ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

ПРОБЛЕМНО-ОРІЄНТОВАНЕ НАВЧАННЯ НА УРОЦІ МАТЕМАТИКИ

БАКША АДРІЕН АНДРАШІВНА

Студентка ІІ-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: магістр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к .ф. - м. н., доцент,

доцент кафедри математики та інформатики

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

ПРОБЛЕМНО-ОРІЄНТОВАНЕ НАВЧАННЯ НА УРОЦІ МАТЕМАТИКИ

Ступінь вищої освіти: магістр

Виконала: студентка ІІ-го курсу

Бакша Адріен Андрашівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к .ф. - м. н., доцент,

доцент кафедри математики та інформатики

Рецензент: **Бортош Марія Юліївна**

к .ф. - м. н., доцент,

доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь
ДВНЗ "УжНУ"

Берегове
2023

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A PROBLÉMAMEGOLDÓ GONDOLKODÁS TANÍTÁSA-TANULÁSA MATEMATIKA ÓRÁN

Szakdolgozat

Képzési szint: mesterképzés

Készítette: Baksa Adrien

II. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Sztojka Miroszláv

fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens,

a Matematika és Informatika Tanszék docense

Recenzens: Bartos Mária

fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens,

az UNE Algebra és Differenciálegyenletek Tanszékének docense

Beregszász – 2023

Tartalomjegyzék

BEVEZETÉS

A problémamegoldó gondolkodás egy olyan matematikai módszer, amely segíti az oktatókat és a tanulókat abban, hogy megértsék és megoldják a komplex feladatokat. Ez az eljárás megköveteli, hogy a tanulók logikus módon kövessék végig a lépéseket, miközben fokozatosan előrehaladnak a feladat megoldásával. Az is nagyon fontos, hogy használjanak bizonyítási módszereket a probléma megoldásához. Mindezek segítségével a tanulók kreatívan gondolkodva könnyebben megtalálhatják a helyes választ minden feladatra.

A problémamegoldás a matematikaoktatás alapvető része. Segíti a tanulókat a kritikai gondolkodás képességének fejlesztésében, a problémák kreatív megoldásának feltárásában, valamint az összetett fogalmak és elvek megértésében. A szakdolgozat a problémamegoldás előnyeit vizsgálja a matematikaoktatásban, és stratégiákat mutat be a problémamegoldás tanításához az osztályteremben.

Hogyan fejleszti a problémamegoldás a kritikus gondolkodást?

A kritikai gondolkodás a mélyreható gondolkodás és a problémák elemzésének képességeként definiálható, hogy megalapozott következtetésekre jussunk. A problémamegoldás kritikus gondolkodásra ösztönzi a tanulókat azáltal, hogy nehéz problémák megoldására és matematikai ismereteik kreatív alkalmazására készteti őket. Ezáltal jobban megérthetik, hogy miért működnek bizonyos matematikai megoldások, és hogyan alkalmazhatók a való világban. A problémamegoldás kritikai gondolkodási készségek fejlesztésére való felhasználásának előnyei közé tartozik a problémamegoldó magabiztosság növekedése, a matematikai problémákon való munka közbeni kreativitás és a számolási készségek fejlesztése.

A problémamegoldás számos jelentős előnnyel jár a matematikaoktatásban. Azáltal, hogy a tanulókat bevonjuk a matematikai elvek és fogalmak valós alkalmazásaiba, a tanulók javíthatják a tanultak gyakorlati alkalmazására való képességüket. A problémamegoldás továbbá ösztönzi az absztrakt gondolkodást, ami a tanulók számára az alapfogalmak mélyebb megértését teszi lehetővé.

A szakdolgozat célja a problémamegoldás és problémaalkotás elméleti hátterének meghatározása, bemutatása, továbbá a középiskolás tanulók problémamegoldási képességeinek felmérése, a fejlesztés céljainak meghatározása, problémamegoldási képességfejlesztő feladatsor kidolgozása, megvalósítása, értékelése.

1. A PROBLÉMAMEGOLDÓ GONDOLKODÁS FOGALMA

A problémamegoldó készségek tanításához először is meg kell érteni a problémamegoldás fogalmát. A problémamegoldást úgy határozzák meg, mint egy adott problémára vagy kihívásra való megoldás megtalálásának folyamatát. Oktatási környezetben a problémamegoldás olyan feladatokra utalhat, mint például egy matematikai egyenlet kidolgozása. Ha megtanítjuk a diákoknak, hogyan közelítsék meg és oldják meg a problémákat, az segíti őket a kritikai gondolkodás képességének fejlesztésében, amelyet az osztályteremben és azon kívül is hasznosítani tudnak. Ez segíthet nekik abban is, hogy jobb tanulási szokásokat és erősebb szervezési készségeket alakítsanak ki.

1.1. A téma aktualitása

A problémamegoldó gondolkodással kapcsolatos kutatások számos területen folynak, többek között az oktatás, a pszichológia és a számítógépes tudományok területén.

Az oktatási kutatások általában a problémamegoldó gondolkodás hatékonyságát és hatékonyságának növelését vizsgálják. Ezek a kutatások arra a következtetésre jutottak, hogy a problémamegoldó gondolkodás tanítása segíti a diákokat abban, hogy hatékonyabbak legyenek a matematikai problémák megoldásában, és javítja a tanulási eredményeket. ([5])

A pszichológiai kutatások a problémamegoldó gondolkodás kognitív folyamatait vizsgálják, és megpróbálják feltárni, hogyan működik az emberi agy, amikor problémákat old meg. Ezek a kutatások arra a következtetésre jutottak, hogy a problémamegoldó gondolkodás magában foglalja a probléma megértését, az alternatív megoldások felismerését és a megoldás kiválasztását.

A számítógépes tudományok területén a problémamegoldó gondolkodást a mesterséges intelligencia és a gépi tanulás területén vizsgálják. Az ilyen kutatások célja, hogy a számítógépek számára is lehetővé tegyék a problémamegoldó gondolkodást és a tanulást. Az ilyen kutatások eredményei segíthetnek abban, hogy hatékonyabb és intelligensebb számítógépes rendszereket hozzanak létre.

Tehát elmondható, hogy a problémamegoldó gondolkodással kapcsolatos kutatások számos területen zajlanak napjainkban és előreláthatólag a jövőben is.

1.2. A problémamegoldás lépései

Pólya György ([11]) a feladatmegoldások problémáját elsősorban a gyakorlat oldaláról közelíti meg, s támpontokat ad a megoldás menetéhez. A problémamegoldásban a következő négy lépést különbözteti meg.

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

   Ebben a szakaszban olvassuk el a problémát (feladatot), értelmezzük. Sok

esetben segít, ha hangosan olvassuk fel az adott problémát. Ezt követően jegyezzük le az adatokat, feltételeket, ha szükséges vezetünk be jelöléseket, majd tisztázzuk, mit kell meghatározni.
Ha szükséges, rajzoljunk ábrát, diagramot, hogy szemléltessük és rendszerezzük az adatokat.
Tehát a következő kérdésekre kell figyelnie a probléma megoldójának:
- Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?
- Kielégítő-e a kikötés?
- Válasszuk szét a kikötés egyes részeit.

2. lépés: Tervezzük meg a probléma megoldási stratégiát.
   Az esetek nagy részében segít, ha keresünk hasonló problémát az előttünk álló feladathoz. Ha szükséges, próbálkozzunk egyszerűbb feladattal (számok csökkentése, feltételek megváltoztatása).
   Ezt követi a feladat megoldási lépéseinek megtervezése, a szükséges eszközök meghatározása.
   Tehát ebben a szakaszban a következő kérdéseket kell megválaszolnia a feladat megoldójának:
   - Nem találkoztál már a feladattal?
   - Nem ismersz olyan tételt, aminek hasznát vehetnéd?
   - Nem tudnád átfogalmazni a feladatot?
   - Felhasználtál minden adatot?
   - Végül készítsd el a megoldás tervét.

3. lépés: Hajtsuk végre a stratégiát, ellenőrizzük és módosítsuk, ha szükséges.
   Ellenőrizzünk minden lépést, próbáljuk meg bizonyítani, hogy az adott lépés helyes.

4. lépés: Ellenőrizzük és járjuk körbe a megoldást.
   Bizonyosodjunk meg arról, hogy a megoldás elfogadható, ésszerű, keressünk a megoldástól független módot az ellenőrzésre, ellenőrizzük a következtetések helyességét.
   Ha eddig piszkozatra dolgoztunk, írjuk le világosan a megoldást, próbáljunk találni másik megoldási módszert.
   Keressünk következményeket, általánosítást, tegyünk fel további kérdéseket, alkossunk új problémát az adatok, a feltételek változtatásával.

Alan Schoenfeld ([12]) az egyik legismertebb matematikatanár és kutató, aki a probléma-megoldási tevékenységet három területre osztotta:

1. Problematikus helyzetek: Ezek olyan matematikai feladatok, amelyekben a diákoknak meg kell találniuk a helyes megoldást. A probléma az, hogy a diákok nem rendelkeznek elegendő információval, hogy könnyen megoldják a

feladatot, vagy nem találják azonnal a megfelelő módszert. Ebben az esetben a diák dolga, hogy megvizsgálja az információkat, és különböző stratégiákat alkalmazzon a helyes megoldás eléréséhez.

2. Megoldási folyamatok: Ezek olyan tevékenységek, amelyekben a diákoknak új matematikai fogalmakat kell megismerniük, és tanulniuk kell a problémamegoldási folyamatokat. Ez lehet egy új számítási eljárás vagy matematikai elv megértése, vagy a problémamegoldási módszertanok gyakorlása.

3. Megoldás értékelése: Az értékelési tevékenység célja az eredmények és a megoldások vizsgálata. A diákoknak meg kell érteniük, hogy mi a helyes megoldás, és hogyan lehet az eredményt ellenőrizni. Ez magában foglalja a diákoknak a problémával kapcsolatos önértékelését, hogy felmérjék, mennyire értik a matematikai fogalmakat és a megoldási folyamatokat.

Schoenfeld szerint a problémamegoldás olyan készségek összessége, amelyeket minden diáknak fejlesztenie kellene. Az ő általa javasolt tevékenységek célja a diákok gondolkodási készségeinek és az absztrakt gondolkodásuk fejlesztése, valamint az értelmes problémamegoldásra való képességük javítása.([12])

Pólya György általánosan elfogadott modellje valójában Schoenfeld által lett kiegészítve. Schoenfeld úgy gondolta, hogy Pólya modelljének egyes elemei túl általánosak, ezért fontos volt részletesebb módon kifejteni a problémamegoldás folyamatát. Schoenfeld kiegészítése lehetővé tette a diákoknak, hogy a problémamegoldási folyamat minden részére koncentráljanak, és azt is támogatta, hogy a diákok tanulják meg, hogyan tervezzék meg a megoldási stratégiákat és hogyan ellenőrizzék az eredményeket.

1.3. A problémamegoldási képesség fejlesztése

A problémamegoldási képesség fejlesztésének legnagyobb nehézsége, hogy a fejlesztés hosszú folyamat, így iskolai keretek között nehéz megvalósítani a heti óraszámok és a tananyag mennyisége miatt.

Frank Lester ([5]) az alábbi három dimenzióra bontotta a diákok problémamegoldási képességének vizsgálatát:

1. Tartalom: A matematikai tartalom szempontjából megvizsgálja, hogy a diák mennyire érti a matematikai fogalmakat és hogyan alkalmazza azokat a problémamegoldási folyamat során. Ez magában foglalja a diák képességét arra, hogy azonosítsa az összefüggéseket a probléma különböző elemei között, és kreatívan alkalmazza a matematikai fogalmakat a probléma megoldása érdekében.

2. Folyamat: A problémamegoldás folyamatát vizsgálja, amely magában foglalja a diák képességét a probléma megértésére, a megfelelő stratégia kiválasztására

és a megoldás ellenőrzésére. Ezen kívül a diák időbeli szerveződésének, a probléma előkészítésének, a fontos információk azonosításának és a probléma megoldásához kapcsolódó döntéshozatali folyamatoknak is elemzése alá esik.

3. Kontextus: A kontextus a problémamegoldás környezetét jelenti, vagyis azt, hogy a diák milyen helyzetben találja magát, amikor a problémát megoldja. A kontextus elemzése azt jelenti, hogy mennyire érti a diák a probléma valódi jelentését, hogyan értelmezi a probléma feltételeit, hogyan kapcsolja össze a problémát a saját tapasztalataival és a való életbeli helyzetekkel.

Lester szerint az ilyen komplex problémamegoldó képesség vizsgálatára a hagyományos tesztek nem alkalmasak. Ehelyett olyan feladatokat kell készíteni, amelyek valós problémákat tartalmaznak, és amelyek magukban foglalják a fent említett három dimenzió elemzését. Ezen kívül a vizsgálatnak fel kell mérnie a diák gondolkodási folyamatait, ahelyett, hogy csak a végső megoldást mérné.

A diákok problémamegoldási képességeinek vizsgálata során továbbá a következőket állapította meg: ([5])

- A problémák nehézsége a számok nagyságától és a számok számától függ.
- A rendelkezésre álló idő határozza meg, hogy a diák ellenőrzi-e a kapott megoldást vagy nem.
- Minden matematikai probléma megoldható egy vagy több számtani művelettel.

Az említett kutatók munkája alapján elmondhatjuk, hogy a problémamegoldó gondolkodás tanítása a matematikában azt jelenti, hogy megtanítjuk a diákokat, hogyan lehet strukturáltan megoldani a matematikai problémákat, amelyek gyakran összetettek és bonyolultak lehetnek.

Az első lépés az, hogy a diákok megértsék a problémát és megfogalmazzák azt. Ezt követően érdemes áttekinteni a problémát, és kitalálni, hogy milyen matematikai fogalmakat és módszereket lehet felhasználni a megoldáshoz. Fontos, hogy a diákoknak ne csak az algoritmusokat, hanem a problémák mögötti matematikai fogalmakat és összefüggéseket is megértsék.

Ha a diákok már értik a problémát és összegyűjtötték a szükséges információkat, akkor érdemes elkezdeni a megoldás kialakítását. Ez általában egy fokozatos előrehaladást jelent a megfelelő matematikai módszerek és algoritmusok alkalmazásával, amelyek az előző lépésben kerültek azonosításra.

Fontos, hogy a diákok az egész folyamat során ellenőrizzék az eredményeket, és értelmezzék azokat a probléma kontextusában. Ha a diákoknak nehézségeik adódnak a megoldással, akkor érdemes segíteni nekik abban, hogy hogyan lehet megtalálni a hibákat és javítani azokat.

A problémamegoldó gondolkodás tanítása a matematika tanórák keretében tehát arról szól, hogy a diákokat megtanítsuk, hogyan gondolkodjanak strukturáltan és hatékonyan a feladatok megoldása során. Ez azonban nem csak a matematika órákon alkalmazható, hanem az élet más területein is hasznos lehet.

2. FELMÉRÉS

A problémamegoldó képességek fejlődésével kapcsolatos kutatásunk részeként felmérést végeztünk a 10. és 11. osztályos tanulók problémamegoldó képességének felmérésére. A felmérés fő célja a fejlesztendő területek meghatározása volt.

2.1. Felmérő feladatsor

1. Két állomás között a távolság 360 km. Mennyi idő alatt teszi meg ezt a távolságot a 90 km/h sebességgel haladó vonat? Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak, hogy ezt a távolságot 4 óra 30 perc alatt tegye meg? ([13])

2. Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak az új menetrend szerint, ha most 4 óra alatt teszi meg a két állomás közötti távolságot, amit a régi menetrend szerint 100 km/h sebességgel 5 óra alatt tett meg? ([13])

3. Péter és Pál egy túraversenyre edzenek. Egyik reggel 8 órakor Péter elindult Debrecenből az 50 km távolságra lévő Nyíregyháza felé, és egyenletesen haladva, óránként 5 km-t tett meg. Másfél órával később Pál elindult Nyíregyházáról Debrecen felé ugyanazon az úton, 8km/h sebességgel. Péter indulásától számolva mennyi idő múlva tettek meg ugyanannyi utat? Milyen messze voltak ekkora egymástól? ([7])

4. Kovács úr minden hétköznap reggel pontban 8 órakor indul el a házuk elől gépkocsival a munkahelyére. Ha 40 km/h átlagsebességgel halad, akkor 3 percet késik. Ha átlagsebessége 60 km/h, akkor 3 perccel a hivatalos munkakezdés előtt ér a munkahelyére. Mekkora átlagsebesség esetén lesz Kovács úr pontosan a munkakezdésre a munkahelyén? ([3])

A felmérő feladatsor négy mozgással kapcsolatos feladatból állt, melyek a következő kérdésekre adtak választ:

- Ismeri-e a diák az $S = v \cdot t$ képletet?
- Tudja-e alkalmazni a képletet?
- Érti-e a feladatok szövegét?
- Fel tud-e állítani egy egyenletet?
- Meg tudja-e oldani az egyenletet?

2.2. A feladatsor megoldókulcsa

1. feladat. Két állomás között a távolság 360 km. Mennyi idő alatt teszi meg ezt a távolságot a 90 km/h sebességgel haladó vonat? Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak, hogy ezt a távolságot 4 óra 30 perc alatt tegye meg?([13])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

A feladat jobban átláthatósága érdekében készítünk rövidbeírást az $S = v \cdot t$ összefüggés jelöléseinek használatával, ahol tudjuk, hogy S jelöli az utat, v a sebességet, t az időt.

$S = 360$ km.

$v_1 = 90$ km/h.

$t_2 = 4$ óra 30 perc.

$t_1 - ?, v_2 - ?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Időt és sebességet kell kiszámolnunk, viszont az alapképlet az út meghatározására használható. Ebben a lépésben kifejezzük a képletből az időt és a sebességet és, ha szükséges, átváltjuk a mértékegységeket.

Az idő meghatározására szolgáló képlet:

$$t = \frac{S}{v}.$$

A sebesség meghatározására szolgáló képlet:

$$v = \frac{S}{t}.$$

Ezeket a képleteket csak akkor tudjuk használni, ha a rendelkezésre álló adatok egyforma mértékegységben vannak megadva. Ezért a 2. kérdésben szereplő 4 óra 30 percet át kell alakítani 4,5 órává.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Az első kérdésben keresett idő:

$$t_1 = \frac{S}{v_1}$$

$$t_1 = \frac{360 \quad km}{90 \quad km/h} = 4 \quad (h).$$

A második kérdésben keresett sebesség:

$$v_2 = \frac{S}{t_2}.$$

$$v_2 = \frac{360 \quad km}{4,5 \quad h} = 80 \quad (km/h).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

1. kérdés: Ha a vonat óránként 90 km-t tesz meg, akkor 4 óra alatt $90 \cdot 4 = 360$

km-t tesz meg, ami egyenlő a két állomás közötti távolsággal.

2. kérdés: Ha a vonatnak 360 km-t kell megtennie 4,5 óra alatt, akkor 1 óra alatt haladnia kell $360 : 4,5 = 80$ km-t.

Felelet: 4 óra alatt tesz meg a vonat 360 km-t 90 km/h sebességgel, 80 km/h sebességgel kell haladnia, hogy ezt a távolságot 4 óra 30 perc alatt tegye meg.

2. feladat. Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak az új menetrend szerint, ha most 4 óra alatt teszi meg a két állomás közötti távolságot, amit a régi menetrend szerint 100 km/h sebességgel 5 óra alatt tett meg? ([13])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ennél a feladatnál ebben a lépésben a legfontosabb, hogy a diákok felismerjék, hogy a vonatnak ugyanazt az utat kell megtennie. Ennek ismeretében felírhatjuk az adatokat a megfelelő jelölésekkel.

$t_1 = 4$ h.

$t_2 = 5$ h.

$v_2 = 100$ km/h.

$v_1 -?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Alkalmazzuk a képletet:

$$v_1 = \frac{S}{t_1}.$$

A t_1 ismert, az utat viszont meg kell határozni. Az út kiszámítható a régi menetrend adatai alapján:

$$S = v_2 \cdot t_2.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

A két állomás közötti távolság:

$$S = 100 \quad km/h \cdot 5 \quad h = 500 \quad (km).$$

A keresett sebesség:

$$v_1 = \frac{500 \quad km}{4 \quad h} = 125 \quad (km/h).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Ha óránként 100 km-t haladva 5 óra alatt tette meg a vonat az állomások közötti távolságot, akkor ez a távolság $5 \cdot 100 = 500$ km.

Ahhoz, hogy ezt a távolságot megtegye 4 óra alatt, óránként haladnia kell 125 km-t.

Felelet: 125 km/h.

3. feladat. Péter és Pál egy túraversenyre edzenek. Egyik reggel 8 órakor Péter elindult Debrecenből az 50 km távolságra lévő Nyíregyháza felé, és egyenletesen haladva, óránként 5 km-t tett meg. Másfél órával később Pál elindult Nyíregyházáról Debrecen felé ugyanazon az úton, 8km/h sebességgel. Péter indulásától számolva mennyi idő múlva tettek meg ugyanannyi utat? Milyen messze voltak ekkora egymástól? ([7])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Az olyan feladatokban, ahol két szereplő adataival kell számolni, célszerű az adatokat táblázatba foglalni a könnyebb átláthatóság érdekében. A sebességek adottak, az időről annyit tudunk, hogy az egyik fiú 1,5 órával később indult.

Ha a Péter által edzéssel töltött időt x órával jelöljük, akkor Pál $(x - 1,5)$ órát volt úton.

Az útról annyit tudunk, hogy 50 km van a két város között, viszont ebből nem tudjuk meg, hogy az egyes személyek mennyi utat tettek meg. Mindazonáltal a fiúk sebességét és úton töltött idejét felhasználva az $S = v \cdot t$ képlet segítségével megkapjuk, hogy Péter $5x$ km-t tett meg, Pál pedig $8(x - 1,5)$ km-t.

	S, km	v, km/h	t, h
Péter	$5x$	5	x
Pál	$8(x - 1,5)$	8	$x - 1,5$

Célunk az, hogy meghatározzuk, hogy Péter indulásától számolva mennyi idő múlva tettek meg ugyanannyi utat a fiúk, tehát az x értékét kell meghatározni.

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Mivel az a kérdés, hogy mikor tettek meg ugyanannyi utat, a Péter által megtett útnak egyenlőnek kell lennie a Pál által metett úttal. Vagyis:

$$5x = 8(x - 1,5).$$

Ha megoldjuk az egyenletet, megkapjuk a választ az első kérdésre. A második kérdés megválaszolásához ki kell számolnunk, hogy mennyi utat tettek meg a fiúk és a kettejük által megtett tak összegét ki kell vonni 50-ből.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet:

$$5x = 8(x - 1,5);$$

$$5x = 8x - 12;$$

$$3x = 12;$$

$$x = 4.$$

Tehát Péter indulásától számolva 4 óra múlva tettek meg a fiúk azonos távolságot. Péter 4 óra alatt megtett $5 \cdot 4 = 20$ km-t, Pál pedig $8 \cdot (4 - 1,5) = 20$ km-t, tehát valóban ugyanannyi utat tettek meg.

Mivel 50 km a teljes út és a fiúk egymással szemben haladnak, a közöttük lévő távolság $50 - (20 + 20) = 10$ km.

4. lépés: Ellenőrzés.

Ellenőrzésre mindig igyekezzünk a megoldásunktól független módszert alkalmazni.

Péter indulása után 1 órával megtett 5 km-t, Pál ekkor még nem indult el. Két óra múlva Péter megtett 10 km-t, Pál 4 km-t. Három óra múlva Péter megtett 15 km-t, Pál 12 km-t, négy óra múlva Péter megtett 20 km-t, Pál szintén 20 km-t.

Felelet: Péter indulásától számolva 4 óra múlva tettek meg ugyanannyi utat, ekkor 10 km volt köztük a távolság.

4. feladat. Kovács úr minden hétköznap reggel pontban 8 órakor indul el a házuk elől gépkocsival a munkahelyére. Ha 40 km/h átlagsebességgel halad, akkor 3 percet késik. Ha átlagsebessége 60 km/h, akkor 3 perccel a hivatalos munkakezdés előtt ér a munkahelyére. Mekkora átlagsebesség esetén lesz Kovács úr pontosan a munkakezdésre a munkahelyén? ([3])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ebben a feladatban is lényeges lépés, hogy a diákok felismerjék, hogy ugyanazt az utat kell Kovács úrnak megtennie.

Ha $v = 40$ km/h, akkor 3 percet késik, ha $v = 60$ km/h, akkor 3 perccel korábban ér oda. Érdemes a 3 percet átalakítani órává, hogy a mértékegységek egyezzenek.

Jelölje t a pontos érkezéshez szükséges időt órában mérve.

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Elsősorban alakítsuk át a 3 percet, ami $\frac{3}{60}$, vagyis $\frac{1}{20}$ óra.

Ha 3 perccel korábban ér oda, azt az általunk bevezetett jelölés szerint a következőképpen írhatjuk fel: $(t - \frac{1}{20})$. Hasonlóan, ha 3 percet késik: $(t + \frac{1}{20})$.

Mivel mindkét esetben a megtett út ugyanakkora, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$40 \cdot \left(t + \frac{1}{20}\right) = 60 \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right).$$

Ha megoldjuk az egyenletet, megkapjuk, hogy Kovács úr mennyi idő alatt ér be a munkahelyére. Ennek ismeretében kiszámolhatjuk a háza és a munkahelye közötti távolságot, majd azt a sebességet, amely esetén pontosan fog megérkezni.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet:

$$40 \cdot \left(t + \frac{1}{20}\right) = 60 \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right);$$

$$40t + 2 = 60t - 3;$$

$$20t = 5;$$

$$t = \frac{1}{4}.$$

Tehát 15 perc alatt ér be Kovács úr a munkahelyére. Ha 40 km/h sebességgel $(t + \frac{1}{20})$ óra alatt teszi meg a háza és munkahelye közötti távolságot, akkor ez a távolság:

$$S = 40 \quad km/h \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) \quad h = 12 \quad km.$$

Ahhoz, hogy ezt a távolságot 15 perc alatt tegye meg

$$v = \frac{12 \quad km}{0,25 \quad h} = 48 \quad km/h$$

sebességgel kell utaznia.

4. lépés: Ellenőrzés.

60 km/h sebességgel $t = \frac{12 \quad km}{60 \quad km/h} = \frac{1}{5}$ óra alatt ér be a munkahelyére, ami 12 perc, tehát valóban 3 perccel korábban.

40 km/h sebességgel $t = \frac{12 \quad km}{40 \quad km/h} = \frac{3}{10}$ óra alatt ér be a munkahelyére, ami 18 perc, tehát valóban 3 perccel később.

48 km/h sebességgel $t = \frac{12 \quad km}{48 \quad km/h} = \frac{1}{4}$ óra alatt ér be a munkahelyére, ami 15 perc, tehát pontosan időben.

Felelet: 48 km/h.

2.3. A felmérés eredményei

A felmérést 30 diák töltötte ki azzal a céllal, hogy meghatározzuk a problémás területeket.

Az 1. feladattal azt szerettük volna kideríteni, hogy a diákok ismerik-e az $S = v \cdot t$ képletet, tudják-e alkalmazni, illetve tudják-e, hogy csak azonos mértékegységek esetén tudunk számolni. A következő táblázat azt mutatja, hogy hány diáknak sikerült megfelelni ezeknek a kritériumoknak.

Látható, hogy a képletet 30-ból 27 diák ismerte, viszont csak 24-en tudták, hogy melyik betű mit jelöl, így a feladat első kérdésére 24-en adtak helyes választ.

1. táblázat. A felmérő feladatsor 1. feladatának eredményei

Képlet ismerete	Első kérdés	Mértékegység-váltás	Második kérdés	Helyesen megoldotta
27	24	10	9	9

A második kérdés megválaszolásához mindössze 10 diáknak sikerült átalakítani a 4 óra 30 percet 4,5 órává, viszont csak 9 diák tudta elvégezni az osztást, így erre a feladatra helyes megoldást 9 tanuló adott.

A 2. feladat a tanulók szövegértelmezési képességeire koncentrál. Ezt a feladatot a diákok többsége aránypárral próbálta megoldani, így azt az eredményt kapták, hogy a vonatnak 80 km/h sebességgel kell haladnia, hogy 4 óra alatt megtegye azt az utat, amit 100 km/h sebességgel 5 óra alatt tesz meg. Nyolc diák ezt az eredményt elfogadta, négyen rájöttek, hogy a kapott sebesség nem helyes, viszont nem találtak más módszert. Mindössze 9 tanuló oldotta meg ezt a problémát tökéletesen. Az alábbi táblázat mutatja, hogy hányan tudták megoldani ezt a problémát.

2. táblázat. A felmérő feladatsor 2. feladatának eredményei

Felismerte, hogy ugyanazt az utat kell megtennie	Helyesen értelmezte a feladat szövegét	Helyesen megoldotta
21	13	9

A 3. feladat szintén a szövegértelmezésre koncentrál, valamint arra, hogy a diákok fel tudnak-e állítani egy egyenletet szöveg alapján. A feladathoz 11 tanuló kezdett hozzá, a többiek nem értették, hogy mi van megadva és mit kell meghatározni.

3. táblázat. A felmérő feladatsor 3. feladatának eredményei

Helyesen értelmezte a feladat szövegét	Egyenlettel oldotta	Nem egyenlettel oldotta	Helyesen megoldotta
11	2	4	3

Öten fel tudták az adatokat, rájöttek, hogy mit kell kiszámolni, viszont nem találtak erre megfelelő módszert. Ketten sikeresen felírták az egyenletet és meg is oldották, négyen lépésenként leírták, hogy melyik órában hol járnak a fiúk, viszont ezzel a módszerrel csak egy diák kapott helyes megoldást.

A felmérés 4. feladatát senki nem tudta megoldani, akik hozzákezdtek csak átlagot vontak a 40 km/h és 60 km/h sebességekből, és válaszként 50 km/h-t írtak, ami nem helyes.

A felmérés alapján a következő területek bizonyultak problémásnak:

- Szövegértelmezés;
- Mértékegységváltás;
- Osztás;
- Egyenlet felállítása szöveg alapján.

3. KIDOLGOZOTT TANANYAG

3.1. A tananyag ismertetése

A problémás területek meghatározása után tananyagot készítettünk, amely ezen területek fejlesztésére koncentrál. A tananyagban 15 mozgással kapcsolatos feladat és annak megoldása szerepel a Pólya György által megfogalmazott Schoenfeld közreműködésével kiegészített lépéseket követve, könnyebbek és nehezebbek egyaránt.

A tananyagot három 45 perces tanóra keretében vettük át a diákokkal a mellékletekben található óravázlatokat követve.

3.2. A tananyag feladatsora

1. feladat. ([4]) Dóri és Dani, az egyéves ikrek négykézláb mászva közlekednek a lakásban. Amikor délután meghallják, hogy megérkezett apa, közös szobájukból teljes gőzzel a bejárat felé indulnak. Dóri 2 mp alatt 1 métert, Dani pedig 5 mp alatt 3 métert tesz meg. Ki a gyorsabb? Ki mennyi idő alatt teszi meg a szükséges 12 métert?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Olvassuk el a feladatok hangosan, fogalmazzuk meg, hogy mit szeretnénk kiszámítani.

Dóri - 2 mp alatt 1 méter.

Dani - 5 mp alatt 3 méter.

$S = 12$ km.

Kinek nagyobb a sebessége? $t_{Dori}, t_{Dani} -?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha meghatározzuk, hogy 1 mp alatt ki mekkora utat tesz meg, össze tudjuk hasonlítani a sebességeket és az $t = \frac{S}{v}$ összefüggés használatával ki tudjuk számolni a 12 méter megtételéhez szükséges időt.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Dóri 1 mp alatt megtesz $\frac{1}{2} = 0,5$ métert.

Dani 1 mp alatt megtesz $\frac{3}{5} = 0,6$ métert.

Tehát Dani gyorsabb, és felírhatjuk a sebességeket: $v_{Dori} = 0,5$ m/s, $v_{Dani} = 0,6$ m/s.

12 méter megtételéhez szükséges idő:

$$t_{Dori} = \frac{12}{0,5} = 24 \quad (s);$$

$$t_{Dani} = \frac{12}{0,6} = 20 \quad (s).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Felírhatjuk a következő aránypárt Dóri esetén:

$$2 \quad s - 1 \quad m;$$

$$x \quad s - 12 \quad m;$$

$$x = 2 \cdot 12 = 24 \quad (s).$$

Hasonlóan Dani esetében:

$$5 \quad s - 3m;$$

$$x \quad s - 12m;$$

$$x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20 \quad (s).$$

Felelet: Dani gyorsabb, Dóri 24 másodperc, Dani 20 másodperc alatt teszi meg a 12 métert.

2. feladat. ([4]) – Én18 km/h -val szoktam hazafelé biciklizni – dicsekszik Imi.
– Az semmi – válaszol Laci. – Én a múltkor úgy száguldoztam, hogy 4 métert tettem meg másodpercenként.
Ki a gyorsabb? Ki hány km-t tesz meg a 20 perces hazaút alatt?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rövidbeírást:

$v_{Imi} = 18$ km/h.
$v_{Laci} = 4$ m/s.
$t = 20$ perc.
$S_{Imi}, S_{Laci} -?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ahhoz, hogy tudjuk alkalmazni az előző feladatban használt képleteket, egyforma mértékegységben kell felírni az adatainkat.
4 m/s $= 4 \cdot \frac{3600}{1000}$ km/h $= 14,4$ km/h.
20 perc $= \frac{20}{60}$ óra $= \frac{1}{3}$ óra.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Mivel a sebességek már mindkét fiú esetében azonos mértékegységgel van felírva, kijelenthetjük, hogy Imi a gyorsabb. Az általuk megtett utak 20 perc alatt a következők:

$$S_{Imi} = 18 \quad km/h \cdot \frac{1}{3} \quad h = 6 \quad km.$$

$$S_{Laci} = 14,4 \quad km/h \cdot \frac{1}{3} \quad h = 4,8 \quad km.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Ha Imi 1 óra alatt 18 km-t tesz meg, akkor 20 percenként tesz meg 6 km-t. Ha Laci 4 m-t tesz meg 1 másodperc alatt, akkor $4 \cdot 60 = 240$ m-t tesz meg 1 perc alatt, vagyis $240 \cdot 20 = 4800$ m-t tesz meg 20 perc alatt, ami 4,8 km-rel egyenlő.

Felelet: Imi gyorsabb, Imi 6 km-t, Laci 4,8 km-t tesz meg 20 perc alatt.

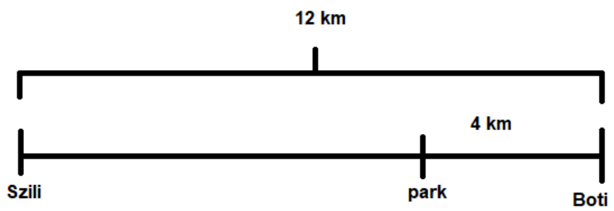
3. feladat. ([4]) Szili és Boti 12 km-re laknak egymástól. Délelőtt 10 órakor elindultak egymás felé, mert megbeszélték, hogy a Botiéktól 4 km-re lévő parkban találkoznak. Szili biciklivel ment, Boti görkorival, így pontosan egyszerre érkeztek meg a parkba. Szili átlagsebessége 16 km/h. Hány órakor találkoztak? Fél órát beszélgettek a parkban, aztán Szili biciklivel hazavitte Botit, majd hazakerekezett. Hány órára ért haza Szili?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rajzot:

$v_{Szili} = 16$ km/h.



2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Kiszámoljuk Szili és a park közötti távolságot, aztán azt, hogy Szili mennyi idő alatt ért a parkba; mivel egyszerre indultak és egyszerre érkeztek meg, megkapjuk, hogy hány órakor találkoztak.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Szili és a park közötti távolság: $12 - 4 = 8$ km.

$t_{Szili} = \frac{8}{16} \frac{km}{km/h} = \frac{1}{2} \quad h$, tehát 30 perc, ami azt jelenti, hogy 10:30-kor találkoztak.

Ahhoz, hogy Szili hazavigye Botit és visszamenjen a parkba $2 \cdot 4 = 8$ km-t kell megtennie, amit 30 perc alatt tesz meg, majd a parktól hazáig szintén 30 perc alatt jut el. Ha 11:00-ig beszélgettek, majd azt követően Szili 1 órán keresztül utazott haza, 12:00 órakor volt otthon.

4. lépés: Ellenőrzés.

Szilinek 8 km-t kell megtennie, hogy a parkba érjen. Ha 1 óra alatt 16 km-t tesz meg, akkor 30 perc alatt 8 km-t, tehát helyesen számítottuk ki az időt.

Felelet: 10:30-kor találkoztak és 12:00-ra ért haza Szili.

4. feladat. ([4]) Alabárból Balabárba 9 órakor elindult egy terepjáró, 10:25-kor pedig egy motor. A terepjáró 11 órakor negyed órára félreállt tankolni, majd folytatta az útját. A két jármű 12:45-kor egyszerre érkezett meg Balabárba. A motoros fél perc alatt tett meg 1 km-t. Milyen messze van Alabártól Balabár? Mekkora a terepjáró és a motoros átlagsebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rövidbeírást!

$v_{motor} = 1$ km / $0,5$ perc.

$t_{motor} = 12:45 - 10:25 = 2$ óra 20 perc.

$t_{terepjaro} = (11:00 - 9:00) + (12:45 - 11:15) = 2$ óra $+1$ óra 30 perc $= 3$ óra 30 perc.

$S, v_{terepjaro}, v_{motor} - ?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha a motoros sebességét átalakítjuk km/h-ba, a sebessége és az úton töltött ideje alapján kiszámolhatjuk a két város közötti távolságot.

Mivel a terepjáró ugyanazt a távolságot tette meg és tudjuk, hogy hány órát volt úton, meghatározhatjuk a sebességét a $v = St$ összefüggés használatával.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Alakítsuk át a motoros sebességét!

$v_{motor} = 1$ km/$0,5$ perc $= 2$ km/perc $= 120$ km/h.

$t_{motor} = 2$ óra 20 perc $= 2\frac{1}{3}$ h $= \frac{7}{3}$ h.

$S = v_{motor} \cdot t_{motor} = 120$ km/h $\cdot \frac{7}{3}$ h $= 280$ km.

Tehát a két város között 280 km távolság van. A terepjáró ezt az utat 3 óra 30 perc (3,5 óra) alatt tette meg, tehát a sebessége:

$$v_{terepjaro} = \frac{280 \quad km}{3,5 \quad h} = 80 \quad km/h.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Ha a motoros fél perc alatt 1 km-t tesz meg, akkor 1 perc alatt 2 km-t, 280 km-t pedig 140 perc alatt halad, ami 2 óra 20 perccel egyenlő.

A terepjáró ha 1 óra alatt 80 km-t tesz meg, akkor 3,5 óra alatt $80 \cdot 3,5 = 280$ km-t halad.

Felelet: 280 km a két város közötti távolság, a motor sebessége 120 km/h, a terepjáró sebessége 80 km/h.

5. feladat. ([4]) Gáspár és Vince kitalálták, hogy körbebiciklizik a Velencei-tavat (32 km). Délelőtt 10 órakor indultak el ellentétes irányban. Vince óránként 18 km-t, Gáspár 22 km-t tett meg. Mikor találkozott a két gyerek? A kiindulási ponttól milyen messze találkoztak a fiúk?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ebben a feladatban a legfontosabb, hogy a diákok felismerjék, hogy mivel a fiúk egyszerre indultak, ezért mindketten ugyanannyi ideig bicikliztek a találkozásig, jelöljük ezt x-szel. A sebességek adottak, Gáspár sebessége 22 km/h, Vincéé pedig 18 km/h. Az $S = v \cdot t$ képletet alkalmazva pedig felírhatjuk a fiúk által megtett utakat.

Foglaljuk táblázatba az adatainkat!

	S, km	v, km/h	t, h
Gáspár	$22x$	22	x
Vince	$18x$	18	x

$t-?, S_{Vince}-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Mivel tudjuk, hogy a fiúk ellentétes irányban indultak és kör alakú pályán bicikliznek, ezért amikor találkoztak a kettejük által megtett utak összege egyenlő a teljes úttal, ami 32 km. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$22x + 18x = 32.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$22x + 18x = 32;$$

$$40x = 32.$$
$$x = \frac{32}{40};$$
$$x = 0,8.$$

Tehát 0,8 órát bicikliztek a fiúk a találkozásik, ami $0,8 \cdot 60 = 48$ perccel egyenlő, vagyis 10:48-kor találkoztak a kiindulási ponttól $18 \cdot 0,8 = 14,4$ km-re.

4. lépés: Ellenőrzés.

48 perc alatt Gáspár $22 \cdot 0,8 = 17,6$ km-t tett meg, Vince 14,4 km-t. A fiúk által megtett utak összege $14,4 + 17,6 = 32$ km, ahogy a feladat feltételeiben is szerepel.

Felelet: 10:48-kora találkoztak, 14,4 km-re a kiindulási ponttól.

6. feladat. ([9]) Egy autóbusznak 255 km-t kellett megtennie. Miután megtette az út $\frac{7}{17}$ -ét, 1 órára leparkolt. Az út hátralévő részén a sebességét 5 km/h-val csökkentette, és így az indulástól számítva 9 óra múlva érkezett célba. Mekkora volt az autóbusz kezdeti sebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rövidbeírást!

$S = 255$ km.

Miután megtette az út $\frac{7}{17}$ -ét, 1 órára leparkolt, aztán lassabban haladt tovább. Tehát $255 \cdot \frac{7}{17} = 105$ km-t ment bizonyos sebességgel, $255 - 105 = 150$ km-t pedig 5 km/h-val lassabban.

$t = 9 - 1 = 8$ h (mivel 1 órára leparkolt).

$v-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Tudjuk, hogy összesen 8 órát volt úton az autóbusz, ebből 105 km-t $\frac{105}{v}$ óra alatt tett meg, a maradék 150 km-t pedig $\frac{150}{v-5}$ óra alatt tette meg. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{105}{v}+\frac{150}{v-5}=8.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{105}{v}+\frac{150}{v-5}-8=0;$$

$$\frac{105(v-5)+150v-8v(v-5)}{v(v-5)}=0;$$

$$\frac{105v-525+150v-8v^2+40v}{v(v-5)}=0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} -8v^2+295v-525=0, \\ v(v-5)\neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8v^2-295v+525=0, \\ v\neq 0, v\neq 5. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$8v^2-295v+525=0$$

$$D=295^2-4\cdot 8\cdot 525=87025-16800=70225;$$

$$v_1=\frac{295+\sqrt{70225}}{2\cdot 8}=\frac{295+265}{16}=35;$$

$$v_2=\frac{295-\sqrt{70225}}{2\cdot 8}=\frac{295-265}{16}=1,875;$$

4. lépés: Ellenőrzés.

A v_2 egyértelműen nem felel meg a feladat feltételeinek, mert ha 1,875 km/h sebességgel haladna, nem tudná 5 km/h-val csökkenteni a sebességét az autóbusz.

Ha 35 km/h sebességgel megtett 105 km-t, akkor azt $\frac{105}{35}=3$ óra alatt tette meg. Ezt követően lassított és 30 km/h sebességgel haladt 150 km-en keresztül $\frac{150}{30}=5$ órán át. Mivel 1 órán keresztül mozdulatlanul állt ezért az indulást követően $3+5+1=9$ óra múlva ért célba, ahogy a feladat feltételeiben is szerepel.

Felelet: 35 km/h.

7. feladat. ([9]) Egy sétahajó 4 óra alatt 45 km-t tett meg a folyón a vízfolyással egyirányban és 28 km-t a folyón a vízfolyással ellentétes irányban. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a sétahajó sebessége állóvízben 18 km/h!

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Az ilyen típusú feladatoknál nagyon fontos, hogy a diákok észrevegyék, hogy, ha a hajó a vízfolyással megegyező irányban halad, akkor a sebessége a saját sebességének és a vízfolyás sebességének összegével egyenlő. Viszont, ha a hajó a vízfolyással ellentétes irányban halad, akkor a sebessége a saját sebességének és a vízfolyás sebességének különbségével egyenlő.

$S_{le} = 45$ km.

$t_{le} = 4$ h.

$S_{fel} = 28$ km.

$v_{hajo} = 18$ km/h.

$v_{viz}-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Jelöljük x km/h-val a vízfolyás sebességét.

Akkor a folyón felfelé a hajó $18 - x$ km/val haladt, a folyón lefelé pedig $18 + x$ km/h-val.

Mivel összesen 4 órát volt vizen a $t = \frac{S}{v}$ összefüggés használatával felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{45}{18+x} + \frac{28}{18-x} = 4.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{45}{18+x} + \frac{28}{18-x} - 4 = 0;$$

$$\frac{45(18-x) + 28(18+x) - 4(18-x)(18+x)}{(18-x)(18+x)} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 810 - 45x + 504 + 28x - 1296 + 4x^2 = 0, \\ (18-x)(18+x) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 17x + 18 = 0, \\ x \neq 18, x \neq -18. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$4x^2 - 17x + 18 = 0;$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18 = 289 - 288 = 1;$$

$$x_1 = \frac{17 + \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{18}{8} = 2,25;$$

$$x_2 = \frac{17-\sqrt{1}}{2\cdot 4} = \frac{16}{8} = 2.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Két lehetséges megoldást is kaptunk, ebben az esetben leellenőrizzük mindkettőt.

$x_1 = 2,25 = \frac{9}{4}$ km/h.

$\frac{45}{18+\frac{9}{4}} + \frac{28}{18-\frac{9}{4}} = \frac{45}{\frac{81}{4}} + \frac{28}{\frac{63}{4}} = 45\cdot\frac{4}{81} + 28\cdot\frac{4}{63} = \frac{180}{81} + \frac{112}{63} = \frac{11340+9072}{5103} = \frac{20412}{5103} = 4.$

$x_2 = 2$ km/h.

$\frac{45}{18+2} + \frac{28}{18-2} = \frac{45}{20} + \frac{28}{16} = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \frac{16}{4} = 4.$

Felelet: a vízfolyás sebessége 2 km/h vagy 2,25 km/h lehet.

8. feladat. ([9]) A 400 km-es távolságot egy autóbusz meghatározott átlagsebességgel szerette volna megtenni. Az első két órában a tervezett sebességgel haladt, de közben 20 percre meg kellett állnia. Ahhoz, hogy idejében megérkezzen, az út hátralévő részén 10 km/h-val nagyobb sebességgel haladt. Mekkora volt az autóbusz tervezett sebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Rendszerezzük az adatainkat! Jelöljük x km/h-val az autóbusz kezdeti sebességét. Akkor az első 2 órában $2x$ km-t tett meg. Tehát $(400-2x)$ km maradt az útból, amit $(x+10)$ km/h sebességgel kellett megtennie.

$x-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Az autóbusznak 20 percre kellett megállnia, vagyis $\frac{1}{3}$ órára, tehát ha a tervezett sebességével tette volna meg az út maradék részét, 20 percet késett volna. A tervezett sebességével az út maradék részét $\frac{400-2x}{x}$ óra alatt tette volna meg, viszont növelte a sebességét és $\frac{400-2x}{x+10}$ óra alatt időben odaért. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{400-2x}{x} - \frac{400-2x}{x+10} = \frac{1}{3}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{400-2x}{x} - \frac{400-2x}{x+10} - \frac{1}{3} = 0;$$

$$\frac{3(x+10)(400-2x) - 3x(400-2x) - x(x+10)}{3x(x+10)} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 1200x - 6x^2 + 12000 - 60x - 1200x + 6x^2 - x^2 - 10x = 0, \\ 3x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - 70x + 12000 = 0, \\ x \neq 0, x \neq -10. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$x^2 + 70x - 12000 = 0;$$

$$D = 70^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12000) = 4900 + 48000 = 52900;$$

$$x_1 = \frac{-70 + \sqrt{52900}}{2 \cdot 1} = \frac{-70 + 230}{2} = 80;$$

$$x_2 = \frac{-70 - \sqrt{52900}}{2 \cdot 1} = \frac{-70 - 230}{2} = -150.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2 nem felel meg, mivel a sebesség nem lehet negatív szám.

$\frac{400-2\cdot80}{80} - \frac{400-2\cdot80}{80+10} - \frac{1}{3} = \frac{240}{80} - \frac{240}{90} - \frac{1}{3} = 3 + \frac{-240-30}{90} = 3 - \frac{270}{90} = 3 - 3 = 0.$

Felelet: 80 km/h.

9. feladat. ([8]) Két autó egyszerre indul A városból B városba, illetve B városból A városban egymással szemben. Mindkét autó sebessége egyenletes. Negyed órával azután, hogy elhaladtak egymás mellett, már 44 km volt az egymástól mért távolságuk. Ekkorra az A-ból indult autó már megtette az A és B közötti út 60%-át, A B-ből induló autó pedig már megtette a két város közötti út 72%-át. Számítsd ki az autók sebességét!

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

A szövegből egyértelműen kiolvasható, hogy az autók sebessége nem egyforma, a B városból induló autó gyorsabb. Felírhatjuk a sebességek arányát:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{72}{60} \rightarrow v_B = 1,2v_A.$$

Negyed órával azután, hogy elhaladtak egymás mellett, már 44 km volt az egymástól mért távolságuk. Ebből a mondatból megtudjuk, hogy 15 perc alatt ketten együtt megtettek 44 km-t, tehát $S_A + S_B = 44$.

$v_B, v_A-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

$S_A = v_A \cdot t; S_B = v_B \cdot t;$

Mivel $t = \frac{1}{4}$, felírhatjuk a következő egyenletet :

$$\frac{1}{4}v_A + \frac{1}{4}v_B = 44.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet behelyettsítve a $v_B = 1,2v_A$ egyenlőséget:

$$\frac{1}{4}(v_A + 1,2v_A) = 44;$$

$$2,2v_A = 176;$$
$$v_A = \frac{176}{2,2};$$
$$v_A = 80 \quad (km/h);$$
$$v_B = 1,2 \cdot 80 = 96 \quad (km/h).$$

4. lépés: Ellenőrzés.
Az A városból induló autó 15 perc alatt megtesz $S_A = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20$ km-t, a B városból induló autó 15 perc alatt megtesz $S_B = 96 \cdot \frac{1}{4} = 24$ km-t, tehát együtt 44 km-t tesznek meg.

Felelet: 80 km/h és 96 km/h az autók sebessége.

10. feladat. ([9]) 2 óra 40 perccel később, mint ahogy az A kikötőből elindult egy tutaj, a B kikötőből a folyón a vízfolyással ellenkező irányban elindult egy motorcsónak. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét, ha a tutaj és a motorcsónak az A kikötőtől 14 km-re találkozott! A motorcsónak sebessége állóvízben 12 km/h, és a két kikötő között a távolság 32 km!
Megoldás:
1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ebben a feladatban kulcsfontosságú, hogy a diákok tudják, hogy a tutaj sebessége megegyezik a vízfolyás sebességével. Írjuk fel az adatainkat!
$S_{tutaj} = 14$ km.
Jelöljük x km/h-val a vízfolyás (tutaj) sebességét. Mivel a motorcsónak a folyón felfelé haladt, ezért a sebessége $(12 - x)$ km/h volt.
$v_{mcs} = (12 - x)$ km/h.
$S_{mcs} = 32 - 14 = 18$ km.
Használva a $t = \frac{S}{v}$ képletet felírhatjuk, hogy az egyes vízi járművek mennyi idő alatt tették meg az útjukat a találkozásig.
$t_{mcs} = \frac{18}{12-x}$ h.
$t_{tutaj} = \frac{14}{x}$ h.
$x-?$
2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Egyetlen adatot nem használtunk fel, mégpedig azt, hogy a motorcsónak 2 óra 40 perccel később indult útnak. Átfogalmazva, a motorcsónak 2 óra 40 perccel kevesebb időt töltött a vizen, vagyis ha a tutaj vizen töltött idejéből kivonjuk a motorcsónak vizen töltött idejét, akkor 2 óra 40 percet kapunk.
2 óra 40 perc $= 2\frac{40}{60}$ óra $= \frac{8}{3}$ óra.
Tehát:
$$\frac{14}{x} - \frac{18}{12 - x} = \frac{8}{3}.$$
3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{14}{x} - \frac{18}{12-x} - \frac{8}{3} = 0;$$

$$\frac{3 \cdot 14(12-x) - 18 \cdot 3x - 8x(12-x)}{3x(12-x)} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 504 - 42x - 54x - 96x + 8x^2 = 0, \\ 3x(12-x) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 192x + 504 = 0, \\ x \neq 0, x \neq 12. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$x^2 - 24x + 63 = 0;$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 63 = 576 - 252 = 324;$$

$$x_1 = \frac{24 + \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{24 + 18}{2} = 21;$$

$$x_1 = \frac{24 - \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{24 - 18}{2} = 3;$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_1 megoldás nem felel meg a feladat feltételeinek, mivel ha 21 km/h lenne a vízfolyás sebessége, a motorcsónaknak $12 - 21 = -9$ km/h-val kellene haladnia, ami lehetetlen.

Tehát azt kaptuk, hogy a vízfolyás (tutaj) sebessége 3 km/h, tehát a tutaj 14 km-t $\frac{14}{3}$ = 4 óra 40 perc alatt tette meg. A motorcsónak 9 km/h sebességgel a 18 km-t $\frac{18}{9}$ = 2 óra alatt tette meg, ami valóban 2 óra 40 perccel kevesebb a tutaj idejénél.

Felelet: 3 km/h.

11. feladat. ([10]) Az A és B helységekből egyszerre elindult egymással szembe egy kerékpáros és egy gyalogos, akik 1 óra múlva találkoztak. Határozd meg a kerékpáros és a gyalogos sebességét, ha a kerékpáros 2 óra 40 perccel hamarabb érkezett meg a B helységbe, mint a gyalogos az A helységbe, és a két helység között a távolság 16 km !

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Mivel semmilyen összefüggést nem tudunk felírni a két szereplő sebessége között, ezért jelöljük a kerékpáros sebességét x km/h-val, a gyalogos sebességét pedig y

km/h-val.

A találkozások ketten együtt megtették a 16 km-es utat, ebből a kerékpáros x km-t tett meg, a gyalogos y km-t.

Hasonlóan az előző feladathoz felírhatjuk, hogy az egyes szereplők mennyi ideig voltak úton: a gyalogos $\frac{16}{y}$ órát, a kerékpáros $\frac{16}{x}$ órát, ahol a $\frac{16}{x}$ óra 2 óra 40 perccel több mint a $\frac{16}{y}$ óra.

$y, x-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ahogy az előző feladatban láttuk 2 óra 40 perc $\frac{8}{3}$ órával egyenlő.

Az első lépésben kifejtett gondolatok alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y = 16, \\ \frac{16}{y} - \frac{16}{x} = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x = 16 - y, \\ \frac{16}{y} - \frac{16}{x} = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 - y, \\ \frac{2}{y} - \frac{2}{x} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 - y, \\ \frac{2x-2y}{xy} = \frac{1}{3}, x, y \neq 0. \end{cases}$$

A második egyenletből kapjuk:

$$6x - 6y = xy;$$

Behelyettesítve az első egyenletből:

$$6(16 - y) - 6y = (16 - y)y;$$

$$y^2 - 28y + 96 = 0;$$

Használhatjuk Viéte tételét:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 28; , \\ y_1 \cdot y_2 = 96; . \end{cases}$$

$$y_1 = 4, y_2 = 24.$$

Visszahelyettesítve:

$$x_1 = 16 - 4 = 12, x_2 = 16 - 24 = -8.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2, y_2 megoldáspár nem felel meg a feladat feltételeinek, mert a sebesség nem lehet negatív szám. Tehát a gyalogos sebessége 4 km/h, a kerékpáros sebessége 12 km/h.

$\frac{16}{4} - \frac{16}{12} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$.

Felelet: 4 km/h a gyalogos sebessége, 12 km/h a kerékpáros sebessége.

12. feladat. ([9]) Egy turista kajakkal 4 km-t a tavon és 5 km-t a folyón a vízfolyással megegyző irányban ugyanannyi idő alatt tett meg, mint 6 km-t a folyón a vízfolyással ellentétes irányban haladva. Mekkora sebességgel haladt a kajakos a tavon, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Fel kell hívni a figyelmet arra a tényre, hogy a tó esetében nem kell számolni a vízfolyás sebességével.

Jelöljük a kajakos sebességét a tóban x km/h-val.

Akkor a vízfolyással megegyező irányban a folyón a sebessége $(x+2)$ km/h, a vízfolyással ellentétes irányban pedig $(x-2)$ km/h volt.

$x-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Használva a $t = \frac{S}{v}$ képletet, fel tudjuk írni, hogy hol mennyi időt töltött a kajakos.

A tóban 4 km-t $\frac{4}{x}$ óra alatt, a folyón 5 km-t $\frac{5}{x+2}$ óra alatt, a folyón 6 km-t $\frac{6}{x-2}$ óra alatt tett meg. Mivel tudjuk, hogy a tavon töltött és folyón vízfolyással megegyező irányban töltött idejének összege egyenlő a folyón vífolyással ellenkező irányban töltött idejével, felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{x+2} = \frac{6}{x-2}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{x+2} - \frac{6}{x-2} = 0;$$

$$\frac{4(x^2-4) + 5x(x-2) - 6x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 4x^2 - 16 + 5x^2 - 10x - 6x^2 - 12x = 0, \\ x(x-2)(x+2) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 22x - 16 = 0, \\ x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2. \end{cases}$$

Oldjuk meg a kapott másodfokú egyenletet!

$$3x^2 - 22x - 16 = 0;$$

$$D = (-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 484 + 192 = 676;$$
$$x_1 = \frac{22 + \sqrt{676}}{2 \cdot 3} = \frac{22 + 26}{6} = \frac{48}{6} = 8;$$
$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{676}}{2 \cdot 3} = \frac{22 - 26}{6} = \frac{-4}{6}.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2 nem felel meg, mivel a sebesség nem lehet negatív szám.

$x = 8:$
$$\frac{4}{8} + \frac{5}{8+2} = \frac{6}{8-2}.$$
$$\frac{1}{2} + \frac{5}{10} = \frac{6}{6}.$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$
$$1 = 1.$$

Tehát a megoldás helyes.

Felelet: 8 km/h-val haladt a kajakos a tavon.

13. feladat. ([9]) A menetrend szerint az autóbusznak 72 km-t kellett megtennie. 24 km megtétele után egy sorompónál az autóbusz 12 percet várakozott. Hogy tartani tudja a menetrendet, az autóbuszvezető a sebességét 12 km/h-val növelte, és így csak 4 percet késett. Határozzátok meg az autóbusz kezdeti sebességét!

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Jelöljük x km/h-val az autóbusz kezdeti sebességét, tehát az első 24 km-t x km/h-val $\frac{24}{x}$ óra alatt tette meg. Ezt követően maradt az útból $72 - 24 = 48$ km, amit $(x + 12)$ km/h sebességgel tett meg $\frac{48}{x+12}$ óra alatt.

x–?

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha egész úton a tervezett sebességével haladt volna az autóbusz $\frac{72}{x}$ óra alatt tette volna meg a teljes utat és időben odaért volna a célállomásra.

Az úton töltött idejét megkapjuk, ha összeadjuk az első 24 km megtételéhez szükséges időt, a 12 perc várakozást és a maradék 48 km megtételéhez szükséges időt. Ez az összeg 4 perccel több, mintha a tervezett sebességével tette volna meg az egész utat.

12 perc $= \frac{12}{60}$ óra $= \frac{1}{5}$ óra.

4 perc $= \frac{4}{60}$ óra $= \frac{1}{15}$ óra.

Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:
$$\frac{1}{15} + \frac{72}{x} = \frac{24}{x} + \frac{1}{5} + \frac{48}{x+12};$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Rendezzük és oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{1}{15}+\frac{72}{x}-\frac{24}{x}-\frac{1}{5}-\frac{48}{x+12}=0;$$

$$\frac{48}{x}-\frac{48}{x+12}-\frac{2}{15}=0;$$

$$\frac{48\cdot 15(x+12)-48\cdot 15x-2x(x+12)}{15x(x+12)}=0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 720x+8640-720x-2x^2-24x=0, \\ 15x(x+12)\neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2-24x+8640=0, \\ x\neq 0, x\neq -12. \end{cases}$$

Oldjuk meg a kapott másodfokú egyenletet! Az eredeti egyenlet mindkét oldalát megszorozva $(-\frac{1}{2})$-del a következő egyenletet kapjuk:

$$x^2+12x-4320=0;$$

$$D=12^2-4\cdot 1\cdot(-4320)=144+17280=17424;$$

$$x_1=\frac{-12+\sqrt{17424}}{2\cdot 1}=\frac{-12+132}{2}=\frac{120}{2}=60;$$

$$x_2=\frac{-12-\sqrt{17424}}{2\cdot 1}=\frac{-12-132}{2}=\frac{-144}{2}=-72.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2 nem felel meg, mivel a sebesség nem lehet negatív szám.

$x=60:$

A tervezett idő $\frac{72}{60}=1\frac{12}{60}=1\frac{1}{5}$ óra volt.

Az első 24 km-t $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ óra alatt tette meg, majd $\frac{1}{5}$ órát várakozott (12 perc), a következő 48 km-t $\frac{48}{60+12}=\frac{48}{72}=\frac{2}{3}$ óra alatt tette meg. Ezek összege:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{19}{15}.$$

Ha $\frac{19}{15}$ órából kivonunk 4 percet, akkor a tervezett időt kell kapnunk:

$$\frac{19}{15}-\frac{1}{15}=\frac{18}{15}=1\frac{3}{15}=1\frac{1}{5}.$$

Tehát a megoldás helyes.

Felelet: 60 km/h volt az autóbusz kezdeti sebessége.

14. feladat. ([3]) Egy folyó partján az A és B város 20 kilométerre van egymástól.

Egy csónak A-ból B-be és vissza 10 óra alatt tette meg az utat. A vízfolyással szemben 2 km-t tett meg ugyanannyi idő alatt, mint a vízfolyással egyirányban 3 km-t. Mekkora a folyó sebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Jelöljük x km/h-val a csónak sebességét, y km/h-val a vízfolyás sebességét.

Akkor a vízfolyással szemben $(x-y)$ km/h-val, a vízfolyással megegyező irányban $(x+y)$ km/h-val haladt.

A folyó sebességét kell meghatároznunk, tehát $y-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Mivel a csónak a vízfolyással szemben 2 km-t tett meg ugyannyi idő alatt, mint a vízfolyással egyirányban 3 km-t, használva a $t = \frac{S}{v}$ összefüggést felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{2}{x-y} = \frac{3}{x+y}.$$

A csónak oda-vissza megtette az utat, tehát 20 km-t tett meg a vízfolyással szemben és 20 km-t tett meg a vízfolyás irányában 10 óra alatt. Vagyis a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{20}{x-y} + \frac{20}{x+y} = 10.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg a kapott egyenletrendszert!

$$\begin{cases} \frac{2}{x-y} = \frac{3}{x+y}, \\ \frac{20}{x-y} + \frac{20}{x+y} = 10. \end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezzük az x változót:

$$\frac{2}{x-y} = \frac{3}{x+y};$$

$$2(x+y) = 3(x-y);$$

$$2x + 2y = 3y - 3y;$$

$$2x - 3y = -3y - y;$$

$$-x = -5y;$$

$$x = 5y.$$

Behelyettesítjük a kapott értéket a második egyenletbe:

$$\frac{20}{5y-y} + \frac{20}{5y+y} = 10;$$

$$\frac{20}{4y} + \frac{20}{6y} = 10;$$

$$\frac{100}{12y} = 10, y \neq 0;$$
$$100 = 120y;$$
$$y = \frac{100}{120};$$
$$y = \frac{5}{6};$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Ha $y = \frac{5}{6}$ km/h, akkor $x = 5 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$ km/h.

Akkor 2 km-t a vízfolyással ellentétes irányban

$$\frac{2}{\frac{25}{6} - \frac{5}{6}} = \frac{2}{\frac{20}{6}} = 2 \cdot \frac{6}{20} = \frac{6}{10} = 0,6$$

óra alatt tesz meg.

3 km-t a vízfolyással megegyező irányban pedig

$$\frac{3}{\frac{25}{6} + \frac{5}{6}} = \frac{3}{\frac{30}{6}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

óra alatt tesz meg, tehát tényleg ugyanannyi idő alatt.

Felelet: $\frac{5}{6}$ km/h a vízfolyás sebessége.

15. feladat. ([3]) Dani egyik nap délben elindult a nagymamájához, aki negyed órával később szintén elindult vele szemben. Dani egyedül 4 km/h, a nagymama 3 km/h sebességgel gyalogol. Amikor találkoztak, a nagymama visszafordult, Dani pedig elkísérte a házáig, majd hazament. (Együtt a nagymama sebességével haladtak.) Hány kilométerre laknak egymástól, ha Dani otthon megállapította, hogy a séta alkalmával négyszer akkora utat tett meg, mint a nagymamája?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ebben a feladatban nagyon fontos a szövegértelmezés. Ha a nagymama megtett útját a találkozásig megjelöljük x km-rel, akkor elmondhatjuk, hogy a nagymama $2x$ km-t tett meg összesen.

Mivel Dani azt állítja, hogy ő négyszer akkora utat tett meg, így Dani $8x$ km-t tett meg összesen.

Dani megtette a két ház között az oda-vissza utat, tehát a két ház közötti távolság $4x$ km-rel egyenlő, és ezt kell meghatároznunk.

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha a két ház közötti távolság $4x$ km, akkor a találkozásig Dani $4x - x = 3x$ km-t tett meg 4 km/h sebességgel $\frac{3x}{4}$ óra alatt.

A nagymama x km-t tett meg 3 km/h sebességgel $\frac{x}{3}$ óra alatt, viszont ő 15 perccel ($\frac{1}{4}$ óra) később indult. Így már elég adatunk van egy egyenlet felállításához, ugyanis ha a nagymama idejéhez hozzáadunk 15 percet, akkor a Dani úton töltött idejét kapjuk:

$$\frac{3x}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Rendezzük és oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{3x}{4} - \frac{x}{3} - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\frac{9x - 4x - 3}{12} = 0.$$

$$\frac{5x - 3}{12} = 0.$$

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva 12-vel:

$$5x - 3 = 0.$$

$$5x = 3.$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

Tehát a két ház közötti távolság: $4x = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$ km.

4. lépés: Ellenőrzés.

A nagymama $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ km-t tett meg összesen.

Dani $8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$ km-t, ami valóban a $\frac{6}{5}$ négyszerese.

Felelet: 2,4 km a két ház között a távolság.

4. ZÁRÓ MÉRÉS

A tananyag megismerését követően a 30 diák megkapta a záró mérés feladatsorát. A feladatsor megoldására 45 perc állt rendelkezésükre, semmilyen segédeszközt nem használhattak.

A záró mérés feladatai nagyon hasonlítanak a felmérő feladatokhoz, mivel ugyanazon szempontok szerint szerettük volna megvizsgálni a diákok problémamegoldó képességeinek változását a tananyag megismerését követően.

4.1. A záró mérés feladatsora

1. Két állomás között a távolság 550 km. Mennyi idő alatt teszi meg ezt a távolságot a 110 km/h sebességgel haladó vonat? Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak, hogy ezt a távolságot 4 óra 24 perc alatt tegye meg? ([13])

2. Mekkora sebességgel kell haladnia a busznak az új menetrend szerint, ha most 4 óra alatt teszi meg a két állomás közötti távolságot, amit a régi menetrend szerint 80 km/h sebességgel 5 óra alatt tett meg? ([13])

3. Reggel 9 órakor Kristóf elindult Beregszászból az 50 km távolságra lévő Csap felé, és egyenletesen haladva, óránként 5 km-t tett meg. Másfél órával később Aladár elindult Csapról Beregszász felé ugyanazon az úton, 8 km/h sebességgel. Kristóf indulásától számolva mennyi idő múlva tettek meg ugyanannyi utat? Milyen messze voltak ekkora egymástól? ([7])

4. Szabó úr minden hétköznap reggel pontban 7 órakor indul el a házuk elől gépkocsival a munkahelyére. Ha 40 km/h átlagsebességgel halad, akkor 3 percet késik. Ha átlagsebessége 60 km/h, akkor 3 perccel a hivatalos munkakezdés előtt ér a munkahelyére. Mekkora átlagsebesség esetén lesz Szabó úr pontosan a munkakezdésre a munkahelyén? ([3])

4.2. A feladatsor megoldókulcsa

1. feladat. Két állomás között a távolság 550 km. Mennyi idő alatt teszi meg ezt a távolságot a 110 km/h sebességgel haladó vonat? Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak, hogy ezt a távolságot 4 óra 24 perc alatt tegye meg? ([13])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

A feladat jobban átláthatósága érdekében készítünk rövidbeírást az $S = v \cdot t$ összefüggés jelöléseinek használatával, ahol tudjuk, hogy S jelöli az utat, v a sebességet, t az időt.

$S = 550$ km.

$v_1 = 110$ km/h.

$t_2 = 4$ óra 24 perc.

$t_1 - ?, v_2 - ?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Időt és sebességet kell kiszámolnunk, viszont az alapképlet az út meghatározására használható. Ebben a lépésben kifejezzük a képletből az időt és a sebességet és, ha szükséges, átváltjuk a mértékegységeket.

Az idő meghatározására szolgáló képlet:

$$t = \frac{S}{v}.$$

A sebesség meghatározására szolgáló képlet:

$$v = \frac{S}{t}.$$

Ezeket a képleteket csak akkor tudjuk használni, ha a rendelkezésre álló adatok egyforma mértékegységben vannak megadva. Ezért a 2. kérdésben szereplő 4 óra 24 percet át kell alakítani 4,4 órává.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Az első kérdésben keresett idő:

$$t_1 = \frac{S}{v_1}$$

$$t_1 = \frac{550 \quad km}{110 \quad km/h} = 5 \quad (h).$$

A második kérdésben keresett sebesség:

$$v_2 = \frac{S}{t_2}.$$

$$v_2 = \frac{550 \quad km}{4,4 \quad h} = 125 \quad (km/h).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

1. kérdés: Ha a vonat óránként 110 km-t tesz meg, akkor 5 óra alatt $110 \cdot 5 = 550$

km-t tesz meg, ami egyenlő a két állomás közötti távolsággal.

2. kérdés: Ha a vonatnak 550 km-t kell megtennie 4,4 óra alatt, akkor 1 óra alatt haladnia kell $550 : 4,4 = 125$ km-t.

Felelet: 5 óra alatt tesz meg a vonat 550 km-t 110 km/h sebességgel, 125 km/h sebességgel kell haladnia, hogy ezt a távolságot 4 óra 24 perc alatt tegye meg.

2. feladat. Mekkora sebességgel kell haladnia a busznak az új menetrend szerint, ha most 4 óra alatt teszi meg a két állomás közötti távolságot, amit a régi menetrend szerint 80 km/h sebességgel 5 óra alatt tett meg? ([13])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ennél a feladatnál ebben a lépésben a legfontosabb, hogy a diákok felismerjék, hogy a vonatnak ugyanazt az utat kell megtennie. Ennek ismeretében felírhatjuk az adatokat a megfelelő jelölésekkel.

$t_1 = 4$ h.

$t_2 = 5$ h.

$v_2 = 80$ km/h.

$v_1 -?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Alkalmazzuk a képletet:

$$v_1 = \frac{S}{t_1}.$$

A t_1 ismert, az utat viszont meg kell határozni. Az út kiszámítható a régi menetrend adatai alapján:

$$S = v_2 \cdot t_2.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

A két állomás közötti távolság:

$$S = 80 \quad km/h \cdot 5 \quad h = 400 \quad (km).$$

A keresett sebesség:

$$v_1 = \frac{400 \quad km}{4 \quad h} = 100 \quad (km/h).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Ha óránként 80 km-t haladva 5 óra alatt tette meg a vonat az állomások közötti távolságot, akkor ez a távolság $5 \cdot 80 = 400$ km.

Ahhoz, hogy ezt a távolságot megtegye 4 óra alatt, óránként haladnia kell 100 km-t.

Felelet: 100 km/h.

3. feladat. Reggel 9 órakor Kristóf elindult Beregszászból az 50 km távolságra lévő Csap felé, és egyenletesen haladva, óránként 5 km-t tett meg. Másfél órával később Aladár elindult Csapról Beregszász felé ugyanazon az úton, 8 km/h sebességgel. Kristóf indulásától számolva mennyi idő múlva tettek meg ugyanannyi utat? Milyen messze voltak ekkora egymástól? ([7])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

A sebességek adottak, az időről annyit tudunk, hogy az egyik fiú 1,5 órával később indult.

Ha a Kristóf által edzéssel töltött időt x órával jelöljük, akkor Aladár $(x - 1,5)$ órát volt úton.

Az útról annyit tudunk, hogy 50 km van a két város között, viszont ebből nem tudjuk meg, hogy az egyes személyek mennyi utat tettek meg. Mindazonáltal a fiúk sebességét és úton töltött idejét felhasználva az $S = v \cdot t$ képlet segítségével megkapjuk, hogy Kristóf $5x$ km-t tett meg, Aladár pedig $8(x - 1,5)$ km-t.

	S, km	v, km/h	t, h
Kristóf	$5x$	5	x
Aladár	$8(x - 1,5)$	8	$x - 1,5$

Célunk az, hogy meghatározzuk, hogy Kristóf indulásától számolva mennyi idő múlva tettek meg ugyanannyi utat a fiúk, tehát az x értékét kell meghatározni.

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Mivel az a kérdés, hogy mikor tettek meg ugyanannyi utat, a Kristóf által megtett útnak egyenlőnek kell lennie a Aladár által metett úttal. Vagyis:

$$5x = 8(x - 1,5).$$

Ha megoldjuk az egyenletet, megkapjuk a választ az első kérdésre. A második kérdés megválaszolásához ki kell számolnunk, hogy mennyi utat tettek meg a fiúk és a kettejük által megtett tak összegét ki kell vonni 50-ből.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet:

$$5x = 8(x - 1,5);$$

$$5x = 8x - 12;$$

$$3x = 12;$$

$$x = 4.$$

Tehát Kristóf indulásától számolva 4 óra múlva tettek meg a fiúk azonos távolságot. Kristóf 4 óra alatt megtett $5 \cdot 4 = 20$ km-t, Aladár pedig $8 \cdot (4 - 1,5) = 20$ km-t, tehát valóban ugyanannyi utat tettek meg.

Mivel 50 km a teljes út és a fiúk egymással szemben haladnak, a közöttük lévő távolság $50 - (20 + 20) = 10$ km.

4. lépés: Ellenőrzés.

Ellenőrzésre mindig igyekezzünk a megoldásunktól független módszert alkalmazni.

Kristóf indulása után 1 órával megtett 5 km-t, Aladár ekkor még nem indult el.

Két óra múlva Kristóf megtett 10 km-t, Aladár 4 km-t. Három óra múlva Kristóf megtett 15 km-t, Aladár 12 km-t, négy óra múlva Kristóf megtett 20 km-t, Aladár szintén 20 km-t.

Felelet: Kristóf indulásától számolva 4 óra múlva tettek meg ugyanannyi utat, ekkor 10 km volt köztük a távolság.

4. feladat. Szabó úr minden hétköznap reggel pontban 8 órakor indul el a házuk elől gépkocsival a munkahelyére. Ha 40 km/h átlagsebességgel halad, akkor 3 percet késik. Ha átlagsebessége 60 km/h, akkor 3 perccel a hivatalos munkakezdés előtt ér a munkahelyére. Mekkora átlagsebesség esetén lesz Szabó úr pontosan a munkakezdésre a munkahelyén? ([3])

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Ebben a feladatban is lényeges lépés, hogy a diákok felismerjék, hogy ugyanazt az utat kell Kovács úrnak megtennie.

Ha $v = 40$ km/h, akkor 3 percet késik, ha $v = 60$ km/h, akkor 3 perccel korábban ér oda. Érdemes a 3 percet átalakítani óravá, hogy a mértékegységek egyezzenek.

Jelölje t a pontos érkezéshez szükséges időt órában mérve.

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Elsősorban alakítsuk át a 3 percet, ami $\frac{3}{60}$, vagyis $\frac{1}{20}$ óra.

Ha 3 perccel korábban ér oda, azt az általunk bevezetett jelölés szerint a következőképpen írhatjuk fel: $(t - \frac{1}{20})$. Hasonlóan, ha 3 percet késik: $(t + \frac{1}{20})$.

Mivel mindkét esetben a megtett út ugyanakkora, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$40 \cdot \left(t + \frac{1}{20}\right) = 60 \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right).$$

Ha megoldjuk az egyenletet, megkapjuk, hogy Kovács úr mennyi idő alatt ér be a munkahelyére. Ennek ismeretében kiszámolhatjuk a háza és a munkahelye közötti távolságot, majd azt a sebességet, amely esetén pontosan fog megérkezni.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet:

$$40 \cdot \left(t + \frac{1}{20}\right) = 60 \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right);$$

$$40t + 2 = 60t - 3;$$

$$20t = 5;$$

$$t = \frac{1}{4}.$$

Tehát 15 perc alatt ér be Kovács úr a munkahelyére. Ha 40 km/h sebességgel $(t + \frac{1}{20})$ óra alatt teszi meg a háza és munkahelye közötti távolságot, akkor ez a távolság:

$$S = 40 \quad km/h \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) \quad h = 12 \quad km.$$

Ahhoz, hogy ezt a távolságot 15 perc alatt tegye meg

$$v = \frac{12 \quad km}{0,25 \quad h} = 48 \quad km/h$$

sebességgel kell utaznia.

4. lépés: Ellenőrzés.

60 km/h sebességgel $t = \frac{12 \quad km}{60 \quad km/h} = \frac{1}{5}$ óra alatt ér be a munkahelyére, ami 12 perc, tehát valóban 3 perccel korábban.

40 km/h sebességgel $t = \frac{12 \quad km}{40 \quad km/h} = \frac{3}{10}$ óra alatt ér be a munkahelyére, ami 18 perc, tehát valóban 3 perccel később.

48 km/h sebességgel $t = \frac{12 \quad km}{48 \quad km/h} = \frac{1}{4}$ óra alatt ér be a munkahelyére, ami 15 perc, tehát pontosan időben.

Felelet: 48 km/h.

4.3. A záró mérés eredményei

Ahogy a felmérésen is, az 1. feladattal azt szerettük volna kideríteni, hogy a diákok ismerik-e az $S = v \cdot t$ képletet, tudják-e alkalmazni, illetve tudják-e, hogy csak azonos mértékegységek esetén tudunk számolni, tudnak-e váltani a mértékegységek között.

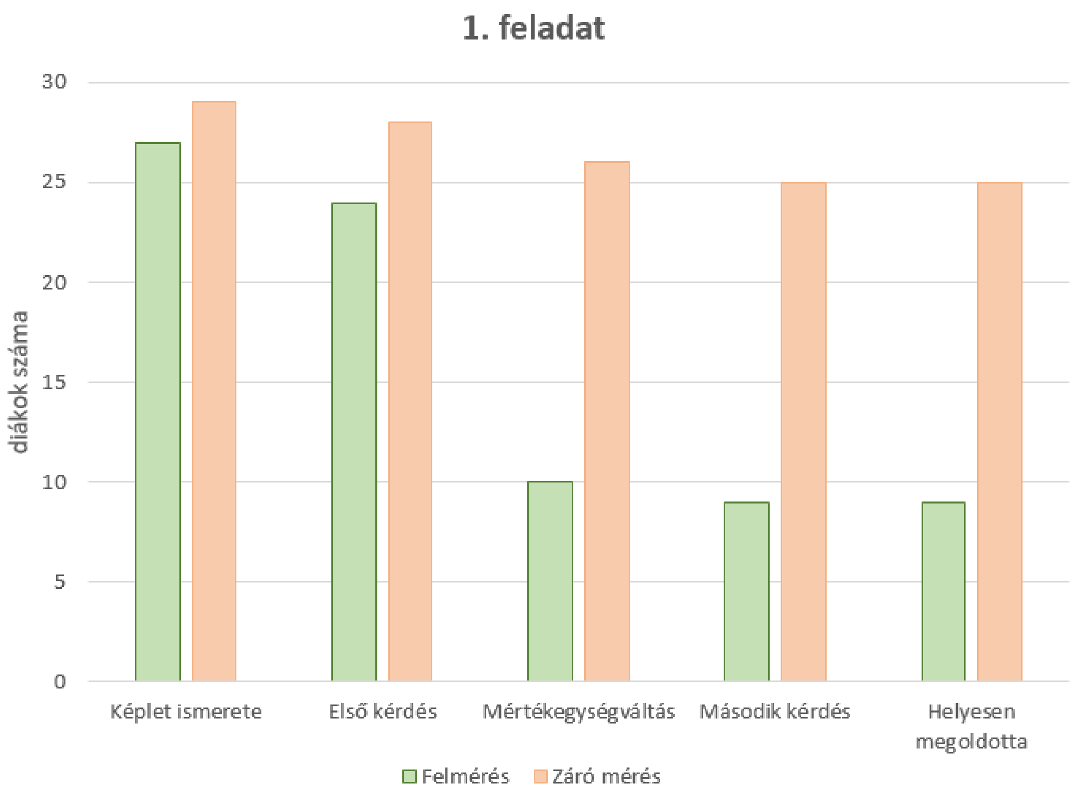
A következő táblázat azt mutatja, hogy hány diáknak sikerült megfelelni ezeknek a kritériumoknak.

4. táblázat. A záró mérés 1. feladatának eredményei

Képlet ismerete	Első kérdés	Mértékegységváltás	Második kérdés	Helyesen megoldotta
29	28	26	25	25

Jól látható, hogy a 30 diákból már 29 tudta felírni helyesen a képletet, bár csak 28 tudta alkalmazni. A mértékegységváltás a felmérésen 10 diáknak nem sikerült, a záró mérésen ez a szám lecsökkent négyre. Az osztás terén is szembetűnő a fejlődés, míg a felmérésen csak 9 tanuló adott tökéletes megoldást erre a feladatra, a záró mérésen már 25 diáknak sikerült.

A következő diagram szemlélteti felmérés és a záró mérés eredményeinek összehasonlítását:



1. ábra. Az 1. feladat erdményeinek összehasonlítása

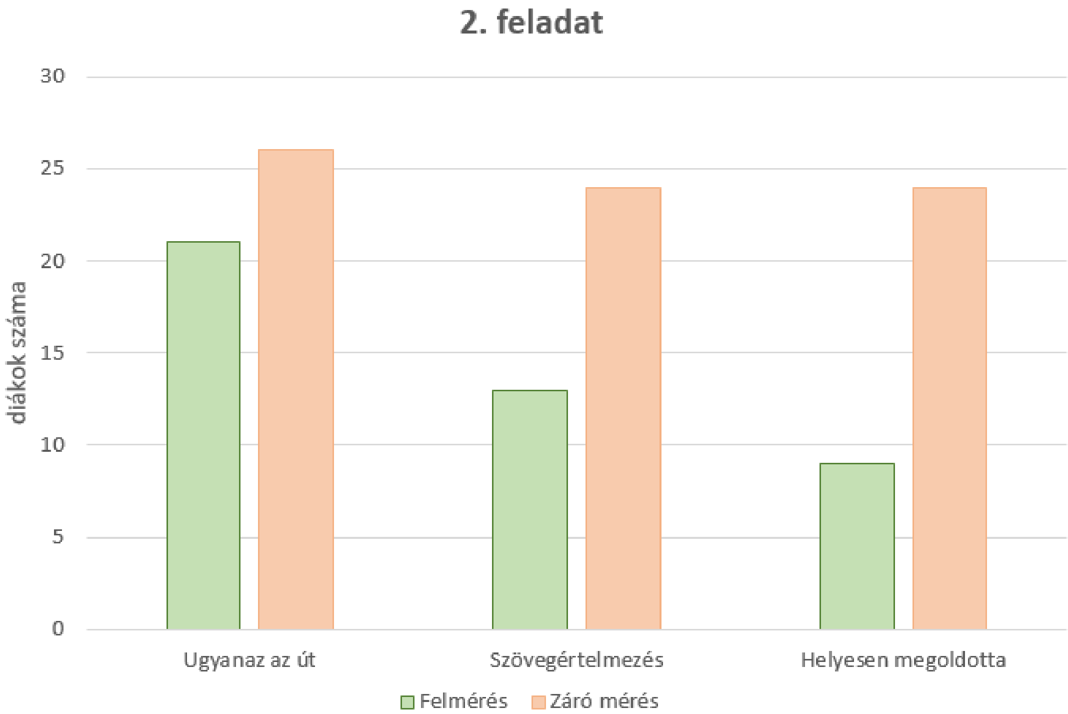
A 2. feladat a tanulók szövegértelmezési képességeire koncentrál, ugyanis a feladat megoldásának egyik legfontosabb pontja, hogy a diák felismerje, hogy a járműnek mindkét esetben ugyanazt az utat kell megtennie. A felmérésen ez 21 tanulónak sikerült, de a csak 9-en adtak helyes megoldást, mivel a kritikai gondolkodás hiánya miatt többen elfogadták a helytelen eredményt. A záró mérésen megfigyelhető, hogy a diákok a kapott eredményeket ellenőrizték, mérlegelték, hogy az megfelel-e a feladat feltételeinek, így erre a feladatra már 24 tanuló tudott helyes megoldást készíteni.

Az alábbi táblázatban látható, hogy hányan tudták megoldani ezt a problémát.

5. táblázat. A záró mérés 2. feladatának eredményei

Felismerte, hogy ugyanazt az utat kell megtennie	Helyesen értelmezte a feladat szövegét	Helyesen megoldotta
26	24	24

A következő diagram szemlélteti a felmérő feladatsor és a záró mérés feladatsorában található 2. feladatok eredményeinek összehasonlítását:



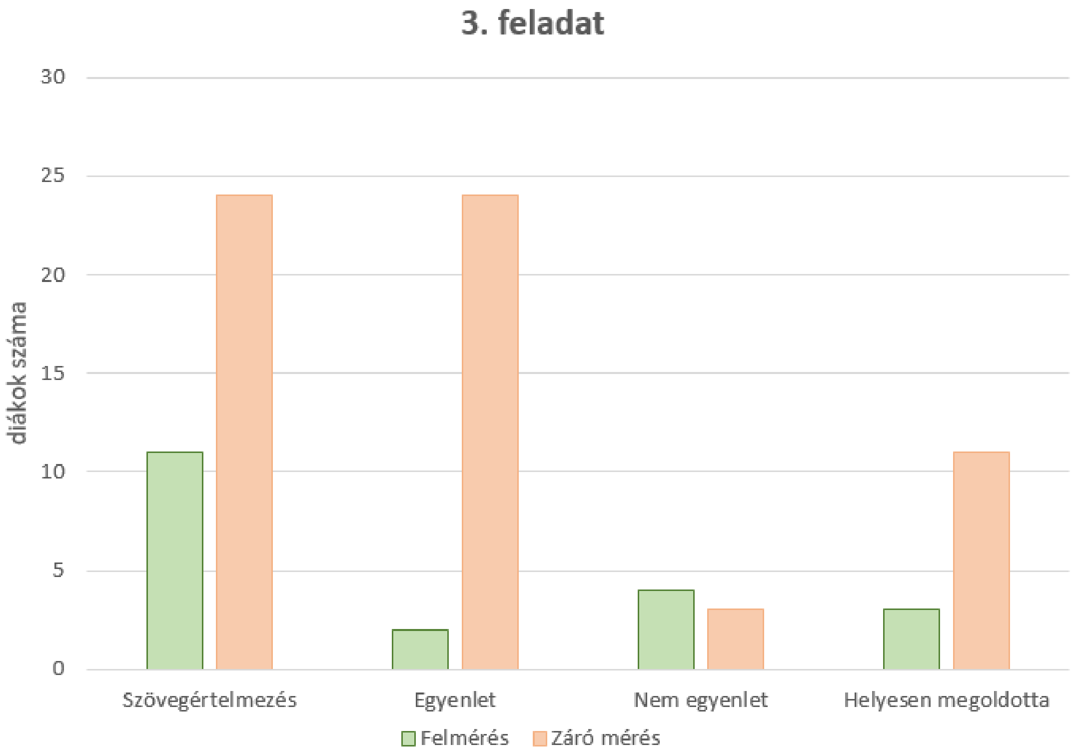
2. ábra. Az 2. feladat erdményeinek összehasonlítása

A 3. feladat szintén a szövegértelmezésre koncentrál, valamint arra, hogy a diákok fel tudnak-e állítani egy egyenletet szöveg alapján. A felmérésen a feladathoz 11 tanuló kezdett hozzá, a többiek nem értették, hogy mi van megadva és mit kell meghatározni. Ehhez képest a záró mérésen már 24 tanuló próbálta megoldani a feladatot, melyek közül 11 járt sikerrel. Az alábbi táblázatban láthatjuk, hogy melyik szempontnak hány diák felelt meg:

6. táblázat. A záró mérés 3. feladatának eredményei

Helyesen értelmezte a feladat szövegét	Egyenlettel oldotta	Nem egyenlettel oldotta	Helyesen megoldotta
24	24	3	11

A tananyag után sokkal több diák próbált egyenletet felállítani a szöveg alapján, hosszabb indoklásokat írtak, az egyenletek megoldása terén is fejlődtek. Az alábbi diagramon látható a felmérés és a záró mérés eremdényeinek összehasonlítása a 3. feladat esetében:



3. ábra. Az 3. feladat erdményeinek összehasonlítása

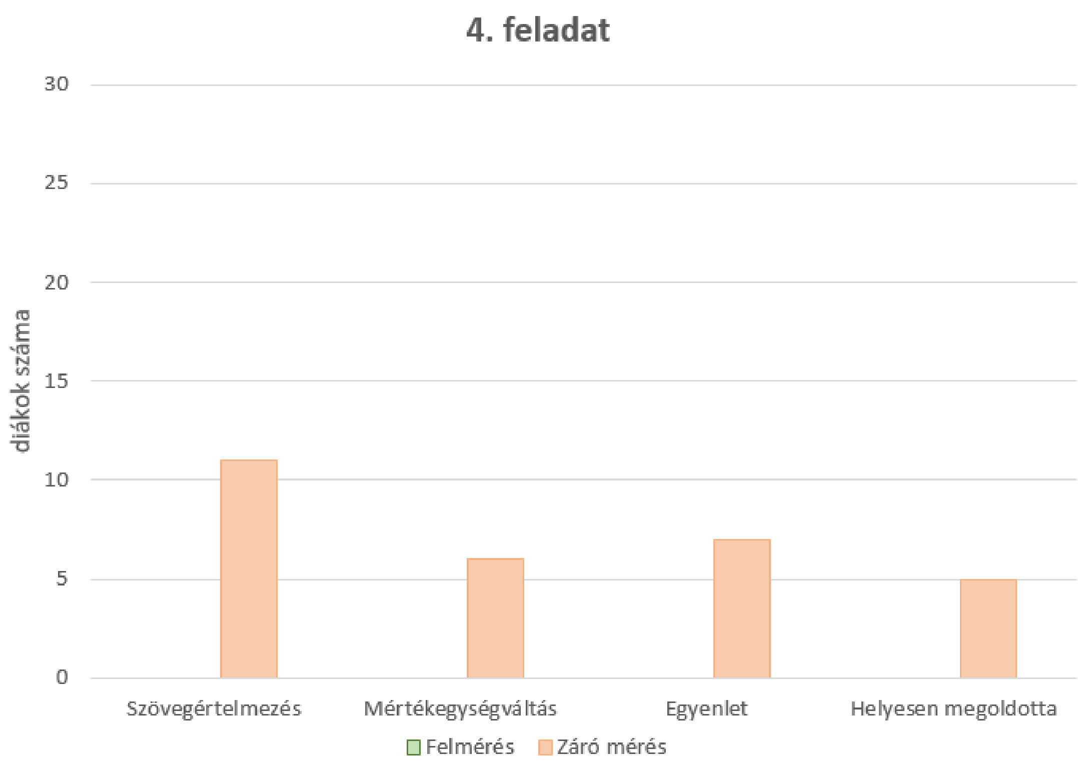
A 4. feladatot a felmérésen senki sem tudta megoldani, viszont a záró mérésen 11 tanuló hozzákezdett, és 5-en sikeresen megoldották. Ebben a feladatban mutatkozik meg a kritikai gondolkodás, ugyanis a tanulók többsége egyszerűen átlagot vont a felmérésen a két sebességből, és elfogadták a hibás eredményt. A záró mérésen viszont már felismerték, hogy ugyanarról az útról van szó, fel tudtak állítani egy egyenletet megfelelő mértékegységváltás mellett és néhány diák sikeresen meg is oldotta azt.

Az alábbi táblázatban látható a 4. feladat megoldásainak eredményei:

7. táblázat. A záró mérés 4. feladatának eredményei

Helyesen értelmezte a feladat szövegét	Mértékegységváltás	Egyenlet	Helyesen megoldotta
11	6	7	5

Az eredmények diagramon szemléltetve:



4. ábra. Az 4. feladat erdményeinek összehasonlítása

5. KÖVETKEZTETÉSEK

A záró mérés eredményei egyértelműen igazolják Pólya György modelljének hatékonyságát, a fejlődés a nehezebb feladatokon szembetűnő. A fejlődés a következő területeken figyelhető meg:

- Javult a tanulók szövegértése, a diákok többsége a felmérésen nem tudott egyenletet felállítani szöveges feladat alapján, a záró mérésen viszont igen.
- A problémamegoldási képességek fejlesztésére kidolgozott tananyag során valóban fejlődött a diákok problémamegoldási képessége, nehezebb feladatokat is sikeresebben oldottak meg.
- Elsajátították a mértékegységváltás módszereit.
- A tanulók pozitívan álltak hozzá a problémák megoldásához, igényelték a tárgyi tevékenységgel szemléltetést, kísérletezést, saját maguk is kitalálták hasonló tevékenységeket.
- Meghallgatták, továbbfejlesztették egymás ötleteit, képesek voltak egyéni gondolkodás után közös munkára.
- Fejlődött a megoldások leírása, a diákok több szöveges indoklást írtak.
- Az új kérdések megfogalmazása is pontosabb, lényegretörőbb lett.
- A kritikai gondolkodás szembetűnően fejlődött, többen ellenőrizték a kapott megoldásokat helyesség és a probléma kontextusa szempontjából is.

ÖSSZEGZÉS

A szakdolgozat a problémamegoldó gondolkodás fejlesztését vizsgálja. Az első fejezben bemutatásra kerül a problémamegoldás elméleti háttere, az eddig elért főbb kutatási eredmények és modellek.

A következő fejezet a diákok körében végzett felmérés menetét és eredményeit tartalmazza, melyet a problémamegoldási képességek fejlesztésére kidolgozott tananyag követ. A tananyagban tizenöt mozgással kapcsolatos szöveges feladat található a problémamegoldó gondolkodás modelljét követő megoldással együtt.

A negyedik fejezetben a tananyag utáni záró mérés menete és eredményei találhatók összehasonlítva a felmérés eredményeivel. Az eredmények egyértelműen igazolják a problémamegoldó módszer hatékonyságát, a diákok nagyobb része oldott meg sikeresen feladatokat.

Összefoglalva, az eredmények bebizonyították, hogy a problémamegoldó gondolkodás gondosan megtervezett tananyaggal fejleszthető. A jövőre nézve fontos a problémamegoldó készségek további kutatása és fejlesztése annak érdekében, hogy a tanulók rendelkezzenek a mindennapi életben felmerülő összetett problémák megoldásához szükséges készségekkel.

Hivatkozások

[1] Branca, N. A. *Mathematical Problem Solving: Lessons from the British Experience In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives,* Routledge, New York and London 2009.

[2] Csíkos Csaba: *A szöveges feladatok szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében.* Tanítás-tanulás, Szegedi Tudományegyetem, 2008.

[3] Egyed László: *Mozgással kapcsolatos feladatok*, Magas szintű matematikai tehetséggondozás, Baja, 2010.

[4] Eszterházy Károly Egyetem Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet: *Matematika tankönyv 8. osztály*, Magyarország, Eszterházy Károly Egyetem, 2017

[5] Lester F. K. Jr.: *Methodological Consideration in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction.* In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives (pp. 41-69). Routledge, New York and London, 2009.

[6] Kontra József: *A probléma és a problémamegoldó gondolkodás,* Magyar Pedagógia, 4. szám, Kaposvár, 1996, 341-366 o.

[7] Oktatási Hivatal: *Központi írásbeli feladatsor matematikából 8. évfolyamosok számára*, 2012.

[8] Oktatási Hivatal: *Központi írásbeli feladatsor matematikából 8. évfolyamosok számára*, 2015.

[9] Merzljak A. H., Polonszkij V. B., Jakir M. Sz.: *Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 8. osztálya számára*, Szvit, Lviv, 2016.

[10] Merzljak A. H., Polonszkij V. B., Jakir M. Sz.: *Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 9. osztálya számára*, Szvit, Lviv, 2017.

[11] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája,* II. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[12] Schoenfeld, A.: *Mathematical Problem Solving,* Academic Press INC.. New York, 1985.

[13] Taraszenkova N. A.: *Matematika tankönyv az általános iskolák 6. osztálya számára*, Bukrek, Csernyivci, 2014.

Táblázatok jegyzéke

Ábrák jegyzéke

РЕЗЮМЕ

У дипломній роботі досліджується розвиток проблемного мислення. У першому розділі представлені теоретичні основи вирішення проблем, основні результати досліджень і моделі, досягнуті до цього часу.

Наступний розділ містить процес і результати опитування, проведеного серед учнів, а потім навчальну програму, розроблену для розвитку навичок вирішення проблем. Навчальна програма містить п'ятнадцять рухових текстових завдань із розв'язанням за моделлю проблемно-орієнтованого мислення.

У четвертому розділі процес і результати остаточного вимірювання після вивчення матеріалу курсу порівнюються з результатами опитування. Результати яскраво доводять ефективність проблемного методу, більшість учнів успішно розв'язали завдання.

Таким чином, результати довели, що мислення, здатне розв'язувати проблеми, можна розвинути за допомогою ретельно розробленої навчальної програми. У майбутньому важливо продовжувати дослідження та розвивати навички вирішення проблем, щоб переконатися, що студенти мають навички вирішення складних проблем, які виникають у повсякденному житті.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

ID перевірки:
1015113200

Дата перевірки:
16.05.2023 15:05:45 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
17.05.2023 11:22:22 EEST

ID користувача:
100011749

Назва документа: Baksa-Adrien-A-problémamegoldó-gondolkodás-tanítása-tanulása-matematika-órán

Кількість сторінок: 72 **Кількість слів:** 17920 **Кількість символів:** 112563 **Розмір файлу:** 1.03 MB **ID файлу:** 1014795768

5.99% Схожість

Найбільша схожість: 1.84% з Інтернет-джерелом (http://kmksz.com.ua/tankonyvek/8-oszt/Algebra%20(2016,%20A.%20H...

5.99% Джерела з Інтернету | 152 .... Сторінка 74

0.04% Джерела з Бібліотеки | 2 .... Сторінка 75

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 1

Nyilatkozat

Alulírott, Baksa Adrien, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

MELLÉKLETEK

Óravázlat

Dátum: 2023. február 1.

Osztály: 10-A, 10-B, 11-A, 11-B

Téma: A problémamegoldó gondolkodás tanítása-tanulása matematika órán.

Тема: Проблемно-орієнтоване навчання на уроці математики.

Oktatási cél: szöveges feladatok megoldásának gyakorlása.

Nevelési cél: szövegértelmezés fejlesztése.

Képzési cél: a problémamegoldó képesség fejlesztése.

Az óra típusa: Begyakorló óra.

Eszközök: toll, füzet, feladatsor, tábla, vetítő, internet, számítógép, telefon.

Az óra fő részei	**Az óra menete**	**Idő**	**Megjegyzés**
Szervezés	Köszönés, néhány információ a kutatásról.	1 perc	
Motiváció Aktualizálás	A diákok megoldják a következő játékban található feladatokat, amelyekben a sebességet kell kifejezni km/h-ban vagy m/s-ban: https://wordwall.net/hu/resource/26036706/fizika/sebess%c3%a9g-%c3%a1tv%c3%a1lt%c3%a1s	5 perc	
Begyakorlás	*1. feladat. ([4]) Dóri és Dani, az egyéves ikrek négykézláb mászva közlekednek a lakásban. Amikor délután meghallják, hogy megérkezett apa, közös szobájukból teljes gőzzel a bejárat felé indulnak. Dóri 2 mp alatt 1 métert, Dani pedig 5 mp alatt 3 métert tesz meg. Ki a gyorsabb? Ki mennyi idő alatt teszi meg a szükséges 12 métert?* **Megoldás:** *1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.* Olvassuk el a feladatok hangosan, fogalmazzuk meg, hogy mit szeretnénk kiszámítani. Dóri - 2 mp alatt 1 méter. Dani - 5 mp alatt 3 méter. S=12 km. Kinek nagyobb a sebessége? $t_{Dóri}, t_{Dani}-?$ *2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.*	35 perc	

Ha meghatározzuk, hogy 1 mp alatt ki mekkora utat tesz meg, össze tudjuk hasonlítani a sebességeket és az $t = \frac{s}{v}$ összefüggés használatával ki tudjuk számolni a 12 méter megtételéhez szükséges időt.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Dóri 1 mp alatt megtesz $\frac{1}{2} = 0{,}5$ métert.

Dani 1 mp alatt megtesz $\frac{3}{5} = 0{,}6$ métert.

Tehát Dani gyorsabb, és felírhatjuk a sebességeket: $v_{Dóri} = 0{,}5\ \mathrm{m/s}, v_{Dani} = 0{,}6\ \mathrm{m/s}$.

12 méter megtételéhez szükséges idő:

$$t_{Dóri} = \frac{12}{0{,}5} = 24\ \ (s);$$

$$t_{Dani} = \frac{12}{0{,}6} = 20\ (s).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Felírhatjuk a következő aránypárt Dóri esetén:

$$2\quad s - 1\quad m;$$

$$x\quad s - 12\quad m;$$

$$x = 2 \cdot\ 12 = 24\quad (s).$$

Hasonlóan Dani esetében:

$$5\quad s\ - 3\ m;$$

$$x\quad s\ - 12\ m;$$

$$x = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20\quad (s).$$

Felelet: Dani gyorsabb, Dóri 24 másodperc, Dani 20 másodperc alatt teszi meg a 12 métert.

2. feladat. ([4]) – Én18 km/h -val szoktam hazafelé biciklizni – dicsekszik Imi.

– Az semmi – válaszol Laci. – Én a múltkor úgy száguldoztam, hogy 4 métert tettem meg másodpercenként.

Ki a gyorsabb? Ki hány km-t tesz meg a 20 perces hazaút alatt?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rövidbeírást:

$v_{Imi} = 18$ km/h.

$v_{Laci} = 4$ m/s

$t = 20$ perc.

$$S_{Imi}, S_{Laci} - ?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ahhoz, hogy tudjuk alkalmazni az előző feladatban használt képleteket, egyforma mértékegységben kell felírni az adatainkat.

$$4 \quad \frac{m}{s} \quad = 4 \cdot \frac{3600}{1000} \quad km/h \quad = 14{,}4 \quad km/h.$$

$$20 \quad perc \ = \ \frac{20}{60} \quad óra \ = \ \frac{1}{3} \quad óra.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Mivel a sebességek már mindkét fiú esetében azonos mértékegységgel van felírva, kijelenthetjük, hogy Imi a gyorsabb. Az általuk megtett utak 20 perc alatt a következők:

$$S_{Imi} \ = \ 18 \quad \frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3} \quad h \ = \ 6 \quad km.$$

$$S_{Laci} \ = \ 14{,}4 \quad \frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3} \quad h \ = \ 4{,}8 \quad km.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Ha Imi 1 óra alatt 18 km-t tesz meg, akkor 20 percenként tesz meg 6 km-t. Ha Laci 4 m-t tesz meg 1 másodperc alatt, akkor $4 \cdot \ 60 = 240$ m-t tesz meg 1 perc alatt, vagyis $240 \cdot \ 20 \ = \ 4800$ m-t tesz meg 20 perc alatt, ami 4,8 km-rel egyenlő.

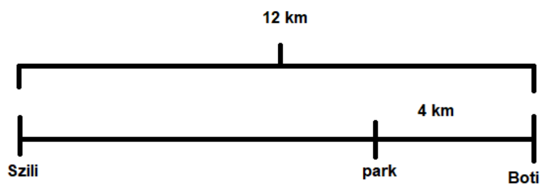
Felelet: Imi gyorsabb, Imi 6 km-t, Laci 4,8 km-t tesz meg 20 perc alatt.

3. feladat. ([4]) Szili és Boti 12 km-re laknak egymástól. Délelőtt 10 órakor elindultak egymás felé, mert megbeszélték, hogy a Botiéktól 4 km-re lévő parkban találkoznak. Szili biciklivel ment, Boti görkorival, így pontosan egyszerre érkeztek meg a parkba. Szili átlagsebessége 16 km/h. Hány órakor találkoztak? Fél órát beszélgettek a parkban, aztán Szili biciklivel hazavitte Botit, majd hazakerekezett. Hány órára ért haza Szili?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rajzot:



$$v_{Szili} = 16 \quad km/h.$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Kiszámoljuk Szili és a park közötti távolságot, aztán azt, hogy Szili mennyi idő alatt ért a parkba; mivel egyszerre indultak és egyszerre érkeztek meg, megkapjuk, hogy hány órakor találkoztak.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Szili és a park közötti távolság: $12 - 4 = 8 \quad km.$

$t_{Szili} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad h$, tehát 30 perc, ami azt jelenti, hogy 10:30-kor találkoztak.

Ahhoz, hogy Szili hazavigye Botit és visszamenjen a parkba $2 \cdot 4 = 8$ km-t kell megtennie, amit 30 perc alatt tesz meg, majd a parktól hazáig szintén 30 perc alatt jut el. Ha 11:00-ig beszélgettek, majd azt követően Szili 1 órán keresztül utazott haza, 12:00 órakor volt otthon.

4. lépés: Ellenőrzés.

Szilinek 8 km-t kell megtennie, hogy a parkba érjen. Ha 1 óra alatt 16 km-t tesz meg, akkor 30 perc alatt 8 km-t, tehát helyesen számítottuk ki az időt.

Felelet: 10:30-kor találkoztak és 12:00-ra ért haza Szili.

4. feladat. ([4]) Alabárból Balabárba 9 órakor elindult egy terepjáró, 10:25-kor pedig egy motor. A terepjáró 11 órakor negyed órára félreállt tankolni, majd folytatta az útját. A két jármű 12:45-kor egyszerre érkezett meg Balabárba. A motoros fél perc alatt tett meg 1 km-t. Milyen messze van Alabártól Balabár? Mekkora a terepjáró és a motoros átlagsebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rövidbeírást!

$$v_{motor} = 1 \quad km\ /\ 0{,}5 \quad perc.$$

$$t_{motor} = 12{:}45 - 10{:}25 = 2 \quad óra \quad 20 \quad perc.$$

$$t_{terepjáró} = (11{:}00 - 9{:}00) + (12{:}45 - 11{:}15) =$$

$$= 2 \quad óra \quad + 1 \quad óra \quad 30 \quad perc \quad = 3 \quad óra \quad 30 \quad perc.$$

$$S, v_{terepjáró}, v_{motor} - ?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha a motoros sebességét átalakítjuk km/h-ba, a sebessége és az úton töltött ideje alapján kiszámolhatjuk a két város közötti távolságot.

Mivel a terepjáró ugyanazt a távolságot tette meg és tudjuk, hogy hány órát volt úton, meghatározhatjuk a sebességét a $v = \frac{S}{t}$ összefüggés használatával.

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Alakítsuk át a motoros sebességét!

$$v_{motor} = 1 \quad km/ \ 0{,}5 \quad perc \quad = 2 \quad km/perc \quad = 120 \quad km/h.$$

$$t_{motor} = 2 \quad óra \quad 20 \quad perc = 2\frac{1}{3}\, h \quad = \frac{7}{3} \quad h.$$

$$S = v_{motor} \cdot t_{motor} = 120 \quad \frac{km}{h} \cdot \frac{7}{3} \quad h \quad = 280 \quad km.$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Tehát a két város között 280 km távolság van. A terepjáró ezt az utat 3 óra 30 perc (3,5 óra) alatt tette meg, tehát a sebessége:

$$v_{terepjáró} = \frac{280}{3,5} = 80 \quad km/h.$$

4. lépés: Ellenőrzés.
Ha a motoros fél perc alatt 1 km-t tesz meg, akkor 1 perc alatt 2 km-t, 280 km-t pedig 140 perc alatt halad, ami 2 óra 20 perccel egyenlő.
A terepjáró ha 1 óra alatt 80 km-t tesz meg, akkor 3,5 óra alatt $80 \cdot 3,5 = 280$ km-t halad.
Felelet: 280 km a két város közötti távolság, a motor sebessége 120 km/h, a terepjáró sebessége 80 km/h.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Össze fog-lalás</td>
<td>A mai órán begyakoroltuk a mértékegységváltást, megismételtük az $S = v \cdot t$ képletet és annak alkalmazását.</td>
<td>2 perc</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Házi feladat</td>
<td>5. feladat. ([4]) Gáspár és Vince kitalálták, hogy körbebiciklizik a Velencei-tavat (32 km). Délelőtt 10 órakor indultak el ellentétes irányban. Vince óránként 18 km-t, Gáspár 22 km-t tett meg. Mikor találkozott a két gyerek?
A kiindulási ponttól milyen messze találkoztak a fiúk?
Megoldás:
1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.
Ebben a feladatban a legfontosabb, hogy a diákok felismerjék, hogy mivel a fiúk egyszerre indultak, ezért mindketten ugyanannyi ideig bicikliztek a találkozásig, jelöljük ezt x-szel. A sebességek adottak, Gáspár sebessége 22 km/h, Vincéé pedig 18 km/h. Az $S = v \cdot t$ képletet alkalmazva pedig felírhatjuk a fiúk által megtett utakat.
Foglaljuk táblázatba az adatainkat!
<table>
<tr><th></th><th>S, km</th><th>v, km/h</th><th>t, h</th></tr>
<tr><td>Gáspár</td><td>$22x$</td><td>22</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Vince</td><td>$18x$</td><td>18</td><td>x</td></tr>
</table>

$$t-?, S_{Vince}-?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.
Mivel tudjuk, hogy a fiúk ellentétes irányban indultak és kör alakú pályán bicikliznek, ezért amikor találkoztak a kettejük által megtett utak összege egyenlő a teljes úttal, ami 32 km. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$22x + 18x = 32.$$

</td>
<td>2 perc</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát. Oldjuk meg az egyenletet! $$22x + 18x = 32;$$ $$40x = 32.$$ $$x = \frac{32}{40};$$ $$x = 0{,}8.$$ Tehát 0,8 órát bicikliztek a fiúk a találkozásik, ami $0{,}8 \cdot 60 = 48$ perccel egyenlő, vagyis 10:48-kor találkoztak a kiindulási ponttól $18 \cdot 0{,}8 = 14{,}4$ km-re. *4. lépés: Ellenőrzés.* 48 perc alatt Gáspár $22 \cdot 0{,}8 = 17{,}6$ km-t tett meg, Vince 14,4 km-t. A fiúk által megtett utak összege $14{,}4 + 17{,}6 = 32$ km, ahogy a feladat feltételeiben is szerepel. Felelet: 10:48-kora találkoztak, 14,4 km-re a kiindulási ponttól.		

Óravázlat

Dátum: 2023. február 6.

Osztály: 10-A, 10-B, 11-A, 11-B

Téma: A problémamegoldó gondolkodás tanítása-tanulása matematika órán.

Тема: Проблемно-орієнтоване навчання на уроці математики.

Oktatási cél: szöveges feladatok megoldásának gyakorlása, egyenlet felállítása szöveg alapján.

Nevelési cél: szövegértelmezés fejlesztése.

Képzési cél: a problémamegoldó képesség fejlesztése.

Az óra típusa: Begyakorló óra.

Eszközök: toll, füzet, feladatsor, tábla, labda.

<table>
<tr><th>Az óra fő részei</th><th>Az óra menete</th><th>Idő</th><th>Megjegyzés</th></tr>
<tr><td>Szervezés</td><td>Köszönés, néhány információ a kutatásról.</td><td>1 perc</td><td></td></tr>
<tr><td>Házi feladat ellenőrzése</td><td>5. feladat. ([4]) Gáspár és Vince kitalálták, hogy körbebiciklizik a Velencei-tavat (32 km). Délelőtt 10 órakor indultak el ellentétes irányban. Vince óránként 18 km-t, Gáspár 22 km-t tett meg. Mikor találkozott a két gyerek?
A kiindulási ponttól milyen messze találkoztak a fiúk?
Megoldás:
1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.
Ebben a feladatban a legfontosabb, hogy a diákok felismerjék, hogy mivel a fiúk egyszerre indultak, ezért mindketten ugyanannyi ideig bicikliztek a találkozásig, jelöljük ezt x-szel. A sebességek adottak, Gáspár sebessége 22 km/h, Vincéé pedig 18 km/h. Az $S = v \cdot t$ képletet alkalmazva pedig felírhatjuk a fiúk által megtett utakat.
Foglaljuk táblázatba az adatainkat!
<table>
<tr><th></th><th>S, km</th><th>v, km/h</th><th>t, h</th></tr>
<tr><td>Gáspár</td><td>$22x$</td><td>22</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Vince</td><td>$18x$</td><td>18</td><td>x</td></tr>
</table>
$t-?, S_{Vince}-?$
2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.</td><td>5 perc</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Mivel tudjuk, hogy a fiúk ellentétes irányban indultak és kör alakú pályán bicikliznek, ezért amikor találkoztak a kettejük által megtett utak összege egyenlő a teljes úttal, ami 32 km. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:
$$22x + 18x = 32.$$
3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.
Oldjuk meg az egyenletet!
$$22x + 18x = 32;$$
$$40x = 32.$$
$$x = \frac{32}{40};$$
$$x = 0{,}8.$$
Tehát 0,8 órát bicikliztek a fiúk a találkozásik, ami $0{,}8 \cdot 60 = 48$ perccel egyenlő, vagyis 10:48-kor találkoztak a kiindulási ponttól $18 \cdot 0{,}8 = 14{,}4$ km-re.
4. lépés: Ellenőrzés.
48 perc alatt Gáspár $22 \cdot 0{,}8 = 17{,}6$ km-t tett meg, Vince 14,4 km-t. A fiúk által megtett utak összege $14{,}4 + 17{,}6 = 32$ km, ahogy a feladat feltételeiben is szerepel.
Felelet: 10:48-kora találkoztak, 14,4 km-re a kiindulási ponttól.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Motivá ció Aktual izálás</td><td>Az első kérdés feltevésekor a tanár odadobja az egyik diáknak a labdát, aki, ha helyesen válaszol tovább dobhatja valamelyik másik diáknak. Addig marad egy diáknál a labda, amíg helyesen nem válaszol a következő kérdések egyikére:
Milyen képlettel számolhatjuk ki az utat, ha ismerjük a sebességet és az időt?
Válasz: $S = v \cdot t$.
Mit jelöl a képletben a v?
Válasz: sebesség.
Melyik gyorsabb: 3 km/h vagy 1 m/s?
Válasz: 1m/s.
Melyik jelöl nagyobb utat 2 km vagy 2 mérföld?
Válasz: 2 mérföld.
Hány másodpercből áll egy óra?
Válasz: 3600.
1 km hány cm?
Válasz: 100000.
Hány órának felel meg 48 perc?
Válasz: $\frac{48}{60} = 0{,}8$.
Hány perc 0,35 óra?
Válasz: 21.</td><td>5 perc</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Begyakorlás</td>
<td>

6. feladat. ([9]) Egy autóbusznak 255 km-t kellett megtennie. Miután megtette az út $\frac{7}{17}$ *-ét, 1 órára leparkolt. Az út hátralévő részén a sebességét 5 km/h-val csökkentette, és így az indulástól számítva 9 óra múlva érkezett célba. Mekkora volt az autóbusz kezdeti sebessége?*

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Készítsünk rövidbeírást!

$$S = 255\ km.$$

Miután megtette az út $\frac{7}{17}$ -ét, 1 órára leparkolt, aztán lassabban haladt tovább. Tehát $255 \cdot \frac{7}{17} = 105$ km-t ment bizonyos sebességgel, $255 - 105 = 150$ km-t pedig 5 km/h-val lassabban.

$t = 9 - 1 = 8$ h (mivel 1 órára leparkolt).

$$v-?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Tudjuk, hogy összesen 8 órát volt úton az autóbusz, ebből 105 km-t $\frac{105}{v}$ óra alatt tett meg, a maradék 150 km-t pedig $\frac{150}{v-5}$ óra alatt tette meg. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{105}{v} + \frac{150}{v-5} = 8.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{105}{v} + \frac{150}{v-5} - 8 = 0;$$

$$\frac{105(v-5) + 150v - 8v(v-5)}{v(v-5)} = 0;$$

$$\frac{105v - 525 + 150v - 8v^2 + 40v}{v(v-5)} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} -8v^2 + 295v - 525 = 0, \\ v(v-5) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8v^2 - 295v + 525 = 0, \\ v \neq 0, v \neq 5. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$8v^2 - 295v + 525 = 0$$

$$D = 295^2 - 4 \cdot 8 \cdot 525 = 87025 - 16800 = 70225;$$

</td>
<td>30 perc</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$$v_1 = \frac{295 + \sqrt{70225}}{2 \cdot 8} = \frac{295 + 265}{16} = 35;$$

$$v_2 = \frac{295 - \sqrt{70225}}{2 \cdot 8} = \frac{295 - 265}{16} = 1{,}875;$$

4. lépés: Ellenőrzés.

A v_2 egyértelműen nem felel meg a feladat feltételeinek, mert ha 1,875 km/h sebességgel haladna, nem tudná 5 km/h-val csökkenteni a sebességét az autóbusz.

Ha 35 km/h sebességgel megtett 105 km-t, akkor azt $\frac{105}{35} = 3$ óra alatt tette meg. Ezt követően lassított és 30 km/h sebességgel haladt 150 km-en keresztül $\frac{150}{30} = 5$ órán át. Mivel 1 órán keresztül mozdulatlanul állt ezért az indulást követően $3 + 5 + 1 = 9$ óra múlva ért célba, ahogy a feladat feltételeiben is szerepel.

Felelet: 35 km/h.

7. feladat. ([9]) Egy sétahajó 4 óra alatt 45 km-t tett meg a folyón a vízfolyással egyirányban és 28 km-t a folyón a vízfolyással ellentétes irányban. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a sétahajó sebessége állóvízben 18 km/h!

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Az ilyen típusú feladatoknál nagyon fontos, hogy a diákok észrevegyék, hogy, ha a hajó a vízfolyással megegyező irányban halad, akkor a sebessége a saját sebességének és a vízfolyás sebességének összegével egyenlő. Viszont, ha a hajó a vízfolyással ellentétes irányban halad, akkor a sebessége a saját sebességének és a vízfolyás sebességének különbségével egyenlő.

$$S_{le} = 45\ km.$$

$$t_{le} = 4\ h.$$

$$S_{fel} = 28\ km.$$

$$v_{hajó} = 18\ km/h.$$

$$v_{víz} - ?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Jelöljük x km/h-val a vízfolyás sebességét.

Akkor a folyón felfelé a hajó $18 - x$ km/val haladt, a folyón lefelé pedig $18 + x$ km/h-val.

Mivel összesen 4 órát volt vizen a $t = \frac{S}{v}$ összefüggés használatával felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{45}{18 + x} + \frac{28}{18 - x} = 4.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{45}{18+x}+\frac{28}{18-x}-\ 4=0.$$

$$\frac{45(18-\mathrm{x})+28(18+\mathrm{x})-4(18-\mathrm{x})(18+\mathrm{x})}{(18-\mathrm{x})(18+\mathrm{x})}=0.$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 810-45\mathrm{x}+504+28\mathrm{x}-1296+4\mathrm{x}^2\ =\ 0, \\ (18-\mathrm{x})(18+\mathrm{x})\neq\ 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\mathrm{x}^2-17\mathrm{x}+18\ =\ 0, \\ \mathrm{x}\neq\ 18, \qquad \mathrm{x}\neq\ -18. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$4x^2-17x+18\ =\ 0;$$

$$D\ =\ 17^2\ -\ 4\cdot\ 4\cdot\ 18\ =\ 289-288=1;$$

$$x_1\ =\frac{17+\sqrt{1}}{2\cdot 4}=\frac{18}{8}=2{,}25;$$

$$x_2\ =\frac{17-\sqrt{1}}{2\cdot 4}=\frac{16}{8}=2;$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Két lehetséges megoldást is kaptunk, ebben az esetben leellenőrizzük mindkettőt.

$x_1\ =\ 2{,}25\ =\frac{9}{4}$ km/h.

$$\frac{45}{18+\frac{9}{4}}+\frac{28}{18-\frac{9}{4}}=\frac{45}{\frac{81}{4}}+\frac{28}{\frac{63}{4}}=45\cdot\frac{4}{81}+28\cdot\frac{4}{63}=\frac{180}{81}+\frac{112}{63}=$$

$$=\frac{11340+9072}{5103}=\frac{20412}{5103}=\ 4.$$

$x_2\ =\ 2$ km/h.

$$\frac{45}{18+2}+\frac{28}{18-2}=\frac{45}{20}+\frac{28}{16}=\frac{9}{4}+\ \frac{7}{4}=\frac{16}{4}=\ 4.$$

Felelet: a vízfolyás sebessége 2 km/h vagy 2,25 km/h lehet.

8. feladat. ([9]) A 400 km-es távolságot egy autóbusz meghatározott átlagsebességgel szerette volna megtenni. Az első két órában a tervezett sebességgel haladt, de közben 20 percre meg kellett állnia. Ahhoz, hogy idejében megérkezzen, az út hátralévő részén 10 km/h-val nagyobb sebességgel haladt. Mekkora volt az autóbusz tervezett sebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Rendszerezzük az adatainkat!

Jelöljük x km/h-val az autóbusz kezdeti sebességét. Akkor az első 2 órában $2x$ km-t tett meg. Tehát $(400-2x)$ km maradt az útból, amit $(x+10)$ km/h sebességgel kellett megtennie.

$$x-?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Az autóbusznak 20 percre kellett megállnia, vagyis $\frac{1}{3}$ órára, tehát ha a tervezett sebességével tette volna meg az út maradék részét, 20 percet késett volna. A tervezett sebességével az út maradék részét $\frac{400-2x}{x}$ óra alatt tette volna meg, viszont növelte a sebességét és $\frac{400-2x}{x+10}$ óra alatt időben odaért. Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{400-2x}{x}-\frac{400-2x}{x+10}=\frac{1}{3}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{400-2x}{x}-\frac{400-2x}{x+10}-\frac{1}{3}=0.$$

$$\frac{3(x+10)(400-2x)-3x(400-2x)-x(x+10)}{3x(x+10)}=0.$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 1200\mathrm{x}-6\mathrm{x}^2+12000-60\mathrm{x}-1200\mathrm{x}+6\mathrm{x}^2-\mathrm{x}^2-10\mathrm{x}=0, \\ 3\mathrm{x}(\mathrm{x}+10)\neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mathrm{x}^2-70\mathrm{x}+12000=0, \\ \mathrm{x}\neq 0, \mathrm{x}\neq -10. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$x^2+70x-12000=0;$$

$$D=70^2-4\cdot 1\cdot(-12000)=4900+48000=52900;$$

$$x_1=\frac{-70+\sqrt{52900}}{2\cdot 1}=\frac{-70+230}{2}=80;$$

$$x_2=\frac{-70-\sqrt{52900}}{2\cdot 1}=\frac{-70-230}{2}=-150.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2 nem felel meg, mivel a sebesség nem lehet negatív szám.

$$\frac{400-2\cdot 80}{80}-\frac{400-2\cdot 80}{80+10}-\frac{1}{3}==\frac{240}{80}-\frac{240}{90}-\frac{1}{3}==3+\frac{-240-30}{90}=$$
$$=3-\frac{270}{90}=3-3=0.$$

Felelet: 80 km/h.

9. feladat. ([8]) Két autó egyszerre indul A városból B városba, illetve B városból A városban egymással szemben. Mindkét autó sebessége egyenletes. Negyed órával azután, hogy elhaladtak egymás mellett, már 44 km volt az egymástól mért távolságuk. Ekkorra az A-ból indult autó már megtette az A és B közötti út 60%-át, A B-ből induló autó pedig már megtette a két város közötti út 72%-át. Számítsd ki az autók sebességét!

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

A szövegből egyértelműen kiolvasható, hogy az autók sebessége nem egyforma, a B városból induló autó gyorsabb. Felírhatjuk a sebességek arányát:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{72}{60} \rightarrow \ v_B \ = \ 1{,}2v_A.$$

Negyed órával azután, hogy elhaladtak egymás mellett, már 44 km volt az egymástól mért távolságuk. Ebből a mondatból megtudjuk, hogy 15 perc alatt ketten együtt megtettek 44 km-t, tehát $S_A \ + \ S_B \ = \ 44$.

$$v_B, v_A -?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

$$S_A \ = \ v_A \cdot \ t; \ S_B \ = \ v_B \cdot \ t;$$

Mivel $t = \frac{1}{4}$, felírhatjuk a következő egyenletet :

$$\frac{1}{4} \ v_A \ + \frac{1}{4} \ v_B \ = \ 44.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet behelyettsítve a $v_B \ = \ 1{,}2v_A$ egyenlőséget:

$$\frac{1}{4} \ (v_A \ + \ 1{,}2 \ v_A) \ = \ 44;$$

$$2{,}2v_A \ = \ 176;$$

$$v_A \ = \frac{176}{2{,}2};$$

$$v_A \ = \ 80 \ \ (km/h);$$

$$v_B \ = \ 1{,}2 \cdot \ 80 \ = \ 96 \ (km/h).$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az A városból induló autó 15 perc alatt megtesz $S_A \ = \ 80 \cdot \frac{1}{4} \ = \ 20$ km-t, a B városból induló autó 15 perc alatt megtesz $S_B \ = \ 96 \cdot \frac{1}{4} \ = \ 24$ km-t, tehát együtt 44 km-t tesznek meg.

Felelet: 80 km/h és 96 km/h az autók sebessége.

Össze fog-lalás	A mai órán az egyenletek felállítását gyakoroltuk szöveges feladatok alapján, megismételtük a másodfokú egyenletek megoldásának menetét, lefektettük a kritikai gondolkodás alapjait azáltal, hogy a kapott eredményeket a feladat feltételeinek megfelelően fogadtuk- vagy utasítottuk el.	2 perc	
Házi feladat	*10. feladat. ([9]) 2 óra 40 perccel később, mint ahogy az A kikötőből elindult egy tutaj, a B kikötőből a folyón a vízfolyással ellenkező irányban elindult egy motorcsónak. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét, ha a tutaj és a motorcsónak az A kikötőtől 14 km-re találkozott! A motorcsónak sebessége állóvízben 12 km/h, és a két kikötő között a távolság 32 km!* **Megoldás:** *1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.* Ebben a feladatban kulcsfontosságú, hogy a diákok tudják, hogy a tutaj sebessége megegyezik a vízfolyás sebességével. Írjuk fel az adatainkat! $S_{tutaj} = 14$ km. Jelöljük x km/h-val a vízfolyás (tutaj) sebességét. Mivel a motorcsónak a folyón felfelé haladt, ezért a sebessége $(12-x)$ km/h volt. $v_{mcs} = (12-x)$ km/h. $S_{mcs} = 32-14 = 18$ km. Használva a $t=\frac{S}{v}$ képletet felírhatjuk, hogy az egyes vízi járművek mennyi idő alatt tették meg az útjukat a találkozásig. $t_{mcs} = \frac{18}{12-x}$ h. $t_{tutaj} = \frac{14}{x}$ h. $x-?$ *2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.* Egyetlen adatot nem használtunk fel, mégpedig azt, hogy a motorcsónak 2 óra 40 perccel később indult útnak. Átfogalmazva, a motorcsónak 2 óra 40 perccel kevesebb időt töltött a vizen, vagyis ha a tutaj vizen töltött idejéből kivonjuk a motorcsónak vizen töltött idejét, akkor 2 óra 40 percet kapunk. 2 óra 40 perc = $2\frac{40}{60}$ óra = $\frac{8}{3}$ óra. Tehát: $$\frac{14}{x}-\frac{18}{12-x}=\frac{8}{3}.$$ *3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.* Oldjuk meg az egyenletet!	2 perc	

$$\frac{14}{x} - \frac{18}{12-x} - \frac{8}{3} = 0.$$

$$\frac{3 \cdot\ 14(12-\mathrm{x}) - \ 18 \cdot\ 3\mathrm{x}\ - 8\mathrm{x}(12-\mathrm{x})}{3\mathrm{x}(12-\mathrm{x})} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 504\ -\ 42\mathrm{x} - 54\mathrm{x} - 96\mathrm{x} + 8\mathrm{x}^2\ \ =\ 0, \\ 3\mathrm{x}(12-\mathrm{x}) \neq\ 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\mathrm{x}^2\ - 192\mathrm{x} + 504\ =\ 0, \\ \mathrm{x} \neq\ 0, \mathrm{x} \neq\ 12. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$x^2\ - 24x + 63\ =\ 0;$$

$$D\ =\ (-24)^2\ \ - 4 \cdot\ 1 \cdot\ 63\ =\ 576 - 252\ =\ 324;$$

$$x_1 = \frac{24 + \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{24 + 18}{2} = 21;$$

$$x_2 = \frac{24 - \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{24 - 18}{2} = 3.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_1 megoldás nem felel meg a feladat feltételeinek, mivel ha 21 km/h lenne a vízfolyás sebessége, a motorcsónaknak $12 - 21\ =\ -9$ km/h-val kellene haladnia, ami lehetetlen.

Tehát azt kaptuk, hogy a vízfolyás (tutaj) sebessége 3 km/h, tehát a tutaj 14 km-t $\frac{14}{3} =$ 4 óra 40 perc alatt tette meg. A motorcsónak 9 km/h sebességgel a 18 km-t $\frac{18}{9} =\ 2$ óra alatt tette meg, ami valóban 2 óra 40 perccel kevesebb a tutaj idejénél.

Felelet: 3 km/h.

Óravázlat

Dátum: 2023. február 9.

Osztály: 10-A, 10-B, 11-A, 11-B

Téma: A problémamegoldó gondolkodás tanítása-tanulása matematika órán.

Тема: Проблемно-орієнтоване навчання на уроці математики.

Oktatási cél: szöveges feladatok megoldásának gyakorlása, kétismeretlenes egyenletek megoldása.

Nevelési cél: szövegértelmezés fejlesztése.

Képzési cél: a problémamegoldó képesség fejlesztése.

Az óra típusa: Begyakorló óra.

Eszközök: toll, füzet, feladatsor, tábla, labda.

Az óra fő részei	**Az óra menete**	**Idő**	**Megjegyzés**
Szervezés	Köszönés, néhány információ a kutatásról.	1 perc	
Házi feladat ellenőrzése	*10. feladat. ([9]) 2 óra 40 perccel később, mint ahogy az A kikötőből elindult egy tutaj, a B kikötőből a folyón a vízfolyással ellenkező irányban elindult egy motorcsónak. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét, ha a tutaj és a motorcsónak az A kikötőtől 14 km-re találkozott! A motorcsónak sebessége állóvízben 12 km/h, és a két kikötő között a távolság 32 km!* **Megoldás:** *1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.* Ebben a feladatban kulcsfontosságú, hogy a diákok tudják, hogy a tutaj sebessége megegyezik a vízfolyás sebességével. Írjuk fel az adatainkat! $S_{tutaj} = 14$ km. Jelöljük x km/h-val a vízfolyás (tutaj) sebességét. Mivel a motorcsónak a folyón felfelé haladt, ezért a sebessége $(12 - x)$ km/h volt. $v_{mcs} = (12 - x)$ km/h. $S_{mcs} = 32 - 14 = 18$ km. Használva a $t = \frac{S}{v}$ képletet felírhatjuk, hogy az egyes vízi járművek mennyi idő alatt tették meg az útjukat a találkozásig. $t_{mcs} = \frac{18}{12-x}$ h.	5 perc	

$t_{tutaj} = \frac{14}{x}$ h.

$$x-?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Egyetlen adatot nem használtunk fel, mégpedig azt, hogy a motorcsónak 2 óra 40 perccel később indult útnak. Átfogalmazva, a motorcsónak 2 óra 40 perccel kevesebb időt töltött a vizen, vagyis ha a tutaj vizen töltött idejéből kivonjuk a motorcsónak vizen töltött idejét, akkor 2 óra 40 percet kapunk.

2 óra 40 perc = $2\frac{40}{60}$ óra = $\frac{8}{3}$ óra.

Tehát:

$$\frac{14}{x} - \frac{18}{12-x} = \frac{8}{3}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{14}{x} - \frac{18}{12-x} - \frac{8}{3} = 0.$$

$$\frac{3 \cdot 14(12-\mathrm{x}) - 18 \cdot 3\mathrm{x} - 8\mathrm{x}(12-\mathrm{x})}{3\mathrm{x}(12-\mathrm{x})} = 0;$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases} 504 - 42\mathrm{x} - 54\mathrm{x} - 96\mathrm{x} + 8\mathrm{x}^2 = 0, \\ 3\mathrm{x}(12-\mathrm{x}) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\mathrm{x}^2 - 192\mathrm{x} + 504 = 0, \\ \mathrm{x} \neq 0, \mathrm{x} \neq 12. \end{cases}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet!

$$x^2 - 24x + 63 = 0;$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 63 = 576 - 252 = 324;$$

$$x_1 = \frac{24 + \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{24+18}{2} = 21;$$

$$x_2 = \frac{24 - \sqrt{324}}{2 \cdot 1} = \frac{24-18}{2} = 3.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_1 megoldás nem felel meg a feladat feltételeinek, mivel ha 21 km/h lenne a vízfolyás sebessége, a motorcsónaknak $12 - 21 = -9$ km/h-val kellene haladnia, ami lehetetlen.

Tehát azt kaptuk, hogy a vízfolyás (tutaj) sebessége 3 km/h, tehát a tutaj 14 km-t $\frac{14}{3} = 4$ óra 40 perc alatt tette meg. A motorcsónak 9 km/h sebességgel a 18 km-t $\frac{18}{9} = 2$ óra alatt tette meg, ami valóban 2 óra 40 perccel kevesebb a tutaj idejénél.

	Felelet: 3 km/h.		
Motivá ció Aktual izálás	Az első kérdés feltevésekor a tanár odadobja az egyik diáknak a labdát, aki, ha helyesen válaszol tovább dobhatja valamelyik másik diáknak. Addig marad egy diáknál a labda, amíg helyesen nem válaszol a következő kérdések egyikére: ***Milyen képlettel számolhatjuk ki az utat, ha ismerjük a sebességet és az időt?*** Válasz: $S = v \cdot t$. ***Mit jelöl a képletben a $\mathbf{t}$?*** Válasz: idő. ***Melyik gyorsabb: 5 km/h vagy 3 m/s?*** Válasz: 3 m/s. ***Melyik jelöl nagyobb utat 7 km vagy 5 mérföld?*** Válasz: 5 mérföld. ***Hány másodpercből áll egy óra?*** Válasz: 3600. ***1 km hány m?*** Válasz: 1000. ***Hány órának felel meg 12 perc?*** Válasz: $\frac{12}{60} = 0{,}2$. ***Hány perc 0,45 óra?*** Válasz: 27. ***Az $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ alakú másodfokú egyenletnek mikor van megoldása (valós számok halmazán)?*** Válasz: ha a diszkrimináns nagyobb vagy egyenlő, mint nulla. ***Hogyan számoljuk ki a diszkriminánst?*** Válasz: $D = b^2 - 4ac$. ***Mikor van a másodfokú egyenletnek egy megoldása?*** Válasz: ha a diszkrimináns nullával egyenlő. ***Milyen képlettel határozzuk meg a másodfokú egyenlet gyökeit?*** Válasz: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ***Az $\boldsymbol{x^2 + bx + c = 0}$ másodfokú egyenlet esetében hogy hangzik Viéte tétele?*** Válasz: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1 x_2 = c. \end{cases}$	5 perc	
Begyak orlás	*11. feladat.([10]) Az A és B helységekből egyszerre elindult egymással szembe egy kerékpáros és egy gyalogos, akik 1 óra múlva találkoztak. Határozd meg a kerékpáros és a gyalogos sebességét, ha a kerékpáros 2 óra 40 perccel hamarabb érkezett meg a B helységbe, mint a gyalogos az A helységbe, és a két helység között a távolság 16 km !*	30 perc	

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Mivel semmilyen összefüggést nem tudunk felírni a két szereplő sebessége között, ezért jelöljük a kerékpáros sebességét x km/h-val, a gyalogos sebességét pedig y km/h-val.

A találkozások ketten együtt megtették a 16 km-es utat, ebből a kerékpáros x km-t tett meg, a gyalogos y km-t.

Hasonlóan az előző feladatokhoz felírhatjuk, hogy az egyes szereplők mennyi ideig voltak úton: a gyalogos $\frac{16}{y}$ órát, a kerékpáros $\frac{16}{x}$ órát, ahol a $\frac{16}{x}$ óra 2 óra 40 perccel több mint a $\frac{16}{y}$ óra.

$$y, x-?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ahogy az előző feladatokban láttuk 2 óra 40 perc $\frac{8}{3}$ órával egyenlő.

Az első lépésben kifejtett gondolatok alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y = 16, \\ \dfrac{16}{y} - \dfrac{16}{x} = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x = 16 - y, \\ \dfrac{2}{y} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 - y, \\ \dfrac{2x - 2y}{xy} = \dfrac{1}{3}, x \neq 0, y \neq 0. \end{cases}$$

A második egyenletből kapjuk:

$$6x - 6y = xy;$$

Behelyettesítve az első egyenletből:

$$6(16 - y) - 6y = (16 - y)y;$$

$$y^2 - 28y + 96 = 0;$$

Használhatjuk Viéte tételét:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 28, \\ y_1 \cdot y_2 = 96. \end{cases}$$

$$y_1 = 4, y_2 = 24.$$

Visszahelyettesítve:

$$x_1 = 16 - 4 = 12, x_2 = 16 - 24 = -8.$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2, y_2 megoldáspár nem felel meg a feladat feltételeinek, mert a sebesség nem lehet negatív szám. Tehát a gyalogos sebessége 4 km/h, a kerékpáros sebessége 12 km/h.

$$\frac{16}{4}-\frac{16}{12}=4-\frac{4}{3}=\frac{12-4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Felelet: 4 km/h a gyalogos sebessége, 12 km/h a kerékpáros sebessége.

12. feladat. ([9]) Egy turista kajakkal 4 km-t a tavon és 5 km-t a folyón a vízfolyással megegyző irányban ugyanannyi idő alatt tett meg, mint 6 km-t a folyón a vízfolyással ellentétes irányban haladva. Mekkora sebességgel haladt a kajakos a tavon, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Fel kell hívni a figyelmet arra a tényre, hogy a tó esetében nem kell számolni a vízfolyás sebességével.

Jelöljük a kajakos sebességét a tóban x km/h-val.

Akkor a vízfolyással megegyező irányban a folyón a sebessége $(x+2)$ km/h, a vízfolyással ellentétes irányban pedig $(x-2)$ km/h volt.

$$x-?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Használva a $t = \frac{s}{v}$ képletet, fel tudjuk írni, hogy hol mennyi időt töltött a kajakos.

A tóban 4 km-t $\frac{4}{x}$ óra alatt, a folyón 5 km-t $\frac{5}{x+2}$ óra alatt, a folyón 6 km-t $\frac{6}{x-2}$ óra alatt tett meg. Mivel tudjuk, hogy a tavon töltött és folyón vízfolyással megegyező irányban töltött idejének összege egyenlő a folyón vífolyással ellenkező irányban töltött idejével, felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{x+2}=\frac{6}{x-2}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{x+2}-\frac{6}{x-2}=0.$$

$$\frac{4(x^2-4)+5x(x-2)-6x(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=0.$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases}4x^2-16+5x^2-10x-6x^2-12x=0,\\ x(x-2)(x+2)\neq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2-22x-16=0,\\ x\neq 0, x\neq 2, x\neq -2.\end{cases}$$

Oldjuk meg a kapott másodfokú egyenletet!

$$3x^2 - 22x - 16 = 0;$$

$$D = (-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 484 + 192 = 676;$$

$$x_1 = \frac{22 + \sqrt{676}}{2 \cdot 3} = \frac{22 + 26}{6} = \frac{48}{6} = 8;$$

$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{676}}{2 \cdot 3} = \frac{22 - 26}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3};$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2 nem felel meg, mivel a sebesség nem lehet negatív szám.

$$x = 8:$$

$$\frac{4}{8} + \frac{5}{8+2} = \frac{6}{8-2};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{10} = \frac{6}{6};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

$$1 = 1.$$

Tehát a megoldás helyes.

Felelet: 8 km/h-val haladt a kajakos a tavon.

13. feladat. ([9]) A menetrend szerint az autóbusznak 72 km-t kellett megtennie. 24 km megtétele után egy sorompónál az autóbusz 12 percet várakozott. Hogy tartani tudja a menetrendet, az autóbuszvezető a sebességét 12 km/h-val növelte, és így csak 4 percet késett. Határozzátok meg az autóbusz kezdeti sebességét!

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Jelöljük x km/h-val az autóbusz kezdeti sebességét, tehát az első 24 km-t x km/h-val $\frac{24}{x}$ óra alatt tette meg. Ezt követően maradt az útból $72 - 24 = 48$ km, amit $(x + 12)$ km/h sebességgel tett meg $\frac{48}{x+12}$ óra alatt.

$$x - ?$$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha egész úton a tervezett sebességével haladt volna az autóbusz $\frac{72}{x}$ óra alatt tette volna meg a teljes utat és időben odaért volna a célállomásra.

Az úton töltött idejét megkapjuk, ha összeadjuk az első 24 km megtételéhez szükséges időt, a 12 perc várakozást és a maradék 48 km megtételéhez szükséges időt. Ez az összeg 4 perccel több, mintha a tervezett sebességével tette volna meg az egész utat.

12 perc = $\frac{12}{60}$ óra = $\frac{1}{5}$ óra.

4 perc = $\frac{4}{60}$ óra = $\frac{1}{15}$ óra.

Tehát felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{1}{15}+\frac{72}{x}=\frac{24}{x}+\frac{1}{5}+\frac{48}{x+12};$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Rendezzük és oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{1}{15}+\frac{72}{x}-\frac{24}{x}-\frac{1}{5}-\frac{48}{x+12}=0;$$

$$\frac{48}{x}-\frac{48}{x+12}-\frac{2}{15}=0;$$

$$\frac{48\cdot\ 15(\mathrm{x}+12)-48\cdot\ 15\mathrm{x}-2\mathrm{x}(\mathrm{x}+12)}{15\mathrm{x}(\mathrm{x}+12)}=0.$$

Egy tört értéke akkor egyenlő nullával, ha a számláló egyenlő nullával, a nevező pedig nem egyenlő nullával. Vagyis:

$$\begin{cases}720\mathrm{x}+8640-720\mathrm{x}-2\mathrm{x}^2-24\mathrm{x}\ =\ 0,\\ 15\mathrm{x}(\mathrm{x}+12)\neq\ 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2\mathrm{x}^2-24\mathrm{x}+8640=\ 0\\ \mathrm{x}\neq\ 0,\mathrm{x}\neq\ -12.\end{cases}$$

Oldjuk meg a kapott másodfokú egyenletet! Az eredeti egyenlet mindkét oldalát megszorozva $(-\frac{1}{2})$-del a következő egyenletet kapjuk:

$$x^2\ +12x\ -4320\ \ =\ 0;$$

$$D\ =\ 12^2\ -4\cdot\ 1\cdot\ (-4320)\ =\ 144+17280\ =\ 17424;$$

$$x_1=\frac{-12+\sqrt{17424}}{2\cdot 1}=\frac{-12+132}{2}=\frac{120}{2}=60;$$

$$x_1=\frac{-12-\sqrt{17424}}{2\cdot 1}=\frac{-12-132}{2}=\frac{-144}{2}=-72;$$

4. lépés: Ellenőrzés.

Az x_2 nem felel meg, mivel a sebesség nem lehet negatív szám.

$$x=60:$$

A tervezett idő $\frac{72}{60}\ =\ 1\frac{12}{60}\ =\ 1\frac{1}{5}$ óra volt.

Az első 24 km-t $\frac{24}{60}\ =\frac{2}{5}$ óra alatt tette meg, majd $\frac{1}{5}$ órát várakozott (12 perc), a következő 48 km-t $\frac{48}{60+12}\ =\frac{48}{72}\ =\frac{2}{3}$ óra alatt tette meg. Ezek összege:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{19}{15}.$$

Ha $\frac{19}{15}$ órából kivonunk 4 percet, akkor a tervezett időt kell kapnunk:

$$\frac{19}{15}-\frac{1}{15}=\frac{18}{15}=1\frac{3}{15}=1\frac{1}{5}.$$

Tehát a megoldás helyes.

Felelet: 60 km/h volt az autóbusz kezdeti sebessége.

14. feladat. ([3]) Egy folyó partján az A és B város 20 kilométerre van egymástól. Egy csónak A-ból B-be és vissza 10 óra alatt tette meg az utat. A vízfolyással szemben 2 km-t tett meg ugyanannyi idő alatt, mint a vízfolyással egyirányban 3 km-t. Mekkora a folyó sebessége?

Megoldás:

1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.

Jelöljük x km/h-val a csónak sebességét, y km/h-val a vízfolyás sebességét.

Akkor a vízfolyással szemben $(x-y)$ km/h-val, a vízfolyással megegyező irányban $(x+y)$ km/h-val haladt.

A folyó sebességét kell meghatároznunk, tehát $y-?$

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Mivel a csónak a vízfolyással szemben 2 km-t tett meg ugyannyi idő alatt, mint a vízfolyással egyirányban 3 km-t, használva a $t=\frac{s}{v}$ összefüggést felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{2}{x-y}=\frac{3}{x+y}.$$

A csónak oda-vissza megtette az utat, tehát 20 km-t tett meg a vízfolyással szemben és 20 km-t tett meg a vízfolyás irányában 10 óra alatt. Vagyis a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{20}{x-y}+\frac{20}{x+y}=10.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Oldjuk meg a kapott egyenletrendszert!

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-y}=\dfrac{3}{x+y},\\ \dfrac{20}{x-y}+\dfrac{20}{x+y}=10.\end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezzük az x változót:

$$\frac{2}{x-y}=\frac{3}{x+y};$$

$$2(x+y) = 3(x-y);$$

$$2x+2y = 3y-3y;$$

$$2x-3y=-3y-y;$$

$$-x=-5y;$$

$$x=5y.$$

Behelyettesítjük a kapott értéket a második egyenletbe:

$$\frac{20}{5y-y}+\frac{20}{5y+y}=10;$$

	$$\frac{20}{4y}+\frac{20}{6y}=10;$$ $$\frac{100}{12y}=10, y\neq 0.$$ $$100=120y;$$ $$y=\frac{100}{120};$$ $$y=\frac{5}{6}.$$ *4. lépés: Ellenőrzés.* Ha $y=\frac{5}{6}$ km/h, akkor $x=5\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{6}$ km/h. Akkor 2 km-t a vízfolyással ellentétes irányban $$\frac{2}{\frac{25}{6}-\frac{5}{6}}=\frac{2}{\frac{20}{6}}=2\cdot\frac{6}{20}=\frac{6}{10}=0{,}6$$ óra alatt tesz meg. 3 km-t a vízfolyással megegyező irányban pedig $$\frac{3}{\frac{25}{6}+\frac{5}{6}}=\frac{3}{\frac{30}{6}}=\frac{3}{5}=0{,}6$$ óra alatt tesz meg, tehát tényleg ugyanannyi idő alatt. Felelet: $\frac{5}{6}$ km/h a vízfolyás sebessége.		
Össze fog-lalás	A mai órán kétismeretlenes egyenletek felállítását és megoldását gyakoroltuk. Emellett megismételtük a másodfokú egyenletek megoldásának menetét, lefektettük a kritikai gondolkodás alapjait azáltal, hogy a kapott eredményeket a feladat feltételeinek megfelelően fogadtuk- vagy utasítottuk el.	1 perc	
Házi feladat	*15. feladat. ([3]) Dani egyik nap délben elindult a nagymamájához, aki negyed órával később szintén elindult vele szemben. Dani egyedül 4 km/h, a nagymama 3 km/h sebességgel gyalogol. Amikor találkoztak, a nagymama visszafordult, Dani pedig elkísérte a házáig, majd hazament. (Együtt a nagymama sebességével haladtak.) Hány kilométerre laknak egymástól, ha Dani otthon megállapította, hogy a séta alkalmával négyszer akkora utat tett meg, mint a nagymamája?* **Megoldás:** *1. lépés: A probléma megértése, a cél meghatározása.* Ebben a feladatban nagyon fontos a szövegértelmezés. Ha a nagymama megtett útját a találkozásig megjelöljük x km-rel, akkor elmondhatjuk, hogy a nagymama $2x$ km-t tett meg összesen.	3 perc	

Mivel Dani azt állítja, hogy ő négyszer akkora utat tett meg, így Dani $8x$ km-t tett meg összesen.

Dani megtette a két ház között az oda-vissza utat, tehát a két ház közötti távolság $4x$ km-rel egyenlő, és ezt kell meghatároznunk.

2. lépés: Tervezzük meg a megoldás lépéseit.

Ha a két ház közötti távolság $4x$ km, akkor a találkozásig Dani $4x - x = 3x$ km-t tett meg 4 km/h sebességgel $\frac{3x}{4}$ óra alatt.

A nagymama x km-t tett meg 3 km/h sebességgel $\frac{x}{3}$ óra alatt, viszont ő 15 perccel ($\frac{1}{4}$ óra) később indult. Így már elég adatunk van egy egyenlet felállításához, ugyanis ha a nagymama idejéhez hozzáadunk 15 percet, akkor a Dani úton töltött idejét kapjuk:

$$\frac{3x}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}.$$

3. lépés: Hajtsuk végre a megoldási stratégiát.

Rendezzük és oldjuk meg az egyenletet!

$$\frac{3x}{4} - \frac{x}{3} - \frac{1}{4} = 0;$$

$$\frac{9x - 4x - 3}{12} = 0;$$

$$\frac{5x - 3}{12} = 0;$$

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva 12-vel:

$$5x - 3 = 0.$$

$$5x = 3.$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

Tehát a két ház közötti távolság: $4x = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ km.

4. lépés: Ellenőrzés.

A nagymama $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ km-t tett meg összesen.

Dani $8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$ km-t, ami valóban a $\frac{6}{5}$ négyszerese.

Felelet: 2,4 km a két ház között a távolság.