ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Дипломна робота

Використання векторів на зовнішньому незалежному оцінюванні в Україні та в атестаційних завданнях з математики в Угорщині

Нодь Йожеф Йожефович

Студент IV-го курсу

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

Освітній рівень: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2019

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**

старший викладач

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 2020 року

Протокол № ______ / 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „20” квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Дипломна робота

Використання векторів на зовнішньому незалежному оцінюванні в Україні та в атестаційних завданнях з математики в Угорщині

Освітній рівень: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Нодь Йожеф Йожефович

Науковий керівник: **Поллої Дезидер Федорович**

старший викладач

Рецензент: **Кудлотяк Чаба Анталович**

старший викладач

Берегове
2020

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3" від „20" квітня 2017 р.
Ф-КДМ-2

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

VEKTOROK AZ UKRAJNAI ÉS A MAGYARORSZÁGI MATEMATIKA ÉRETTSÉGI FELADATOKBAN

Szakdolgozat

Készítette: Nagy József

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Pallay Dezső

adjunktus

Recenzens: Kudlotyák Csaba

adjunktus

Beregszász – 2020

Tartalomjegyzék

Bevezetés

E dolgozat témája a vektorok az ukrajnai és a magyarországi matematika érettségi feladatsorokból.

Célja a vektoros feladatok szerepe az ukrajnai és a magyarországi matematika érettségi feladatsorokban. Továbbá, hogy Ukrajnában és Magyarországon mikor kezdik el tanulni a vektorokat. Valamint felmérni az érettségiző diákok között, hogy az összeállított feladatok közül az ukrajnai vagy a magyarországi feladatsorokat tudják könnyebben megoldani.

A mértan és az analitikus geometria a matematika egyik tudományágai. Találkozhatunk a vektorokkal az általános iskolai, a középiskolai és az egyetemi valamint a főiskolai feladatok megoldása közben. Legtöbbször egyfajta általánosítása a hagyományos vektorfogalomnak az egyes tudományágak saját fogalomalkotása, de az analógia legtöbbször nyilvánvaló.

A vektorokkal nem csak a geometriában találkozhatunk, hanem még a fizikában, a mechanikában, a lineáris algebrában, és a számítástechnikában is.

A "vektor" (a vector latin eredetű szó, jelentése: hordozó) elnevezést William Rowan Hamilton (1805-1565) ír matematikus alkotta. Az irányított szakaszra az AB jelölést először 1806-ban Jaen Robert Argand (1768-1822) alkalmazta. 1853-tól kis **r** betűvel is jelölték: ahogy Augustin Cauchy (1789-1857) francia matematikus is tette. Az $\overline{AB}$ jelölést csak a XX. századtól használják.[6, 150. old.]
A "skaláris" elnevezést a latin scaralis szóból ered, jelentése: lépcsőzetes. W. Hamilton használta először. [6, 170.old)

Ukrajnában a vektorokról először a kilencedik osztályban kezdenek tanulni a diákok. Ott tanulják meg a vektorok alapfogalmait továbbá, hogyan lehet összeadni, kivonni, szorozni két vektort, a vektorok számmal való szorzását és a vektorok skaláris szorzatát. A tízedik és tizenegyedik osztályban már a térbeli vektorokkal és ezen belül a vektorok vektoriális szorzatával végzett műveletekkel foglalkoznak. A főiskolában a vektorokat vegyes szorzatát alkalmazzák az analitikus geometriában és a differenciálgeometriában is. A középiskolában a vektorokat a síkon és a térben használják és ábrázolják.

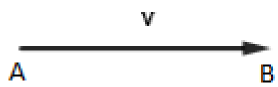
Magyarországon a vektorokról először a nyolcadik évfolyamon az alapfokú oktatásban tanulnak a vektorokról, mint irányított szakaszról, a két vektor összegéről és különbségéről.
A gimnáziumi oktatásban a 10. évfolyamon tanulják a vektorok szorzása számmal és a vektorok felbontását a síkban. A szakközépiskola 11 és 12. évfolyamában a vektorokról alapfogalmait ismétlik át, továbbá a vektorműveletek tulajdonságait, két vektor skaláris szorzatát, a skaláris szorzat tulajdonságainak felsorolását, és a vektorok koordinátái tanulják.

1. fejezet

Alapfogalmak

A következő fejezetben áttekintjük a vektorok alapfogalmait. Továbbá a vektorok műveleteit az összeadást, a szorzást, a skaláris, vektoriális és vegyes szorzatainak a fogalmait és tulajdonságait.

1.1. Definíció. ***A vektor fogalma:*** *Az irányított szakaszt vektornak nevezzük. Egy adott szakaszt irányítottnak mondunk, ha megadjuk a szakasz végpontjainak sorrendjét, azaz megmondjuk, hogy melyik a szakasz kezdőpontja és melyik a végpontja (1.1.ábra).*
A szakasz irányát a végpontjába helyezett nyillal rögzitjük. [1, 60. old.]



1.1. ábra.

A :kezdőpont

B :végpont

1.2. Definíció. ***A vektor jelölése:***
- a kezdő- és végpont megadásával, fölöttük nyíllal, pl. $\vec{AB}$*;*
- felülvonás kisbetűkkel: $\overline{a}, \overline{b}, ..., \overline{u}, \overline{v}$*;* [1, 60. old.]

1.3. Definíció. ***A vektor jellemzői:***
- nagysága: *a vektor hosszát értjük alatta, amelyet a vektor abszolútértékének nevezzük.*
Jelölése: $\left|\vec{AB}\right|$ *vagy* $|\vec{v}|$*;*
- iránya: *a végpontba helyezett nyil mutatja az irányt;*

- állása: *a vektort tartalmazó egyenes állása, helyzete, amelyet álltalában a sík egy kitűntetett egyeneséhez viszonyítunk és egy szöggel adunk meg. Két egyenes egyállású, ha párhuzamosak vagy egybeesnek.* [1, 60. old.]

1.2. ábra.

Az $\overline{u}$ és $\overline{v}$ vektorok (1.2.ábra) azonos állásuak, de ellentétes irányúak.

1.4. Definíció. *Azokat a vektorokat, melyeknek kezdőpontja egybeesik a végpontjával* ***nullvektornak*** *nevezzük.*
Jelölése: $\overline{0}$ *vagy* $\vec{0}$. *Nagysága nulla:* $|\overline{0}| = 0$.
Állása és iránya tettszőleges. [6, 149. old.]

1.5. Definíció. ***Ellentétes vektorok:*** *Az olyan vektorokat, amelyeknek nagyságuk és állásuk megegyezik, de irányuk ellentétes (1.3.ábra),ellentétes vektoroknak nevezzük.*
Az ellentett vektor jelőlése: $\bar{-v}$, $-\vec{A}B$.
Az ellentétes vektorok összege nullvektor: $\overline{v} + (\bar{-v}) = \overline{0}$.[1, 60. old.]

1.3. ábra.

1.6. Definíció. ***Két vektor egyenlősége:*** *Két vektor akkor és csakis akkor egyenlő, ha megegyezik nagyságuk, irányuk és állásuk (1.4.ábra). A két vektort egymásba eltolható.* [1, 60. old.]

$$\overline{u} = \overline{v} \text{ és } \bar{u} \| \bar{v}$$

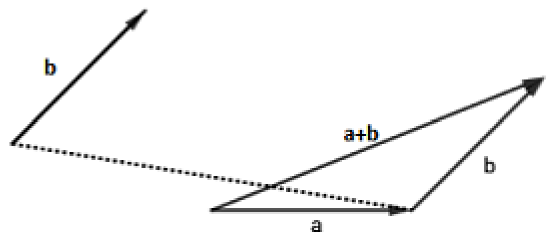
Ha két vektor azonos vagy ellentétes irányú, akkor a két vektor párhuzamos egymással vagy egy egyenesbe esnek. [1, 60. old.]

1.4. ábra.

1.7. Definíció. ***1.Vektorok összeadása:***

a)Két vektor összeadása: *Legyen adott két nempárhuzamos vektor. Összegük kétféleképpen is mehatározhatjuk.* [1, 60-61.old.]

1.8. Definíció. ***A háromszög-módszer****: Az egyik vektor végpontjába eltoljuk a másik kezdőpontját, majd az egyik vektor kezdőpontját összekötjük a másik vegtor végpontjával (1.5.ábra). Az összegvektor iránya a másik vektor végpontjába mutat.*[1, 61. old.]



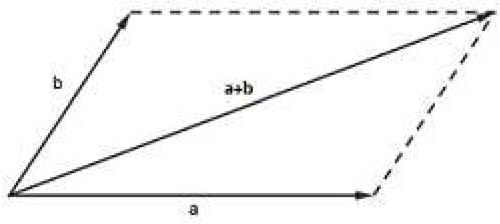
1.5. ábra.

$$\overline{a} \textit{ és } \overline{b} \textit{ összetevők vagy komponensek,}$$
$$\overline{a} + \overline{b} \textit{ összeg- vagy eredővektor,}$$
$$\textit{és } \left|\overline{a} + \overline{b}\right| < |\overline{a}| + \left|\overline{b}\right|$$

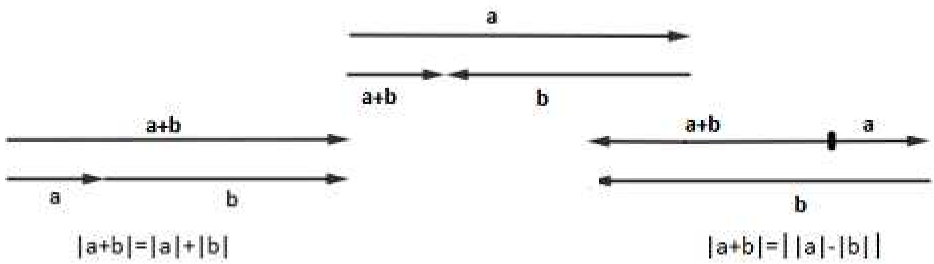
[1, 61. old.]

1.9. Definíció. ***A paralelogramma-módszer:*** *A két vektort közös kezdőpontba toljuk el. A végpontokon át párhuzamosokat húzunk mindkét vektorral. A párhuzamosok metszéspontját összekötjük a közös kezdőponttal (1.6.ábra). Ez lesz az összegvektor, melynek iránya a párhuzamosok metszéspontjába mutat.* [1, 61. old.]

$$\textit{Itt is igaz, hogy } \left|\overline{a} + \overline{b}\right| < |\overline{a}| + \left|\overline{b}\right|$$



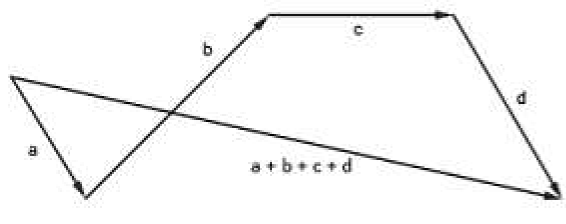
1.6. ábra.



1.7. ábra.

Legyen a két adott vektor párhuzamos. Ekkor az egyik vektor egyenesére, annak végpontjából felmérjük a másik vektort a megfelelő irányba, majd az egyik vektor kezdőpontját összekötjük a másik vektor végpontjával (1.7.ábra). [1, 61. old.]

1.10. Definíció. ***b)Több vektor összege:*** *Az összegzést a* ***sokszög-módszerrel*** *végezzük el: az egyik vektor végpontjába eltoljuk a másik vektor kezdőpontját. Ennek végpontjába eltoljuk a következő vektor kezdőpontját. Végül az első vektor kezdőpontját összekötjük az utolsó vektor végpontjával. Az összegvektor iránya az utolsó vektor végpontjába mutat (1.8.ábra).* [1, 61. old.]



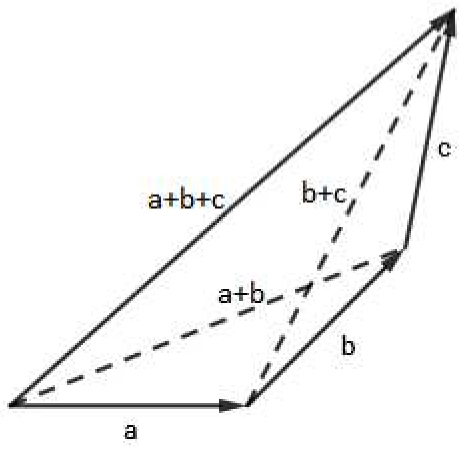
1.8. ábra.

Itt is igaz, hogy $\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}\right| \leq |\overline{a}|+\left|\overline{b}\right|+|\overline{c}|+\left|\overline{d}\right|$

[1, 61. old.]

1.11. Definíció. *2. A vektorösszeadás tulajdonságai:*

a) Asszociatív(csoportosítható): *három vagy annál több vektor összeadásakor az összetevők tetszés szerint csoportosíthatók (zárójelezhetők), az összegvektor ugyan az lesz (1.9.ábra).*[1, 62. old.]

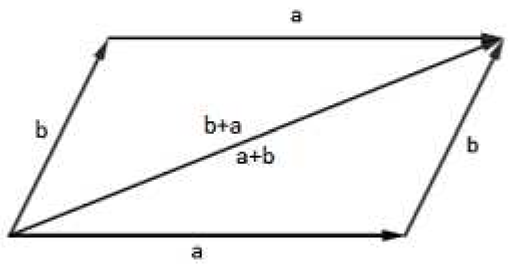


1.9. ábra.

Az ábrából leolvasható, hogy $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

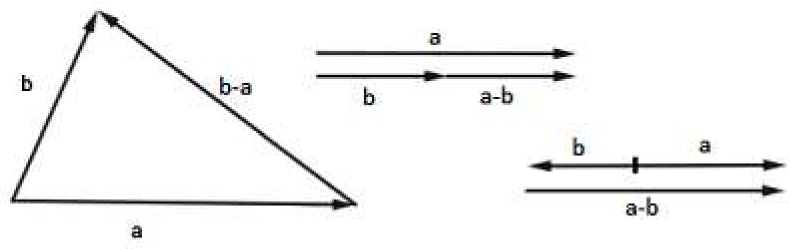
[1, 62. old.]

b) Kommutativ (felcserélhető): *összeadáskor az összetevők sorrendjét felcserélhetjük, az összegvektor ugyanaz lesz (1.10.ábra).A paralelogramma-módszerből leolvasható, hogy* $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$. [1, 61. old.]



1.10. ábra.

1.12. Definíció. ***3) Két vektor különbsége:*** *A két vektort közös kezdőpontba toljuk el. A két végpontot összekötjük. Ez lesz a különbségvektor, amelynek iránya mindig a kisebbítendő vektor végpontjába mutat (1.11.ábra).* [1, 62. old.]

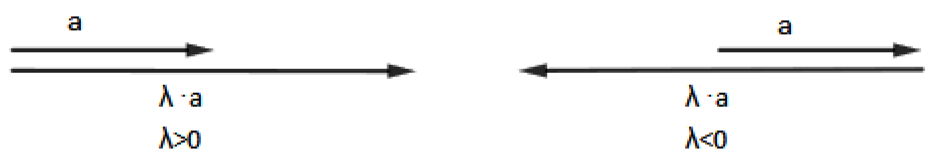


1.11. ábra.

A vektorkivonás nem kommutatív és nem asszociatív.

A $\overline{b} - \overline{a}$ és $\overline{a} - \overline{b}$ különbségvektorok ellentétes vektorok.[1, 62. old.]

1.13. Definíció. *Legyen λ tetszőleges valós szám. A $\lambda \cdot \overline{a}$ jelenti azt a vektort, amelynek hossza az $\overline{a}$ vektor hosszának $|\lambda|$-szorosa és iránya megegyezik az $\overline{a}$ vektor irányával, ha $\lambda < 0$, ellentétes az $\overline{a}$ vektor irányával, ha $\lambda < 0$ (1.12.ábra).* [1, 62. old.]



1.12. ábra.

Ha $\lambda \neq 0$, akkor az $\overline{a}$ és $\lambda \cdot \overline{a}$ vektorok párhuzamosak egymással: $\overline{a} \| \lambda \cdot \overline{a}$.
Ha $\lambda = \overline{a}$, akkor $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{0}$. Az $\overline{a}$ vektormennyiség, a λ skalármennyiség: a vektornak skalárral való szorzásakor mindig vektort kapunk. [1, 62. old.]

1.14. Definíció. *Két nem nullvektor skaláris szorzata a vektorok hosszának és hajlásszögük koszinuszának szorzatával egyenlő.*
Jelölése: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos(\overline{a} \wedge \overline{b})$ [6, 169. old.]

A skaláris szorzat tulajdonságai:

- *Egy vektor önmagával alkotott skaláris szorzatát a vektor négyzetének nevezzük.*
- *A skaláris szorzat kommutatív: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$*
- *A skaláris szorzat nem asszociatív: $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} \neq \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$*
- *A skaláris szorzatnak és egy valós számnak a szorzata viszont asszociatív:*
  $\lambda \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = (\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda \cdot \overline{b})$

- *A skaláris szorzat disztributív:* $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

- *Ha* $\phi = 0°$*, akkor* $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a} \cdot \overline{b}| \cdot \cos 0° = |\overline{a} \cdot \overline{b}| \cdot 1 = |\overline{a} \cdot \overline{b}|$

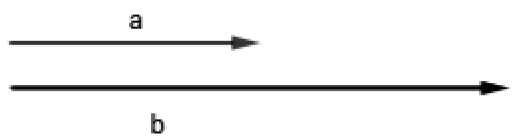
- *Ha* $\phi = 180°$*, akkor* $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a} \cdot \overline{b}| \cdot \cos 180° = |\overline{a} \cdot \overline{b}| \cdot (-1) = -|\overline{a} \cdot \overline{b}|$

- *Ha* $\phi = 90°$*, akkor* $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a} \cdot \overline{b}| \cdot \cos 90° = |\overline{a} \cdot \overline{b}| \cdot 0 = 0$*,*
  azaz, ha két vektor merőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk nulla.

- *Ha az egyik vektor nullvektor, akkor a skaláris szorzatuk szintén nulla.*

- *Ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor a két vektor merőleges egymásra, vagy az egyik nullvektor* [2, 199-200. old.]

1. Következmény. *- ha* $\lambda = 0$ *vagy* $\overline{a} = \overline{0}$*, akkor* $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{0}$*;*
megfordítva: ha $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{0}$*,akkor* $\lambda = 0$ *vagy* $\overline{a} = \overline{0}$*;*
- ha $\overline{a} = \overline{b}$*, akkor* $\lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$*;*
megfordítva: ha $\lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$ *és* $\lambda \neq 0$*, akkor* $\overline{a} = \overline{b}$*;*
- ha $\lambda = \mu$*, akkor* $\lambda \cdot \overline{a} = \mu \cdot \overline{a}$*;*
megfordítva: ha $\lambda \cdot \overline{a} = \mu \cdot \overline{a}$ *és* $\lambda \neq 0$*, akkor* $\lambda = \mu$*;*
- ha $\lambda = 1$*, akkor* $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{a}$*, azaz önmaga a vektor;*
- ha $\lambda = -1$*, akkor* $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{-a}$*, azaz ellentett vektort kapunk;*
- ha két vektor párhuzamos és egyik sem nullvektor, akkor az egyik vektor felirható a másik vektor számszorosaként (1.13.ábra).[1, 62-63. old.]



1.13. ábra.

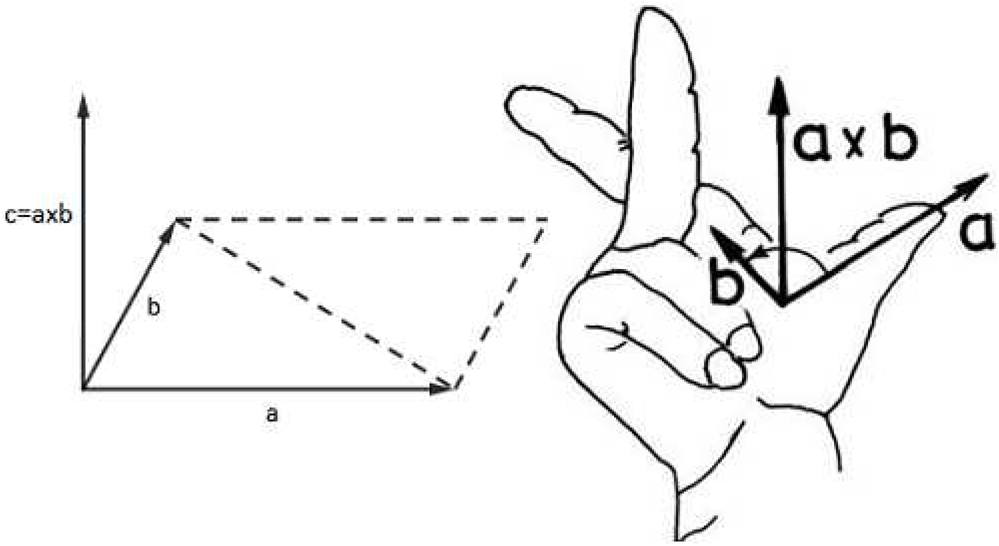
A számtényező egyértelműen van meghatározva: $\overline{b} \| \overline{a}$*, és így* $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$ *illetve* $\overline{a} = \frac{1}{\lambda}\overline{b}$*, ahol* $\lambda = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$*, ha* $\overline{a}$ *és* $\overline{b}$ *azonos irányú, illetve* $\lambda = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$*, ha* $\overline{a}$ *és* $\overline{b}$ *ellentétes irányú.*
[1, 63. old.]

1. Tétel. ***A vektorok számmal való szorzásának tulajdonságai:***
- kommutatív:$\lambda\overline{a} = \overline{a}\lambda$
- asszociatív:$\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$
- disztributív:$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$ *és* $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$. [1, 63. old.]

2. Tétel. *Vektororok vektoriális szorzata*

Az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok vektoriális vagy külső szorzatának azt a $\overline{c}$ vektort értjük, melynek abszolút értéke $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|\, sin(\overline{a}; \overline{b})$, az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok síkjára merőleges, továbbá $\overline{a}, \overline{b}$, és $\overline{c}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak (1.14.ábra). [3, 31. old.]

Ezt a szorzatot $\overline{a} \times \overline{b}$-vel (olvasás:"a kereszt b") jelöljük. Mint látható, az $\overline{a} \times \overline{b}$ vektor abszolút értéke az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorokból alakított paralelogramma területe. [3, 31. old.]



1.14. ábra. [8]

Bármely vektor önmagával nulla szöget alkot, s ezért az $\overline{a} \times \overline{a} = 0$ [3, 31. old.]

3. Tétel. *Ha két vektor párhuzamos (vagy legalább az egyik nullvektor), akkor vektoriális szorzatuk nulla (vektor). És fordítva, ha két vektor vektoriális szorzata nulla (vektor), akkor a két vektor párhuzamos, vagy legalább az egyik nullvektor.*[3, 32. old.]

A vektoriális szorzat abszolút értéke skaláris szorzatokkal is kifejezhető: [3, 32. old.]

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{\overline{a}^2\overline{b}^2 - (\overline{a} \cdot \overline{b})^2}$$

1.15. Definíció. *Ha a vektorok koordinátáikkal vannak megadva: $\overline{a}(a_1; a_2)$ és $\overline{b}(b_1; b_2)$, akkor a **két vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatainak összegével egyenlő**: $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.* [6, 169. old.]

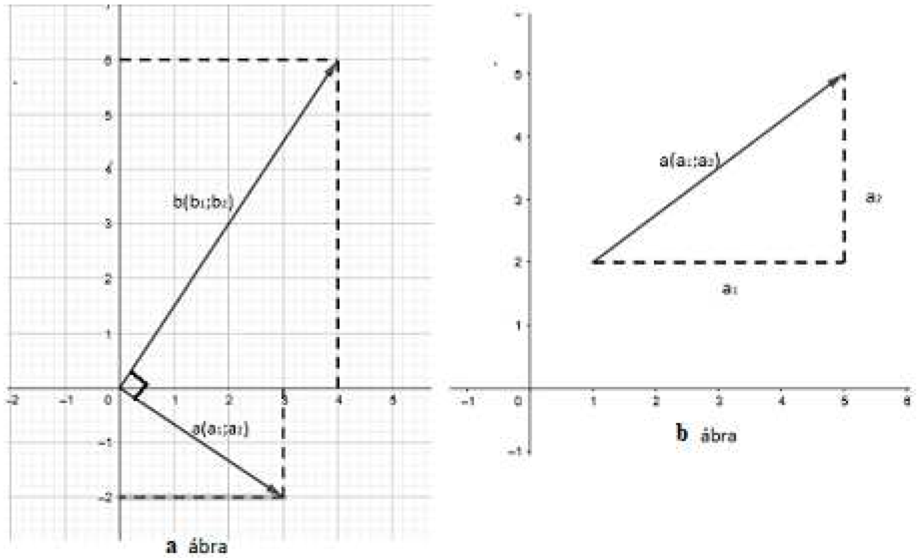
- *Ebből következik:*

  1) Két $\overline{a}(a_1; a_2)$ és $\overline{b}(b_1; b_2)$ vektor merőlegességének ismertetőjele (1.15a.ábra):

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0 \text{ [6, 169. old.]}$$

2) az $\overline{a}(a_1; a_2)$ (1.15b.ábra) vektor hossza

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \text{ [6, 169. old.]}$$



1.15. ábra.

3) a két vektor hajlásszögének képlete:

$$\cos(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \text{ [6, 169. old.]}$$

1.1. Bizonyítás. *Koordinátákkal megadott vektorok skaláris szorzatának képletének a levezetése:*

Adva van két vektor, az $\overline{a}(a_1; a_2)$ és $\overline{b}(b_1; b_2)$; bontsuk fel $\overline{e_1}$ és $\overline{e_2}$ vektorokra:

$\overline{a} = a_1 \cdot \overline{e_1} + a_2 \cdot \overline{e_2}$ *és* $\overline{b} = b_1 \cdot \overline{e_1} + b_2 \cdot \overline{e_2}$.

Alkalmazzuk a skaláris szorzás tulajdonságait:

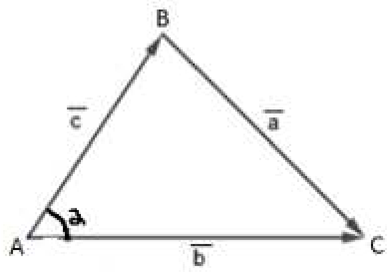
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_1 \cdot \overline{e_1} + a_2 \cdot \overline{e_2})(b_1 \cdot \overline{e_1} + b_2 \cdot \overline{e_2}) =$$
$$= (a_1 \cdot b_1) \cdot \overline{e_1}^2 + (a_1 \cdot b_2) \cdot \overline{e_1} \cdot \overline{e_2} + (a_2 \cdot b_1) \cdot \overline{e_2} \cdot \overline{e_1} + (a_2 \cdot b_2) \cdot \overline{e_2}^2$$

Figyelembe véve, hogy $\overline{e_1}^2 = \overline{e_2}^2 = 1$, és hogy $\overline{e_1 e_2} = \overline{e_2 e_1} = 0$, ezt kapjuk:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2. \text{ [6, 170. old.]}$$

1.2. Bizonyítás. *A skaláris szorzat fogalmát mértani bizonyításoknál és feladatok megoldásánál alkalmazzák. Például a koszinusz tétel így is bizonyítható.*[6, 170. old.]

Az ABC háromszög oldalai a, b és c, hegyesszöge $BAC\angle = \alpha$. Az oldalakra adjuk meg az $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, $\overline{BC} = \overline{a}$ vektorokat(1.16.ábra).



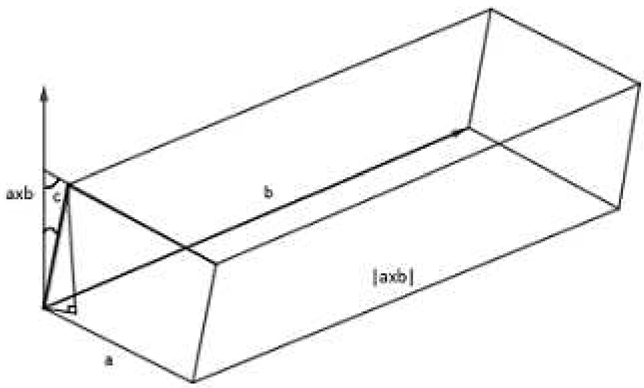
1.16. ábra.

Kifejezzük az $\overline{BC}$ *vektort az* $\overline{AC}$ *és* $\overline{AB}$ *vektorokkal:* $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$.
Vagyis $\overline{a} = \overline{b} - \overline{c}$. [6, 169. old.]

Határozzuk meg az a *vektor skaláris négyzetét:* $\overline{a}^2 = (\overline{b} - \overline{c})(\overline{b} - \overline{c}) = \overline{b}^2 \overline{c}^2 - 2\overline{b} \cdot \overline{c}$.
A kapott egyenlőségben értelmezzük a skaláris szorzatot. A meghatározzás alapján: $\overline{b} \cdot \overline{c} = \left|\overline{b}\right| \cdot |\overline{c}| \cdot \cos\alpha$, *a vektor skaláris négyzete pedig a hosszának négyzetével egyenlő.* *Így azt kapjuk, hogy* $|\overline{a}|^2 = \left|\overline{b}\right|^2 + |\overline{c}|^2 - 2\left|\overline{b}\right| \cdot |\overline{c}| \cdot \cos\alpha$, *vagyis* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \alpha$. [6, 170. old.]

4. Tétel. ***A vektorialis szorzat művelet tulajdonságai:***
1. A definició szerint, $\overline{b} \times \overline{a} = -(\overline{a} \times \overline{b})$, *tehát a vektoriális szorzat nem kommutatív, hanem úgynevezett alternáló művelet, vagyis a tényező sorrendjének megváltoztatásával a szorzat előjelet vált.* [3, 32. old.]
2. $k(\overline{a} \times \overline{b}) = k\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a} \times k\overline{b}$ [3, 32. old.]

5. Tétel. ***Vektorok vegyes szorzata:***
Az $(\overline{a} \times \overline{b})$ *vektorszorzatnak a* $\overline{c}$ *vektorral vett* $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ *skaláris szorzatát a három vektor vegyes szorzatának nevezzük. Ez a szorzat - ha tényezői egy síkba el nem tolhatók - a három vektor által kifeszített paralelepipedon trfogatának előjeles (jobbrendszert képező* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$*-nél pozitív, különben negatív) mérőszámát adja meg, éppen ezért térfogatszorzatnak is nevezik (1.17.ábra).* [3, 32-33. old.]



1.17. ábra.

Vabóban

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \cdot |\overline{c}| \cos\varphi$$

ahol φ az a szög, melyet $\overline{c}$ az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ síkjára merőleges és velük jobbrendszert képező $\overline{a} \times \overline{b}$ vektorral bezár. Ámde $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$ a paralelepipedon egyik oldallapjának a területe, $|\overline{c}| \cos\varphi$ pedig ehhez az oldallaphoz tartozó magasság, pozitív vagy negatív előjellel véve, aszerint, hogy $\overline{a} \times \overline{b}$ és $\overline{c}$ az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok síkjának ugyanazon az oldalán van, vagy pedig két különböző oldalán. [3, 33. old.]

Az $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektorokból hatféleképpen lehet vegyes szorzatot alkotni:

$$\begin{gathered}(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} \\ (\overline{b} \times \overline{a}) \cdot \overline{c} \\ (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot \overline{a} \\ (\overline{c} \times \overline{b}) \cdot \overline{a} \\ (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot \overline{b} \\ (\overline{a} \times \overline{c}) \cdot \overline{b}\end{gathered}$$

Mind a hat szorzat abszolút értéke ugyanannak a három vektor által kifeszített - paralelepipedonnak a térfogatával egyenlő. Az egy sorban álló szorzatok megeggyező előjelűek, az egymás alatt állók ellenkező előjelűek. [3, 33. old.]

Ellenőrizhető ugyanis, hogy ha $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, akkor $\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}$ és $\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}$ is ilyen rendszert alkotnak, ellenben pl.$\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}$ balrendszert alkot.[3, 34. old.]

Ezek szerint - mivel a vektorok skaláris szorzása kommutatív művelet - érvényes az

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$$

úgynevezett felcserélési tétel. Emiatt az $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ *vegyes szorzatot a következőkben röviden* $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ *- vel jelöljük.* [3, 34. old.]

Az előzőek alapján:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{a} = \overline{c} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} = -\overline{b} \cdot \overline{a} \cdot \overline{c} = -\overline{c} \cdot \overline{b} \cdot \overline{a} = -\overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \overline{b}$$

A térfogatszorzatban tehát megengedett a vektorok ciklusos felcserélése, azaz minden tényező helyébe a reá következő, az utolsó helyett pedig az elsőt irni. Látható továbbá, hogy a térfogatszorzatban két tényező felcserélése - annak megfelelően, hogy a vektorok sorrendje, ciklusa ezáltal az ellenkezőbe megy át - az előjelet megváltoztatja. [3, 34. old.]

Nyilvánvaló, hogy a vegyes szorzat az érték m-szeresére változtattja, ha egyik tényezőjét m-szeresére változtattjuk. [3, 34. old.]

Az $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ *térfogatszorzat zérus lehet anélkül, hogy az egyik tényező is zérusvektor volna. Ez esetben vagy* $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ *tehát* $\overline{a}$ *párhuzamos* $\overline{b}$*-vel, vagy* $\overline{c}$ *vektor merőleges az* $\overline{a} \times \overline{b}$ *vektorral és így az* $\overline{a}$ *és* $\overline{b}$ *vektorok síkjába esik. Tehát az* $\overline{a}$*,* $\overline{b}$ *és* $\overline{c}$ *vektor egy síkban fekszik.*[3, 34. old.]

Fordítva, ha az $\overline{a}$ *egy síkban van* $\overline{b}$*-vel és* $\overline{c}$*-vel, vagyis*

$$\overline{a} = l \cdot \overline{b} + m \cdot \overline{c}$$

akkor

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = l \cdot \overline{b} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) + m \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = 0$$

mivel

$$\overline{b} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{c} \cdot (\overline{b} \times \overline{b}) = 0$$

és

$$\overline{b} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{b}) = 0$$

Ez szemléletileg is világos, mivel ha az $\overline{a}$*,* $\overline{b}$*,* $\overline{c}$ *vektor egy síkban fekszik, akkor az általuk bezárt térfogat nulla.* [3, 34-35. old.]

Ha a figyelembe vesszük, hogy zérusvektor bármely síkkal párhuzamosnak tekinthető, mondjuk, hogy három vektor akkor és csak akkor egy síkbeli, ha térfogatszorzatuk zérus. A tétel szerint a vegyes szorzat zérus, ha két tényező egyenlő vagy egymással párhuzamos. [3, 35. old.]

6. Tétel. ***A vektoriális és a vegyes szorzat determináns alakban kifejezve***

Az $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$*,* $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *vektorok* $(\overline{a} \times \overline{b})$ *vektoriális szorzata determinánsokkal*

$$(\overline{a} \times \overline{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

alakban irható fel. [3, 35-35. old.]

A vegyes szorzat megegyezik annak a 3×3*-as négyzetes mátrixnak a determinánsával, melynek sor- vagy oszlopvektorai sorrendben az adott három vektorral egyeznek meg, azaz*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Az $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ *vektorokkal képzett* $(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d})$ *kifejezés felírható skaláris és vegyes szorzatok segítségével.*

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = ((\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{d}) \cdot \overline{c} - ((\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}) \cdot \overline{d}$$

tehát

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d}) \cdot \overline{c} - (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) \cdot \overline{d}.$$

[3, 36. old.]

2. fejezet

Feladatok

A következő fejezetben az ukrajnai és a magyarországi matematika érettségi feladatsorok vektorokat tartalmazó feladatait és azok megoldásaival találkozhatunk.

2.1. Az ukrajnai érettségi vektorokat tartalmazó feladatai és megoldásai

1. **A 2007-es év feladata**

   Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala 5 cm. Keresse meg az $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ skaláris szorzatot.

   Megoldás:

   $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| \cdot \cos\alpha = 5 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$

2. **A 2008-as év feladata**

   Határozza meg az $\overline{a}$ és $\overline{b} + \overline{c}$ vektorok közötti szöget fokokban, ha ismert, hogy $\overline{a}(2;2), \overline{b}(2;4), \overline{c}(-2;-6)$.

   Megoldás:

   $\overline{b} + \overline{c} = (2 + (-2); 4 + (-6)) = (0; 2)$

   $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = (2 \cdot 0; 2 \cdot (-2)) = -4$

   $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   $\left|\overline{b+c}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

   $\cos\phi = \frac{\overline{a};\overline{b+c}}{|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b+c}\right|} = \frac{-4}{2}\sqrt{2} \cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

   $\phi = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135°$

   Felelet:$\phi = 135°$

3. **A 2009-es év feladata**

   Keresse meg a $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ vektor koordinátáit; ha $\overline{a}(3; -1; 2); \overline{b}(-2; 2; 5)$ a helyes megoldást karikázza be(2.1.ábra)!

A	B	C	D	E
$\overline{c}$ (5; -3; -3)	$\overline{c}$ (4; 0; -1)	$\overline{c}$ (8; 0; -1)	$\overline{c}$ (4; -4; -1)	$\overline{c}$ (8; -4; -1)

2.1. ábra.

Megoldás:

$2 \cdot \overline{a} = 2 \cdot (3; -1; 2) = (6; -2; 4)$

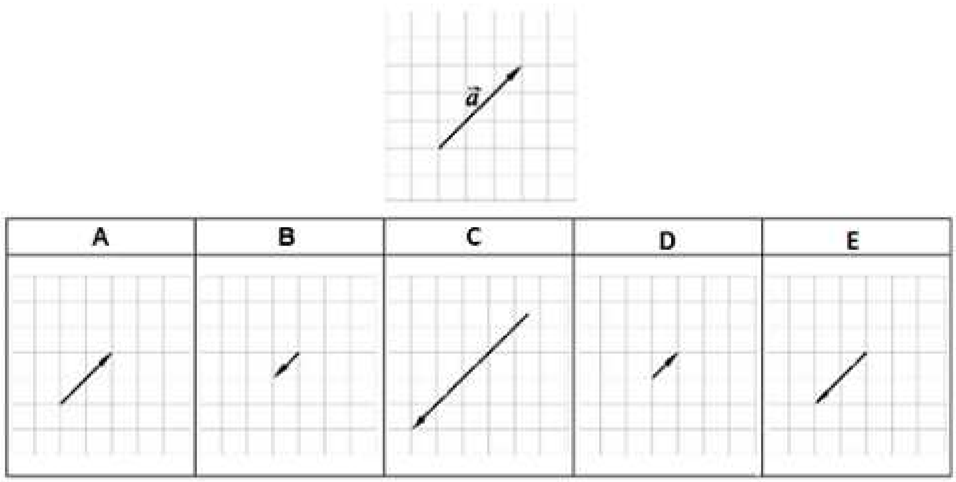
$\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b} = (6; -2; 4) - (-2; 2; 5) = (6 + 2; -2 - 2; 4 - 5) = (8; -4; -1)$

Felelet: E.

4. **A 2010-es év májusi feladata**

   A (2.2.ábrán) az $\overline{a}$ vektor látható. A következő vektorok közül melyik egyenlő a $\frac{-2}{3}\overline{a}$ vektorral?

   Megoldás:



2.2. ábra. [9, 4.feladat]

Felelet:E.

5. **A 2010-es év októberi feladata**

   Határozza meg az $\overline{a}(-3; 2; -1)$ és $\overline{b}(-1; -4; 5)$ skaláris szorzatát.

   Megoldás:

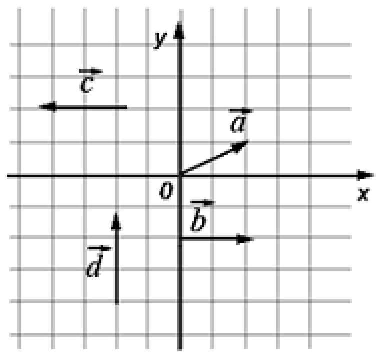
   $|\overline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

$|\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 16 + 25} = \sqrt{32}$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = (-3; 2; -1) \cdot (-1; -4; 5) = 3 - 8 - 5 = -10$

6. **A 2011-es év feladata**

A képen (2.3.ábra) vektorok találhatók $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ derékszögű koordinátarendszerben. Határozza meg az összefüggést a vektorpárok (1-4) és az állítások között (A-E) ami érvényes ezeknek a pároknak.



2.3. ábra. [10, 27.feladat]

1. a és b	A- merőlegesek
2. a és c	B- kollineárisak de nem egyenlők
3. c és d	C- Skaláris szorzat > 0
4. b és c	D- egyenlők a vektorok
.	E- a vektorok közötti szög tompaszögű

Megoldás:

	A	B	C	D	E
1			X		
2					X
3	X				
4		X			

2.4. ábra.

7. **A 2012-es év májusi feladata**

Az **x** mely értékeivel lesznek az $\overline{a}(2; x)$ és $\overline{b}(4; 10)$ vektorok merőlegesek? A helyes megoldást karikázza be a (2.5.ábra) táblázaton.

Megoldás:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot (-4) + x \cdot 10 = -8 + 10x = 0$

$10x = 8$

$x = \frac{8}{10} = 0{,}8$

A	B	C	D	E
-5	-0,8	0,8	5	20

2.5. ábra.

Felelet: C.

8. **A 2012-es év októberi feladata**

   Az **y** mely értékeivel lesznek az $\overline{a}(-3;5)$ és $\overline{b}(6;y)$ vektorok merőlegesek? A helyes megoldást karikázza be a (2.6.ábra) táblázaton.

   Megoldás:

   $a_x = -3; a_y = 5$

   $b_x = 6; b_y = ?$

   $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$

   $\frac{-3}{6} = \frac{5}{y}$

   $y = -\frac{6 \cdot 5}{3} = -\frac{30}{3} = -10$

A	B	C	D	E
-10	-2,5	2,5	3,6	10

2.6. ábra.

Felelet: A.

9. **A 2013-as év májusi feladata**

   A derékszögű koordinátarendszer xy síkján megadták az O(0;0) és A(6;8) pontokat. Az A pontból az x tengelyre merőlegest húztak. A B pont a merőleges talppontja. Párosítsa össze az (1-4) felsorolt mennyiségeket az (A-E) számértékével.(2.7.ábra).

Mennyiség	*Számérték*
1. Az OA vektor hossza	A. 0
2. Az A pont és x tengely távolsága	B. 5
3. A B pont ordinátája	C. 6

4. Az OAB háromszög köré írt körvonal sugara D. 8

. E. 10.

Megoldás:

1. $\overline{OA} = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

2. Az A pont távolsága megegyezik az ordinátával.

3. Mivel a pont Ox-on tengelyen fekszik, ezért annak ordinátája 0- val egyenlő.

4. A OAB háromszög $(B\angle = 90°)$, tehát a köré írt körvonal sugara egyenlő az átfogó felével:

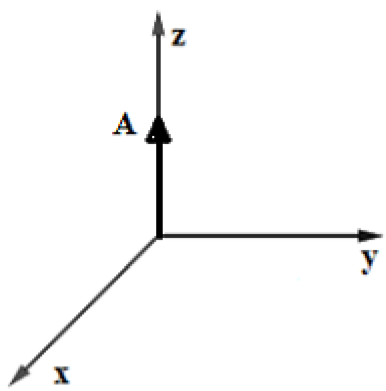
$\frac{1}{2} \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OA}| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

	A	B	C	D	E
1					X
2				X	
3	X				
4		X			

2.7. ábra.

10. **A 2014-as év feladata**

Az $\overline{OA}$ vektor a térbeli koordinátarendszer z tengely közepén fekszik (lásd a 2.8.ábrán) és kezdőpontja egybeesik az origóval. Határozza meg az $\overline{OA}$ vektor koordinátáját, ha hossza egyenlő 3 cm.



A	B	C	D	E
(1; 1; 1)	(0; 3; 0)	(0; 0; 3)	(3; 0; 0)	(3; 3; 3)

2.8. ábra.

Megoldás:

$x = 0; y = 0$

Mivel az $|\overline{OA}| = 3cm$ ezért $z = 3$

$\overline{OA}(0; 0; 3)$

Felelet:C.

11. **A 2015-ös év feladata**

A derékszögű koordinátarendszerben az xyz síkon az $A(2; 0; 0)$ és $B(-4; 2; 6)$ pontokon vannak megadva. Minden (1 - 4) mondat kezdethez válasszon egy olyan (A - E) mondat véget, hogy a kapott állítás igaz legyen (2.9.ábra).

Mondat kezdete	A.(-1; 1; 3)
1. Az AB szakasz középpontja	B.(0; 2; 0)
2. Az AB vektor koordinátája	C.(-4;0;6)
3. A B pont vetületi pontja az xy síkra	D.(-6; 2; 6)
4. A B pont vetületi pontja az xy síkra	E.(-2; 2; 6)

Megoldás:

1. Az AB szakasz középpontja M(x,y,z) pontal jelöljük.

A(2;0;0); B(-4; 2; 6)

$x = \frac{2-4}{2} = -1$

$y = \frac{0+2}{2} = 1$

$y = \frac{0+6}{2} = 3$

Az M pont koordinátái (- 1; 1; 3)

2. Meghatározzuk az $\overline{AB}(x_{\overline{AB}}; y_{\overline{AB}}; z_{\overline{AB}})$ vektor koordinátáit.

$x_{\overline{AB}} = -4 - 2 = -6$

$y_{\overline{AB}} = 2 - 0 = 2$

$z_{\overline{AB}} = 6 - 0 = 6$

Az $\overline{AB}$ vektor koordinátái $(-6; 2; 6)$

3. Az xz sikban ezek a koordináták vannak(x; 0; z), ezért ez a pont a(-4; 0; 6)

4. Az Oy középpontjában a koordináták a következők(0; y; 0), azért ez a pont (0; 2; 0)

	A	B	C	D	E
1	X				
2				X	
3			X		
4		X			

2.9. ábra.

12. **A 2016-os év feladata**

    A derékszögű koordinátarendszerben adva van egy ABCD paralelogramma, $\cos A = 0{,}4$. Határozza meg a paralelogramma BD átlójának hosszát, ha az $\overline{AB}(6;-8)$ és $\overline{AD}$ vektorok skaláris szorzata egyenlő 96 cm-rel.

    Megoldás:

    $|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

    $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \cos A = 10 \cdot |\overline{AD}| \cdot 0{,}4 = 4 \cdot |\overline{AD}| = 96$

    $|\overline{AD}| = \frac{96}{4} = 24$

    Az ABD háromszögre alkalmazzuk a koszinusz tételt:

    $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A$

    $BD^2 = 10^2 + 24^2 - 2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 0{,}4 = 484$

    $BD = \sqrt{484} = 22$

    Felelet: BD = 22 cm.

13. **A 2017-es év feladata**

    A koordinátasíkon adottak az $\overline{AB}$ és $\overline{a}(4;3)$ kölcsönösen merőleges vektorok. Határozza meg a B pont abszcisszáját, ha A(-2;0) és a B pont pedig az $y = 2x$ egyenesre illeszkedik.

    Megoldás:

    $\overline{AB} \perp \overline{a} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{a} = 0$

    $\overline{a}(4;3); B(x;y)$

    $y = 2x; B(x;2x)$

    $A(-2;0); B(x;2x)$

    $\overline{AB}(x+2, 2x)$

    $\overline{AB} \cdot \overline{a} = 4 \cdot (x+2) + 3 \cdot 2x = 4x + 8 + 6x = 10x + 8$

    $10x = -8$

$x = -0{,}8$

Felelet: A B pont abszcisszája -0,8.

14. **A 2018-as év feladata**

    A derékszögű koordinátarendszer síkján az $\overline{AB}$ és $\overline{a}(4;3)$ kollineáris vektorok vannak megadva. Határozza meg a B pont abszcisszáját, ha A(-4;1), a B pont pedig az y = 3 egyenesen fekszik.

    Megoldás:

    $A(-4;1); B(x;y)$

    $y = 3; B(x;3)$

    $\overline{a}(3;-5)$

    $\overline{AB}(x+4,2)$

    $\frac{x+4}{3} = \frac{2}{-5}$

    $-5(x+4) = 2 \cdot 3$

    $-5x - 20 = 6$

    $-5x = 26$

    $x = -\frac{26}{5} = -5\frac{1}{5} = -5{,}2$

    $x = -5{,}2$

    Felelet: A B pont abszcisszája -5,2.

2.2. A magyarországi érettségi vektorokat tartalmazó feladatai és megoldásai

1. **A 2005-ös év májusi feladatai**

   Adottak az $\overline{a}(4;3)$ és $\overline{b}(-2;1)$ vektorok.

   a) Adja meg az $\overline{a}$ vektor hosszát.

   b) Számítsa ki az $\overline{a}+\overline{b}$ koordinátáit.[11, 12.feladat]

   Megoldás:

   a) $|\overline{a}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

   b) $\overline{a}+\overline{b} = (4;3)+(-2;1) = (4-2;3+1) = (2;4)$

2. **A 2005-os év októberi feladatai**

   1) Írja fel $\overline{a}(-2;7)$ ponton átmenő $\overline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét![12, 5.feladat]

   2) Adottak az $\overline{a} = (6;4)$ és az $\overline{a}-\overline{b} = (11;5)$ vektorok. Adja meg a $\overline{b}$ vektort a koordinátával![12, 7.feladat]

   Megoldás:

   1) $\overline{n}(5;8)$; $\overline{a}(-2;7)$

   $5x+8y = -10+56$

   $5x+8y = 46$

   2) $\overline{a} = (6;4)$

   $\overline{a}-\overline{b} = (11;5)$

   $\overline{b}-?$

   $6-b_1 = 11$

   $4-b_2 = 5$

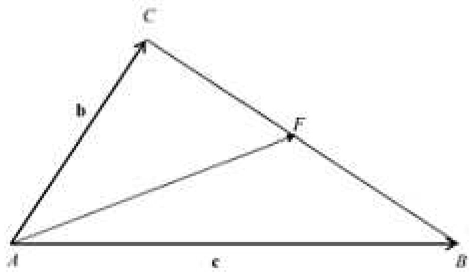
   $\overline{b}(-5;-1)$

3. **A 2006-os év februári feladata**

   Az ABC háromszög (2.10.ábra) két oldalának vektora $\overline{AB} = \overline{c}$ és $\overline{AC} = \overline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató $\overline{AF}$ vektort! [13, 10.feladat]

   Megoldás:

   $\overline{AB} = \overline{c}$



2.10. ábra.

$\overline{AC} = \overline{b}$

$\overline{AF} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$

4. **A 2007-es év októberi feladata**

   Fejezze ki az $\overline{i}$ és a $\overline{j}$ vektorok segítségével a $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ vektort, ha $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$ és $\overline{b} = -\overline{i} + 5\overline{j}$![14, 10.feladat]

   Megoldás:

   $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$

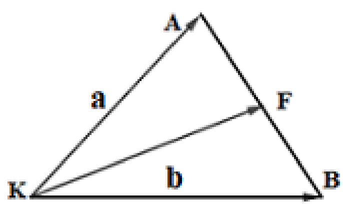
   $\overline{b} = -\overline{i} + 5\overline{j}$

   $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b} = 2(3\overline{i} - 2\overline{j}) - (-\overline{i} + 5\overline{j}) = 6\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{i} - 5\overline{j}$

   $\overline{c} = 7\overline{i} - 9\overline{j}.$

5. **A 2008-as év májusi feladata**

   Az ABCD négyzet középpontja K, az AB oldal felezőpontja F. Legyen $\overline{a} = \overline{KA}$ és $\overline{b} = \overline{KB}$. Fejezze ki az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok segítségével a $\overline{KF}$ vektort (2.11.ábra) ! [15, 6.feladat]



2.11. ábra.

   Megoldás:

   $\overline{a} = \overline{KA}$

   $\overline{b} = \overline{KB}$

   $\overline{KF} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$

6. **A 2008-as év októberi feladata**

   Az A(-7 ; 12) pontot egy $\overline{r}$ vektorral eltolva a B(5 ; 8) pontot kapjuk.

   Adja meg az $\overline{r}$ vektor koordinátáit ! [16, 4.feladat]

   Megoldás :

   A(-7 ; 12)

   B(5 ; 8)

   $\overline{r}-?$

   $\overline{r} = (5 + 7; 8 - 12) = (12; -4)$

   $\overline{r} = (12; -4)$

7. **A 2009-as év októberi feladata**

   Számítsa ki az $\overline{a}(5; 8)$ és $\overline{b}(-40; 25)$ vektorok skaláris szorzatát ! Határozza meg a két vektor által bezárt szöget ! [17, 10.feladat]

   Megoldás :

   $\overline{a}(5; 8)$; $|\overline{a}| = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9{,}43$

   $\overline{b}(-40; 25)$; $|\overline{b}| = \sqrt{(-40)^2 + 25^2} = \sqrt{1600 + 625} = \sqrt{2225} = 47{,}16$

   $\overline{a} \cdot \overline{b} = 5 \cdot (-40) + 8 \cdot 25 = -200 + 200 = 0$

   $0 = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 90°$; $\cos 90° = 0$

   Felelet : A két vektor álltal bezárt szög derékszögű.

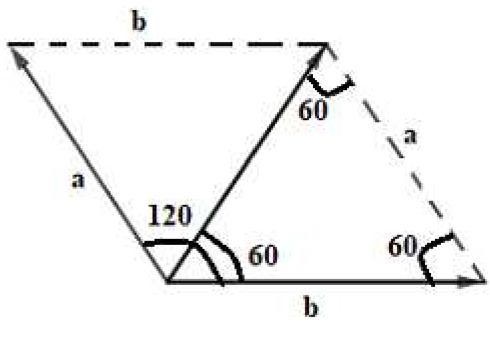
8. **A 2012-es év októberi feladata**

   Az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, mindkét vektor hossza 4 cm. Határozza meg az $\overline{a}$ + $\overline{b}$ vektor hosszát(2.12.ábra) ! [18, 10.feladat]

   Megoldás :

   $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 4cm$; $\cos \alpha = 120°$

   $|\overline{a} + \overline{b}| = 4cm$



2.12. ábra.

9. **A 2013-as év májusi feladata**

A PQR háromszög csúcsai: P(-6; -1), Q(6; -6) és R(2; 5)(2.13.ábra).

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

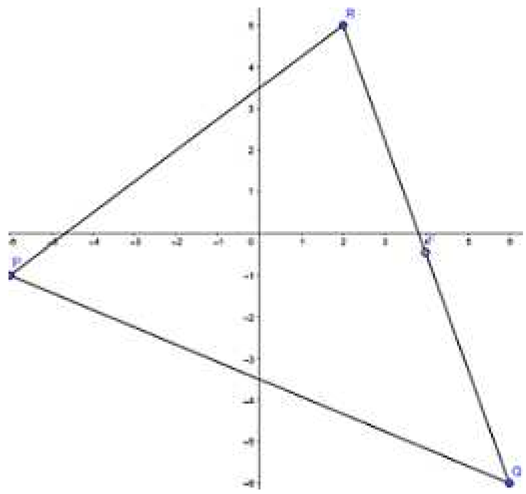
b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! [19, 14.feladat]

Megoldás:

P(-6; -1)

Q(6; -6)

R(2; 5)



2.13. ábra.

A QR szakasz felezőpontja: F(4;-0,5)

$\overline{PF}(10; 0{,}5)$ súlyvonal.

$x - 20y = 14$ - a súlyvonal egyenlete

$\overline{PQ} = (6 - (-6); -6 - (-1)) = (12; -5)$

$\overline{PR} = (2 - (-6); 5 - (-1)) = (8; 6)$

$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = 12 \cdot 8 + (-5) \cdot 6 = 66$

$|\overline{PQ}| = 13$; $|\overline{PR}| = 10$

$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = 66$

$66 = 13 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha \approx 0{,}50$

Felelet:$\alpha = 59{,}5°$

10. **A 2014-es év októberi feladata**

Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az (1 ; -3) ponton, és egyik normálvektora a (8 ; 1) vektor ! [20, 4.feladat]

Megoldás :

$\overline{n}(8;1)$; $(1;-3)$

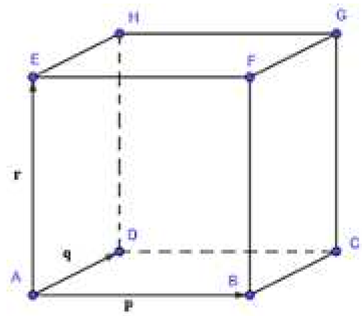
$Ax + By = C$

$8 \cdot x + 1 \cdot y = 8 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 5$

$8x + y = 5$ - az egyenes egyenlete.

11. **A 2015-ös év májusi feladata**

A (2.14.ábrán) látható kocka **A** csúcsából kiinduló élvektorai $\overline{AB} = \overline{p}$; $\overline{AD} = \overline{q}$ és $\overline{AE} = \overline{r}$. Fejezze ki $\overline{p}, \overline{q}$ és $\overline{r}$ segítségével a $\overline{GC}$, az $\overline{AG}$ és az $\overline{HF}$ vektorokat ! [21, 11.feladat]



2.14. ábra.

Megoldás :

$\overline{GC} = -\overline{r}$

$\overline{AG} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$

$\overline{FH} = \overline{q} - \overline{r}$

12. **A 2015-ös év októberi feladata**

Az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsa ki az $\overline{AB} + \overline{AC}$ vektor hosszát !

b) Számítsa ki az $\overline{AB} - \overline{AC}$ vektor hosszát ! [22, 16.feladat]

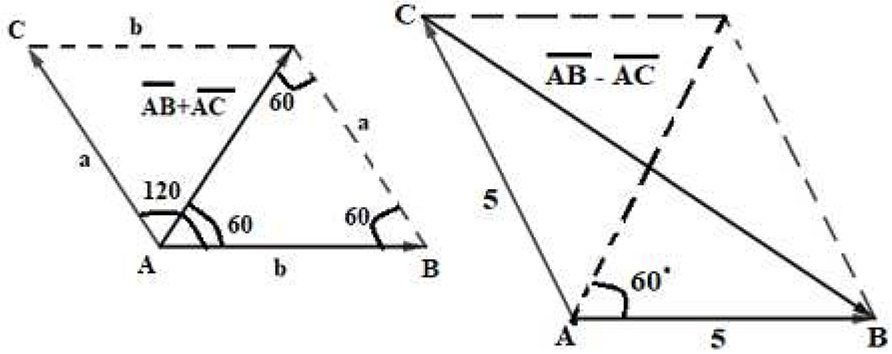
Megoldás :

$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = 5cm$

a) $\overline{AB} + \overline{AC} = 5$

b) $|\overline{AB} - \overline{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120°} =$

$= \sqrt{25 + 25 - 50 \cdot \cos 120°} \approx 8{,}66$

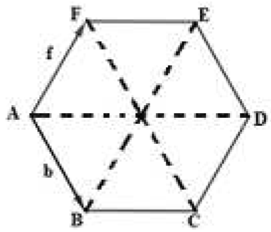


2.15. ábra.

13. **A 2019-es év májusi feladata**

Az ABCDEF (2.16.ábra) szabályos hatszögben $\overline{b} = \overline{AB}$ és $\overline{f} = \overline{AF}$. Fejezze ki a $\overline{b}$ és $\overline{f}$ vektorok segítségével az $\overline{AD}$ vektort! [23, 7.feladat]

Megoldás:



2.16. ábra.

$\overline{b} = \overline{AB}$

$\overline{f} = \overline{AF}$

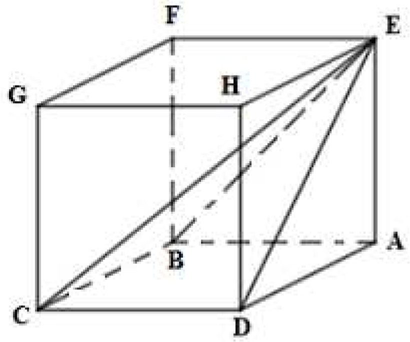
$\overline{AD} = ?$

$\overline{AD} = 2\overline{b} + 2\overline{f}$

Mivel a hatszög minden oldala egyenlő ezért, ha meghuzzuk az átmérőket akkor 6 egyenlő oldalú háromszöget kapunk.

14. **A 2019-es év októberi feladata**

Az ABCDEFGH kocka (2.17.ábra) élhosszúsága 6 cm. Fejezze ki az $\overline{EC}$ vektort az $\overline{AB}$, az $\overline{AD}$ és az $\overline{AE}$ vektorok segitségével. [24, 17.feladat]



2.17. ábra.

Megoldás:

$\overline{EC} = \overline{EA} + \overline{AD} + \overline{DC}$

$\overline{EA} = -\overline{AE}$ és $\overline{DC} = \overline{AB}$

$\overline{EC} = -\overline{AE} + \overline{AD} + \overline{AB}$

3. fejezet

Feladatsorok

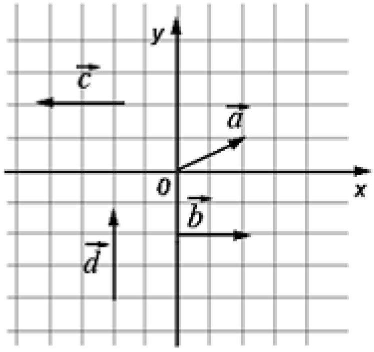
A következő fejezetben az ukrajnai és a magyarországi matematika érettségi feladatokból összeállított vektoros feladatsorokat láthatunk, amelyekkel szerettük volna összehasonlítani a beregszászi érettségiző diákok tudásszintjét a vektorok témaköréből, és az elkészített feladatsorokat megíratni a város iskoláinak végzősei között. Mindkét tesztet különkülön megírattuk volna, így összetudtuk volna hasonlítani az érettségizők tudásszintjét az iskolák között, valamint azt is, hogy az ukrán, vagy a magyar feladatokat oldották volna meg jobban. Erre viszont a karantén miatt nem kerülhetett sor.

3.1. Az ukrajnai feladatsor

1. Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala 5 cm. Keresse meg az $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ skaláris szorzatot.

2. Határozza meg az $\overline{a}$ és $\overline{b} + \overline{c}$ vektorok közötti szöget fokokban, ha ismert, hogy $\overline{a}(2;2), \overline{b}(2;4), \overline{c}(-2;-6)$.

3. A képen (3.1.ábra) vektorok találhatók $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ derékszögű koordinátarendszerben. Határozza meg az összefüggést a vektorpárok (1-4) és az állítások között (A-E) ami érvényes ezeknek a pároknak.



3.1. ábra.

1. a és b — A- merőlegesek
2. a és c — B- kollineárisak de nem egyenlők
3. c és d — C- Skaláris szorzat > 0
4. b és c — D- egyenlők a vektorok
. — E- a vektorok közötti szög tompaszögű

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					

4. A derékszögű koordinátarendszerben adva van egy ABCD paralelogramma, $\cos A = 0{,}4$. Határozza meg a paralelogramma BD átlójának hosszát, ha az $\overline{AB}(6; -8)$ és $\overline{AD}$ vektorok skaláris szorzata egyenlő 96 cm-rel.

5. Az **y** mely értékeivel lesznek az $\overline{a}(-3; 5)$ és $\overline{b}(6; y)$ vektorok merőlegesek? A helyes megoldást karikázza be a (3.2.ábra) táblázaton.

A	B	C	D	E
-10	-2,5	2,5	3,6	10

3.2. ábra.

6. A derékszögű koordinátarendszer síkján az $\overline{AB}$ és $\overline{a}(4; 3)$ kollineáris vektorok vannak megadva. Határozza meg a B pont abszcisszáját, ha A(-4;1), a B pont pedig az y = 3 egyenesen fekszik.

3.2. A magyarországi feladatsor

1. Adottak az $\overline{a}(4;3)$ és $\overline{b}(-2;1)$ vektorok.

   a) Adja meg az $\overline{a}$ vektor hosszát.

   b) Számítsa ki az $\overline{a}+\overline{b}$ koordinátáit.[11, 12.feladat]

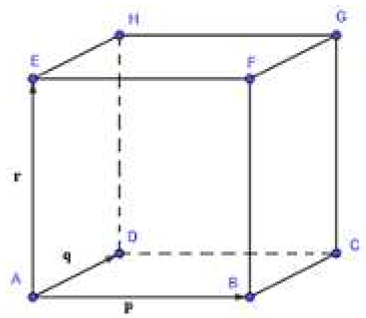
2. Írja fel $\overline{a}(-2;7)$ ponton átmenő $\overline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét![12, 5.feladat]

   2) Adottak az $\overline{a}=(6;4)$ és az $\overline{a}-\overline{b}=(11;5)$ vektorok. Adja meg a $\overline{b}$ vektort a koordinátával![12, 7.feladat]

3. Fejezze ki az $\overline{i}$ és a $\overline{j}$ vektorok segítségével a $\overline{c}=2\overline{a}-\overline{b}$ vektort, ha $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}$ és $\overline{b}=-\overline{i}+5\overline{j}$![14, 10.feladat]

4. Számítsa ki az $\overline{a}(5;8)$ és $\overline{b}(-40;25)$ vektorok skaláris szorzatát! Határozza meg a két vektor által bezárt szöget![17, 10.feladat]

5. A (3.3.ábrán) látható kocka **A** csúcsából kiinduló élvektorai $\overline{AB}=\overline{p}$; $\overline{AD}=\overline{q}$ és $\overline{AE}=\overline{r}$. Fejezze ki $\overline{p},\overline{q}$ és $\overline{r}$ segítségével a $\overline{GC}$, az $\overline{AG}$ és az $\overline{HF}$ vektorokat! [21, 11.feladat]



3.3. ábra.

6. Az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ vektorok $120°$-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

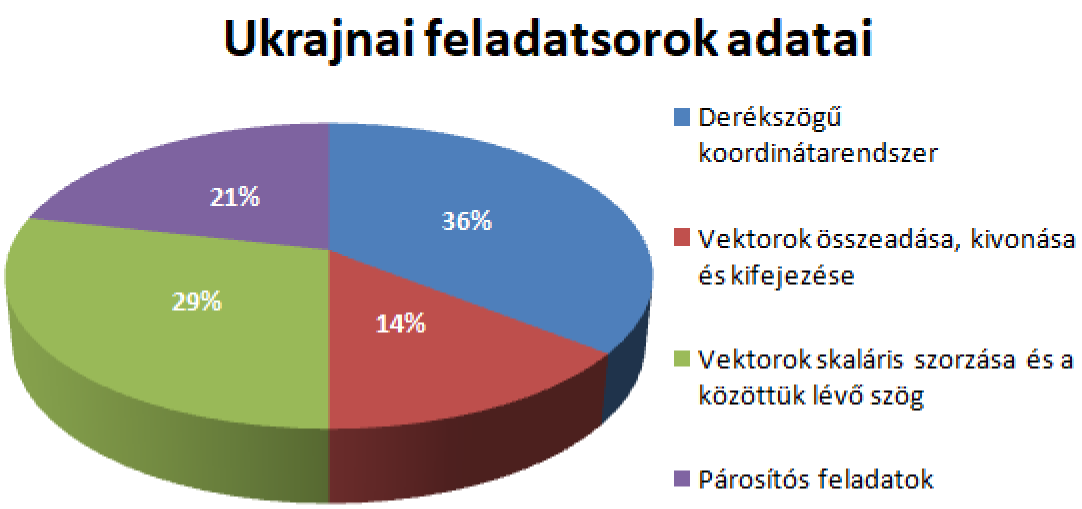
   a) Számítsa ki az $\overline{AB}+\overline{AC}$ vektor hosszát!

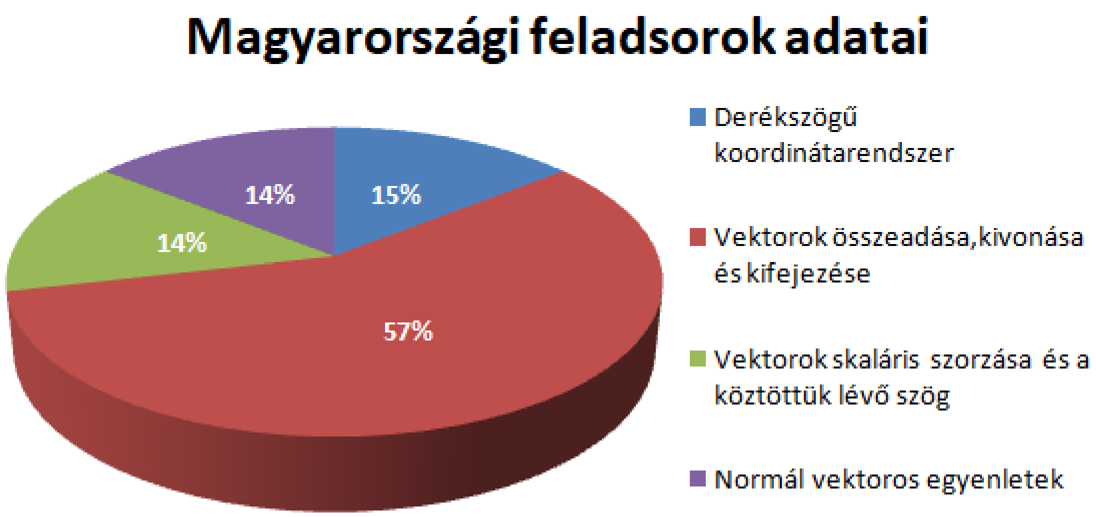
   b) Számítsa ki az $\overline{AB}-\overline{AC}$ vektor hosszát![22, 16.feladat]

Megvizsgáltam a magyarországi és az ukrajnai matematika érettségikből a vektoros feladatokat. A magyarországiban csak kidolgozásos feladatok voltak. Az ukrajnaiban nem csak kidolgozós feladatok, hanem olyanok is voltak, hogy meg volt adva öt megoldás, és ki kellett választani ezek közül a helyes megoldást, és voltak olyan feladatok is, amelyekben meg kellett keresni, például a megadott mondatok kezdetetének a párját, úgy, hogy igaz állítást kapjunk.

Az ukrajnai érettségiben a legtöbbször derékszögű koordinátarendszeren vannak megadva a vektorok, ez kevesebb, mint a 40 %-át teszik ki, a magyarországi érettségiben pedig csak 10-20 %-át teszik ki a feladatoknak. A magyarországi feladatokban a legtöbbször csak összeadni és kivonni kell a vektorokat vagy kifejezni egy vektort több vektoron keresztül, ezek a feladatok több mint az 50 %-át teszi ki a feladatoknak. Még vannak olyan feladatok, ahol az egyenes egyenletét a normálvektorok segítségével kell meghatározni ez a 14 %-át adja. Néhány feladatnál ábrákkal segítenek a diákoknak, hogy a feladatokat könnyebben lehessen átlátni.

Az ukrajnai feladatokban is található néhány feladat az összeadásra és a kivonásra, de leginkább a vektorok skaláris szorzásán és a köztük lévő szög kiszámításán van a hangsúly, amely a 30 %-át teszi ki az érettségi feladatokban. Ezeknél a feladatoknál megvannak adva különböző adatok és csak a helyes megoldást kell megadni, és a 2016-os évtől már csak kidolgozós fedatok vannak a vektorokkal, hasonlóak mint a magyarországi érettségiben.


Ukrajnai feladatsorok adatai
36%
14%
29%
21%
Derékszögű koordinátarendszer
Vektorok összeadása, kivonása és kifejezése
Vektorok skaláris szorzása és a közöttük lévő szög
Párosítós feladatok


Magyarországi feladsorok adatai
15%
57%
14%
14%
Derékszögű koordinátarendszer
Vektorok összeadása,kivonása és kifejezése
Vektorok skaláris szorzása és a köztöttük lévő szög
Normál vektoros egyenletek

Összefoglalás

Ebben a dolgozatban bemutattam a vektorokról szóló alapfogalmakat, hogy mire kell figyelni a vektorok összeadásánál és kivonásánál valamint a vektorok számmal való szorzásánál, a vektorok skaláris-vektoriális és vegyes szorzásánál. Továbbá megnéztem az ukrajnai és a magyarországi érettségi feladatsorokat matematikából, hogy melyik évben milyen vektorral kapcsolatos feladatok szerepeltek bennük.

A második fejezetben az matematika érettségi feladatsoraiból a vektorokkal kapcsolatos feladatokkal találkozhatunk és azok megoldásaival.

A harmadik fejezetben szereplő feladatsorokhoz hasonló feladatokkal szerettem volna megíratatni az érettségiző diákokkal, de a karantén miatt ezt nem sikerült megvalósítanom.

Arra a következtetésre jutottam a kutatásom folyamán, hogy az ukrajnai matematika érettségi feladatsorokban minden évben legalább egy vektoros feladat megtalálható, míg a magyarországi érettségi feladatsorokban némelyik évben nem található vektoros feladat.

A munka eredménye, hogy most már jobban értem az alapfogalmakat a vektorokról és könnyebben tudom alkalmazni a skaláris, vektoriális és vegyes szorzatokkal kapcsolatos feladatok megoldása közben. Az ukrajnai- és a magyarországi matematika érettségikben legtöbbször csak egy vektoros feladat található. Továbbá Magyarországon a vektorokat összesen 18 órában tanulják, ebből 4 órát Általános iskolában és 14 órát a Középiskolában. Ukrajnában a vektorokat összesen 23 órában tanulják, ebből 13 órát a kilencedik osztályban és 10 órát a tízedik osztályban.

Felhasznált irodalom

1. Simon Béla. Matek érettségi, Nyíregyháza, Shannon iroda, 2003.(60 - 63. old.)

2. Simon Béla. Nehéz matek könnyedén II., Nyíregyháza, Shannon iroda, 2001.(194-197.old.)

3. Pallay Dezső. Analitikus geometria. PoliPrint, Ungvár, 2010. (21 - 36. old.)

4. Pogorelov O. V. Mértan 10 - 11. Lviv, Szvit Kiadó, 1998.(50 - 52. old.)

5. Pogorelov O. V. Mértan 7 - 9. Lviv, Szvit Kiadó, 1998. (141- 152. old.)

6. Burda M. I., Taraszenkova N. A. Mértan 9. Csernyivci, Bukrek Kiadó, 2009. (148-170. old.)

7. Merzljak A. H., Polonszkij V.B., Jakir M.Sz. Mértan 9. Lviv, Szvit kiadó,2017.(106-145.old.)

8. https://tudasbazis.sulinet.hu-
https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/
matematika-11-osztaly/vektorok/vektorok-vektorialis-szorzata (2018.10.28)

9. https://zno.osvita.ua/mathematics/123/ (2019.11.25)

10. https://zno.osvita.ua/mathematics/122/ (2019.11.25)

11. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi 2005. május-június.
http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok2005tavasz/kozep/
k_matV28_fl.pdf (2020.04.25.)

12. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2005. október.
http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok2005osz/kozep/
k_mat_05okt_fl.pdf (2020.04.25.)

13. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2006. február.-
http : //dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok2006februar/kozep/ k_mat_06febr_fl.pdf (2020.04.25.)

14. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2007. október.-
https : //www.oktatas.hu/pub$_b$in/dload/kozoktatas/erettsegi/ feladatok2007osz/k_mat_07okt_fl.pdf (2020.04.25.)

15. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2008. május-június.-
https : //www.oktatas.hu/pub$_b$in/dload/kozoktatas/erettsegi/ feladatok2008tavasz/k_mat_08maj_fl.pdf (2020.04.25.)

16. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2008. október.-
https : //www.oktatas.hu/pub$_b$in/dload/kozoktatas/erettsegi/ feladatok2008osz/k_mat_08okt_fl.pdf (2020.04.25.)

17. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2009. október.-
https : //www.oktatas.hu/pub$_b$in/dload/kozoktatas/erettsegi/ feladatok2009osz/k_mat_09okt_fl.pdf (2020.04.25.)

18. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2012. október.-
http : //dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_kozep_2012osz/ k_mat_12okt_fl.pdf (2020.04.25.)

19. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2013. május-június.-
http : //dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2013tavasz_kozep/ k_mat_13maj_fl.pdf (2020.04.25.)

20. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2014. október.-
http : //dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2014osz_kozep/ k_mat_14okt_fl.pdf (2020.04.25.)

21. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2015. május-június.-
http : //dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2015tavasz_kozep/ k_mat_15maj_fl.pdf (2020.04.25.)

22. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2015. október.-
http : //dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2015osz_kozep/ k_mat_15okt_fl.pdf (2020.04.25.)

23. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,3. nap - 2019. május-június.-
$http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok\_2019tavasz\_kozep/k\_mat\_19maj\_fl.pdf$ (2020.04.25.)

24. Oktatási Hivatal/ Középszintű írásbeli érettségi,2019. október.-
$http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok\_2019osz\_kozep/k\_mat\_19okt\_fl.pdf$ (2020.04.25.)

Резюме

В даній роботі було розглянуто основні означення теорії векторів, зокрема: на що треба звернути увагу при додаванні векторів, при множенні векторів на скаляр, при скалярному, векторному та мішаному добуткові. Також розглянуто задачі декількох останніх років з ЗНО України та випускних екзаменів Угорщини, які мають відношення до теорії векторів.

В другому розділі розглянуто задачі теорії векторів та їх розв’язання з ЗНО України та випускних екзаменів Угорщини.

Задачі, які наведені в третьому розділі мали бути надані для розв’язання випускникам одинадцятих класів ЗОШ, але через обмежувальні заходи пов’язані з епідеміологічною ситуацією не вдалось це реалізувати.

Проробивши дослідження можна зробити висновок, що на ЗНО України кожного року можна зустріти задачі з теорії векторів а на випускних екзаменах Угорщини − не кожного року.

Наслідком дослідження є краще розуміння основних понять та операцій теорії векторів і використання їх при розв’язуванні задач.

На ЗНО України та на випускних екзаменах Угорщини тільки по одній задачі з теорії векторів можна зустріти кожного року. В Угорщині вектори в навчальному процесі займають 18 годин часу, зокрема в середній школі 4 години а в середній – 14 годин. В Україні вектори в навчальному процесі займають 23 години, зокрема 13 годин в дев’ятому класі і 10 годин в десятому класі.

UNICHECK

Власник документу:
Моца Андрій Андрійович

Дата перевірки:
06.05.2020 20:37:11 EEST

Дата звіту:
06.05.2020 20:40:23 EEST

ID перевірки:
1002807641

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
92712

Назва документу: Nagy_Jozsef_matematika

ID файлу: 1002821902 **Кількість сторінок:** 45 **Кількість слів:** 6206 **Кількість символів:** 37556 **Розмір файлу:** 601.50 KB

6.53% Схожість

Найбільша схожість: 2.22% з джерело http://www.studiumgenerale.hu/images/erettsegi/matek_temakor/K%C3%B6z%C3%

6.53% Схожість з Інтернет джерелами 153 .... Page 47

0.26% Текстові збіги по Бібліотеці акаунту 2 .... Page 48

0% Цитат

Не знайдено жодних цитат

0% Вилучень

Вилучений текст відсутній

Підміна символів

Заміна символів 36

Nyilatkozat

Alulírott, Nagy József 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSC diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalmat, eszközöket stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatom a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.