Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Тилищак Олександр Андрійович

УДК 512.547.25:512.64:512.552.7:519.725

Матричні зображення скінченних груп над комутативними локальними кільцями та їх застосування

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Бондаренко Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
алгебри і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Щедрик Володимир Пантелеймонович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, провідний науковий співробітник
відділу алгебри;

доктор фізико-математичних наук, професор
Жучок Юрій Володимирович,
ДЗ «Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка», професор
кафедри алгебри та системного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Пипка Олександр Олександрович,
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара, завідувач кафедри
геометрії і алгебри.

Захист відбудеться «23» листопада 2020 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ, проспект Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий «15» жовтня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Журавльов В. М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія зображень скінченних груп займається вивченням гомоморфізмів абстрактної скінченної групи в групу лінійних операторів чи групу матриць. Перенесення обчислень з абстрактної групи в групу матриць виявилося ефективною ідеєю як при вивченні абстрактних груп, так при і вивченні самих матричних груп. Починаючи з 80-х років XIX століття, завдяки роботам Ф. Г. Фробеніуса та У. Бернсайда[1], які займалися переважно зображеннями скінченної групи над полем характеристики 0, теорія зображень груп посіла значне місце в теорії абстрактних скінченних груп. Серед її застосувань цікавими є дві відомі теореми теорії груп: Бернсайда[2] та Фейта – Томпсона[3] про розв'язність скінченних груп порядку $p^\alpha q^\beta$, де p, q — різні прості числа, та довільного непарного порядку відповідно. Завдяки роботам Е. Ньотер[4] було встановлено тісний зв'язок теорії зображень з теорією модулів над кільцями. Теорія зображень знайшла численні застосування майже у всіх областях алгебри, в алгебраїчній геометрії, в топології і не тільки в розділах математики а й, наприклад, у квантовій механіці[5,6].

Природним продовженням теорії зображень скінченних груп над полями є перехід до вивчення матричних зображень скінченних груп над комутативними кільцями, які почали активно досліджуватися в 40-х роках XX століття. З того часу вони також знайшли застосування в тому числі й за межами математики, наприклад, у кристалографії[7,8].

При дослідженні матричних зображень скінченної групи над комутативним кільцем (як і над полем) виникають 3 основні задачі.

---

[1] Burnside W. Theory of groups of finite order : monograph. Second edition. Cambridge : Cambridge University Press, 1911. 512 p.

[2] Burnside W. On Groups of Order $p^\alpha q^\beta$. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1904. Vol. s2-1, Is. 1. P. 388–392.

[3] Feit W., Thompson J. Solvability of groups of odd order. *Pacific Journal of Mathematics.* 1963. Vol. 13, No 3. P. 775–1029.

[4] Noether E. Hypercomplexe Grossen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 1929. Vol. 30. P. 641–692.

[5] Kane G. Modern Elementary Particle Physics: Explaining and Extending the Standard Model : textbook. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 226 p.

[6] Иванов Е. Н. Теория групп и ее применения в физике : уч. пособие. Москва : МИЭТ, 2006. 160 с.

[7] Федоров Е. С. Симметрия и структура кристаллов : монография. Москва : Издат. АН СССР, 1949. 632 с.

[8] Radaelli P. G. Symmetry in Crystallography: Understanding the International Tables : monograph. Oxford : Oxford University Press, 2016. 2011 p.

1. Розкласти довільне зображення в пряму суму нерозкладних.
2. Описати нерозкладні зображення з точністю до еквівалентності.

3. Описати незвідні зображення з точністю до еквівалентності. Оскільки всяке незвідне зображення є нерозкладним, то опис нерозкладних зображень майже напевно означає і опис незвідних зображень. Відомий результат Машке[9] твердить, що якщо порядок $|G|$ групи G є оборотним елементом комутативного кільця K з одиницею, то будь-яке нерозкладне матричне зображення над кільцем K є незвідним, що означає повну тотожність задач 2 та 3. Якщо $|G|$ є оборотним елементом кільця K, то характеристика кільця K є 0 або є взаємно простою з $|G|$. В останньому випадку говорять про *класичну теорію зображень*, а в іншому — про *модулярну*.

Над полем у класичному і модулярному випадках задачу 1 розв'язати можна і розклади на нерозкладні зображення однозначні, з точністю до порядку слідування доданків і їх еквівалентності (теорема Крулля – Шмідта[10,11]). Твердження поширюється також на деякі класи комутативних кілець. Воно справедливе для матричних зображень скінченних груп над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$[12]. Г. Азумая[13], З. І. Боревич, Д. К. Фаддєєв[14] Р. Суон[15] і І. Райнер[16] довели його над повними дискретно нормованими кільцями, яким, зокрема, є кільце $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Однак, навіть, для кільця цілих алгебраїчних чисел скінченного розширення поля $\mathbb{Q}$, яке не є областю головних ідеалів (яким є $\mathbb{Z}$), теорема Крулля – Шмідта зав-

[9] Гудивок П. М. Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами : монография. Ужгород : Ужгород. нац. ун-т, 2003. 118 с.

[10] Curtis C. W., Reiner I. Methods of representation theory : monograph : in 2 vol. New York : John Willems & Sons Inc, 1981. Vol. 1. 820 p.

[11] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр : монография. Москва : Наука, 1969. 668 с.

[12] Reiner I. A survey of integral representations theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1970. Vol. 76, Is. 2. P. 159–227.

[13] Azumay G. Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull – Remak – Schidt's theorem. *Nagoya Math. J.* 1950. Vol. 1. P. 117–124.

[14] Боревич З. И., Фадеев Д. К. Теория гомологий в группах. II. *Вестник Ленингр. гос. ун-та. Серия математика, механика и астрономия* 1959. № 7. С. 72–87.

[15] Swan R. Induced representations and projektive modules. *Ann. of Math.* 1960. Vol. 71. P. 552–578.

[16] Reiner I. Relations between integral and modular representations. *Mich. Math. J.* 1966. Vol. 13. P. 357–372.

жди не виконується[12]. Подібно П. М. Гудивок і Є. Я. Погоріляк[17,18] показали, що для матричних зображень скінченної p-групи G над дискретно нормованим кільцем K характеристики нуль з полем лишків характеристики p тоді і тільки тоді справедлива теорема Крулля – Шмідта, коли кожне незвідне матричне F-зображення групи G незвідне і над полем F_P, де F — поле відношень кільця K, P — максимальний ідеал кільця K і F_P — P-адичне замикання поля F.

В класичному випадку над полем розв'язані і однакові за змістом задачі 2 та 3 а кількість незвідних (нерозкладних) зображень є завжди скінченною і не перевищує порядок групи[10,11]. Незважаючи на розв'язання задачі 2 та 3 в класичному випадку, при переході від полів до довільних комутативних кілець розв'язання задач сильно ускладнюється. В теорії цілочислових зображень груп перші результати були отримані С. Д. Берманом, П. М. Гудивком[19,20] і А. Джоунсом[21], які показали, що число нееквівалентних нерозкладних матричних $\mathbb{Z}$-зображень скінченної групи G скінченне тоді і тільки тоді, коли для довільного простого числа p, яке ділить порядок групи G, силовська p-підгрупа групи G є циклічною групою порядку p^n $(n \leqslant 2)$. Л. Назарова[22] описала цілочислові зображення абелевої групи типу $(2, 2)$, А. Яковлєв[23] — циклічної групи порядку 8.

---

[17] Гудивок П. М., Погориляк Е. Я. О теореме Крулля – Шмидта для представлений групп над кольцом P-целых чисел. *Мат. заметки.* 1970. Т. 7, № 1. С. 125–135.

[18] Гудивок П. М. Несколько замечаний о целочисленных представлениях конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1974. Т. 26, № 4. С. 539–545.

[19] Берман С. Д. Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцом целых чисел. *Изв. АН СССР. Серия математика* 1966. Т. 30, № 1. С. 69–132.

[20] Берман С. Д., Гудивок П. М. О целочисленных представлениях конечных групп. *Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та. Серия физ.-мат. наук* 1962. № 5. С. 74–76.

[21] Jones A. Groups with a finite number of indecomposable integral representations. *Michigan Math. J.* 1963. Vol. 10. P. 257–261.

[22] Назарова Л. А. Целочисленные представления четверной группы. *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 140, № 5. С. 1101–1014.

[23] Яковлев А. В. Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка. *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1972. Вып. 28. С. 93–129.

С. Д. Берман, П. М. Гудивок[24,25], А. Хеллер і І.Райнер[26,27] довели, що число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень скінченної групи G над кільцем цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ скінченне тоді і тільки тоді, коли силовська p-підгрупа групи G циклічна група порядку p^r $(r \leqslant 2)$. У часткових випадках цей результат раніше був одержаний З. І. Боревичем, Д. К. Фадєєвим[14] і А. В. Ройтером[28].

Майже одночасно з початком досліджень зображень над кільцями в 30-х роках XX століття починається систематичне дослідження модулярної теорії зображень скінченних груп над полями з робіт Р. Брауера. В модулярному випадку над полем задача 3, яка тепер відрізняється від задачі 2, була розв'язана Р. Брауером[29], Е. Віттом[30] і С. Д. Берманом[31]. Кількість незвідних зображень теж виявилася скінченною, яка не перевищує порядок групи. Число ж нерозкладних нееквівалентних зображень скінченної групи скінченне тоді і тільки тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. Цей результат був отриманий Д. Хігманом[32]. Однак задачу 2 в модулярному випадку в цілому розв'язати не можна.

Задача описання зображень скінченної групи G над полем характеристики p у випадку, коли p ділить порядок групи G (тут і далі ми завжди будемо припускати, що p — просте число), як виявилось, часто містить у собі нерозв'язну задачу про класифікацію з точністю до подібності пар квадратних матриць довільного розміру над деяким полем. Такі задачі назвали *дикими*. В. М. Бондаренко і

[24]Берман С. Д., Гудивок П. М. Целочисленные представления конечных групп. *Докл. АН СССР.* 1962. Т. 145, № 6. С. 1199–1201

[25]Берман С. Д., Гудивок П. М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел. *Изв. АН СССР. Серия математика* 1964. Т. 28, № 4. С. 875–910.

[26]Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers I. *Ann. of Math.* 1962. Vol. 76. P. 73–92.

[27]Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers II. *Ann. of Math.* 1963. Vol. 77. P. 318–328.

[28]Ройтер А. В. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами. *Вестн. Ленингр. ун-та.* 1960. № 19. С. 65–74.

[29]Brauer R. Über die Darstellungen von Gruppen in Galoischen Feldern. *Act. Sci. In.* 1935. Vol. 195. P. 323–335.

[30]Witt E. Die algebraische Struktur des Gruppenringges endlichen Gruppe über einem Zahlenkörper. *J. für Math.* 1952. Vol. 190. P. 231–245.

[31]Берман С. Д. Число неприводимых представлений конечной группы над произвольным полем. *Докл. АН СССР.* 1956. Т. 106, № 5. С. 767–769.

[32]Higman D. G. Indecomposable representations at characteristic p. *Duke Math. J.* 1954. Vol. 21. P. 377–381.

Ю. А. Дрозд[33] показали, що задача описання з точністю до еквівалентності зображень скінченної групи G з силовською p-підгрупою H над поле характеристики p не є дикою тоді і тільки тоді, коли H є циклічна або коли фактор-група H/H' є абелевою групою типу $(2,2)$, де H' — комутант групи H. Часткові випадки результату раніше розглядалися В. А. Башевим[34], С. А. Кругляком[35], Ш. Бреннер[36], В. М. Бондаренком[37] і К. Рінгелем[38].

Детальні дослідження зображень скінченних груп над багатьма комутативними кільцями показали, зокрема, що основним випадком є випадок, коли група є p-групою, а кільце є локальним. В дисертаційній роботі розглядаються в основному проблематика модулярної теорії зображень скінченних груп над комутативними локальними кільцями стосовно задач 2, 3. Зрозуміло, що при переході від полів до довільних комутативних кілець у модулярному випадку, розв'язання задачі 3 теж сильно ускладнюється, а сподіватися на розв'язання задачі 2 в загальному не приходиться[39,40,41,42]. Однак є багато результатів, що досліджують ці задачі для вужчих класів груп, кілець та деяких обмежень на зображення.

Було показано[43], що число нееквівалентних нерозкладних матри-

---

[33] Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ.* 1977. Вып. 71. С. 24–41.

[34] Башев В. А. Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2. *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 141, № 5. С. 1015–1018.

[35] Кругляк С. А. О представлениях группы (p,p) над полем характеристики p. *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 153, № 6. С. 1263–1265.

[36] Brenner S. Modular representations of p-groups. *J. Algebra.* 1970. Vol. 15, Is. 1. P. 89–102.

[37] Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2. *Мат. сб.* 1975. Вип. 96, № 1. С. 63–74.

[38] Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups. *Math. Ann.* 1975. Vol. 214, No 1. P. 19–34.

[39] Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп. *Докл. АН СССР.* 1974. Т. 214, № 5. С. 993–996.

[40] Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцом классов вычетов. *Матем. сборник.* Киев. : «Наукова думка», 1976. С. 275–277.

[41] Гудивок П. М., Погоріляк В. Й. Зображення скінченних p-груп над локальними кільцями додатньої характеристики. *Доп. АН УРСР. Серія А.* 1989, № 2, С. 5–8.

[42] Гудивок П. М., Погориляк В. И. Матричные представления конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами характеристики p^s. *Укр. мат. журн.* 2002. Т. 54, № 8. С. 1150–1156.

[43] Гудивок П. М. О модулярных представления конечных групп *Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та. Серия физ.-мат. наук* 1961. № 4. С. 86–87.

чних зображень довільного степеня $n > 1$ скінченної нециклічної p-групи ($p \neq 2$) над нескінченним полем характеристики p нескінченне. Аналогічне твердження доведене[44] для матричних зображень скінченної нециклічної p-групи ($p \neq 2$) над комутативним локальним кільцем K характеристики p^s ($s > 0$), якщо K — нескінченне кільце характеристики p або поле лишків кільця K нескінченне. Далі Rad позначає радикал Джекобсона комутативного кільця K. П. М. Гудивок і І. Б. Чухрай[45,46] довели такі твердження:

1) Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 2$, K — комутативне локальне кільце характеристики p^s ($s > 0$), $\operatorname{Rad} K \neq 0$ і $K/\operatorname{Rad} K$ — нескінченне поле. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень довільного степеня $n > 1$ групи G нескінченне.
2) Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 2$, K — комутативна локальна область цілісності характеристики p, яка не є полем. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень довільного степеня $n > 1$ групи G нескінченне.

П. М. Гудивок[47] показав, що множина степенів всіх нерозкладних матричних зображень скінченної p-групи H порядку $|H| > 1$ над областю K головних ідеалів характеристики p скінченна тоді і тільки тоді, коли група H циклічна і виконується одна із таких умов: 1) K — поле характеристики p; 2) $|H| = 2$. П. М. Гудивок, В. Й. Погоріляк показали[41,48,49], що скінченна p-група G порядку $|G| > 1$

[44]Гудивок П. М., Сигетій І. П., Чухрай І. Б. Про число матричних зображень даного степеня скінченної p-групи над деякими комутативними кільцями характеристики p^s. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика* 1999. Вип. 4. С. 47–53.

[45]Гудивок П. М., Чухрай І. Б. Про число нерозкладних матричних зображень даного степеня скінченної p-групи над комутативними локальними кільцями характеристики p^s. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2000. Вип. 5. С. 33–40.

[46]Gudivok P. M., Chukhraj I. B. On indecomposable matrix representations of the given degree of a finite p-group over commutative local ring of characteristic p^s. *A N. St. Univ. Ovidius Constanta.* 2000. Vol. 8. P. 27–36.

[47]Гудивок П. М. Про обмеженість степенів нерозкладних модулярних зображень скінченних груп над кільцями головних ідеалів. *Доп. АН УРСР. Серія А.* 1971. № 8. С. 683–685.

[48]Гудивок П. М., Погориляк В. И. О неразложимых представлениях конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами. *Доп. НАН України.* 1996, № 5. С. 7–11.

[49]Гудивок П. М., Погоріляк В. Й. О неразложимых матричных представлениях конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами характеристики p^s. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серия математика* 1999. Вип. 4. С. 43–46.

над комутативним локальним кільцем K характеристики p^s ($s \geqslant 1$), що не є полем, має скінченну множину степенів нерозкладних матричних зображень тоді і тільки тоді, коли $|G| = 2$ і K є кільцем Безу характеристики 2.

Добре відомо[10,11], що довільне матричне зображення скінченної групи G незвідне над областю головних ідеалів тоді і тільки тоді, коли воно незвідне над її полем відношень F, а число незвідних нееквівалентних зображень групи G над полем F не перевищує порядок групи G.

Крім того, оскільки тривіальне зображення першого степеня — єдине незвідне матричне зображення скінченної p-групи над полем характеристики p[9,10,11], то тривіальне зображення першого степеня — єдине незвідне матричне зображення скінченної p-групи над областю головних ідеалів характеристики p.

П. М. Гудивок, Є. Я. Погоріляк[50] та В. М. Орос[51] показали, що над нетеровим факторіальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних зображень скінченної p-групи G порядку $|G| > 1$ довільного наперед заданого степеня $n > 1$. Було описано[52,53] всі, з точністю до еквівалентності, незвідні матричні зображення скінченної групи порядку p над комутативним локальним кільцем K характеристики p^s ($s > 0$), де pK — максимальний ідеал кільця K. З'ясовується[54,55,56] також, коли множина степенів всіх незвідних ма-

[50]Гудивок П. М., Погориляк Е. Я. О модулярных представлениях конечных групп над областями целосности. *Труды мат. ин-та АН СССР.* 1990. Вып. 183. С. 78–86.

[51]Орос В. М. Про зображення скінченних p-груп над деякими факторіальними кільцями : Дис. … канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06 / НАН України, Ін-т математики., Київ., 1993. 54 с.

[52]Дроботенко В. С., Дроботенко Э. С., Жилинская З. П., Погориляк Е. Я. Представления циклической группы простого порядка p над кольцом классов вычетов по модулю p^s. *Укр. мат. журн.* 1965. Т. 17, № 5. С. 28–42.

[53]Hannula T. The integral representation ring $a(R_kG)$. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 133. P. 553–559.

[54]Гудивок П. М., Дроботенко В. С., Лихтман А. И. О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю m. *Укр. мат. журн.* 1964. Т. 16, № 1. С. 81–89.

[55]Гудивок П. М., Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика.* 1998. Вип. 3. С. 78–83.

[56]Тилищак О. А. Про незвідні зображення скінченних p-груп над деякими локальними кільцями характеристики p. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика* 1999. Вип. 4. С. 104–110.

тричних зображень скінченної p-групи над нецілісним комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p^s скінченна. Також показано[56] існування незвідних матричних зображень скінченної p-групи G як завгодно високого степеня над цілісним комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, у випадку, коли $|G| > 2$.

Внесок здобувача в розвиток цієї тематики полягає в побудові нових серій незвідних та нерозкладних зображень над деякими комутативними кільцями в модулярному випадку, дослідженні еквівалентності побудованих зображень та оцінка їх кількості. Крім того, було знайдено застосування, розроблених методів і, взагалі, методів теорій зображень над комутативними кільцями (в класичному і модулярному випадках) в теорії лінійних груп над комутативними кільцями, цілочислових групових кілець, кодів над скінченними комутативними фробеніусовими кільцями.

Застосування теорії зображень при дослідженні матричних груп виникають природно. Максимальні унiпотентні підгрупи повної лінійної групи $GL(n, F)$ довільного натурального степеня n над полем F довільної характеристики методами теорії зображень були описали з точністю до спряження Мальцев А. І. та Колчин Е. Р. Ними показано[57,58,59], що в цьому випадку всі, з точністю до спряженості, максимальні унiпотентні підгрупи групи $GL(n, F)$ вичерпуються унітрикутною підгрупою. Для поля F характеристики $p > 0$, це негайно означає, що довільна силовська p-підгрупа групи $GL(n, F)$ спряжена з унітрикутною підгрупою. П. М. Гудивок, Є. Я. Погоріляк і В. П. Рудько показали[60,50], що силовські p-підгрупи повної лінійної групи степеня $n > 1$ над нетеровою локальною областю цілісності L характеристики p попарно спряжені тоді і тільки тоді, коли L — область головних ідеалів. Було також описано[50] всі, з точністю до спряженості, силовські p-підгрупи повної лінійної групи над довільною областю головних ідеалів характеристики p. Вони вичерпуються унітрикутною групою.

Логічним продовженням наведених результатів було встановлення здобувачем попарної спряженості максимальних унiпотентних

[57]Супруненко Д. А. Группы матриц : монография. Москва : Наука, 1972. 352 с.

[58]Мальцев А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. *Мат. сб.* 1951. Вып. 28, № 3. С. 567–588.

[59]Kolchin E. R. On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups. *Ann. of Math.* 1948. Vol. 49. P. 774–789.

[60]Гудивок П. М., Рудько В. П. О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности. *Доп. НАН України.* 1995. № 8. С. 5–7.

підгруп повної та спеціальної лінійних груп над комутативним кільцем, фактор-кільце якого за первісним радикалом є пряма сума областей Безу.

Ще одним застосуванням теорії зображень виступають дослідження одиниць групових кілець скінченних груп. Поняття групового кільця вперше використали Ф. Г. Фробеніус та І. Шур[61] як корисний допоміжний засіб при вивченні зображень скінченних груп. Природно виникає обернений вплив результатів теорії зображень на дослідження в групових кільцях. Дослідження одиниць групового кільця проводили, наприклад, Д. Хігман та С. Д. Берман[61,62], які мали значний доробок в теорії зображень. Відома гіпотеза Цассенхауза про одиниці цілочислового групового кільця скінченної групи G активно досліджується[63,64,65,66] останнім часом методом Лутара — Пассі[67], який передбачає наявність інформації про незвідні зображення групи G над алгебраїчно замкнутим полем як характеристики 0, так і характеристики p, що ділить порядок групи G. Здобувачем було використано метод Лутара — Пасі для описання можливих порядків та перевірки гіпотези Цассенхауза для одиниць цілочислового групового кільця групи $PSL(3,4)$.

Потужні алгебраїчні методи модулярної теорії зображень скінченних груп систематично застосовуються[68,69,70] до дослідження лі-

[61] Артамонов В. А., Бовди А. А. Целочисленные групповые кольца: Группа обратимых елементов и классическая K-теория. *Итоги науки и техники.* Алгебра. Топология. Геометрия. 1989. Т. 27. С. 3–43.

[62] Берман С. Д. Об уравнении $x^m = 1$ в целочисленном групповом кольце. *Укр. мат. журн.* 1955. Т. 7, № 3. С. 257–261.

[63] Bovdi V., Höfert C., Kimmerle W. On the first Zassenhaus conjecture for integral group rings. *Publ. Math. Debrecen.* 2004. Vol. 65, No 3–4. P. 291–303.

[64] Bovdi V., Hertweck M. Zassenhaus conjecture for central extensions of S_5. *J. Group Theory.* 2008. Vol. 11, No 1. P. 63–74.

[65] Bovdi V., Grishkov A., Konovalov A. Kimmerle conjecture for the Held and O'Nan sporadic simple groups. *Sci. Math. Jpn.* 2009. Vol. 69, No 3. P. 353–361.

[66] Bovdi A., Konovalov A., Rossmanith R., Schneider C. GAP package LAGUNA – Lie AlGebras and UNits of group Algebras. URL: https://www.gap-system.org/Packages/laguna.html (date of appeal: 28.04.2020).

[67] Luthar I. S. Passi I. B. S. Zassenhaus conjecture for A_5. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 1989. Vol. 99 Is. 1. P. 1–5.

[68] Zimmerman K.-H. Beiträge zur algebraischen Codierungstheorie mittels modularer Darstellungstheorie : habilitationsshrift. Bayreuth : Bayreuther Math. Schr., 1994, No 48. 278 p.

[69] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки : монография. Москва : Связь, 1974. 744 с.

[70] Dougherty S. T. Algebraic Coding Theory Over Finite Commutative Rings : monograph. Cham : Springer Verlag, 2017. 103 p.

нійних кодів. Зокрема, піонерський підхід С. Д. Бермана[71] розглядав односторонні ідеали в групових алгебрах скінченних груп над скінченними полями, як коди над тими ж полями. Таким способом Ф. Бергард, П. Ландрок, О. Манз[72] побудували розширені коди Галея за груповою алгеброю симетричної групи 4 степеня (24-го порядку) над полем з двох елементів, Т. Харлей та І. Маклоглін[73,74] — за груповою алгеброю групи діедра 24-го порядку. Здобувачем, зокрема, було розглянуто цю ж можливість для всіх груп 24-го порядку. Також розглядалися деякі методи побудови інших самодуальних кодів над довільними скінченними фробеніусовими кільцями.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка — тема «Застосування алгеброгеометричних методів у теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації» (номер державної реєстрації 0111U005264), а також виконувалась у рамках бюджетної дослідницької наукової теми «Зображення скінченних груп та їх застосування» (номер державної реєстрації 0115U007026) кафедри алгебри ДВНЗ «Ужгородського національного університету».

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження властивостей модулярних матричних зображень скінченних груп над локальними кільцями, властивостей мономіальних матриці над локальними кільцями, властивостей унiпотентних підгруп лінійних груп над комутативними кільцями та побудова нових самодуальних кодів над фробеніусовими кільцями.

Об'єктом дослідження є модулярні матричні зображення скінченних груп над локальними кільцями, мономіальні матриці над тими ж кільцями, унiпотентні підгрупи лінійних груп над комутативними кільцями одиниці скінченного порядку цілочислових групових кілець та самодуальні коди над фробеніусовими кільцями.

Предметом дослідження є звідність і розкладність матричних зображень скінченних груп і мономіальних матриць, максимальність

[71] Берман С. Д. К теории групповых кодов.*Кибернетика.* 1967. № 1. С. 31–39.

[72] Bernhardt F. Landrock P., Manz O. The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory. Series A.* 1990. Vol. 55, No 2. P. 235–246.

[73] McLoughlin I., Hurley T. A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2008. Vol. 9 Is. 54. P. 4381–4383.

[74] McLoughlin I. Dihedral codes: Ph.D. thesis: submitted in June 2009 / National University of Ireland, Galway (Ireland)., 2009. 106 p.

та спряженість унітотентні підгрупи лінійних груп порядки одиниць цілочислових групових кілець та їх спряженість та вигляд самодуальних кодів над фробеніусовими кільцями.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються переважно класичні і сучасні методи теорії матриць, методи теорії зображень, комбінаторні методи та методи структурного, функціонального програмування системи комп'ютерної алгебри GAP.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації автором отримано такі нові результати:

– Встановлено критерій скінченності множини нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи над комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p^s $(s > 0)$, яке не є напівпервісним, з нескінченним полем лишків. Показано, що множина нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи над цим кільцем або нескінченна, або порожня.
– Показано нескінченність числа всіх нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня $n > 1$ скінченної p-групи G порядку $|G| > 2$ над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем характеристики p, з нескінченним полем лишків.
– Описано всі, з точністю до еквівалентності, матричні зображення 2-го степеня групи діедра порядку $2p$ (p — непарне просте число) над комутативними локальними кільцями довжини 2 характеристики 2, та з'ясовано критерій їх незвідності.
– Встановлено достатню умову спадкової звідності t-циклічних матриць над комутативним кільцем.
– Встановлено достатню умову спадкової звідності бімономіальних матриць над комутативним кільцем.
– Показана незвідність всіх бімономіальних 7×7-матриць над комутативним локальним кільцем довжини $l > 2$.
– Побудована серія нерозкладних унімономіальних зображень циклічної p-групи над скінченним комутативним локальним кільцем скінченної довжини характеристики p, та підраховано число побудованих зображень заданого степеня з точністю до еквівалентності для кожної групи та кільця, зі скінченним полем лишків, окремо.

– Побудована серія нерозкладних унімономіальних зображень циклічної p-групи над довільним комутативним локальним кільцем скінченної довжини характеристики p та підраховано число побудованих зображень заданого степеня з точністю до $*$-еквівалентності для кожної групи та кільця окремо.
– Побудована серія спадково незвідних унімономіальних зображень циклічної p-групи над скінченним комутативним локальним кільцем головних ідеалів характеристики p, та підраховано число побудованих зображень заданого степеня з точністю до еквівалентності для кожної групи та кільця, зі скінченним полем лишків, окремо.
– Показано, що всі максимальні уніпотентні підгрупи повної лінійної групи над кільцем K попарно спряжені, якщо фактор-кільце кільця K за первісним радикалом є скінченною прямою сумою областей Безу.
– Показано, що всі максимальні уніпотентні підгрупи спеціальної лінійної групи над кільцем K попарно спряжені, якщо фактор-кільце кільця K за первісним радикалом є скінченною прямою сумою областей Безу.
– Показано дикість за модулем радикалу Джекобсона задачі про описання з точністю до еквівалентності за модулем головного ідеалу породженого будь-яким елементом довжини більше 2 матриць над локальним факторіальним кільцем, що не є областю головних ідеалів.
– Встановлено, що в цілочисловому груповому кільці скінченної групи $PSL(3,4)$ показника 420, який має 23 нетривіальні дільники, можуть бути тільки нетривіальні одиниці порядку: 2, 3, 4, 5, 7 і 6, а для елементів порядку 2 та 3 виконується гіпотеза Цассенхауза.
– Вперше побудовано розширені бінарні коди Галея за груповим кільцем груп $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2,\ C_3 \times D_8,\ C_2 \times A_4$ порядку 24 над полем з двох елементів, та підраховано їх кількість. Також показано, що крім вже відомих побудов для груп $D_{24},\ S_4$ це всі можливі групи 24-го порядку з яких будуються розширені бінарні коди Галея розглядуваним методом.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Побудовані нові серії незвідних та нерозкладних зображень скінченних груп над комутативними локальними кільцями можуть знайти застосування при описанні з точністю до еквівалентності окремих серій зображень тих же груп над локальними та довільними комутативними кільцями. Результати дисертаційної роботи про мономіальні матриці над комутативними локальними кільцями знайшли (і можуть знайти нові) застосування при дослідженні модулярних матричних зображень скінченних груп над тими ж кільцями, а також можуть знайти застосування при описанні з точністю до подібності окремих серій квадратних матриць над локальними та довільними кільцями. Розроблені методи також застосовувалися (і можуть далі застосовуватися) при дослідженні уніпотентних підгруп лінійних груп над комутативним кільцем, при побудові самодуальних кодів над фробеніусовими кільцями. Результати дисертаційної роботи про самодуальні коди носять пряме практичне значення оскільки побудовані екстремальні коди можуть застосовуватися при кодуванні інформації, для виправлення помилок під час передачі даних каналами зв'язку.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, отримано автором самостійно. З результатів робіт, що виконані в співавторстві, на захист виносяться лише положення, що отримано здобувачем. 11 з 21 наукової статі, опублікованих за темою дисертації, є одноосібними.

У статтях [7, 9, 11] здобувачу належить постановка задачі та загальні ідеї доведення звідності розглядуваних матриць, у статті [8] здобувачу належить загальні ідеї доведення звідності розглядуваних матриць. Отримані результати ввійшли в дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук М. Ю. Бортош[75] та Р. Ф. Цімболинець (Динис)[76]. Ідеї було розвинуто і узагальнено до альтернативного доведення звідності розглядуваних матриць опублікованого в [17]. В цій статті здобувачу належить доведення основного результату — теореми 2. В. М. Бондаренку належить постановка задачі та загальні ідеї доведення, Й. Гілдеа — перевірка в окремих випадках засобами електронного числення загальних висновків отриманих теоретичним шляхом, Н. В. Юрченко — спрощення викладок доведень допоміжних тверджень 1 та 4.

У статті [10] здобувачу належить результат, про еквівалентність

[75]Бортош М. Ю. Лінійно-алгебраїчні властивості категорій мономіальних матриць над локальними кільцями: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / НАН України, Ін-т математики., Київ., 2017. 179 с.

[76]Цімболинець Р. Ф. Бімономіальні матриці над комутативними кільцями: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ, 2018. 176 с.

матриць за модулем ідеалу над факторіальним кільцем (теореми 4). Результати про еквівалентність матриць за модулем ідеалу над областями цілісності (теореми 1–3) та над нетеровими областями (теореми 5–7) у випадку, коли ідеал є максимальним належать М. В. Стойці і ввійшли в його дисертаційну роботу на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук[77].

У статті [13] здобувачу належить підрозділ 1.4 в якому дослідження мономіальних матриць з 2-однорідними послідовностями застосовується для побудови нерозкладних модулярних зображень. У статті [22] здобувачу належить підрозділ 3 в якому нерозкладна мономіальна $n \times n$-матриця, побудована співавторами в розділі 2, застосовується для побудови нерозкладних модулярних зображень довільного степеня $n \geqslant 4$.

У статті [12] з Й. Гілдеа останньому належать постановки задач та загальне керування дослідженнями а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві. У статті [14] здобувачу належить розділ 3 присвячений побудові розширеним бінарних кодів Голея. У статті [18] здобувачу належить обчислення рангів при доведенні теореми 3.1.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на таких конференціях та семінарах.

- Четверта міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (Львів, 4–9 серпня 2003 р.).
- Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 18–20 травня 2006 р.).
- Міжнародна конференція Humboldt-Kolleg Series in Kyiv (Київ, 19–22 листопада 2009 р.).
- Десята відкрита науковій конференція інституту прикладної математики та фундаментальних наук (Львів, 17–18 травня 2012 р.).
- Дев'ята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (Львів, 8–13 липня 2013 р.).
- П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел та просторових мозаїк (Київ, 16–20 вересня 2013 р.)
- Десята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015 р.).

[77] Стойка М. В. Матричні зображення груп та схрещених групових кілець над локальними комутативними кільцями: дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Ужг. нац. ун-т., Ужгород, 2015. 143 с.

– Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3-6 червня 2015 р.).
– Міжнародна мат. конференція «Методика викладання та методи досліджень в математиці» (Берегове, 21–23 квітня 2016 р.).
– Одинадцята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 75-річчю В. В. Кириченка (Київ, 3–7 липня 2017 р.).
– Друга міжнародна конференція про групи, групові кільця і пов'язані теми (Хорфаккан (ОАЕ), 19–22 листопада 2017 р.).
– Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 22–25 травня 2018 р.)
– Дванадцята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського (Вінниця, 2–6 липня 2019 р.).
– Семінари кафедри алгебри Ужгородського національного університету (Ужгород, 2003–2019 рр.).
– Алгебраїчний семінар Інституту математики ім. А. Ренні Угорської академії наук (Будапешт (Угорщина), 2005 р.).
– Науковий семінар відділення інженерії факультету механіки та електронної інженерії Технологічного інституту Сліго (Сліго (Ірландія), 2012 р.).
– Наукові семінари відділення комп'ютерних наук та математики Університету Честер (Честер (Великобританія), 2013, 2019 рр.).
– Алгебраїчних семінарах відділення математики факультету природничих та гуманітарних наук Пряшівського університету в Пряшеві (Пряшів (Словаччина), 2019 р.).
– Алгебраїчні семінари Інституту математики Кошицького університету ім. П. Й. Шафарика (Кошице (Словаччина), 2019 р.).
– Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (Київ, 2019 р.).
– Підсумковий семінар кафедри алгебри та мат. логіки Київського національного університету ім. Т. Шевченка (Київ, 2020 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 36-и наукових роботах, у тому числі

– 21-а стаття у фахових наукових виданнях [1–21], 8 із них індексуються у міжнародних наукометричних базах [8, 10, 12–

14, 17–19], з них 18 статей у вітчизняних виданнях [1–11, 13, 15–17, 19–21], 3 статті — у закордонних виданнях [12, 14, 18];
– 2-х статтях інших видань [22, 23];
– 13-х тезах наукових конференцій [24–36].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, списку публікацій за темою дисертації, переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 355 сторінок, з яких основний зміст роботи викладено на 303 сторінках. Список використаних джерел містить 225 найменування та займає 28 сторінок.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультанту — доктору фізико-математичних наук, професору Віталію Михайловичу Бондаренку за цікаві ідеї, корисні поради, змістовні дискусії.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, задачі, об'єкт і предмет дослідження, вказано наукову новизну й теоретичне та практичне значення результатів роботи, наведено інформацію про особистий внесок здобувача та апробацію результатів дослідження, охарактеризовано зміст роботи.

У першому розділі «Попередні відомості» вводяться необхідні поняття і позначення та наводяться відомі результати, які використовуються далі в дисертації. У тому числі наводиться виклад базових понять теорії характерів Фробеніуса, характерів Брауера та результатів про число незвідних нееквівалентних зображень скінченної групи над полем довільної характеристики. Також наведено результати про число незвідних нееквівалентних зображень скінченної p-групи над комутативним кільцем характеристики p^s в окремих випадках. При побудові серії незвідних не нерозкладних зображень скінченних груп над комутативними кільцями використовувалися мономіальні матриці. Було наведено означення мономіальної матриці та її видів: канонічно циклічної, бімономіальної, t-циклічної — разом з попередніми результатами досліджень їх подібності, звідності та розкладності.

Серія напрямків: уніпотентні підгрупи лінійних груп над комутативними кільцями, дослідження одиниць цілочислового групового кільця, побудова самодуальних кодів над фробеніусовими кільцями де можна використати методи теорії зображень скінченних груп над комутативними кільцями і отримані раніше в цих напрямках результати та розроблені методи описано в заключних підрозділах розділу. Окремо відмічено метод доведення того, що унітрикутна група є силовською p-підгрупою групи повної лінійної групи над напівпервісним комутативне кільце характеристики p. Також було описано метод Лутара — Пасі перевірки гіпотези Цассенхауза для одиниць цілочислового групового кільця. Було введено означення фробеніусового кільця, та описано методи побудов деяких самодуальних кодів над цим кільцем за груповими кільцями.

Другий розділі «Незвідні та звідні модулярні зображення p-груп над комутативними локальними кільцями» присвячено пошуку нових серій незвідних зображень скінченних груп над комутативними локальними кільцями в модулярному випадку.

У підрозділі 2.1 «Вступ» наведено загальні означення для матричних зображень скінченних груп над комутативними кільцями та окреслино спрямованість досліджень розділу.

У підрозділі 2.2 «Зображення скінченних p-груп над кільцями характеристики p^s» з'ясовується коли є скінченною множина нееквівалентних незвідних зображень заданого степеня скінченної p-груп над комутативним кільцями характеристики p^s, яке не є напівпервісним. Завдання було повністю розв'язане для нетерових кілець, з нескінченним полем лишків та для артінових кілець.

Теорема 2.10. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 1$ і K — комутативне нетерове локальне кільце характеристики p^s ($s > 0$, p — просте число), яке не є напівпервісним, з нескінченним полем лишків. Множина нееквівалентних незвідних матричних зображень групи G над кільцем K степеня $n > 1$ скінченна тоді і тільки тоді виконується одна з таких умов:*

1) *$|G| = 2$, $s = 1$, $(\mathrm{Rad}\, K)^2 = 0$, K — кільце головних ідеалів, всі поліноми над полем $K/\mathrm{Rad}\, K$ степеня n звідні;*
2) *$|G| = 3$, $s = 1$, $(\mathrm{Rad}\, K)^2 = 0$, $n = 2$, K — кільце головних ідеалів, всі поліноми над полем $K/\mathrm{Rad}\, K$ степеня 2 звідні;*
3) *$|G| = p$, $s > 1$, $\mathrm{Rad}\, K = pK$, $n \notin (p-1)\mathbb{Z}$, всі поліноми над полем $K/\mathrm{Rad}\, K$ степеня n звідні;*
4) *$|G| = p$, $s > 1$, $\mathrm{Rad}\, K = pK$, $n \in (p-1)\mathbb{Z}$, всі поліноми над полем $K/\mathrm{Rad}\, K$ степеня n та $\frac{n}{p-1}$ звідні.*

Зауважимо, що множина нееквівалентних незвідних зображень групи G над кільцем K степеня n або нескінченна або порожня.

Теорема 2.11. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 1$*

і K — комутативне артінове локальне кільце характеристики p^s ($s > 0$, p — просте число), яке не є полем. Множина нееквівалентних незвідних матричних зображень групи G над кільцем K степеня $n > 1$ скінченна тоді і тільки тоді виконується одна з таких умов:

1) *поле $K/\operatorname{Rad} K$ скінченне;*
2) *$|G| = 2$, $s = 1$, $(\operatorname{Rad} K)^2 = 0$, K — кільце головних ідеалів, всі поліноми над полем $K/\operatorname{Rad} K$ степеня n звідні;*
3) *$|G| = 3$, $s = 1$, $(\operatorname{Rad} K)^2 = 0$, $n = 2$, K — кільце головних ідеалів, всі поліноми над полем $K/\operatorname{Rad} K$ степеня 2 звідні;*
4) *$|G| = p$, $s > 1$, $\operatorname{Rad} K = pK$, $n \notin (p-1)\mathbb{Z}$, всі поліноми над полем $K/\operatorname{Rad} K$ степеня n звідні;*
5) *$|G| = p$, $s > 1$, $\operatorname{Rad} K = pK$, $n \in (p-1)\mathbb{Z}$, всі поліноми над полем $K/\operatorname{Rad} K$ степеня n та $\frac{n}{p-1}$ звідні.*

У підрозділі 2.3 «Зображення скінченних p-груп над напівпервісними кільцями характеристики p» з'ясовується, коли є скінченною множина нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи G над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем характеристики p, поле класів лишків якого нескінченне. Основні результати підрозділу описуються такими двома теоремами.

Теорема 2.12. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 1$ і K — комутативне нетерове локальне напівпервісне кільце характеристики p, яке не є цілісним, з нескінченним полем лишків. Існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних зображень групи G над кільцем K довільного наперед заданого парного степеня n.*

Теорема 2.13. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 2$ і K — комутативне нетерове локальне напівпервісне кільце характеристики p, яке не є цілісним, з нескінченним полем лишків. Існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних зображень групи G над кільцем K довільного наперед заданого степеня $n > 1$.*

Цікавим є твердження 2.14, яке встановлює комутативне локальне напівпервісне кільце характеристики 2, яке не є цілісним, всі матричні зображення скінченної групи порядку 2 над яким довільного непарного степеня $n > 1$ звідні.

У підрозділі 2.4 «Зображення скінченних 2-груп над областями цілісності характеристики 2» досліджуються матричні зображення непарного степеня групи другого прядку над локальною областю цілісноті характеристики 2. В підрозділі доведено теорему.

Теорема 2.17. *Нехай K — локальна область цілісності характеристики 2, будь-який скінченно породжений ідеал якої володіє мінімальною системою з не більше ніж двох твірних елементів, $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2. Всі матричні зображення групи G над кільцем K непарного степеня n звідні.*

Раніше здобувачем було показано[56] існування незвідних матричних зображення скінченної p-групи G як завгодно високого степеня над цілісним комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, у випадку, коли $|G| > 2$. Для доведення при цьому будувались незвідні зображення групи G довільного парного степеня вище 6, або довільного степеня кратного 4.

У підрозділі 2.5 «Зображення діедральних груп порядку $2p$ над кільцями характеристики 2» описуються з точністю до еквівалентності матричні зображення 2-го степеня групи діедра порядку $2p$ (p — непарне просте число) над комутативними локальними кільцями головних ідеалів характеристики 2, радикали Джекобсона яких є нільпотентними ідеалами другого степеня.

Теорема 2.21. *Нехай K — комутативне локальне кільце характеристики 2, $\operatorname{Rad} R = tR$, $t \in K$, $t^2 = 0$, $t \neq 0$, $G = \langle a, b | a^2 = b^p = (ab)^2 = e\rangle$ — група діедра порядку $2p$ (p — непарне просте число). Γ — матричне зображення 2-го степеня групи G над кільцем K. Якщо поле лишків кільця K містить тільки один корінь p-го степеня з одиниці, то виконується одна з умов:*

1) *зображення Γ еквівалентне зображенню вигляду*

$$\Gamma_{\overline{F}}: \ a \to E_2 + tF, \ b \to E_2,$$

де E_2 — одинична 2×2-матриця, F — будь-яка 2×2-матриця над кільцем K;

2) *зображення Γ еквівалентне зображенню вигляду*

$$\Delta: \ a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b \to E_2;$$

3) *зображення Γ еквівалентне зображенню вигляду*

$$\Lambda_\alpha: \ a \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

де α — будь-який елемент кільця K такий, що многочлен $x^2+\alpha x+1$ ділить $x^p + 1$ в кільці $K[x]$.

Два зображення різних виглядів не еквівалентні над кільцем K. Два зображення $\Gamma_{\overline{F_1}}$, $\Gamma_{\overline{F_2}}$ (F_1, F_2 — 2×2-матриці над кільцем K) еквівалентні над кільцем K тоді і тільки тоді, коли матриці $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ подібні над полем лишків кільця K. Тут $\overline{T} = (t_{ij} + \mathrm{Rad}\, K)$ — матриця над полем лишків $K/\mathrm{Rad}\, K$ кільця K для довільної матриці $T = (t_{ij})$ над кільцем K. Два зображення Λ_{α_1}, Λ_{α_2} (α_1, $\alpha_2 \in K$, многочлени $x^2 + \alpha_1 x + 1$ та $x^2 + \alpha_2 x + 1$ ділять $x^p + 1$ в кільці $K[x]$) еквівалентні над кільцем K тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2$.

Доведена теорема дозволяє також виділити всі, з точністю до еквівалентності, незвідні зображення (наслідок 2.22) групи G над кільцем K якими будуть зображення $\Gamma_{\overline{F}}$ вигляду 1, якщо матриця $\overline{F}$ є супровідна 2×2-матриця незвідного многочлена $f(x)$ над полем лишків кільця K, та зображення Λ_α вигляду 3.

У третьому розділі «Мономіальні матриці над комутативними кільцями» уточнено результати про звідність мономіальних матриць деяких виглядів та розширено обсяг досліджених мономіальних матриць малих розмірів на предмет звідності.

У підрозділі 3.1 «Означення і позначення» приведено початкові менш загальні означення для розглядуваних квадратних матриць над комутативним кільцем (з одиницею): мономіальної матриці, канонічно циклічної матриці, циклічної матриці, t-циклічної матриці. Зокрема, остання матриця має вигляд

$$M(t, s_1, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

для деякого елемента t розглядуваного кільця.

У підрозділі 3.2 «Спадкова звідність t-циклічних матриць» вводиться поняття спадкової звідності для t-циклічних матриць, яке, зокрема, означає також звичайну звідність матриць, та запропоновано новий підхід до доведення теореми.

Теорема 3.3. ([8,9]) *Нехай K — комутативне кільце, $t \in K$. t-циклічна матриця $M(t^{s_1}, \ldots, t^{s_n})$, де $s_i \geqslant 0$ ($i = 1, \ldots, n$), є спадково звідна, якщо $\sum_{i=1}^{n} s_i$ і n не є взаємно простими.*

Попереднє доведення було реалізовано в термінах лінійного оператора скінченно вимірного лінійного простору визначеного λ-циклічною матрицею над полем відношень кільця цілочислових многочленів від невідомої λ. Було запропоновано доведення матричним численням, що не спирається на аналіз лінійного оператора скінченно вимірного лінійного простору над полем, яке буде також застосоване до питання про спадкову звідність бімономіальних матриць.

У підрозділі 3.3 «Спадкова звідність бімономіальних матриць» вводиться поняття бімономіальних матриць та їх спадкової звідності. Бімономіальна матриця з точністю до переставної подібності має вигляд $M(t,k,n) = M(t, \underbrace{1,\ldots,1}_{k}, 0,\ldots,0)$ для деякого елемента t розглядуваного кільця, $0 < k < n$. Основним результатом розділу є теорема.

Теорема 3.9. *Нехай K — комутативне кільце, $t \in K$. Бімономіальна матриця $M(t,k,n)$ є спадково звідна, якщо k і n не є взаємно простими.*

У підрозділі 3.4 «Незвідність бімономіальних матриць 7-го порядку» доведено, що всі матриці $M(t,k,7)$ $(0 < k < 7)$ незвідні над комутативним локальним кільцем K, радикал Джекобсона якого $\operatorname{Rad} K = tK$, $t^2 \neq 0$ $(t \in K)$. В [7] Р. Ф. Цімболинець (Динис) одержала, що для $n < 7$, $(n,k) = 1$ матриця $M(t,k,n)$ — незвідна над комутативним локальним кільцем K, радикал Джекобсона якого $\operatorname{Rad} K = tK \neq 0$ $(t \in K)$. Якщо $t^2 = 0$ Р. Ф. Цімболинець [7, 8] показала, що матриці $M(t,3,7)$, $M(t,4,7)$ звідні над кільцем K.

Четвертий розділ «Унімономіальні зображення груп над локальними кільцями скінченної довжини» присвячено пошуку нових серій незвідних та нерозкладних унімономіальних зображень скінченних груп над комутативними локальними кільцями в модулярному випадку на основі результатів дослідження мономіальних матриць.

У підрозділі 4.1 «Означення та елементарні властивості унімономіальних зображень» вводиться поняття унімономіальних зображень скінченно породжених груп над комутативними локальними кільцями. Для побудови незвідних та нерозкладних унімономіальних зображень циклічної p-групи $G = \langle a \rangle$ над комутативним локальним кільце характеристики p скінченної довжини використовуються зображення вигляду

$$\Gamma\colon a \to \Gamma(a) = E_n + M,$$

де E_n — одинична $n \times n$-матриця, M — канонічно циклічна $n \times n$-матриця. Для перевірки відображень заданого вигляду на предмет визначення зображень встановлена теорема.

Теорема 4.4. *Нехай* $H = \langle a \rangle$ *— циклічна* p*-група,* K *— комутативне локальне кільце характеристики* p*, радикал Джекобсона якого* $\operatorname{Rad} K = tK$*,* t *— нільпотентний елемент степеня* $l > 1$*,* E_n *— одинична* $n \times n$*-матриця ,* $s_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *і* $\varepsilon_i \in K^*$ $(i = 1, \ldots, n)$*. Відображення*

$$\Gamma\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_n t^{s_n}\right),$$

де $\varepsilon_i \in K^*$*,* $s_i \geqslant 0$ $(i = 1 \ldots, n)$ *є зображенням групи* H *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{j=0}^{|H|-1} s_{i+j} \geqslant l (i = 1, \ldots, n).$$

Тут індекси $i + j$ *треба замінити на індекси* $i + j - kn$ *якщо* $i + j > kn$*, де* k *— максимально можливе натуральне число (тобто тут індекси розглядаються за модулем* n*).*

У підрозділі 4.2 «Про число нерозкладних унімономіальних зображень для двозв'язних циклів циклічних p**-груп над локальним кільцем характеристики** p^s **з точністю до еквівалентності»** наведено означення двозв'язних циклів та описано результат про нерозкладність канонічно циклічних матриць, що їм відповідають. Було побудовано серію нерозкладних зображень циклічної p-групи G над комутативним локальним кільцем характеристики p довжини 2.

Теорема 4.6. *Нехай* K *— комутативне локальне кільце характеристики* p*, радикал Джекобсона якого* $\operatorname{Rad} K = tK$*,* t *— нільпотентний елемент степеня* $l = 2$*. Тоді для будь-якої циклічної* p*-групи* G *і* $n \geqslant |G|$*, потужність нееквівалентних нерозкладних унімономіальних зображень фіксованого степеня* n *не менша, ніж* $|G| - 2$*.*

Також було побудовано серію нерозкладних зображень циклічної p-групи G достатньо великого порядку над комутативним локальним кільцем характеристики p^s довжини $l > 1$.

Теорема 4.7. *Нехай* K *— комутативне локальне кільце характеристики* p^s*, радикал Джекобсона якого* $\operatorname{Rad} K = tK$*,* t *— нільпотентний елемент степеня* $l > 1$*. Тоді для циклічної* p*-група* G *деякого порядку* N *(отже, і більшого порядку), потужність нееквівалентних нерозкладних унімономіальних зображень фіксованого степеня* n *не менша, ніж* $n - 1$ *для будь-якого* $n > 1$*.*

У підрозділі 4.3 «Про число нерозкладних унімономіальних зображень циклічних p**-груп над локальним кільцем ха-**

рактеристики p з точністю до еквівалентності» встановлено, що відображення

$$\Gamma\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_n t^{s_n}\right), \tag{1}$$

де $\varepsilon_i \in K^*$, $0 \leqslant s_i < l$ $(i = 1 \dots, n)$ є нерозкладним унімономіальним зображенням циклічної p-групи $H = \langle a \rangle$ над комутативним локальним кільцем характеристики p, радикал Джекобсона якого $\operatorname{Rad} K = tK$, t — нільпотентний елемент степеня $l > 1$ коли

1. $\sum_{j=0}^{|H|-1} s_{i+j} \geqslant l$ $(i = 1, \dots, n)$,
2. послідовність $(s_1, \dots, s_n)$ неперіодична.

Крім того, два зображення

$$\Gamma\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_n t^{s_n}\right), \Gamma'\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon_1' t^{s_1'}, \dots, \varepsilon_n' t^{s_n'}\right),$$

де $\varepsilon_i, \varepsilon_i' \in K^*$, $0 \leqslant s_i < l$, $0 \leqslant s_i' < l$ $(i = 1 \dots, n)$, вказаного вигляду еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні послідовності $(s_1, \dots, s_n)$ та $(s_1', \dots, s_n')$ циклічно еквівалентні а елементи $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ та $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i'$ кільця K рівні за модулем $\operatorname{Ann}(t^s) = \{x \in K | t^s x = 0\}$, де s — найбільший член вагової послідовності $\overline{w}$.

Засобами програмування в GAP була обчисленна кількість $W(k, l, m, n)$ побудованих нерозкладних зображень з точністю до еквівалентності, що залежить від порядку k поля відношень кільця K, довжини l локального кільця K, порядку m групи H, степені n зображень. Залежність від k подано аналітично, а залежність від інших параметрів — перебором їх малих значень.

У підрозділі 4.4 «Про число нерозкладних унімономіальних зображень циклічних p-груп над локальним кільцем характеристики p з точністю до $*$-еквівалентності» введене поняття $*$-еквівалентності зображень циклічних груп, що дозволяє над локальними кільцями абстрагуватися від структури поля лишків і оцінювати потужність побудованих зображень навіть коли поле нескінченне. Підкреслимо, що вивчення матриць чи матричних зображень з точністю до спеціальних (не класичних) еквівалентностей виникають при дослідженні різних задач[78,79].

[78]Щедрик В. П. Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників : монографія. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. 304 с.

[79]Гудивок П. М., Шапочка І. В. О черниковских p-группах. *Укр. мат. журн.* 1999. Т. 51, № 3. С. 291–304.

Було встановлено, що зображення вигляду (1) $*$-еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні послідовності $(s_1, \ldots, s_n)$ циклічно еквівалентні.

Засобами програмування в GAP була обчислена кількість $X(l, m, n)$ побудованих нерозкладних зображень з точністю до $*$-еквівалентності, що залежить від довжини l локального кільця K, порядку m групи H, степені n зображень. Залежність від параметрів подано перебором їх малих значень.

У підрозділі 4.5 «Про число спадково незвідних унімономіальних зображення циклічних p-груп над локальним кільцем характеристики p з точністю до еквівалентності» встановлено, що відображення

$$\Gamma\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_n t^{s_n}\right),$$

де $\varepsilon_i \in K^*$, $0 \leqslant s_i < l$ $(i = 1 \ldots, n)$ є спадково незвідним унімономіальним зображенням циклічної p-групи $H = \langle a \rangle$ над комутативним локальним кільцем характеристики p, радикал Джекобсона якого $\operatorname{Rad} K = tK$, t — нільпотентний елемент степеня $l > 1$ коли

1. $\sum_{j=0}^{|H|-1} s_{i+j} \geqslant l$ $(i = 1, \ldots, n)$,
2. $(s, n) = 1$, $t^s \neq 0$, де $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

Крім того, два зображення

$$\Gamma\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_n t^{s_n}\right), \Gamma'\colon a \to E_n + M\left(\varepsilon'_1 t^{s'_1}, \ldots, \varepsilon'_n t^{s'_n}\right),$$

де $\varepsilon_i, \varepsilon'_i \in K^*$, $0 \leqslant s_i < l$, $0 \leqslant s'_i < l$ $(i = 1 \ldots, n)$, вказаного вигляду еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні послідовності $(s_1, \ldots, s_n)$ та $(s'_1, \ldots, s'_n)$ циклічно еквівалентні а елементи $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ та $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon'_i$ кільця K рівні за модулем $\operatorname{Ann}(t^s) = \{x \in K | t^s x = 0\}$, де s — найбільший член вагової послідовності $\overline{w}$.

Засобами програмування в GAP була обчислена кількість $Y(k, l, m, n)$ побудованих спадково незвідних зображень з точністю до еквівалентності, що залежить від порядку k поля відношень кільця K, довжини l локального кільця K, порядку m групи H, степені n зображень. Залежність від k подано аналітично, а залежність від інших параметрів — перебором їх малих значень.

У п'ятому розділі «Уніпотентні підгрупи лінійних груп над комутативними кільцями» встановлюються нові класи повної та спеціальної лінійних груп, що максимальні уніпотентні підгрупи попарно спряжені. Отримані результати застосовуються до вивчення силовських p-підгруп тих же груп над кільцем K, якщо характеристика кільця K рівна p^s $(s \in \mathbb{N})$.

У підрозділі 5.1 «Вступ» описано базові поняття теорії лінійних груп над комутативними кільцями та окреллено напрям досліджень розділу.

У підрозділі 5.2 «Максимальні уніпотентні підгрупи повної лінійної групи» одержано класифікацію максимальних уніпотентних підгруп повної лінійної групи над комутативним кільцем з одиницею, для якого фактор-кільце за первісним радикалом $\operatorname{rad} K$ є скінченна пряма сума областей Безу.

Теорема 5.4. *Нехай K — комутативне кільце з одиницею, для якого $K/\operatorname{rad} K$ — скінченна пряма сума областей Безу. Тоді будь-яка максимальна уніпотентна підгрупи групи $GL(n, K)$ спряжена до групи*

$$P = \{X \in GL(n, K) | \widetilde{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\}.$$

Тут $\widetilde{T} = (t_{ij} + \operatorname{rad} K)$ — матриця над фактор-кільцем $K/\operatorname{rad} K$ для довільної матриці $T = (t_{ij})$ над кільцем K.

У підрозділі 5.3 «Максимальні уніпотентні підгрупи спеціальної лінійної групи» застосовуються результати досліджень уніпотентних підгруп повної лінійної групи над комутативним кільцем до повної класифікації з точністю до спряження максимальних уніпотентних підгруп спеціальної лінійної групи над комутативним кільцем з одиницею, для якого фактор-кільце за первісним радикалом $\operatorname{rad} K$ є скінченна пряма сума областей Безу. Наводиться розширене формулювання раніше отриманої здобувачем теореми, що описує одну максимальну уніпотентну підгруп повної лінійної групи над довільним комутативним кільцем.

Теорема 5.6. *Нехай K — комутативне кільце.*

$$P = \{X \in M(n, K) | \widetilde{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\}$$

є максимальною уніпотентною підгрупою групи $GL(n, K)$.

Застосовуючи цю теорему та результати попереднього підрозділу показано такі дві теореми.

Теорема 5.7. *Нехай K — комутативне кільце. Тоді*

$$P \cap SL(n, K), \text{ де } P = \{X \in M(n, K) | \widetilde{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\}$$

є максимальною уніпотентною підгрупою групи $SL(n, K)$.

Теорема 5.9. *Нехай K — комутативне кільце. Якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скінченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $SL(n, K)$ спряжена до групи*

$$P \cap SL(n, K), \text{ де } P = \{X \in M(n, K) | \widetilde{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\}.$$

У пiдроздiлi 5.4 «Силовськi p-пiдгрупи повної та спецiальної лiнiйної групи над кiльцем характеристики p^s» застосовано доведенi твердження для унiпотентних пiдгруп до дослiдження силовськi p-пiдгрупи повної та спецiальної лiнiйної групи над комутативним кiльцем K характеристики p^s. Нехай $P = \{X \in M(n, K) | \widetilde{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\}$.

- P є силовською p-пiдгрупою групи $GL(n, K)$.
- Якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скiнченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка силовська p-пiдгрупа групи $GL(n, K)$ спряжена до групи P.
- $P \cap SL(n, K)$ є силовською p-пiдгрупою групи $SL(n, K)$.
- Якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скiнченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка силовська p-пiдгрупа групи $SL(n, K)$ спряжена до групи $P \cap SL(n, K)$.

У шостому роздiлi «Еквiвалентнiсть матриць за модулем iдеалiв» дослiджується зв'язок мiж дикiстю задачi про опис матриць над факторiальним кiльцем з точнiстю до еквiвалентностi за модулем iдеалу, i властивостями простих елементiв даної областi.

У пiдроздiлi 6.1 «Еквiвалентнiсть пар матриць над полем» та 6.2 «Еквiвалентiсть матриць та пар матриць над кiльцем» описано результати та загальнi iдеї пов'язаними з окресленими дослiдженнями.

У пiдроздiлi 6.3 «Еквiвалентнiсть матриць над факторiальним кiльцем» одержано такий результат.

Теорема 6.7. *Нехай K — факторiальне кiльце, а $J \neq K$ — його iдеал, що має щонайменше два неасоцiйовнi простi елементи. Тодi для будь-якого елемента $v \in J$, принаймнi три з множникiв розкладу, якого на простi множники належать J, задача класифiкацiї матриць над K за модулем vK є дика за модулем J.*

Показано, що для локального факторiального кiльця K, що не є областю головних iдеалiв це означає, що для будь-якого елемента v довжини $l(v) > 2$ задача класифiкацiї матриць над K за модулем vK є дика за модулем радикала Джекобсона кiльця K.

У сьомому розділі «Застосування в теорії групових кілець і теорії кодів» засобами теорії зображень над комутативними кільцями розв'язуються низка задач, які формулюються не в термінах теорії зображень а частина має навіть прикладне спрямування.

У підрозділі 7.1 «Одиниці скінченного порядку цілочислового групового кільця групи $PSL(3,4)$» методом Лутара — Пасі досліджується гіпотеза Цассенхауза про раціональну спряженість одиниць скінченного порядку цілочислового групового кільця скінченної простої групи $PSL(3,4)$ та з'ясовуються можливі порядки елементів. Основним результатом підрозділу, що також спираються на результати отримані програмним шляхом в системі GAP, є теорема.

Теорема 7.1. *Нехай $G = PSL(3,4)$ і $u = \sum_{g\in G}\alpha_g g$ — одиниця скінченного порядку групи $V(\mathbb{Z}G)$, $\nu_C = \varepsilon_C(u) = \sum_{g\in C}\alpha_g$ — значення часткового поповнюючого відображення, що відповідає класу спряжених елементів C групи G на одиниці u.*

1. *Якщо $|u| \in \{2,3\}$, то u раціонально спряжена з деяким $g \in G$.*
2. *В $V(\mathbb{Z}G)$ немає елементів порядку* 10, 12, 14, 15, 21 *або* 35.
3. *Якщо $|u|=4$, тоді $\nu_{rx}=0$ для будь-якого $rx \notin \{2a,4a,4b,4c\}$ і*
$$\begin{aligned}(\nu_{2a},\nu_{4a},\nu_{4b},\nu_{4c}) \in \{&(2,-1,-1,1),(2,-1,0,0),(0,-1,0,2),\\ &(2,-1,1,-1),(0,-1,1,1),(0,-1,2,0),\\ &(-2,-1,2,2),(2,0,-1,0),(0,0,-1,2),\\ &(2,0,0,-1),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(-2,0,1,2),\\ &(0,0,2,-1),(-2,0,2,1),(2,1,-1,-1),\\ &(0,1,-1,1),(0,1,0,0),(-2,1,0,2),(0,1,1,-1),\\ &(-2,1,1,1),(-2,1,2,0),(0,2,-1,0),\\ &(-2,2,-1,2),(0,2,0,-1),(-2,2,0,1),\\ &(-2,2,1,0),(-2,2,2,-1)\}.\end{aligned}$$
4. *Якщо $|u|=5$, то $\nu_{rx}=0$ $rx \notin \{5a,5b\}$ і*
$$(\nu_{5a},\nu_{5b}) \in \{(2,-1),(1,0),(0,1),(-1,2)\}.$$
5. *Якщо $|u|=7$, то $\nu_{rx}=0$ $rx \notin \{7a,7b\}$ і*
$$(\nu_{7a},\nu_{7b}) \in \{(2,-1),(1,0),(0,1),(-1,2)\}.$$
6. *Якщо $|u|=6$, тоді $\nu_{rx}=0$ $rx \notin \{2a,3a\}$ і*
$$(\nu_{2a},\nu_{3a}) \in \{(4,-3),(-2,3)\}.$$

У підрозділі 7.2 «Побудова розширених бінарних кодів Голея за груповим кільцем скінченних груп порядку 24» розглядається групове кільце $\mathbb{F}_2 G$ групи G порядку 24 над полем $\mathbb{F}_2$ з двох елементів. З'ясовується коли за деякими дільниками нуля $v \in \mathbb{F}_2 G$ можна побудувати розширений бінарний код Галея (тобто бінарним $[24, 12, 8]$-код) методом вперше застосованим[72,73] для симетричної групи S_4 порядку 24 та для групи D_{24} діедра того ж порядку.

За цим методом код будується, як лінійний код породжений матрицею

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \alpha_{g_1^{-1}g_3} & \dots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \alpha_{g_2^{-1}g_3} & \dots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \alpha_{g_n^{-1}g_3} & \dots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{pmatrix}$$

якщо

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \sigma(v) = \sigma(v)^T, \\ 2) & \sigma(v)^2 = 0_{24\times 24}, \\ 3) & \operatorname{rank}(\sigma(v)) = 12, \end{array}\right\}$$

якщо 8 є його мінімальна відстань.

Відомо, що є 15 груп з точністю до ізоморфізму порядку 24. В результаті досліджень, що також спираються на результати отримані програмним шляхом в системі GAP, виявилося, що такі коди можна побудувати ще для 3 груп: $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$, $G = C_3 \times D_8$ та $G = C_2 \times A_4$ і не можна для інших. В їх групових кільцях є 576, 128 та 384 елементів v відповідно, з яких утворюються коди.

У підрозділі 7.3 «Одна конструкція самодуальних кодів» з'ясовано, коли даний самоортогональний код є самодуальним. Основним результатом є теорема.

Теорема 7.8. *Нехай R скінченне комутативне фробеніусове кільце характеристики 2 і $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ скінченна група порядку n, $(\gamma_1+\gamma_2)^2+n(\alpha_1+\alpha_2)^2 = 0$, $vv^* = 1+(\alpha_1+\alpha_2)^2\widehat{g}$ і $(\gamma_1+1)\alpha_1+(\gamma_2+\mu)\alpha_2 = 0$, де $\widehat{g} = \sum_{i=1}^n g_i$ і $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_{g_i}$, то Код $C(v)$ породжений рядками матриці $M(v)$ є самодуальним кодом довжини $2n+2$ тоді і тільки тоді, коли $(\gamma_1 + n\alpha_1^2, \gamma_2 + n\alpha_2^2, \mu\alpha_1 + \alpha_2)$ має вільний ранг 1.*

Тут

$$M(v) = \left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} \gamma_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 & \gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ \hline \alpha_1 & & & & \alpha_2 & & & \\ \vdots & & E_n & & \vdots & & \sigma(v) & \\ \alpha_1 & & & & \alpha_2 & & & \end{array} \right),$$

де $\sigma(v)$ матриця, що відповідає елементу v групового кільця групи G над кільцем R.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена продовженню деяких природних напрямків досліджень зображень скінченних груп над комутативними кільцями та супутнім питанням. Тематика, представлена в роботі, має дуже довгу та багату історію, яка налічує вже понад 130 років і знайшла численні застосування як у алгебрі, так далеко за її межами. У роботі, розширюються відомі властивості зображень скінченних груп над комутативними кільцями, що пов'язані в першу чергу з їх звідністю та розкладністю. Основними новими науковими результатами дисертації є наступні:

- Встановлено критерій скінченності множина нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи над комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p^s $(s > 0)$, яке не є напівпервісним, з нескінченним полем лишків.
- Показано нескінченність числа всіх нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня $n > 1$ скінченної p-групи G порядку $|G| > 2$ над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем характеристики p, з нескінченним полем лишків.
- Описано всі, з точністю до еквівалентності, матричні зображення 2-го степеня групи діедра порядку $2p$ (p — непарне просте число) над комутативними локальними кільцями довжини 2 характеристики 2, та з'ясовано критерій їх незвідності.
- Встановлено достатні умови спадкової звідності t-циклічних та бімономіальних матриць над комутативним кільцем.
- Побудовано серії нерозкладних та спадково незвідних унімономіальних зображень циклічної p-групи над скінченним комутативним локальним кільцем скінченної довжини характеристики p, та оцінене число побудованих зображень заданого

степеня з певною точністю для кожної групи та кільця окремо.

– Показано, що всі максимальні уніпотентні підгрупи повної лінійної групи та спеціальної лінійної групи над кільцем K попарно спряжені, якщо фактор-кільце кільця K за первісним радикалом є скінченною прямою сумою областей Безу.
– Показано дикість за модулем радикалу Джекобсона задачі про описання з точністю до еквівалентності за модулем головного ідеалу породженого будь-яким елементом довжини більше 2 матриць над локальним факторіальними кільцем, що не є областю головних ідеалів.
– Встановлено, що в цілочисловому груповому кільці скінченної групи $PSL(3,4)$ виконується гіпотеза Цассенхауза для елементів порядку 2 та 3.
– Вперше побудовано розширені бінарні коди Галея за груповим кільцем груп $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2,\ C_3 \times D_8,\ C_2 \times A_4$ порядку 24 над полем з двох елементів, та підраховано їх кількість.

Дисертаційна робота має переважно теоретичний характер, що є внеском у актуальну задачу класифікації зображень скінченних груп над комутативними кільцями з точністю до еквівалентності. Розроблені методи застосовувалися в прилеглих теоріях лінійних груп, матриць, групових кілець та кодів над комутативними кільцями. Зокрема, застосування в останній сфері носить практичну спрямованість.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення даного степеня скінченної p-групи над комутативним локальним кільцем. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2002. Вип. 7. С. 108–114.
2. Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення даного степеня скінченної p-групи над напівпервісним комутативним локальним кільцем. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2003. Вип. 8. С. 156–159.
3. Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення 2-групи даного степеня над напівпервісним локальним кільцем. *Наук. ві-*

сник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики. 2004. Вип. 9. С. 103–106.

4. Тилищак О. А. Про модулярні зображення циклічної 2-групи над локальною областю цілісності. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2005. Вип. 10–11. С. 137–141.
5. Тилищак О. А. Зображення 2-го степеня групи діедра порядку 2p над деякими комутативними локальними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2008. Вип. 16. С. 188–192.
6. Tylyshchak A. A. On maximal unipotent subgroups of the general linear group over commutative rings. *Bulletin of University of Kyiv. Ser.: Phys. & Math.* 2010. Vol. No 3. P. 115–117.
7. Динис Р. Ф., Тилищак О. А. Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2012. Вип. 23, № 1. С. 57–62.
8. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Reducibility and Irreducibility of Monomial Matrices over Commutative Rings. *Algebra Discret Math.* 2013. Vol. 16, No 2. P. 171–187.
9. Бортош М. Ю., Тилищак О. А. Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки.* Київ. : НПУ ім. М. П. Драгоманова. 2013. № 14. С. 68–78.
10. Bondarenko V. M., Tylyshchak A. A., Stoika M. V. On the equivalence of matrices over commutative rings modulo ideals. *Algebra and Discrete Math.* 2014. Vol. 17, No 1. P. 12–19.
11. Динис Р., Тилищак О. Про звідність деяких мономіальних матриць над комутативними кільцями. *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: математики і механіки.* 2014. Вип. 2 (32). С. 20–23.
12. Gildea J., Tylyshchak A. Torsion units in the integral group ring of $PSL(3,4)$. *J. Algebra Appl.* 2016. Vol. 15, No 1, 1650013. 9 p.
13. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings. *Algebra and Discrete Math.* 2016. Vol. 22, No 1. P. 11–20.

14. Dougherty S. T., Gildea J., Taylor R., Tylyshchak A. Group rings, G-codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography.* 2018. Vol. 86, Is. 9. P. 2115-2138.
15. Тилищак О. А. Про число нерозкладних модулярних зображень циклічної p-групи над скінченним локальним кільцем. *Прикл. проблеми механіки і математики.* 2018. Вип. 16. С. 19–29.
16. Тилищак О. А. Про незвідність мономіальних матриць 7-го порядку над локальними кільцями. *Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки.* 2018. Вип. № 3. С. 37–44.
17. Bondarenko V. M., Gildea J., Tylyshchak A. A., Yurchenko N. V. On hereditary reducibility of 2-monomial matrices over commutative rings. *Algebra and Discrete Math.* 2019. Vol. 27, No 1. P. 1–11.
18. Dougherty S., Gildea J., Korban A., Kaya A., Tylyshchak A., Yildiz B. Bordered Constructions of Self-Dual Codes from Group Rings and New Extremal Binary Self-Dual Codes. *Finite Fields and Their Applications.* 2019. Vol. 57. P. 108–127.
19. Тилищак О. А. Про максимальні уніпотентні підгрупи спеціальної лінійної групи над комутативним кільцем. *Укр. мат. журн.* 2019. Т. 71, № 8. С. 1150–1156.
20. Тилищак О. А. Про спадково незвідні унімономіальні зображення циклічних p-груп над локальними кільцями характеристики p. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2019. Вип. № 1 (34). С. 52–59.
21. Тилищак О. А. Про число нерозкладних модулярних зображень циклічної p-групи над локальним кільцем скінченної довжини. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Вип. 62, № 1. С. 74–82.

Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

22. Тилищак О. А., Юрченко Н. В., Цімболинець Р. Ф. Нерозкладність однієї матриці довільного порядку над локальним кільцем. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математики і інформатики.* 2016. Вип. № 1 (28). С. 135–139.
23. Dougherty St., Gildea J., Taylor R., Tylyshchak A. Constructions of Self-Dual and Formally Self-Dual Codes from Group Rings. ArXiv preprint arXiv:1604.07863v1, 2016. 20 p. URL: `https://arxiv.org/abs/1604.07863v1` (date of appeal: 28.03.2020).

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

24. Tylyshchak O. Irreducible modular representation of the given degree of finite p-group over commutative local ring of characteristic p^s. *IV International Algebraic Conference in Ukraine* : abstracts, L'viv, August 4–9, 2003. L'viv : Ivan Franko National University of L'viv, 2003. P. 222–223.
25. Tylyshchak A. On maximal unipotent subgroups of the general linear group over commutative ring. *XI International Mathematical Kravchuk Conference* : conference materials, Kyiv, May 18–20, 2006. Kyiv. : TOV «Zadruha», 2006. P. 616.
26. Tylyshchak A. A. On Irreducible Modular Representations of Given Degree of Finite Group over Commutative Local Ring. *International Conference of Humboldt-Kolleg Series in Kyiv «Humboldt Cosmos: Science and Society», Kyiv, November 19-22, 2009* : abstracts, Kyiv, November 19–22, 2009. Kyiv : Embassy of the Federal Republic of Germany Kyiv, 2009. P. 45.
27. Динис Р. Ф., Тилищак О. А. Про еквівалентність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів. *Десята наукова відкрита конф. інституту прикладної математики та фундаментальних наук ІМФН* : зб. матеріалів та програма конф. [«PSC-IMFS-10»] (Львів, 17–18 травня 2012 р.). Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. С. А31.
28. Tylyshchak A., Bortosh M. On Reducibility of Monomial Matrixes over Commutative Local Rings. *IX International Algebraic Conference in Ukraine* : abstracts of reports, L'viv, July 8–13, 2013. L'viv : Ivan Franko National University of L'viv, 2013. P. 201.
29. Bondarenko V., Dinis R., Tylyshchak A. On irreducibility of some matrices over p-adic integers. *Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations* : abstracts, Kiev, September 16–20, 2013. Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2013. P. 6.
30. Dinis R. F., Tylyshchak A. A., Yurchenko N. V. On indecomposability of some monomial matrices over local rings. *X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd* : abstracts, Odessa, August 20–27, 2015. Odessa : TES, 2015. P. 32.
31. Stoika M. V., Tylyshchak A. A. On classifying the matrices over commutative rings up to equivalence. *International Conference of*

Young Mathematicians : book of abstracts, Kyiv, June 3–6, 2015. Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. P. 23.

32. Динис Р. Ф., Тилищак О. А., Юрченко Н. В. Про нерозкладність мономіальних матриць спеціального вигляду над локальними кільцями. *Міжнар. мат. конф. «Методика викладання та методи досліджень в математиці»* : матеріали конф., Берегове, 21–23 квітня 2016. Ужгород : ТОВ «РІК-У», 2016. С. 28.
33. Tylyshchak A. A. On the estimation of the number of indecomposable representations of given degree of a cyclic group. *XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko* : abstracts, Kyiv, July 3–7, 2017. Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. P. 137.
34. Bondarenko V., Gildea J., Salim M., Tylyshchak A. On the number of indecomposable representations of given degree of a cyclic group over local rings of finite length. *The Second International Conference on Groups, Group Rings and Related Topics* : abstracts [electronic resource], Khorfakkan (UAE), November 19–22, 2017. Khorfakkan (UAE), 2017. P. 10. URL: `https://conferences.uaeu.ac.ae/ggrrt2017/en/abstracts_ggrrt.pdf` (date of appeal: 28.03.2020).
35. Тилищак О. Деякі нерозкладні модулярні зображення циклічної p-групи над локальним кільцем скінченної довжини. *Міжнар. наукова конф. «Сучасні проблеми механіки та математики»* : збірник наукових праць : у 3-х т. / за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс] (Львів, 22–25 травня 2018). Львів, 2018. Т. 3. С. 237. URL: `http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018/Volume_3.pdf` (дата звернення 28.03.2020).
36. Tylyshchak A. A. On irreducibility of monomial matrices of order 7 over local rings. *XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky* : abstracts, 2019, July 02-06, Vinnytsia, Ukraine. Vinnytsia : Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. P. 117–118.

АННОТАЦІЯ

Тилищак О. А. Матричні зображення скінченних груп над комутативними локальними кільцями та їх застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-мате-

матичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних зображень скінченних груп над комутативними кільцями, дослідженню мономіальних матриць пов'язаних з зображеннями над тими ж кільцями та різноплановим застосуванням методів теорії матричних зображень скінченних груп над комутативними кільцями в теорії лінійних груп, групових кілець та теорії кодування. В роботі в основному розглядаються модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними кільцями характеристики p^s, що не є полями.

Було встановлено критерій скінченності множини нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи над комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p^s $(s > 0)$, яке не є напівпервісним, з нескінченним полем лишків. Показано нескінченність числа всіх нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня $n > 1$ скінченної p-групи G порядку $|G| > 2$ над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем характеристики p, з нескінченним полем лишків.

Розглянуто такі види мономіальних матриць: канонічних циклічних, t-циклічних, бімономіальних. Встановлено одну достатню умову спадкової звідності t-циклічних та бімономіальних матриць над комутативним кільцем. Описане дослідження матриць було застосоване до дослідження потужності множини нерозкладних та множини незвідних унімономіальних зображень з точністю до еквівалентності циклічної p-групи над комутативним локальним кільцем скінченної довжини характеристики p^s.

Методами теорії матричних зображень скінченних груп над комутативним кільцем K було показано, що всі максимальні уніпотентні підгрупи повної та спеціальної лінійної групи над кільцем K попарно спряжені, якщо його фактор-кільце $K/\mathrm{rad}K$ за первісним радикалом $\mathrm{rad}K$ є скінченною прямою сумою областей Безу. Також методом Лутара – Пасі проведено дослідження гіпотези Цассенхауза для одиниць скінченного порядку цілочислового групового кільця скінченної простої групи $PSL(3,4)$.

Було побудовано з використанням регулярного зображення групових кілець низку самодуальних кодів над деякими скінченними комутативними фробеніусовими кільцями в тому числі й бінарні самодуальні коди, багато з яких є екстремальними. Зокрема, розглянуто один метод побудови розширених бінарних кодів Галея за груповим кільцем групи 24 порядку. Встановлено, що з 15 відомих неізоморфних груп 24 порядку таким способом можна побудувати код тільки для груп $D_{24},\ (C_6 \times C_2) \rtimes C_2,\ C_3 \times D_8,\ S_4,\ C_2 \times A_4$.

Ключові слова: комутативне кільце, радикал кільця, ступінь нільпотентності, локальне кільце, матричне зображення, незвідне зображення, нерозкладне зображення, мономіальна матриця, унімономіальне зображення, уніпотентна група, лінійна група, цілочислове групове кільце, одиниця скінченного порядку, самодуальний код, розширений бінарний код Голея.

АННОТАЦИЯ

Тилищак О. А. Матричные представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами и их применения. – Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования і науки Украины, Киев, 2020.

Диссертационная работа посвящена изучению матричных представлений конечных групп над коммутативными кольцами, исследованию мономиальних матриц связанных с представлениями над теми же кольцами и разноплановым применением методов теории матричных представлений конечных групп над коммутативными кольцами в теории линейных групп, групповых колец и теории кодирования. В работе в основном рассматриваются модульных представления конечных p-групп над коммутативных кольцами характеристики p^s, не являются полями.

Было установлено критерий конечности множества неэквивалентных неприводимых матричных представлений заранее заданного степени конечной p-группы над коммутативным нётеровым локальным кольцом характеристики p^s $(s > 0)$, не являющегося полупервичным, с бесконечным полем вычетов. Показано бесконечность числа всех неэквивалентных неприводимых матричных представлений заранее заданного степени $n > 1$ конечной p-группы G порядка $|G| > 2$ над коммутативным нётеровым локальным полупервичным нецелостным кольцом характеристики p, с бесконечным полем вычетов.

Рассмотрены такие виды мономиальних матриц канонических циклических, t-циклическая, бимономиальних. Установлена одно достаточное условие наследственной приводимости t-циклическая и бимономиальних матриц над коммутативным кольцом. Описанное исследование матриц было применено к исследованию мощности множества неразложимых и множества несводимых унимономиальних представлений с точностью к эквивалентности циклической p-группы над коммутативным локальным кольцом конечной длины характеристики p^s.

Методами теории матричных представлений конечных групп над коммутативным кольцом K было показано, что все максимальные унипотентни подгруппы полной и специальной линейной группы над кольцом K попарно сопряженные, если его фактор-кольцо $K/\mathrm{rad}K$ по первоначальному радикалом $\mathrm{rad}K$ является конечной прямой суммой областей Безу. Также методом Лутара – Пасе проведено исследование гипотезы Цассенхауза для единиц конечного порядка целочисленного группового кольца конечной простой группы $PSL(3,4)$.

Было построено с использованием регулярного представления групповых колец ряд самодуальних кодов над некоторыми конечными коммутативними фробениусовыми кольцами в том числе и бинарные самодуальни коды, многие из которых являются экстремальными. В частности, рассмотрен один метод построения расширенных бинарных кодов Галлея по групповому кольцом группы 24 порядка. Установлено, что с 15 известных неизоморфных групп 24 порядка таким способом можно построить код только для групп D_{24} $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$, $C_3 \times D_8$, S_4 $C_2 \times A_4$.

Ключевые слова: коммутативное кольцо, радикал кольца, степень нильпотентности, локальное кольцо, матричное представление, неприводимое представление, неразложимое представление, мономиальна матрица, унимономиальное представление, унипотентна группа, линейная группа, целочисленных групповое кольцо, единица конечного порядка, самодуальний код, расширенный бинарный код Голея.

ABSTRACT

Tylyshchak A. A. Matrix representations of finite groups over commutative local rings and their applications. – Qualifying scientific

paper on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — «algebra and number theory». – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the studding of matrix representations of finite groups over commutative rings, the studding of monomial matrices connected with representations over the same rings and to the diversified applications of methods of theory of matrix representations of finite groups over commutative rings in linear group theory, group rings, and coding theory. The paper deals mainly with irreducible and indecomposable modular representations of finite p-groups over commutative rings of characteristic p^s, which are not fields.

In paper it has been found the criterion of finiteness of the set of non-equivalent irreducible matrices representations of given degree of finite p-group over a commutative Noetherian local ring of characteristics p^s ($s > 0$, p is a prime) which is not semi-primitive ring, with infinite residue class field. It has also been shown the infiniteness of the set of non-equivalent irreducible matrix representations of given degree $n > 1$ of finite p-group G of order $|G| > 2$ over a commutative Noetherian local semi-primordial non-integer ring of characteristic p, with infinite residue class field.

The following types of monomial matrices: canonical cyclic, t-cyclic, binomial are considered. It has been established one sufficient condition of its hereditary reducibility over a commutative ring. A similar result was set for binomial matrices over the commutative ring.

The described matrix studding was applied to the investigation of cardinality of the set of indecomposable and set of irreducible unimonomial representations up to equivalence of a cyclic p-group over a commutative local ring of finite length of characteristic p^s. It has been constructed a series of indecomposable unimonomial representations of a cyclic p-group corresponding to two-loop cycles over a commutative local ring of finite length of characteristic p^s, and it has been estimated below the number of constructed representations of a given degree up to equivalence for groups with some large enough order. A series of indecomposable unimonomial representations was constructed for a cyclic p-group over a finite commutative local ring of finite length of characteristic p, and it was counted the number of constructed representations of a given degree up to equivalence separately for each group and ring with the finite residue class field.

It has been introduced the notation of $*$-equivalence of representations of a cyclic group over the commutative local principle ideals ring, which allowed us to abstract from some of the invertible parameters in a series of representations constructed earlier. It has been constructed a new series of irreducible unimonomial representations of a cyclic p-group over an arbitrary commutative local ring of finite length of characteristic p and it was counted the number of constructed representations of given degree up to $*$-equivalence separately for each group and ring.

A new series of hereditary irreducible unimonomial representations of a cyclic p-group over a finite commutative local principle ideals ring of the characteristic p was also constructed. The number of constructed representations of a given degree up to equivalence was counted separately for each group and ring with the finite residue class field.

Methods of matrix representation theory of finite groups over commutative ring K naturally find application in the investigation of matrix groups over the same ring. It has been shown that all maximal unipotent subgroups of the general linear group over the ring K are pairwise conjugated if factor-ring $K/\operatorname{rad} K$ by its primitive radical $\operatorname{rad} K$ is a finite direct sum of Bezu domain. It is also shown that all maximal unipotent subgroups of the special linear group over the ring K are pairwise conjugated if $K/\operatorname{rad} K$ is a finite direct sum of Bezu domain. Results on the maximum unipotent subgroups of the general and special linear groups over the commutative ring are applied to the investigation of the Sylow p-subgroup of the general and special linear group over the same ring of characteristic p^s.

A classic example of applying of classical and modular representation theory to investigation of torsion units of the integer group ring the finite group is the Luthar–Passi method. It has been shown by this method that in the integer group ring of the finite simple group $PSL(3,4)$ of exponent 420, which has 23 non-trivial divisors, can be only non-trivial torsion units of order: 2, 3, 4, 5, 7 and 6 (it is known that order of torsion units divides 420), and for torsion units of order 2 and 3 the Zassenhaus conjecture is satisfied.

Using the regular representation of group rings make it possible to construct some self-dual codes over finite commutative Frobenius rings. Some of them are binary self-dual codes, which are extreme. In particular, it has been considered one method of constructing extended Binary Golay code by the group ring of group of order 24. It is known that there are 15 non-isomorphic groups of order 24. It has been shown that by this way one can construct extended Binary Golay code only from groups $D_{24},\ (C_6 \times C_2) \rtimes C_2,\ C_3 \times D_8,\ S_4,\ C_2 \times A_4$. For three of these groups $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2,\ C_3 \times D_8,\ C_2 \times A_4$ such codes were constructed first. Moreover, it is known codes of form, which used the regular representation on some elements of a group ring as part of a generating matrices of codes. Method of construction of this codes was extended to constructing new self-dual codes over the field of two element and over some finite commutative Frobenius rings.

Keywords: commutative ring, radical of a ring, degree of nilpotency, local ring, matrix representation, irreducible representation, indecomposable representation, monomial matrix, unimonomial representation, unipotent group, linear group, integral group ring, torsion unit, selfdual cod, extended binary Golay code.