűrű. Tekintsük az $f : G \to K$ függvényeket a G csoporton értéktartománnyal a K gyűrűben, amelyek tartója:

$$supp(f) = \{g \in G \mid f(g) \neq 0\}$$

véges. Jelölje

$$KG = \{u \mid u : G \to K,\ supp(u)\ \textit{véges}\}$$

azon függvények halmazát, amelyben az u és v függvények akkor egyenlők, ha $v(g) = u(g)$ teljesül minden G-beli g elemre. A függvények összegét és szorzatát a KG halmazban így értelmezzük:

$$(u + v)(g) = u(g) + v(g)$$

és

$$(uv)(g) = \sum_{h \in G} u(h)v(h^{-1}g)$$

azaz szorzatuk a két függvény konvolúciója. A KG a fentiekben bevezetett műveletekre nézve gyűrűt alkot. Valóban:

- KG Abel-csoport az összeadás műveletére;
- KG félcsoport a szorzás műveletére vonatkozóan;
- KG-ben a szorzás az összeadásra nézve disztributív, aza bármely u, v, w elemekre $u(v + w) = uv + uw$ *és*

Definíció. *([1]) A KG gyűrűt csoportgyűrűnek, ha K test, akor pedig csoportalgebrának nevezzük.*

Egyes esetekben, ha a KG jelölés félreértésre adna okot, a $K[G]$ jelölést használjuk.

A KG tárgyalását megelőzően a függvény sokkal áttekintőbb alakban való felírására térünk rá.

Jelölje u_g az u függvény értékét a g elemen, ekkor az u függvény egyértelműen meghatorozható a

$$\sum_{g\in G} u_g g$$

alakú formális összeggel, amelyben csak véges sok u_g együttható nullától különböző. A formális összegként kezelt függvények esetén az összeadás és a szorzás a KG-ben következőképpen van értelmezve: legyen

$$x=\sum_{g\in G} a_g g \;\; \textit{és} \quad y=\sum_{g\in G} b_g g$$

KG tetszőleges két eleme, ahol $a_g, b_g \in K$, akkor

$$x+y=\sum_{g\in G}(a_g+b_g)g$$

és

$$xy=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g.$$

Szükségünk lessz a K gyűrű és a KG csoportgyűrű elemeinek szorzatára. Az ilyen szorzatokat a következőképpen értelmezzük: ha $c \in K$ és $x=\sum_{g\in G} a_g g \in KG$, akkor

$$c\cdot x=\sum_{g\in G}(ca_g)g \;\; \textit{és} \quad x\cdot c=\sum_{g\in G}(a_g c)g.$$

A követekző összefüggések teljesülnek:

- $(c+d)\cdot x = c\cdot x + d\cdot x$
- $c\cdot (x+y) = c\cdot x + c\cdot y$
- $c\cdot (d\cdot x) = (cd)\cdot x$

bármely $c, d \in K$ *és* $x, y \in KG$ esetén. Ekkor KG tekinthető, mint baloldali K-modulus és K test esetén KG K feletti vektortér.

Definíció. *([1]) Ha $x=\sum_{g\in G} a_g g$ a KG-nek nullától különböző eleme, akkor a*

$$supp(x)=\{g\in G \;\mid\; a_g\neq 0\}$$

halmazt az x elem tartójának, és $supp(x)$ által generált részcsoportot pedig az x elem tartócsoportjának nevezzük, és a $\langle supp(x)\rangle$ jelölést alkalmazzuk.

A csoportgyűrűk vizsgálatánál gyakran hasznos fogalom az elem hossza: ha $x = 0$, akkor az x elem hossza nulla, egyébként pedig egyenlő a $supp(x)$ elemeinek számával, melyre a $|supp(x)|$ jelölést használjuk.

Mint ismert, ha g és h a G elemei és $g = u^{-1}hu$ valamely G-beli u elemre, akkor azt mondjuk, hogy g és h konjugáltak; jelölje a K_g a G csoport g elemével konjugált elemeit, azaz g-t tartalmazó konjugált osztályát.

Legyen $\widehat{K_a}$ a K_a véges konjugált osztály elemeinek összege, eleme a KG-nek, amit a továbbiakban osztályösszegnek nevezünk. Nyilván $g^{-1}\widehat{K_a}g = \widehat{K_a}$ minden g-re, tehát $\widehat{K_a}$ centrális.

1. Lemma. *([1]) Legyen KG egy csoportalgebra a K test felett. Ekkor a KG csoportalgerba $\zeta(KG)$ centruma vektortér és a G-csoport véges konjugált osztályainak az osztályösszegei a $\zeta(KG)$ bázisát alkotják.*

A KG csoportgyűrű vizsgálatánál fontos szerepet töltenek be a G részcsoportjai által egyértelműen meghatározott bal- és jobbideálok, illetve ideálok. Ezek tulajdonságaira most bővebben kitérünk.

Jelölje $R_l(G/H)$ és $R_r(G/H)$ megfelelően a G csoport H részcsoportja szerinti baloldali, illetve jobboldali mellékosztályainak olyan teljes reprezentánsrendszerét, amelyek a csoport egységelemét tartalmazzák. Ekkor a következő diszjunkt felbontások léteznek:

$$G = \cup_{u \in R_l(G/H)} uH, \tag{1}$$

$$G = \cup_{u \in R_r(G/H)} Hv \tag{2}$$

2. Lemma. *([1]) Ha H a G csoport részcsoportja, akkor KG bármely eleme egyértelműen felírható a következőképpen:*

$$x = u_1x_1, u_2x_2 + \cdots + u_sx_s, \tag{3}$$

ahol $u_i \in R_l(G/H)$, $0 \neq x_i \in KH$ $(i = 1, \ldots, s)$, továbbá

$$x = y_1v_1, y_2v_2 + \cdots + y_tv_t, \tag{4}$$

ahol $v_j \in R_r(G/H)$, $0 \neq y_j \in KH$ $(j = 1, \ldots, t)$.

Legyen H a G részcsoportja és jelölje $\Im_l(H)$ a KG csoportgyűrű összes olyan elemét, amelyek felírhatók a következőképpen:

$$\sum_{h\in H} x_h(h-1), \quad (x_h \in KG).$$

Látható, hogy $\Im_l(H)$ a KG-nek balideálja, amelyet a H részcsoporttal asszociált (vagy kapcsolt) balideálnak nevezünk.

Az $\Im_l(H)$ generátorrendszerét a $\{h-1 \mid h \in H\}$ elemek alkotják. Hasonlóan határozzuk meg KG-ben a H részcsoporttal asszociált $\Im_r(H)$ jobbideált.

3. Lemma. *([1]) Ha a KG csoportgyűrűben az $\Im_l(H)$ balideált mint baloldali K-modulust tekintjük, akkor*

$$N = \{u(h-1) \mid u \in R_l(G/H), 1 \neq h \in H\}$$

elemei az $\Im_l(H)$ K-modulus bázisát alkotják.

4. Lemma. *([1]) $\Im_l(H)$ pontosan akkor kétoldali ideálja KG-nek, ha H normális részcsoportja a G-nek.*

A továbbiakban a $\Im_l(H)$ kétoldali idál jelölésére a $\Im(H)$-t használjuk.

5. tétel. *([1]) Legyen $\varphi : G \to G_1$ epimorfizmus, amelynek magja a H normális részcsoport, és definiáljuk a $\widetilde{\varphi} : KG \to KG_1$ leképezést a*

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G} c_g g\right) = \sum_{g\in G} c_g \varphi(g), \quad (c_g \in K)$$

egyenlőség szerint. A $\widetilde{\varphi}$ leképezés a KG csoportgyűrűt a KG_1 csoportgyűrűre képező homomorfizmus, és ennek magja $\Im(H)$ ideál.

6. következmény. *([1]) Ha H normális részcsoportja G-nek, akkor a $K[G/H]$ csoportgyűrű izomorf a $KG/\Im(H)$ faktorgyűrűvel.*

7. következmény. *([1]) Ha $x = \sum_{g\in G} c_g$, akkor a KG csoportgyűrű eleme és $\chi(x) = \sum_{g\in G} c_g$, akkor a $\chi : KG \to K$ leképezés a gyűrűk homomorfizmusa.*

2. Csoportgyűrűk egységcsoportja

Ha a G csoport tartalmaz p rendű elemet és F egy p karakterisztikájú test, akkor az FG csoportalgebrát modulárisnak nevezzük.

Definíció. *([1]) Az FG csoportalgebra u elemére azt mondjuk, hogy egység, ha $uv = vu = 1$ az FG valamely elemére. Az FG összes egysége csoportot alkot, melyet az FG egységcsoportjának nevezünk, és $U(FG)$-vel jelölünk.*

A 7. következmény szerint

$$V(FG) = \left\{ \sum_{g \in G} c_g g \in U(FG) \mid \sum_{g \in G} a_g = 1 \right\}$$

részcsoportja az $U(FG)$ csoportnak. Ezt a $V(FG)$ csoportot az FG normalizált egységcsoportjának nevezzük.

[1] Nyilván G részcsoportja $V(FG)$-nek, továbbá $U(FG) = V(FG) \times U(F)$. Ezért a továbbiakban elengedhetetlen az egységcsoport tanulmányozásához megvizsgálnunk a normalizált egységcsoportot.

3. A csoportgyűrűk involúciói

Az R gyűrű * : $R \to R$ leképezését involúciónak nevezzük, ha bijektív és eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad (x^*)^* = x$$

minden R-beli x, y elemekre. Nyilván a * involúció másodrendű anti-automorfizmus. E fogalom motiválója a mátrixok természetes transzponálása az $M_n(F)$ mátrixalgebrában az F test felett, amely fontos szerephez jut az $M_n(F)$ algebra viszgálatában.

$$x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \to x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g f(g) \eta(g)$$

Definiáljuk a $* : FG \to FG$ leképezést az alábbi módon:

$$* : x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \to x^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}.$$

8. tétel. *Legyen F test, G csoport. Ekkor a*

$$* : x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \to x^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}.$$

leképezés involúciója lesz az FG csoportalgebrának.

Bizonyítás. Legyenek $x = \sum_{g \in G} x_g g$ és $y = \sum_{g \in G} y_g g$ tetszőleges elemei az FG csoportalgebrának. Ekkor

$$(x+y)^* = \left(\sum_{g \in G} x_g g + \sum_{g \in G} y_g g \right)^* = \left(\sum_{g \in G} (x_g + y_g) g \right)^* = \sum_{g \in G} (x_g + y_g) g^{-1} =$$

$$= \sum_{g \in G} x_g g^{-1} + \sum_{g \in G} y_g g^{-1} = x^* + y^*.$$

$$(xy)^* = \left(\left(\sum_{g \in G} x_g g \right) \left(\sum_{g \in G} y_g g \right) \right)^* = \left(\sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} (x_h y_{h^{-1}g} \right) g \right)^* =$$

$$\sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} (x_h y_{h^{-1}g} \right) g^{-1} = \left(\sum_{g \in G} y_g g^{-1} \right) \left(\sum_{g \in G} x_g g^{-1} \right) = y^* x^*.$$

$$(x^*)^* = \left(\left(\sum_{g\in G} x_g g\right)^*\right)^* = \left(\sum_{g\in G} x_g g^{-1}\right)^* = \sum_{g\in G} x_g (g^{-1})^{-1} = \sum_{g\in G} x_g g = x.$$

Mivel a $*$ leképezés eleget tesz az invilúció definíciójában szereplő feltételeknek, ezért $*$ involúciója lesz az FG csoportalgebrának ■

Definíció. *([1]) Az R gyűrű u egységét * unitérnek, vagy egyszerűen unitérnek nevezzük, ha $u^{-1} = u^*$.*

4. F_2D_8 egységcsoport elemeinek rendje

Legyen $F_2 = \{0, 1\}$ kételemű test és $D_8 =< a, b|a^4 = b^2 = 1, ba = a^{-1}b >$ nyolcadrendű diédercsoport.

Ekkor a csoportalgebra minden eleme felírható a következő alakban

$$u = \gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3 + \delta_0 b + \delta_1 ab + \delta_2 a^2 b + \delta_3 a^3 b,$$

ahol $\gamma_i, \delta_i \in F_2$ és $i = \overline{0, 3}$.

Legyen

$$u_1 = \gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3;$$

$$u_2 = \delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\chi(u_1) = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3;$$

$$\chi(u_2) = \sum_{i=0}^{3} \delta_i = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Munkám 11. oldalán már megmutattuk az egységcsoport és a normalizált egységcsoport közötti összefüggést. Ebből tudjuk, hogy $U(F_2D_8) = V(F_2D_8) \times U(F_2) = V(F_2D_8)$, ezért F_2D_8 tetszőleges u egységére igaz, hogy $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$.

Meghatározzuk az egységcsoport elemeinek a rendjét. Legyen u tetszőleges eleme az $U(F_2D_8)$-nak, ekkor $u = u_1 + u_2 b$. Az u másodrendű elem lesz, ha $u \neq 1$ és $u^2 = 1$.

$$\begin{aligned} u^2 &= (u_1 + u_2 b)(u_1 + u_2 b) \\ &= u_1^2 + u_2 u_2^* + (u_1 u_2 + u_2 u_1^*)b \\ &= u_1^2 + u_2 u_2^* + (u_1 + u_1^*)u_2 b = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Kiszámoljuk u_1 négyzetét, kihasználva, hogy a kételemű testben $\gamma_i^2 = \gamma_i, \ \forall\, \gamma_i \in F_2$:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= (\gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3)^2 \\ &= \gamma_0^2 + \gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 a^2 \\ &= (\gamma_0 + \gamma_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Meghatározzuk az $u_2u_2^*$ szorzatot:

$$\begin{aligned}
u_2u_2^* = (\delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3)(\delta_0 + \delta_1 a^3 + \delta_2 a^2 + \delta_3 a) = \\
= \delta_0^2 + \delta_0\delta_1 a^3 + \delta_0\delta_2 a^2 + \delta_0\delta_3 a + \delta_1\delta_0 a + \delta_1^2 + \delta_1\delta_2 a^3 + \delta_1\delta_3 a^2 + \\
+\delta_2\delta_0 a^2 + \delta_2\delta_1 a + \delta_2^2 + \delta_2\delta_3 a^3 + \delta_3\delta_0 a^3 + \delta_3\delta_1 a^2 + \delta_3\delta_2 a + \delta_3^2 = \\
= \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + (\delta_0\delta_3 + \delta_1\delta_0 + \delta_2\delta_1 + \delta_3\delta_2)a + \\
+(\delta_0\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_0 + \delta_3\delta_1)a^2 + (\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3\delta_0)a^3 = \\
\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + (\delta_0\delta_3 + \delta_1\delta_0 + \delta_2\delta_1 + \delta_3\delta_2)(a + a^3) = \\
= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3).
\end{aligned} \tag{7}$$

Figyelembe véve, hogy F_2 karakterisztikája 2, kiszámoljuk a következő kifejezést:

$$\begin{aligned}
u_1 + u_1^* = (\gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3) + (\gamma_0 + \gamma_1 a^3 + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a) = \\
= 2\gamma_0 + \gamma_1(a + a^3) + 2\gamma_2 a^2 + \gamma_3(a + a^3) = (\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3).
\end{aligned}$$

Felhasználva a kapott eredményt meghatározzuk az alábbi szorzatot:

$$\begin{aligned}
(u_1 + u_1^*)u_2 = ((\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3))(\delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3) = \\
= ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_0)(a + a^3) + ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_1)(a^2 + 1) + \\
+((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_2)(a + a^3) + ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_3)(1 + a^2) = \\
= (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2)(a + a^3) + (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3)(a^2 + 1) = \\
= (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2).
\end{aligned} \tag{8}$$

Az (5), a (6), illetve a (7) és a (8) eredményeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
u_1^2 + u_2u_2^* = \gamma_0 + \gamma_2 + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + \\
(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = \gamma_0 + \gamma_2 + \chi(u_2) + \\
+(\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

és

$$(u_1 + u_1^*)u_2 = (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2) = 0. \tag{10}$$

Tehát, ha u másodrendű egysége az F_2D_8 csoportalgebrának, akkor (9) és (10) szerint együtthatóinak eleget kell tennie a következő feltételeknek:

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 + \chi(u_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2) = 0, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 + \sum_{i=0}^{3} \delta_i = 1, \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Mivel $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$, ezért a továbbiakban két esetet vizsgálunk.

1. eset: $\chi(u_1) = 0$ *és* $\chi(u_2) = 1$. Ekkor (11)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_2, \\ \gamma_1 = \gamma_3, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0. \end{cases}$$

Mivel, $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$ ezért $\delta_1 + \delta_3 = 1 + \delta_0 + \delta_2$. Kiszámoljuk a következő szorzatot:

$$(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = (\delta_0 + \delta_2)(1 + (\delta_0 + \delta_2)) =$$
$$= \delta_0 + \delta_2 + (\delta_0 + \delta_2)^2 = \delta_0 + \delta_2 + \delta_0 + \delta_2 = 0,$$

tehát a $(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0$ feltétel $\chi(u_2) = 1$ esetén mindig teljesül. Az általunk vizsgált esetben tetszőleges másodrendű elem a következő alakú lesz:

$$u = u_1 + u_2 b = (\gamma_0 + \gamma_1 a)(1 + a^2) + (1 + \delta_1(1 + a) + \delta_2(1 + a^2) + \delta_3(1 + a^3))b.$$

Mivel az $\gamma_0, \gamma_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ együtthatók szabadon megválaszthatók, ezért ebben az esetben 2^5 darab másodrendű elemet kapunk.

2. eset: $\chi(u_1) = 1$ *és* $\chi(u_2) = 0$. Ekkor (11)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 + \gamma_2, \\ \gamma_1 = \gamma_3, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0. \end{cases}$$

Mivel, $\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3=0$ ezért $\delta_1+\delta_3=\delta_0+\delta_2$. Felhasználva ezt az összefüggést, az utolsó feltételrendszer utolsó feltételéből kapjuk, hogy

$$(\delta_0+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)=(\delta_0+\delta_2)(\delta_0+\delta_2)=0,$$

azaz

$$\delta_0+\delta_2=0 \Rightarrow \delta_0=\delta_2.$$

Innen következik, hogy

$$\delta_1=\delta_3.$$

A második esetben tetszőleges másodrendű elem alakja a következő lesz:

$$u=1+(\gamma_2+\gamma_1 a+(\delta_0+\delta_1 a)b)(1+a^2).$$

Mivel az $\gamma_1,\gamma_2,\delta_0,\delta_1$ együtthatók szabadon megválaszthatók, ezért ebben az esetben 2^4-1 darab másodrendű elemet kapunk.

Tehát az egységcsoport másodrendű elemeinek a száma egyenlő $2^5+2^4-1=2^4(2+1)-1=3\cdot 2^4-1$-gyel.

A továbbiakban meghatározzuk az egységcsoport negyedrendű elemeit. Az egységcsoport u eleme negyedrendű elem lesz, ha $u^2\neq 1$ és $u^4=1$. Felhasználva, hogy $u^2=u_1^2+u_2u_2^*+(u_1+u_1^*)u_2b$ és $u_1^{*^2}=u_1^2$ kiszámoljuk tetszőleges egység negyedik hatványát

$$\begin{gathered}
u^4=(u_1^2+u_2u_2^*+(u_1+u_1^*)u_2b)^2=\\
=(u_1^2+u_2u_2^*)^2+(u_1^2+u_2u_2^*)(u_1+u_1^*)u_2b+\\
+(u_1+u_1^*)u_2b(u_1^2+u_2u_2^*)+(u_1+u_1^*)u_2b(u_1+u_1^*)u_2b= \qquad (12)\\
=u_1^4+(u_2u_2^*)^2+(u_1^2+u_2u_2^*)(u_1+u_1^*)u_2b+(u_1+u_1^*)u_2(u_1^{*2}+u_2u_2^*)b+\\
+(u_1+u_1^*)u_2(u_1^*+u_1)u_2^*=u_1^4+(u_2u_2^*)^2+(u_1+u_1^*)^2u_2u_2^*.
\end{gathered}$$

Az előző számításokat felhasználva meghatározzuk a következő kifejezéseket:

$$\begin{gathered}
u_1^4=((\gamma_0+\gamma_2)+(\gamma_1+\gamma_3)a^2)^2=(\gamma_0+\gamma_2)^2+(\gamma_1+\gamma_3)^2=\\
=\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3, \qquad (13)
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
(u_2u_2^*)^2 &= (\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3+(\delta_0+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)(a+a^3))^2 = \\
&= (\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3)+((\delta_0+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)(a+a^3))^2 = \\
&= \delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3+((\delta_0+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)a^2+(\delta_0+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)a^2) \\
&= \delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$$
(u_1+u_1^*)^2u_2u_2^* = ((\gamma_1+\gamma_3)(a+a^3))^2u_2u_2^* = (\gamma_1^2+\gamma_3^2)(a^2+a^2)u_2u_2^* = 0 \qquad (15)
$$

Felhasználva a (12), a (13), a (14) és a (15) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$
u^4 = \chi(u_1)+\chi(u_2) = 1.
$$

Mivel az $U(F_2D_8)$ tetszőleges elemének a negyedik hatványának eggyel egyenlő, így az egységcsoport elemeinek a rendje 1, 2, vagy 4 lesz.

5. F_2Q_8 egységcsoport elemeinek rendje

Legyen $F_2 = \{0, 1\}$ kételemű test és $Q_8 =< a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} >$ nyolcadrendű kvaterniócsoport.
Ekkor a csoportalgebra minden eleme felírható a következő alakban

$$u = \gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3 + \delta_0 b + \delta_1 ab + \delta_2 a^2 b + \delta_3 a^3 b,$$

ahol $\gamma_i, \delta_i \in F_2$ és $i = \overline{0, 3}$.

Legyen

$$u_1 = \gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3;$$

$$u_2 = \delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\chi(u_1) = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3;$$

$$\chi(u_2) = \sum_{i=0}^{3} \delta_i = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Az egységcsoport és a normalizált egységcsoport közötti összefüggésből tudjuk, hogy $U(F_2Q_8) = V(F_2Q_8) \times U(F_2) = V(F_2Q_8)$, ezért F_2Q_8 tetszőleges u egységére igaz, hogy $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$.
Meghatározzuk az egységcsoport elemeinek a rendjét. Legyen u tetszőleges eleme az $U(F_2Q_8)$-nak, ekkor $u = u_1 + u_2 b$. Az u másodrendű elem lesz, ha $u \neq 1$ és $u^2 = 1$.

$$\begin{aligned} u^2 &= (u_1 + u_2 b)(u_1 + u_2 b) \\ &= u_1^2 + u_2 u_2^* b^2 + (u_1 u_2 + u_2 u_1^*) b \\ &= u_1^2 + u_2 u_2^* a^2 + (u_1 + u_1^*) u_2 b = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

A (6), a (7) és a (16) eredményeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} u_1^2 + u_2 u_2^* a^2 = \gamma_0 + \gamma_2 + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) a^2 + (\gamma_1 + \gamma_3) a^2 + \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = \gamma_0 + \gamma_2 + (\chi(u_2) + \gamma_1 + \gamma_3) a^2 + \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1. \end{gathered} \tag{17}$$

Tehát, ha u másodrendű egysége az F_2Q_8 csoportalgebrának, akkor (10) és (17) szerint együtthatóinak eleget kell tennie a következő feltételeknek:

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 + (\chi(u_2) + \gamma_1 + \gamma_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2) = 0, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 = 1, \\ \gamma_1 + \gamma_3 + \sum_{i=0}^{3} \delta_i = 0, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Mivel $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$, ezért a továbbiakban két esetet vizsgálunk.

1. eset: $\chi(u_1) = 0$ *és* $\chi(u_2) = 1$. Ekkor (18)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 = 1, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2) = 0. \end{cases}$$

   Az utolsó egyenletrendszerből következik, hogy $\delta_1 + \delta_3 = 0$ és $\delta_0 + \delta_2 = 0$. Ez ellentmond a $\chi(u_2) = 1$ feltételnek.

2. eset: $\chi(u_1) = 1$ *és* $\chi(u_2) = 0$. Ekkor (11)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 + \gamma_2, \\ \gamma_1 = \gamma_3, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0. \end{cases}$$

   Mivel, $\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3 = 0$ ezért $\delta_1+\delta_3 = \delta_0+\delta_2$. Felhasználva ezt az összefüggést, az utolsó feltételrendszer utolsó feltételéből kapjuk, hogy

$$(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = (\delta_0 + \delta_2)(\delta_0 + \delta_2) = 0,$$

   azaz

$$\delta_0 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \delta_0 = \delta_2.$$

Innen következik, hogy

$$\delta_1 = \delta_3.$$

A második esetben tetszőleges másodrendű elem alakja a következő lesz:

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2).$$

Mivel az $\gamma_1, \gamma_2, \delta_0, \delta_1$ együtthatók szabadon megválaszthatók, ezért ebben az esetben $2^4 - 1$ darab másodrendű elemet kapunk.

Tehát az egységcsoport másodrendű elemeinek a száma egyenlő $2^4 - 1$-gyel.

A továbbiakban meghatározzuk az egységcsoport negyedrendű elemeit. Az egységcsoport u eleme negyedrendű elem lesz, ha $u^2 \neq 1$ és $u^4 = 1$. Felhasználva, hogy $u^2 = u_1^2 + u_2 u_2^* a^2 + (u_1 + u_1^*)u_2 b$ és $u_1^{*^2} = u_1^2$ kiszámoljuk tetszőleges egység negyedik hatványát:

$$\begin{aligned} u^4 &= (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2 + (u_1 + u_1^*)u_2 b)^2 = \\ &= (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2)^2 + (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2)(u_1 + u_1^*)u_2 b + \\ &+ (u_1 + u_1^*)u_2 b(u_1^2 + u_2 u_2^* a^2) + (u_1 + u_1^*)u_2 b(u_1 + u_1^*)u_2 b = \\ &= u_1^4 + (u_2 u_2^* a^2)^2 + (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2)(u_1 + u_1^*)u_2 b + (u_1 + u_1^*)u_2(u_1^{*2} + u_2 u_2^* a^2)b + \\ &+ (u_1 + u_1^*)u_2(u_1^* + u_1)u_2^* a^2 = u_1^4 + (u_2 u_2^* a^2)^2 + (u_1 + u_1^*)^2 u_2 u_2^* a^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Az előző számításokat felhasználva meghatározzuk a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} (u_2 u_2^* a^2)^2 &= ((\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a^3 + a))^2 = \\ &= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)a^2 + ((\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a^3 + a))^2 = \\ &= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ((\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)a^2) \\ &= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \end{aligned} \tag{20}$$

$$(u_1 + u_1^*)^2 u_2 u_2^* a^2 = ((\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3))^2 u_2 u_2^* a^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_3^2)(a^2 + a^2)u_2 u_2^* a^2 = 0 \tag{21}$$

Felhasználva a (13), a (19), a (20) és a (21) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$u^4 = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1.$$

Mivel az $U(F_2 Q_8)$ tetszőleges elemének a negyedik hatványának eggyel egyenlő, így az egységcsoport elemeinek a rendje 1, 2, vagy 4 lesz.

Összegzés

A csoporgyűrűk elmélete a matematika egy fontos ágazata, amelynek széleskörű az alkalmazása a természettudományokban is. Szakdolgozatom elkészítése során elsajátítottam a csoporgyűrűk elméletének alapvető fogalmait és tételeit. Megismerkedtem a csoportgyűrűk egységcsoportjaira vonatkozó legfontosabb tételekkel és definíciókkal, valamint a csoportgyűrűk involúciói fogalmával.

Az egységcsoport és normalizált egységcsoport összefüggéséből kiindulva, meghatároztam az egységcsoport elemeinek a rendjét és számát. Ehhez a szükséges jelölések bevezetése után, felhasználtam az elem rendjének definicióját és a kételemű test tulajdonságait.

Összességében szakdolgozatom eredményeként sikerült meghatározni az egységek rendjét, számát és alakját a kételemű test feletti nyolcad rendű diéder- és kvaternió-csoport csoportalgebrájának egységcsoportjában.

A kételemű test feletti nyolcad rendű diédercsoportban 47 másodrendű és 80 negyedrendű egység van. Egy másodrendű elem az egységcsoportból

$$u = (\gamma_0 + \gamma_1 a)(1 + a^2) + (1 + \delta_1(1 + a) + \delta_2(1 + a^2) + \delta_3(1 + a^3))b$$

vagy

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2)$$

alakú lehet, ahol $\gamma_i, \delta_i \in F_2$. Tetszőleges egység negyedik hatványa pedig eggyel egyenlő. A nyolcad rendű kvaterniócsoportban 15 másodrendű és 112 negyedrendű egység van. Az egységcsoport másodrendű elemei

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2)$$

alakúak. Tetszőleges egység negyedik hatványa pedig eggyel egyenlő.

Hivatkozások

[1] Bódi Béla "Bevezetés a csoportgyűrűk elméletébe". Kossuth egyetemi kiadó, Debrecen, 2008, 122 old.

[2] Jennings S.A, "The structure of athe group rings of a p-group over a modular field". Trans. Am. Mat. Soc. 50, 1941, 175-185

[3] Lombardo-Radice L. "Intorno ale algebre legate di ordino finito", Rend. Semin. Math. Univ., Roma 2 (1938), 312-320

[4] Passman D., "The algebraic structure of group rings", Wiley-Interscience, 1977.

[5] Polcino Milies C. and Sehgal S.K. "An introduction to group rings", Kluver Acad., 2002.

Резюме

Теорія групових кілець - важливий розділ математики, який широко застосовується в природничих науках. Під час виконання бакалаврської роботи я освоїв основні поняття і теореми теорії групових кілець, познайомився з найважливішими теоремами і означенями про групу одиниць групових кілець, а також з інволюціями групових кілець.

Взявши до уваги зв'язок між групою одиниць і нормалізованою групою одиниць групового кільця, я знайшов порядок елементів групи одиниць, їх вигляд та кількість. Для цього, після введення необхідних позначень, я використав означення порядку елемента групи та властивості поля із двох елементів.

У підсумку, результатом моєї роботи є визначення порядку, кількості і вигляду елементів групи одиниць діедральної групи та групи кватерніона восьмого порядку над полем з двох елементів.

У діедральній групі восьмого порядку над полем із двох елементів 47 одиниць другого порядку і 80 одиниць четвертого порядку. Будь-який елемент другого порядку з групи одиниць можна записати як

$$u = (\gamma_0 + \gamma_1 a)(1 + a^2) + (1 + \delta_1(1 + a) + \delta_2(1 + a^2) + \delta_3(1 + a^3))b$$

або

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2),$$

де $\gamma_i, \delta_i \in F_2$. Четверта степінь довільної одиниці завжди дорівнює одиниці.

У групі кватерніона восьмого порядку над полем із двох елементів 15 одиниць другого порядку і 112 одиниць четвертого порядку. Будь-який елемент другого порядку з групи одиниць можна записати наступним чином:

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2).$$

Четверта степінь довільної одиниці завжди дорівнює одиниці.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:
1007785633

Дата перевірки:
09.05.2021 00:26:29 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet

Дата звіту:
09.05.2021 00:54:42 EEST

ID користувача:
100006701

Назва документа: **Mozgovoj_Istvan_Az_egysegek_rendjenek_meghatarozasa**

Кількість сторінок: **24** Кількість слів: **5053** Кількість символів: **25369** Розмір файлу: **737.58 KB** ID файлу: **1007884565**

7.52% Схожість

Найбільша схожість: **3.09%** з Інтернет-джерелом (https://pt.scribd.com/doc/268541160/Solution-Arfken-7th)

7.52% Джерела з Інтернету | 92 .... Сторінка 26

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 87

Nyilatkozat

Alulírott, Mozgovoj István 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.