ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ШКІЛЬНИХ ОЛІМПІАДАХ ЗАДАЧ НА КОНГРУЕНЦІЇ

КОЛОЖВАРІ ГАБРІЕЛЛА ОТТІВНА

Студентка ІІ-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: магістр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **Тилищак Олександр Андрійович**

д ф.-м. н, доцент, професор кафедри математики та інформатики ЗУІ

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ШКІЛЬНИХ ОЛІМПІАДАХ ЗАДАЧ НА КОНГРУЕНЦІЇ

Ступінь вищої освіти: магістр

Виконала: студентка ІІ-го курсу

Коложварі Габріелла Оттівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Тилищак Олександр Андрійович**

д ф.-м. н, доцент, професор кафедри математики та інформатики ЗУІ

Рецензент: **Тегза А. М.**

к ф.-м. н, доцент, доцент кафедри ТІМС УжНУ

Берегове
2023

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

KONGRUENCIÁKAT TARTALMAZÓ VERSENYFELADATOK MEGOLDÁSÁNAK MÓDSZEREI

Szakdolgozat

Képzési szint: mesterképzés

Készítette: Kolozsvári Gabriella

II. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014„Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Tilistyák Sándor

docens, a II.RFKMF Matematika és Informatika Tanszékének professzora

Recenzens: Tegza A. M.

docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem docense

Beregszász – 2023

Tartalomjegyzék

Вступ

У сучасному світі все більше уваги приділяється розвитку математичної грамотності учнів. Це може бути викликано зростанням конкуренції в роботі та подальшому навчанні, де математичні знання є важливим чинником успіху.

Однією з фундаментальних тем алгебри є конгруенції, які мають широке застосування у різних галузях науки та техніки [16]. У шкільній програмі математики задачі на конгруенції зазвичай зустрічаються на шкільних олімпіадах та інших математичних змаганнях. [4] Ці задачі є складними та цікавими, тому що їх можна розв'язати різними способами. Розв'язання таких задач вимагає від учнів розумових зусиль, творчого мислення та аналітичних навичок.

У даній роботі розглянемо теоретичні основи про конгруенції та їх властивості, будемо аналізувати задачі, а також досліджувати методи розв'язування задач на конгруенції на шкільних олімпіадах. Ми детально розглянемо різні підходи до розв'язування задач, такі як метод підстановки, метод перетворень та інші. Крім того, порівняємо ефективність цих методів та наведемо приклади задач на конгруенції з різних математичних змагань.

Метою даної роботи є дослідження ефективності використання конгруенцій в розв'язанні олімпіадних задач. Об'єкт дослідження - теорія конгруенцій та шкільні олімпіадні задачі з математики. Методи дослідження - теоретичні(аналіз літератури) та емпіричні(анкетування вчителів математики за допомогою анкети в Google Формах).

Актуальність теми може бути зумовлена кількома причинами.

По-перше, олімпіади з математики та інших наук є досить поширеними і відомими в усьому світі. Вони вимагають від учасників не лише знання теорії, але й вміння застосовувати її у розв'язанні конкретних задач.

По-друге, конгруенції мають досить широке застосування в різних галузях. Тому вивчення методів розв'язування задач на конгруенції може бути корисним не лише для учасників олімпіад, а й для фахівців у цих галузях.

По-третє, дослідження методів розв'язування задач на конгруенції може привести до відкриття нових інноваційних підходів до цієї проблеми, що може мати практичне значення в різних галузях.

Практична цінність даної роботи полягає в тому, що вона дозволяє визначити ефективні методи розв'язування олімпіадних задач за допомогою конгруенцій, які можуть бути корисними для учнів і вчителів математики. Результати дослідження можуть допомогти покращити якість підготовки учнів до олімпіад з математики, а також допомогти вчителям вибрати ефективні методи навчання та розв'язування задач з конгруенціями.

Bevezetés

Napjainkban egyre több figyelmet fordítanak a tanulók matematikai ismereteinek fejlesztésére. Ennek oka lehet a munkaerőpiac és a továbbtanulás területén tapasztalható növekvő verseny, ahol a matematikából megszerzett tudás a siker egyik fontos tényezője.

Az algebra egyik alapvető témája a kongruenciák, amelyeket széles körben használnak a tudomány és technológia különböző területein. Az iskolában, a matematikai tananyagban a kongruenciákat tartalmazó feladatok gyakran szerepelnek iskolai és egyéb matematikai versenyeken, olimpiádákon. A feladatok nemcsak érdekesek, de kihívást is jelentenek a diákok számára, mivel többféle megoldásuk ismert. Az ilyen feladatok megoldása nagyfokú szellemi erőfeszítést, kreatív gondolkodást és analitikus készségek használatát igényli a diákoktól.

Ebben a dolgozatban áttekintjük a kongruenciák elméleti alapjait és tulajdonságait, elemezzük a feladatokat, és megvizsgáljuk a kongruencia feladatok megoldásának módszereit az iskolai versenyeken. Emellett összehasonlítjuk e módszerek hatékonyságát, majd példákat hozunk a különböző matematika versenyeken előforduló kongruencia feladatokból.

A dolgozat célja, hogy megvizsgálja a kongruenciák használatának hatékonyságát a versenyfeladatok megoldása során. A vizsgálat tárgya a kongruenciák elmélete és az iskolai matematikai olimpiai feladatok megoldása. A kutatás módszerei - elméleti (irodalomelemzés) és empirikus (kérdőíves felmérés matematikatanárok körében Google Forms kérdőív segítségével).

A téma aktualitásának számos oka van.

Először is a matematikai és egyéb természettudományos versenyek meglehetősen gyakoriak és ismertek világszerte. Ezek a versenyek nemcsak az elmélet ismeretét követelik meg a résztvevőktől, hanem azok alkalmazást is a feladatok megoldásában.

Másodszor, a kongruenciákat széles körben használják különböző területeken. Ezért a kongruencia feladatok megoldására szolgáló módszerek elsajátítása nemcsak az olimpiádák résztvevői, hanem az említett területek szakemberei számára is hasznos lehet.

Harmadszor, a kongruenciával kapcsolatos feladatok megoldására szolgáló módszerek tanulmányozása a probléma új, innovatív megközelítéseinek felfedezéséhez vezethet, amelyek gyakorlati jelentőséggel bírhatnak különböző területeken.

A munka gyakorlati értéke a hasznosíthatóságában rejlik: lehetővé teszi a kongruenciákkal kapcsolatos versenyfeladatok megoldásának hatékony módszereinek meghatározását, amelyek hasznosak lehetnek a diákok és a matematikatanárok számára. A kapott eredmények segítséget nyújthatnak a diákok matematikaversenyekre való felkészülésének minőségének javításában, valamint a tanároknak abban, hogy hatékony módszereket válasszanak a kongruenciákkal kapcsolatos feladatok tanítására és megoldására.

Розділ 1

Основні відомості про конгруенції

1.1 Означення конгруенції

Означення 1.1. Нехай m - деяке натуральне число. Ціле число a називається конгруентним цілому числу b за модулем m, якщо різниця $a - b$ ділиться на m. Якщо число a конгруентне числу b за модулем m, то пишуть:

$$a \equiv b \pmod{m} \qquad \text{або} \qquad a \equiv b(m) \tag{1.1}$$

Співвідношення 1.1 називають конгруенцією. [13]

Приклад 1.1. $54 \equiv 4 \pmod 5$, оскільки $54 - 4 = 50 \vdots 5$
$71 \equiv 3 \pmod{17}$, оскільки $71 - 3 = 68 \vdots 17$
$-12 \equiv 11 \pmod{11}$, оскільки $-12 - 11 = -33 \vdots 11$

Зауваження 1. Означення конгруентності можна задати й іншим способом, який є еквівалентним наведеному вище визначенню: Ціле число a конгруентне числу b за модулем m, якщо і a, і b при діленні на m дають однаковий залишок. [15]

Якщо число a не є конгруентим числу b за модулем m, то пишуть $a \not\equiv b \pmod m$ або $a \not\equiv b(m)$. [13]

Приклад 1.2. $48 \not\equiv 5 \pmod 4$, оскільки $48 - 5 = 43 \not\vdots\ 4$
$27 \not\equiv 2 \pmod 6$, оскільки $27 - 2 = 25 \not\vdots\ 6$
$-21 \not\equiv -7 \pmod 9$, оскільки $-21 - (-7) = -14 \not\vdots\ 9$

Зауваження 2. 1. Подільність чисел також можна виразити за допомогою конгруенції у вигляді

$$a \equiv 0 \pmod{m},$$

що означає, що $m \vdots a$.

2. Модуль зазвичай вважається натуральним числом, більшим за 1, оскільки:

   - від'ємні числа можна пропустити, оскільки конгруентність по модулю m і $-m$ означає те саме;
   - число нуль не беремо до уваги, тому що $a \equiv b \pmod 0$ за властивістю подільності означає, що $a = b$, а для цього недоцільно використовувати окремо позначення конгруентності;
   - число 1 теж недоцільно розглядати, оскільки будь-які два цілі числа будуть конгруентні по модулю 1.

3. Модуль 1 має значення на множині дійсних чисел, через те, що дробові частини двох дійсних чисел однакові. В цьому випадку ми використовуємо позначення.

4. Конгруенції часто можна зустріти й у повсякденному житті. Наприклад, твердження «сьогодні неділя» є конгруентністю $\pmod 7$. Розклад залізничних/автобусних транспортів фактично містять конгруенції з модулями $\pmod{365}$, $\pmod 7$ та $\pmod{24}$.

5. У деяких випадках корисно використовувати конгруенцію, навіть якщо вона не містить цілих чисел. У цьому випадку:

$$x \equiv y \pmod z$$

означає, що $x - y$ є цілим числом, кратним z. Наприклад:

$$\frac{3}{2} \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$$

$$-\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Корисною властивістю конгруенцій є те, що їх часто можна обчислювати так само, як і рівняння, про що свідчить наведена нижче теорема.[14]

Для кожного натурального числа m конгруенція $a \equiv b \pmod m$ задає на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел бінарне відношення конгруентності "число a конгруентне числу b за модулем m". Таким чином, на множині цілих чисел встановлюється відношення конгруентності, що визначається за модулем m. У цьому випадку справедлива наступна теорема.

Теорема 1.1. Для будь-якого натурального числа m відношення конгруентності "a конгруентне числу b за модулем m", задане на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел, є відношенням еквівалентності, тобто виконуються наступні властивості:

а) рефлексивність (кожне число конгруентне самому собі за модулем m)

$$a \equiv a \pmod{m}$$

б) симетричність (якщо a конгруентне b за модулем m, то й b конгруентне a за модулем m)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

в) транзитивність (якщо a конгруентне b за модулем m і b конгруентне c за модулем m, то a конгруентне c за модулем m)

$$a \equiv b \pmod{m} \quad і \quad b \equiv c \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \equiv c \pmod{m}.$$

Доведення. а) Нехай - довільне ціле число. Тоді $a - a = 0 \vdots m$, отже, $a \equiv a \pmod{m}$, значить відношення рефлексивне.

б) Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. Тоді $(a-b) \vdots m$, звідси $(b-a) \vdots m$, тобто $b \equiv a \pmod{m}$, і відношення симетричне.

в) Нехай $a \equiv b \pmod{m}$ і $b \equiv c \pmod{m}$. Тоді $(a-b) \vdots m$ і $(b-c) \vdots m$, звідки $(a-b)+(b-c) = (a-c) \vdots m$, значить, $a \equiv c \pmod{m}$, тобто відношення транзитивне. Отже, відношення конгруентності, задане на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел, є відношенням еквівалентності. [13], [14]

□

Теорема 1.2. Наступні твердження еквівалентні:

1. цілі числа a і b конгруентні за модулем m: $a \equiv b \pmod{m}$;
2. цілі числа a і b пов'язані співвідношенням: $a = b + mt$, де $t \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$;
3. двом цілим числам a і b відповідає одна й та сама остача r при діленні їх на натуральне число m: $a = mq + r, b = mq_1 + r$, де $0 \leqslant r < m$.

Доведення. Нехай справедливе твердження 1): $a \equiv b \pmod{m}$. Тоді за означенням конгруенції $(a-b) \vdots m$, значить, $a - b = mt$, де $t \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $a = b + mt$, і справедливе твердження 2.

Нехай справедливе твердження 2: $a = b + mt, t \in \mathbb{Z}$. Тоді $a - b = mt$, значить, $(a - b) \vdots m$, тобто $a \equiv b \pmod{m}$, і справедливе твердження 1. З цього випливає, що твердження 1 і 2 еквівалентні.

Нехай справедливе твердження 2: $a = b+mt, t \in \mathbb{Z}$. Відповідно до теореми про ділення з остачею, $b = mq_1 + r$, де $0 \leqslant r < m$. Тоді $a = mq_1 + r + mt = m(q_1 + t) + r = mq + r$, де $0 \leqslant r < m$, $q = q_1 + t \in \mathbb{Z}$, і справедливе твердження 3.

Нехай справедливе твердження 3: $a = mq + r, b = mq_1 + r$, де $0 \leqslant r < m$. Віднімемо від першої рівносі другу, і отримаємо: $a - b = m(q - q_1)$. Звідси маємо: $a = b + mt$, де $t = q - q_1 \in \mathbb{Z}$ і справедливе твердження 2. З цього випливає, що твердження 2 і 3 еквівалентні.

Оскільки твердження 1 і 3 еквівалентні твердженню 2, то вони еквівалентні між собою. [13] □

1.2 Властивості когруенцій

Властивість 1. Конгруенції за одним і тим же модулем можна почленно додавати.

Доведення. Нехай $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$. Тоді, за теоремою 2 можна записати наступні рівності:

$$a_1 = b_1 + mt_1, \quad a_2 = b_2 + mt_2, \tag{1.2}$$

де t_1, t_2- цілі числа.

Почленно додаючи їх, можна отримати:

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(t_1 + t_2) = b_1 + b_2 + mt,$$

де $t = t_1 + t_2$ - ціле. Звідси випливає, що $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$. □

Наслідок 1.1. Конгруенції за одним і тим же модулем можна почленно віднімати.

Доведення. Віднімаючи почленно рівності 1.2, можна отримати:

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 + m(t_1 - t_2) = b_1 + b_2 + mt_3,$$

де $t_3 = t_1 - t_2$ - ціле. Отже, $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod{m}$. □

Наслідок 1.2. Доданок, що стоїть у якій-небудь частині конгруенції, можна переносити в іншу частину, змінивши знак на протилежний.

Доведення. Нехай $a + c \equiv b \pmod{m}$. Додавши до попередньої конгруенції $-c \equiv -c \pmod{m}$, що є очевидним можна дістати: $a \equiv b - c \pmod{m}$ □

Наслідок 1.3. До обох частин конгруенції можна додати (або від обох частин конгруенції можна відняти) одне й те саме ціле число.

Доведення. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. При $c \in \mathbb{Z}$ очевидно, що $c \equiv c \pmod{m}$. Додаючи і віднімаючи ці конгруенції, можна отримати: $a + c \equiv b + c \pmod{m}, a - c \equiv b - c \pmod{m}$ □

Наслідок 1.4. До будь-якої із частин конгруенції можна додати (або відняти) довільне ціле число, кратне модулю.

Доведення. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. Оскільки $\pm mk \equiv 0 \pmod{m}$, то $a \pm mk \equiv b \pmod{m}$. □

Властивість 2. Конгруенції за одним і тим же модулем можна почленно перемножувати.

Доведення. Нехай $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$. Тоді, за теоремою 2: $a_1 = b_1 + mt_1, \quad a_2 = b_2 + mt_2$, де t_1, t_2- цілі числа.
Почленно перемножуючи ці рівності, можна отримати:

$$a_1a_2 = b_1b_2 + b_1mt_2 + mt_1b_2 + mt_1mt_2 = b_1b_2 + mt,$$

де $t = b_1t_2 + t_1b_2 + mt_1t_2 \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod{m}$. □

Наслідок 2.1. Обидві частини конгруенції можна помножити на одне й те саме ціле число.

Доведення. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. Оскільки $\forall k \in \mathbb{Z}$ справедливо, що $k \equiv k \pmod{m}$, то за властивістю 2, можна дістати: $ak \equiv bk \pmod{m}$ □

Наслідок 2.2. Обидві частини конгруенції можна піднести до одного й того ж самого натурального степеня, тобто якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ де $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. Якщо декілька разів застозувати властивість 2, то можна отримати: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ де $n \in \mathbb{N}$. □

Властивість 3. Обидві частини конгруенції можна поділити на їхній спільний дільник, взаємно простий з модулем.

Доведення. Нехай $ak \equiv bk \pmod{m}$, де $(k, m) = 1$. Тоді $(a - b)k \vdots m$ при $(k, m) = 1$. За властивістю $(a - b) \vdots m$, тобто $a \equiv b \pmod{m}$. □

Властивість 4. Обидві частини конгруенції і модуль можна помножити на одне й те саме натуральне число.

Доведення. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. Тоді $a = b + mt$, де $t \in \mathbb{Z}$. Звідси $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо: $an = bn + mnt$, тобто $an \equiv bn \pmod{mn}$. □

Властивість 5. Обидві частини конгруенції і модуль можна поділити на будь-який їхній спільний натуральний дільник.

Доведення. Нехай $ak \equiv bk \pmod{mk}$, де $k \in \mathbb{N}$. Тоді $ak = bk+mkt$, а отже, $a = b+mt$, тобто $a \equiv b \pmod{m}$. □

Властивість 6. Якщо конгруенція має місце за кількома модулями, то вона матиме місце і за модулем, що дорівнює їхньсому найменшому спільному кратному.

Доведення. Розглянемо доведення для випадку 2-х модулів. Нехай $a \equiv b \pmod{m_1}$ і $a \equiv b \pmod{m_2}$. Тоді $(a-b) \vdots m_1$ і $(a-b) \vdots m_2$. Тому $(a-b)$ є спільним кратним чисел m_1 і m_2. За означенням найменшого спільного кратного двох цілих чисел $(a-b) \vdots m$, де $m = [m_1, m_2$. Тоді $a \equiv b \pmod{m}$. □

Властивість 7. Якщо конгруенція має місце за модулем m, то вона матиме місце і за будь-яким натуральним дільником d цього модуля.

Доведення. Нехай $a \equiv b \pmod{m}$. Тоді $(a-b) \vdots m$. Якщо $m \vdots d$, то $(a-b) \vdots d$, тобто $a \equiv b \pmod{d}$. □

Властивість 8. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $(a, m) = (b, m)$. [13]

1.3 Лінійні конгруенції з одним невідомим

Означення 1.2. Конгруенція виду

$$ax \equiv b \pmod{m}, \tag{1.3}$$

де $a \not\equiv 0 \pmod{m}$, називається лінійною конгруенцією або конгруенцією першого степеня з одним невідомим.

Означення 1.3. Розв'язком конгруенції 1.3 називається клас лишків за модулем m, кожне число якого задовольняє дану конгруенцію.
Якщо число x_0 задовольняє конгруенцію 1.3 і $0 \leqslant x_0 < m$, то розв'язок записують у вигляді: $x \equiv x_0 \pmod m$ або $x = K_{x_0}^{(m)}$.

Оскільки за модулем m існує всього m класів лишків, то конгруенція 1.3 може мати не більше, ніж m розв'язків.

Розв'язати конгруенцію 1.3 означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Означення 1.4. Конгруенції з одним невідомим називають рівносильними або еквівалентними, якщо множини їхніх розв'язків співпадають.
Операції, які непорушують множину розв'язків конгруенцій з одним невідомим, називають їхніми елементарними перетвореннями. Елементарні перетворення конгруенцій ґрунтуються на властивостях конгруенцій. Елементарними перетвореннями конгруенцій із одним невідомим є наступні дії:

1) додавання до обох частин конгруенції довільного многочлена $q(x)$ з цілими коефіцієнтами;

2) додавання до однієї з частин конгруенції многочлена з коефіцієнтами, кратними модулю m;

3) множення і ділення обох частин конгруенції на число, взаємно просте з модулем;

4) множення і ділення обох частин конгруенції і модуля на одне й те саме додатне ціле число. [13]

Теорема 1.3. (про існування та число розв'язків лінійної конгруенції). Нехай дано лінійну конгренцію 1.3. Тоді:

1) якщо $(a, m) = 1$, то конгруенція 1.3 має єдиний розв'язок;

2) якщо $(a, m) = d > 1$ і число b не ділиться на d, то конгруенція 1.3 не має розв'язків;

3) якщо $(a, m) = d > 1$ і число b ділиться на d, то конгруенція 1.3 має d розв'язків.

Доведення. 1) Нехай $(a, m) = 1$, і нехай x послідовно набуває значень

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \tag{1.4}$$

де множина чисел 1.4 є повною системою лишків за модулем m. За властивістю, сукупність чисел

$$ax_1 - b, ax_2 - b, \ldots, ax_m - b \tag{1.5}$$

також є повною системою лишків за модулем m. Тоді серед чисел системи 1.5 є, причому лише одне, таке число $ax_k - b$, що $ax_k - b \equiv 0 \pmod{m}$. Звідси $ax_k \equiv b \pmod{m}$. Це означає, що конгруенція 1.3 має розв'язок, причому єдиний, і ним є клас лишків $K_{x_k}^{(m)}$

2) Нехай $(a, m) = d > 1$, і нехай число b не ділиться на d. Припустимо, що існує таке ціле число x_0, що $ax_0 \equiv b \pmod{m}$. Тоді $b = ax_0 = mt$, де $t \in \mathbb{Z}$. Оскільки $a \,\vdots\, d$ і $m \,\vdots\, d$, то $ax_0 \,\vdots\, d$ і $mt \,\vdots\, d$, значить, $b \,\vdots\, d$, що суперечить умові. З цього випливає, що конгруенція 1.3 розв'язків не має.

3) Нехай $(a, m) = d > 1$ і $b \,\vdots\, d$. Тоді $a = a_1 d, m = m_1 d, b = b_1 d$, де $a_1, m_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Обидві частини і модуль конгруенції 1.3 поділимо на число d і отримаємо еквівалентну їй конгруенцію

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1} \tag{1.6}$$

Оскільки $(a_1, m_1) = 1$, то аналогічно до 1) випадку, конгруенція 1.6 має єдиний розв'язок. Нехай цим розв'язком буде клас лишків $K_{x_0}^{m_1}$, де $0 \leqslant x_0 < m_1$. За властивістю класів лишків, цей клас розпадається на d класів лишків за модулем $m = m_1 d$:

$$K_{x_0}^{(m_1)} = K_{x_0}^{(m)} \cup K_{x_0+m_1}^{(m)} \cup \ldots \cup K_{x_0+(d-1)m_1}^{(m)}, \tag{1.7}$$

які і є d розв'язками конгруенції 1.3. [13], [14]

□

1.3.1 Способи розв'язування лінійних конгруенцій

I. Спосіб спроб. Використовується коли модуль невелике число. В даному випадку в конгруенцію підставляємо числа повної системи лишків.

Приклад 1.3. Способом спроб розв'язати конгруенцію

$$3x \equiv 1 \pmod{5} \tag{1.8}$$

Розв'язання. Маємо $a = 3, m = 5, b = 1$. Оскільки $(3, 5) = 1$, то конгруенція 1.8 має тільки один розв'язок. Запишемо повну систему абсолютно найменших лишків за модулем $m = 5$:

$$0, 1, 2, -1, -2. \tag{1.9}$$

Підставляючи лишки системи 1.9 в конгруенцію 1.8, маємо:

$$3 \cdot 0 = 0 \not\equiv 1 \pmod 5,$$

$$3 \cdot 1 = 3 \not\equiv 1 \pmod 5,$$

$$3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 \pmod 5.$$

Отже, $K_2^{(5)}$ є розв'язком конгруенції 1.8. Можна записати відповідь іншим способом: $x \equiv 2 \pmod 5$. Інші числа лишків нема потреби підставляти в конгруенцію, оскільки вона має лише один розв'язок. [13]

II. Спосіб рівносильних перетворень. Властивості конгруенцій дозволяють нам робити елементарні перетворення, завдяки яких задана конгруенція зводиться до рівносильної їй конгруенції з коефіцієнтом при x, який рівний 1.

Приклад 1.4. Способом елементарних перетворень розв'язати конгруенцію:

$$27x \equiv 8 \pmod{43}. \tag{1.10}$$

Розв'язання. Маємо $a = 27, m = 43, b = 8$. Оскільки $(27, 43) = 1$, то конгруенція 1.10 має тільки один розв'язок. Додамо до лівої частини такий вираз, який кратний модулю, в цьому випадку $-43x$. Отримаємо рівносильну конгруенції 1.10 конгруенцію:

$$-16x \equiv 8 \pmod{43}.$$

Далі, як бачимо, конгруенцію можемо поділити на число 8:

$$-2x \equiv 1 \pmod{43}.$$

Додаємо до правої частини даної конгруенції число, рівне модулю, і отримуємо: $-2x \equiv 44 \pmod{43}$.

Обидві частини отриманої конгруенції поділимо на число -2. Тоді:

$$x \equiv -22 \pmod{43},$$

що і є розв'язком конгруенції. [13]

III. Спосіб Ойлера. Даний спосіб ґрунтується на теоремі Ойлера. Нехай потрібно розв'язати конгруенцію

$$ax \equiv b \pmod{m}, \quad \text{де} \quad (a, m) = 1. \tag{1.11}$$

Через те, що $(a, m) = 1$, то дана конгруенція має єдиний розв'язок. Помножимо обидві частини конгруенції 1.11 на число $a^{\varphi(m)-1}$ взаємно просте з модулем, і отримаємо рівносильну конгруенцію

$$a^{\varphi(m)}x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m}.$$

За теоремою Ойлера $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Тому з останньої конгруенції отримуємо:

$$x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m}. \tag{1.12}$$

Цей клас лишків і буде єдиним розв'язком конгруенції 1.11.

Приклад 1.5. Способом Ойлера розв'язати конгруенцію

$$28x \equiv 33 \pmod{43}.$$

Розв'язання. Маємо $a = 28, m = 43, b = 33$. Оскільки $(28, 43) = 1$, то задана конгруенція має тільки один розв'язок. Знайдемо його за формулою 1.12, і отримуємо:

$$x \equiv 33{\cdot}28^{\varphi(43)-1} \pmod{43} \equiv -10{\cdot}(-15)^{42-1} \pmod{43} \equiv 10{\cdot}15{\cdot}(15^2)^{20} \pmod{43} \equiv$$
$$\equiv 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^20 \pmod{43} \equiv 50 \cdot 3 \cdot (10^2)^{10} \pmod{43} \equiv 7 \cdot 3 \cdot 14^{10} \pmod{43} \equiv$$
$$\equiv 21 \cdot (14^2)^5 \pmod{43} \equiv 21 \cdot 24^5 \pmod{43} \equiv 21 \cdot 24 \cdot (24^2)^2 \pmod{43} \equiv$$
$$\equiv 42 \cdot 12 \cdot 17^2 \pmod{43} \equiv -12 \cdot 17 \cdot 17 \pmod{43} \equiv -4 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 17 \pmod{43} \equiv$$
$$\equiv -68 \cdot 51 \pmod{43} \equiv 18 \cdot 8 \pmod{43} \equiv 15 \pmod{43}.$$

Тобто розв'язком даної конгруенції є $x \equiv 15 \pmod{43}$.

Недоліком методу Ойлера є те, що при великому значенні $\varphi(m)$ знаходження найменшого невід'ємного лишку того класу чисел за модулем m, до якого належить число $ba^{\varphi(m)-1}$, досить довге. [13]

IV. Застосування класів лишків. Розглянемо конгруенцію $ax \equiv b \pmod{m}$, де $(a, m) = 1$. Розв'яжемо дану конгруенцію за допомогою класів лишків. Для цього запишемо її у вигляді

$$K_a^{(m)} \cdot K_x^{(m)} = K_b^{(m)}$$

Оскільки $(a, m) = 1$, то для класу $K_a^{(m)}$ існує обернений клас $\left(K_a^{(m)}\right)^{-1}$. Можемо знайти клас

$$K_x^{(m)} = \left(K_a^{(m)}\right)^{-1} \cdot K_b^{(m)}, \tag{1.13}$$

що і є розв'язком конгруенції.

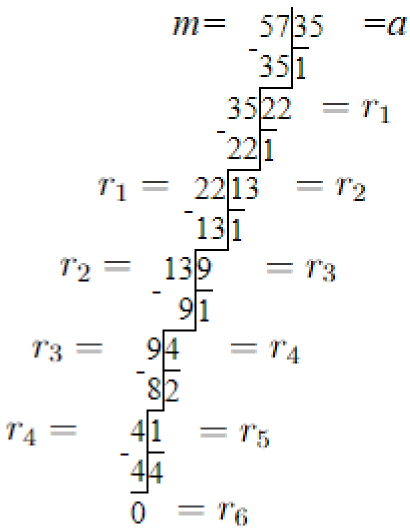
Приклад 1.6. Застосовуючи класи лишків, розв'язати конгруенцію:

$$35x \equiv 3 \pmod{57} \tag{1.14}$$

Розв'язання. Маємо $a = 35, m = 57, b = 3$. Оскільки $(35, 57) = 1$, то задана конгруенція має тільки один розв'язок. Використаємо формулу 1.13 і отримаємо:

$$K_x^{(57)} = \left(K_{35}^{(57)}\right)^{-1} \cdot K_3^{(57)}.$$

Знаходимо $\left(K_{35}^{(57)}\right)^{-1}$ - клас лишків за модулем 57, обернений до класу $K_{35}^{(57)}$.
За алгоритмом Евкліда знайдемо найбільший спільний дільник чисел $a = 35$ і $m = 57$. Маємо:



Відповідно можемо записати наступні рівності:

$$\begin{aligned} m &= a + r_1 & \qquad r_1 &= m - a \\ a &= r_1 + r_2 & r_2 &= a - r_1 \\ r_1 &= r_2 + r_3 & r_3 &= r_1 - r_2 \\ r_2 &= r_3 + r_4 & r_4 &= r_2 - r_3 \\ r_3 &= 2r_4 + 1 & 1 &= r_3 - 2r_4 \end{aligned}$$

Звідси:

$$1 = r_3 - 2r_4 = r_3 - 2(r_2 - r_3) = 3r_3 - 2r_2 = 3(r_1 - r_2) - 2r_2 = 3r_1 - 5r_2 =$$
$$= 3r_1 - 5(a - r_1) = 8r_1 - 5a = 8m - 8a - 5a = 8m - 13a.$$

Тоді $8m - 13a \equiv 1 \pmod{m}$, значить, $-13a \equiv 1 \pmod{57}$, тобто $44a \equiv 1 \pmod{57}$. Це означає, що $K_{44a}^{(57)} = K_1^{(57)}$. Звідси отримуємо, що $K_{44}^{(57)} \cdot K_a^{(57)} = K_1^{(57)}$, де $a = 35$, значить,

$$\left(K_{35}^{(57)}\right)^{-1} = K_{44}^{(57)}.$$

Таким чином,

$$K_x^{(57)} = K_{44}^{(57)} \cdot K_3^{(57)} = K_{-13}^{(57)} \cdot K_3^{(57)} = K_{-39}^{(57)} = K_{18}^{(57)}.$$

Отже, клас $K_{18}^{(57)}$ є розв'язком конгруенції 1.14. [13]

Розділ 2

Олімпіадні задачі на конгруенції

Задачі на конгруенції можна зустріти в різних математичних завданнях, включаючи шкільні олімпіади, конкурси та змагання з математики, тестування на вступ до університету. Задачі на конгруенції є популярними завданнями на математичних олімпіадах, особливо в країнах Східної Європи та Азії, де математика має високу культурну цінність. [5], [8]

Такі задачі можуть зустрітися у різних областях математики, таких як арифметика, алгебра, теорія чисел, комбінаторика. Також цікавий факт, що вони використовуються в криптографії, наприклад, для захисту від перехоплення повідомлень та збереження конфіденційності даних.[16]

2.1 Конгруенції на математичних олімпіадах в Україні

Україна має довгу історію математичних олімпіад і змагань з математики. Як зазначено на сайті Міністерства освіти і науки України [2] "школярі незалежної України у складі окремих команд, починаючи з 1993 року, беруть участь у Міжнародних учнівських олімпіадах з математики, фізики, хімії, біології, інформатики, екології, географії, астрономії."

Задачі на конгруенції можна зустріти на різних рівнях змагань, включаючи наступні:

- Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики для учнів 5-11 класів, яка проводиться Міністерством освіти і науки України. "Всеукраїнські учнівські олімпіади з навчальних предметів - це інтелектуальні змагання на освітньому просторі України, до яких щорічно залучається близько 3 млн. школярів."

Змагання проходять у чотири етапи:

– I (перший) етап - шкільні (міжшкільні);

– II (другий) етап - районні (міські);

– III (третій) етап - обласні (в м. Києві - міський);

– IV (четвертий) етап – всеукраїнський рівень.

На цій олімпіаді зазвичай можна зустріти завдання на конгруенції, які вимагають від учнів розуміння основних понять теорії чисел та здатність застосовувати їх для розв'язання задач. Відтак, в лютому 2023 року відбувся III (міський) етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. З 03 квітня по 07 квітня 2023 року відбувся IV (фінальний) етап в м. Ужгород. Серед завдань часто зустрічаються задачі на конгруенції. [3], [5], [6]

Документом, що визначає завдання, структуру, технологію проведення Всеукраїнських олімпіад є Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науководослідницьких робіт та конкурси фахової майстерності, затверджене наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 року № 1099, зареєстроване в Міністерстві юстиції України 17 листопада 2011 року за № 1318/20056. [1]

- Міжнародна математична олімпіада "Кенгуру", яка є однією з найбільших олімпіад у світі і проводиться в більш ніж 70 країнах. Задачі на конгруенції є складовою частиною олімпіади "Кенгуру" і можуть бути запропоновані на різних рівнях складності. [9]

- Олімпіади з математики, які проводяться в університетах України для вступу на математичні факультети. На таких олімпіадах також можуть зустрітися задачі на конгруенції, які вимагають від учасників розв'язування лінійних та квадратичних конгруенцій та застосувань різних теорем.

Загалом, задачі на конгруенції є складовою частиною багатьох математичних олімпіад в Україні та їх можна знайти в різних джерелах, таких як підручники з теорії чисел, збірники задач для олімпіад та математичних конкурсів, математичні форуми та веб-сайти. [7], [11], [12]

Задачі на конгруенції допомагають учням поглиблювати свої знання з теорії чисел та розвивати навички самостійної роботи з математичними завданнями. Вони також сприяють розвитку логічного мислення та абстрактного мислення, що дуже корисно для подальшого навчання в будь-якій науковій галузі. Отже, вивчення задач на конгруенції може бути дуже корисним для учнів та студентів, які цікавляться математикою та хочуть розвивати свої здібності в цій галузі.

2.2 Приклади олімпіадних задач на конгруенції

В даній частині розглянемо деякі типи задач, які зустрічаються на олімпіадах з математики, або в підготовчих матеріалах для олімпіад.
Наступний приклад взятий з III-го етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2022/2023 н.р. (7 клас):

Приклад 2.1. Доведіть, що не існує натуральних чисел n та k, які задовольняють рівності:

$$n^n + (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} = 2023^k \tag{2.1}$$

Розв'язання. Спочатку звернімо увагу на те, що числа n, $(n+1)$ та $(n+2)$ є послідовними натуральними числами. Таким чином, ми можемо скористатися зв'язком між послідовними числами та їхніми залишками при діленні на 3:

- $n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (n+1) \equiv 1 \pmod 3, (n+2) \equiv 2 \pmod 3$
- $n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow (n+1) \equiv 2 \pmod 3, (n+2) \equiv 0 \pmod 3$
- $n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (n+1) \equiv 0 \pmod 3, (n+2) \equiv 1 \pmod 3$

Якщо розглянемо кожне окремо, то можна сказати:
Якщо x ділиться на 3, то x^x теж ділиться, якщо x дає остачу 1, то x^x також дає остачу 1, а якщо x дає остачу 2, то x^x дає остачу 1 чи 2. Отже, $n^n + (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2}$ дає остачу 2 чи 0 за модулем 3. Одержана суперечність завершує доведення. [5]

Одним з ключових завдань на конгруенцій є наступна:

Приклад 2.2. Знайти остачу при діленні числа n^4 на 5, де $n \in \mathbb{Z}$.

Розв'язання. При діленні на 5 можемо розглянути наступні випадки:

1) $n \equiv 0 \pmod 5$

2) $n \equiv 1 \pmod 5$

3) $n \equiv 2 \pmod 5$

4) $n \equiv 3 \pmod 5$

5) $n \equiv 4 \pmod 5$

За властивістю конгруенцій піднесемо кожну конгруенцію до четвертого степеня, і отримаємо:

1) $n^4 \equiv 0^4 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 5$

2) $n^4 \equiv 1^4 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$

3) $n^4 \equiv 2^4 \pmod 5 \equiv 16 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$

4) $n^4 \equiv 3^4 \pmod 5 \equiv 81 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$

5) $n^4 \equiv 4^4 \pmod 5 \equiv 256 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$

Отже, при діленні на 5 можливі остачі 0 або 1. [10]

Приклад 2.3. Довести, що для для всіх нарутальних чисел n вираз $n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 6.

Розв'язання. Для того, щоб довести, що вираз ділиться націло на 6, доведемо, що вираз ділиться на 2 і на 3 (за ознаками подільності). Перевіримо чи ділиться вираз на 2. Для цього розглянемо два випадки:

1) Якщо $n \equiv 0 \pmod 2$, то $n^3 - 3n^2 + 2n = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 2$, тобто вираз $\vdots 2$.

2) Якщо $n \equiv 1 \pmod 2$, то $n^3 - 3n^2 + 2n = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 2$, тобто вираз $\vdots 2$.

Перевіримо чи ділиться вираз на 3. Для цього розглянемо три випадки:

1) Якщо $n \equiv 0 \pmod 3$, то $n^3 - 3n^2 + 2n = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 3$, тобто вираз $\vdots 3$.

2) Якщо $n \equiv 1 \pmod 3$, то $n^3 - 3n^2 + 2n = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 3$, тобто вираз $\vdots 3$.

3) Якщо $n \equiv 2 \pmod 3$, то $n^3 - 3n^2 + 2n = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 3$, тобто вираз $\vdots 3$.

Отже, вираз $n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 2 і на 3, тому воно ділиться націло і на 6. [10]

Приклад 2.4. Розв'язати лінійну конгруенцію

$$25x \equiv 45 \pmod{55}. \tag{2.2}$$

Розв'язання. Маємо $a = 25, m = 55, b = 45$. Оскільки $(25, 55) = 5 > 1, 45 \vdots 5$, то конгруенція 2.2 має п'ять розв'язків. Розв'яжемо її за допомогою елементарних перетворень використовуючи властивості конгруенцій. Оскільки обидві частини конгруенції і модуль можна поділити на будь-який їхній спільний натуральний дільник, який в даному випадку число 5, отримаємо:

$$5x \equiv 9 \pmod{11}, \tag{2.3}$$

де $a_1 = 5, m_1 = 11, b_1 = 9$. Оскільки $(5, 11) = 1$, то конгруенція має тільки один розв'язок. Додамо до числа b_1 модуль конгруенції:

$$5x \equiv 20 \pmod{11}.$$

Тепер можемо поділити на НСД(5,20)=5:

$$x \equiv 4 \pmod{11},$$

що є розв'язком конгруенції 2.3.
Отже, розв'язком початкової конгруенції 2.2 буде:

$$x \equiv 4 + 11k \pmod{55}, \quad k = \overline{0, 5}$$

Тобто:

$$\begin{aligned}
k &= 0 & x &\equiv 4 \pmod{55} \\
k &= 1 & x &\equiv 15 \pmod{55} \\
k &= 2 & x &\equiv 26 \pmod{55} \\
k &= 3 & x &\equiv 37 \pmod{55} \\
k &= 4 & x &\equiv 48 \pmod{55}
\end{aligned}$$

Приклад 2.5. Як за допомогою двох порожніх відер на 15 і 17 л за найменше число переливань набрати в бочку 20 л води? Кількість води необмежена.

Розв'язання.

I. спосіб: Розв'язання цієї задачі можна подати у вигляді схеми, яку можна зобразити таблицею, де вказується кожен крок процесу переливань. За алгоритм візьмемо кроки де будемо заливати 15 літрів води і відливати 17 літрів.

Кроки	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
15 л	15	0	15	0	0	15	0	0	15	0	0	15	0	0	15
17 л	0	0	0	0	17	0	0	17	0	0	17	0	0	17	0
бочка	0	15	15	30	13	13	28	11	11	26	9	9	24	7	7

Продовжуємо переливання:

Кроки	**16**	**17**	**18**	**19**
15 л	0	0	15	0
17 л	0	17	0	0
бочка	22	5	5	20

Нам потрібно зробити переливання у 19 кроків. Даний розв'язок є досить довгим, тому розглянемо інший спосіб розв'язання за допомогою конгруенцій.

II. спосіб: В нас виникає питання скільки разів потрібно залити 15 чи 17 літрів у бочку. Нехай 15 л залили x разів, а 17 л y разів. Тоді можемо скласти рівняння $15x+17y=20$. Якщо знехтувати 15, то отримаємо конгруенцію $2y \equiv 5 \pmod{15}$. Для розв'язання цієї конгруенції використаємо метод спроб. Оскільки $y \,\vdots\, 5$, то можемо підібрати $y=0, y=5$ або $y=10$, або протилежні до них числа, і будемо перевіряти відливання води. Підставивши у рівняння, легко можна зрозуміти, що розв'язком може бути $y=10$ або $y=-5$. Оскільки в умові задачі сказано, що потрібно зробити щойнайменшу кількість переливань, то візьмемо $y=-5$, і в цьому випадку будемо відливати 17 л. Отримаємо рівняння:

$$15x + 17 \cdot (-5) = 20$$

$$15x - 85 = 20$$

$$15x = 105$$

$$x = 7$$

Перевіряємо значення:

$$15 \cdot 7 + 17 \cdot (-5) = 20.$$

Тобто, нам потрібно долити 7 разів 15 літрів води і відлити 5 разів 17 літрів. Отримали той самий розв'язок, як в I. способі, але даний розв'язок є більш швидшим.

Приклад 2.6. Дано аркуш паперу, який розрізали на 4 частини. Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 4 частини і так повторили декілька разів. Чи можливо, щоб кількість кусків, отриманих після таких розрізів, дорівнювала 2021?

Розв'язання. Внаслідок розрізання одного куска на чотири частини кількість кусків збільшується на 3, тобто виходить $1+3$ куски. Отже, якщо ми виконаємо n розрізань, то в результаті отримаємо $1+3n$ кусочків. Тому потрібно розв'язати рівняння $1+3n = 2021$ в цілих числах. Маємо $1+3n \equiv 1 \pmod 3$. Оскільки $2021 \equiv 2 \pmod 3$, то кількість отриманих кусків не може дорівнювати 2021.

Розділ 3

Результати дослідження

Олімпіади є важливими змаганнями серед учнів, спрямованими на розвиток їхніх навичок і знань у певній предметній області. Організація олімпіад, турнірів та конкурсів є невід'ємною частиною для оцінки інтелектуального потенціалу обдарованої молоді країни і зміцнення її місця серед інших націй, сприяючи майбутньому лідерству при належній організації. В сучасному освітньому середовищі школи вчителі мають важливу роль у виявленні, навчанні та розвитку обдарованих і талановитих дітей, сприяючи формуванню їх творчої особистості на всіх етапах розвитку.

Підготовка учнів до участі в олімпіадах вимагає високого рівня професійної підготовки та готовності працювати з дітьми майже щодня, як під час уроків, так і поза ними, без очікування вдячності. Тому вчителям потрібно докласти максимум зусиль на підготовку учнів до олімпіад. Їм необхідно ознайомити учнів з форматом олімпіад, показати приклади завдань, які можуть зустрітися на змаганнях. Важливо встановити чіткі критерії оцінювання робіт та провести підготовчі заняття, на яких учні зможуть практикуватися в розв'язуванні складних математичних задач. Важливо підібрати відповідні завдання, які відповідають рівню складності та вимогам олімпіади. Можна скористатися різноманітними джерелами, такими як попередні олімпіадні завдання, підручники, збірники задач.

Щоб мотивувати учнів до участі в математичних олімпіадах, потрібно створити стимулюючу атмосферу в класі, де математика сприймається як захоплюючий та цікавий предмет. Для цього можна використовувати ігрові елементи, конкурси, нагороди та похвали. Важливо показати учням, що їхні зусилля будуть винагороджені і математичні олімпіади є чудовою можливістю проявити свої здібності та досягти успіху. Слід зазначити, що найкращі учні отримують стипендії за свої досягнення на предметних олімпіадах.

Оскільки вчителі відіграють важливу роль у підготовці учнів до олімпіад, ми вирішили дізнатись їхні думки і погляди щодо олімпіад з математики та завдань на конгруенції. Для цього була підготовлена онлайн анкета на платформі Google Форми. Після, анкета надіслана вчителям математики, які вчать в школах на території Закарпаття. Анкета складається з 13 питань різної форми: запитання з одним варіантом відповіді, запитання з можливим зазначенням більше відповідей, додаткове запитання на розгорнуту відповідь. Питання відносилися як і про досвід вчителів про олімпіади у загальному, так і щодо завдань на конгруенції.

3.1 Думки вчителів щодо олімпіадних задач на конгруеції

Перші два запитання стосуються досвіду роботи вчителів:

1. Який у Вас досвід роботи з викладання математики?
2. Чи є у Вас досвід в організації або підготовці учнів до олімпіад з математики?

Рис. 3.1: Досвід вчителів

Більшість опитуваних мають досвід роботи понад 10 років, що становить більше половини всіх респондентів, 51,3%, що бачимо на діаграмі 3.1. Це свідчить про те, що в основному в педагогічному штаті переважають досвідчені, старші вчителі. Це дозволяє стверджувати, що переважна більшість вчителів, які відповіли на друге запитання, регулярно беруть участь у тих чи інших математичних олімпіадах. До речі, варто зазначити, що лише 10,3% респондентів ще не брали участі, але взяли б участь, якби мали таку можливість.

3. Як Ви допомагаєте учням підготуватися до олімпіадних задач?

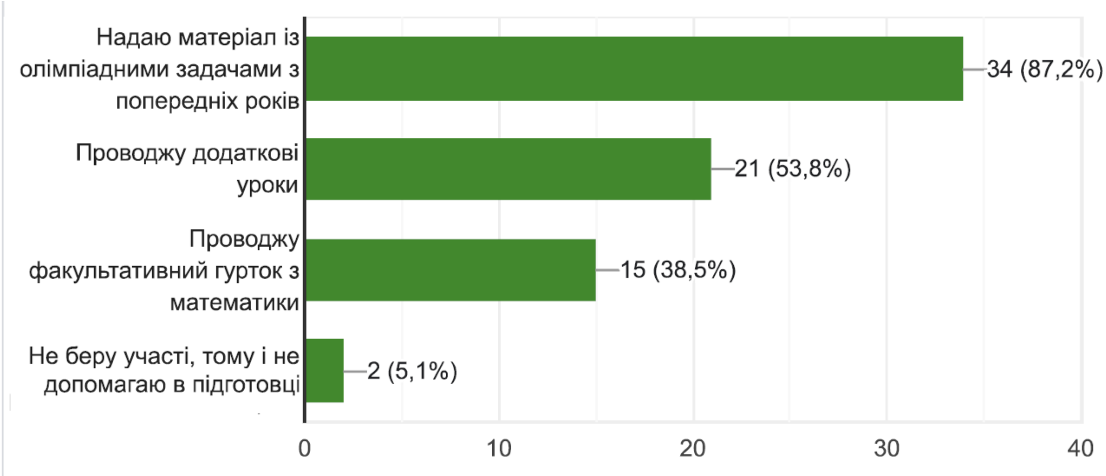


Рис. 3.2: Форми підтримки учнів на підготовчих етапах до олімпіад

Розподіл відповідей на третє питання показує, що 87,2% респондентів відповіли, що вони надають учням комплекс завдань з попередніх олімпіад. Це означає, що вони роблять сильний акцент на практиці та підготовці до олімпіадних завдань попередніх років. 53,8% вчителів зазначили, що проводять додаткові заняття або працюють з учнями як репетитори. Це свідчить про те, що більше половини вчителів проводять індивідуальні заняття в школі або додатково факультативні заняття, відповідно до індивідуальних потреб учнів, які в даному випадку спрямовані на розуміння та ефективне розв'язання олімпіадних задач. 38,5% анкетованих надають учням додаткові заняття з математики у формі профільних гуртків. Це означає, що деякі вчителі проводять спеціальні заняття, як правило, в позаурочний час, щоб забезпечити додаткову практику та спеціальну підготовку для зацікавлених учнів. 5,1% респондентів відповіли, що не беруть участі в репетиторстві і тому не надають жодної допомоги учням. (рис. 3.2)

4. Коли розпочинаєте підготовку до олімпіад з математики?

Відповіді на четверте запитання показують, що вчителі починають підготовку в різний період часу. Найбільша частка респондентів повідомила, що вони починають підготовку за місяць до олімпіади - 48,7%. Трохи менше, 33,3% вважають, що підготовку потрібно починати одночасно з початком навчального року, імовірно, це представники старшого покоління, які добре знайомі з типами та порядком проведення Олімпіад протягом багатьох років. 12,8% повідомляють,

Рис. 3.3: Коли розпочати підготовку до олімпіад?

що починають лише за два тижні до олімпіади, а 5,1% стверджують, що не проводять жодних занять з підготовки до олімпіади. Не дивно, що це пов'язано з останньою відповіддю на попереднє запитання: ті, хто взагалі не готує, взагалі не беруть участі в олімпіадах. (рис. 3.3)

5. Як Ви проводите уроки підготовки до олімпіадних задач?

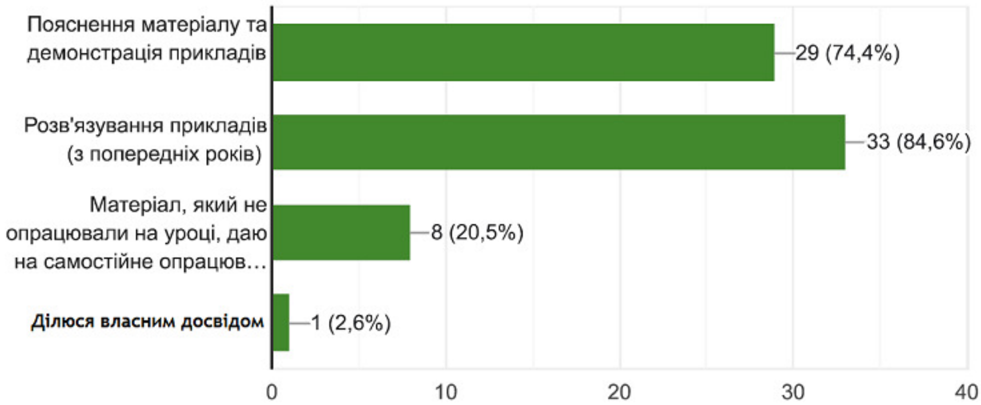


Рис. 3.4: Методи підготовки

Дані показали, що респонденти могли обрати більше однієї відповіді на питання 5, а це означає, що на заняттях з підготовки використовують більше ніж один метод. Розглянемо варіанти відповідей більш детально:

Згідно з отриманими результатами, найпопулярнішою відповіддю, яку обрали респонденти, було розв'язування прикладів з попередніх років (84,6%). Також популярною відповіддю була пояснення матеріалу та демонстрація прикладів (74,4%), що свідчить про те, що викладачі часто допомагають учням зрозуміти завдання та стратегії їх розв'язування. Рідше обирали метод рекомендації додаткового матеріалу для самостійного опрацювання (20,5%). Коли ми говоримо про математику, це не так вже й дивно, оскільки якщо учні не розуміють певної теми, марно пропонувати їм працювати над нею самостійно, їм потрібні пояснення, приклади й доведення. Можливість поділитися з учнями власним досвідом (2,6%) має відносно низький відсоток відповідей, що свідчить про те, що менше вчителів використовують цей метод на своїх підготовчих заняттях. (рис. 3.4)

6. Як Ви оцінюєте рівень учнів у розв'язуванні олімпіадних задач?

Рис. 3.5: Рівень знань

Шосте питання показує, що більшість учасників опитування (69,2%) вважають, що учні демонструють середній рівень успішності на олімпіадах. Це означає, що після підготовки результати є прийнятними, але не досягають надзвичайно високого рівня. У зв'язку з цим виникає питання про цілі, які ставлять перед собою педагоги та учні під час підготовки. Відносно високою є частка відповідей, які вказують на низький рівень підготовки (17,9%), що може свідчити про те, що деякі опитані вважають, що учням є куди вдосконалюватися у розв'язанні олімпіадних завдань. Ті респонденти, які оцінили успішність учнів як високу (10,3%), ймовірно, мають справу з учнями, які досягли успіху на олімпіадах, або мають позитивний досвід участі в олімпіадах. (рис. 3.5)

7. Які методи використовуєте для розв'язання олімпіадних задач з математики?

Відповіді на сьоме запитання також не стали несподіванкою. Розв'язанню різних типів завдань надали перевагу 74,4% респондентів, а от детальний аналіз конкретної теми обрали менше половини опитаних - 46,2%. Про роботу в групах та самостійну роботу зазначили лише 30,8%, що пов'язано з тим, що переважно

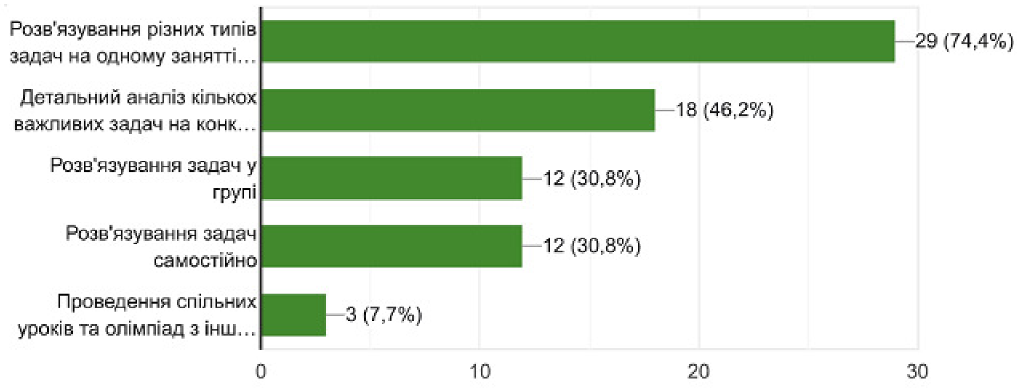


Рис. 3.6: Методи. які використовують для розв'язування олімпіадних задач

підготовка здійснюється дедуктивним шляхом. Цікаво, що 7,7% вказали на організацію внутрішньошкільних або навіть міжшкільних олімпіад. Така зміна в підході є обнадійливою і може надати чудову можливість учням, які раніше не брали участі в змаганнях, "потренуватися"перед тим, як це зроблять. (рис. 3.6)

8. Як Ви вважаєте, яку роль відіграють конгруенції у підготовці до олімпіад з математики?

Рис. 3.7: Роль конгруенцій серед олімпіадних задач

Опитування показало, що більшість вважають, що конгруенції відіграють важливу роль у підготовці до олімпіад з математики. 35,9% опитаних вважають особливо важливим вивчення конгруенцій та більш детальне ознайомлення з ними під час підготовки до олімпіад. Водночас більшість респондентів, 51,3%, вважають, що хоча конгруенції не є найважливішим елементом підготовки, варто знати загальні поняття та вміти розв'язувати базові задачі на конгруенції. Лише 10,3% вважають, що вони не настільки важливі, щоб включати їх у завдання. Додатково один з опитаних вчителів задачі на подільність розглядає без введення поняття конгруентності. І вважає, що, як правило, даються учням легше за інші типи олімпіадних задач. З відповідей зрозуміло, що, хоча вчителі і не вважають їх найважливішими, повної згоди відносно цього питання немає. (рис. 3.7)

9. Як учні зазвичай справляються з розв'язуванням задач на конгруенції?

Рис. 3.8: Успішність учнів на основі досвіду вчителів

Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок, що вчителі загалом позитивно оцінюють здатність своїх учнів справлятися із завданнями на конгруентність. Частина респондентів (38,5%) вважають, що учні добре справляються з цим завданням, тоді як більша частина (48,7%) вважає, що вони здатні виконати ці завдання в більшості випадків. Важливо, однак, зазначити, що менша група (7,7%) вважає, що учні мають труднощі із завданнями на конгруентність, і ще менше (5,1%) вважає, що учні мають труднощі з розумінням цих завдань. Завдяки диференційованим методам навчання та індивідуальній підтримці учні можуть успішно впоратися із завданнями на конгруентність. Подальша практика та посилення базових компетентностей може допомогти учням розвиватися в цій області, якщо в олімпіадах все частіше використовувати задачі на конгруентність. (рис. 3.8)

10. Які математичні поняття пов'язані з конгруенціями ви навчаєте учнів на підготовчих заняттях до олімпіад?

Серед математичних понять, пов'язаних з конгруенціями, респонденти найчастіше згадували такі:

- Ділення з остачею (87.2%)

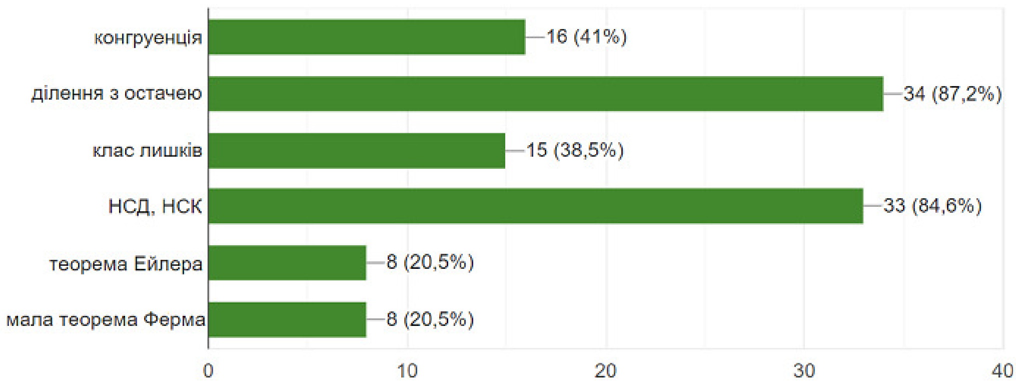


Рис. 3.9: Поняття, пов'язані з конгруенціями

- НСД, НСК (84,6%)
- Конгруенція(41%)
- Клас лишків (38.5%)
- Теорема Ейлера (20.5%)
- Мала теорема Ферма (20.5%) (рис. 3.9)

Розподіл відповідей не є дивним, оскільки поняття ділення з остачею, найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного вивчаються в основній школі. З рештою ж трьох термінів ситуація інша, оскільки їх знання вже є невід'ємною частиною участі в олімпіадних завданнях.

11. Чи рекомендували б ви приділяти більше уваги завданням на конгруенції, і щоб вони постійно були включені до олімпіадних завдань?

Рис. 3.10: Кількість задач на конгруенції серед олімпіадних завдань

Щодо питання 11, результати свідчать про те, що думки респондентів розділилися щодо важливості завдань на конгруентність: 12,8% вважають, що однозначно потрібно більше завдань, 59% вважають, що поточний обсяг достатній;

17,9% вважають, що було б достатньо повертатися до завдань на конгруентність раз на кілька років і не робити їх постійною складовою, тоді як 10,3% вважають, що є важливіші типи завдань, яким потрібно приділяти більше уваги. (рис. 3.10) На перший погляд, можна припустити, що поточна кількість завдань на конгруентність є достатньою для учнів. Однак відповіді відображають різні погляди на важливість завдань, і це частково пов'язано з індивідуальними уподобаннями та різноманітністю типів завдань.

12. Чи брали участь Ваші учні на олімпіаді з математики обласного рівня за останні 10 років?

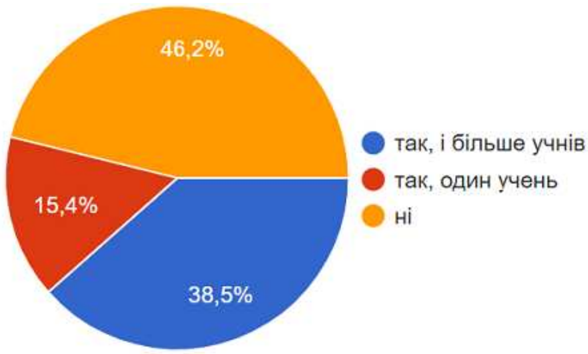


Рис. 3.11: Участь учнів Закарпаття на обласному етапі олімпіад

Відповіді вчителів, опитаних під час дослідження, були неоднозначними. Загалом, майже половина вчителів не можуть похвалитися учнями, які дійшли до обласного етапу. Хоча більше учнів доходять до районного етапу, не варто робити далекосяжних висновків з цих даних, оскільки, якщо міркувати як математик, у цьому рівнянні занадто багато невідомих змінних. Це може залежати від підготовленості конкретного учня, рівня конкуренції, позашкільних чинників, часу, витраченого на підготовку, або навіть від методу, який використовувався під час підготовки. (рис. 3.11)

13. Інші зауваження та пропозиції щодо олімпіадних завдань, що містять конгруенції (необов'язкове питання):

Думки є індивідуальними, вони не однакові. Наведені відповіді свідчать про те, що думки щодо завдань, пов'язаних з конгруенціями, різняться. Один з опитаних пропонує вводити їх у другому етапі, другий вказує на брак практичних завдань, а третій підкреслює, що чинні навчальні програми та розклад не дають учням основної школи достатньої можливості попрактикуватися в розв'язуванні олімпіадних завдань на конгруентність. Це свідчить про те, що вчитель вважає, що вивчення та практичне розв'язування задач на конгруентність можливе лише в позакласній роботі.

3.2 Висновки

Математичні олімпіади є важливим компонентом математичної освіти, оскільки вони сприяють розвитку творчих здібностей, критичного мислення та проблемного підходу учнів. Вони стимулюють учнів до активної самостійної роботи, пошуку нових рішень та розширення своїх знань. Тому варто приділити велику увагу проведенню цих олімпіад та підготовці учнів до них.

Оскільки на організацію та проведення олімпіад в останні роки сильно вплинули події Covid-19 та російсько-української війни, їм слід приділяти більше уваги і не нехтувати ними. Як наслідок, протягом останніх 2-3 років ці олімпіади організовуються переважно в онлайн-форматі, що можна розглядати лише як спосіб зацікавити учасників, але не варто робити якихось далекосяжних висновків на основі результатів останніх років. Причинами цього є, з одного боку, складне контролювання оточення, періодичні технічні збої, якість інтернет-з'єднання, а з іншого - вплив зовнішніх чинників, таких як розгортання воєнних подій.

Важливою метою математичної олімпіади, окрім виявлення найкращих, є надання учням можливості отримати глибше уявлення про можливості науки математики. Це також дає їм можливість здобути знання на більш високому рівні за межами школи. Оскільки навчальні програми все більше скорочують і спрощують, багато завдань на доведення та аналіз викреслюються з програми і замінюються примітивними задачами. В результаті учні позбавлені можливості вирішувати більш складні завдання, що потребують застосування критичного підходу та логічного мислення з міцним фундаментом, побудованим один на одному.

Розуміння поняття конгруентності та пов'язаних з нею властивостей є викликом при підготовці до математичних олімпіад. Конгруентність відіграє дуже важливу роль у геометрії та теорії чисел, але їй не приділяється достатньої уваги в шкільній програмі, лише на олімпіадах. Результати дослідження показують, що конгруентність не є найпопулярнішою і найлегшою частиною завдань, але вона є її важливою частиною. Вражає те, що конгруентність як термін вивчають менше половини опитаних (41%) під час підготовки, що свідчить про те, що вона впливає на якість підготовки. Усвідомлення поняття конгруентності в подальшому приносить користь і допомагає вирішувати більш комплексні завдання. Тому було б важливо приділяти більше уваги вивченню та практичному застосуванню конгруентності, щоб допомогти учням ефективніше справлятися з цими завданнями. Загалом, задачі на конгруентність є важливими в математиці і можуть бути корисними в багатьох сферах. Для того, щоб учні успішно розв'язували ці задачі, необхідна належна підготовка та приділення особливої уваги темі в навчальному процесі.

Узагальнення

У даній дипломній роботі було проведено дослідження ефективності використання конгруенцій в розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Результати дослідження свідчать про те, що використання методів конгруенцій у розв'язанні задач є корисним і перспективним підходом. У роботі детально розглянуто теоретичні основи конгруентності, їх властивості та методи розв'язування задач на конгруентність на шкільних олімпіадах. Також наведено приклади задач на конгруентність з різних математичних змагань.

Олімпіади з математики є важливим компонентом математичної освіти, які сприяють розвитку творчих здібностей та критичного мислення. Вони надають учням можливість поглибленого вивчення математики та розвитку їхніх знань на більш високому рівні. Задачі на конгруентність, як важлива частина олімпіад, вимагають від учнів глибокого розуміння поняття конгруентності та вміння застосовувати її на практиці.

Результати анкетування вчителів математики підтвердили значимість вивчення конгруенцій та розв'язування задач з їх використанням. Проте, з дослідження також видно, що учні не отримують достатньої підготовки по темі конгруенції в шкільній програмі. Це може обмежувати їх здатність розв'язувати складні завдання та застосовувати конгруентність у різних сферах. Тому важливо, щоб шкільна програма надавала більше уваги цій темі та забезпечувала належну підготовку учнів до вирішення задач на конгруентність.

Також, враховуючи те, що олімпіади останніми роками проводяться і в онлайн-форматі, необхідно звернути увагу на технічні аспекти та забезпечити надійне з'єднання для учасників. Крім того, важливо враховувати можливі зміни у підготовці та проведенні олімпіад через зовнішні обставини.

Список використаних джерел

[1] Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науководослідницьких робіт та конкурси фахової майстерності https://zakon.rada.gov.ua/go/z1318-11

[2] Міністерство освіти і науки України. Міжнародні учнівські олімпіади. https://mon.gov.ua/ua/tag/olimpiadi (останнє відвідування: 13.05.2023)

[3] Державна наукова установа. Інститут модернізації змісту освіти. https://imzo.gov.ua/2023/04/12/v-uzhhorodi-vidbuvsia-final-nyy-etap/-vseukrains-koi-uchnivs-koi-olimpiady-z-matematyky/ (останнє відвідування: 13.05.2023)

[4] Українські Математичні Олімпіади https://matholymp.com.ua/(останнє відвідування: 13.05.2023)

[5] Інститут післядипломної освіти Київського університету імені Бориса Грінчика // Учнівські олімпіади з математики. https://olimp.ippo.kubg.edu.ua/archives/category/matem (останнє відвідування: 13.05.2023)

[6] Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти. Всеукраїнські учнівські олімпіади. https://zakinppo.org.ua/olimpiadi-konkursi/vseukrainski-uchnivski-olimpiadi/240-pidsumki

[7] Авторські курси підготовки до олімпіад з математики школи математики Symplex за редакцією професора Богдана Рубльова https://gioschool.com/ua/olympiad (останнє відвідування: 13.05.2023)

[8] Сергій Негода: Математичні шкільні олімпіади. // Поняття конгруенції для учнів-олімпіадників. 13 листопада 2016. https://olimpmath.blogspot.com/2016/11/blog-post_84.html (останнє відвідування: 13.05.2023)

[9] Міжнародний математичний конкурс "Кенгуру"http://www.kangaroo.com.ua/

[10] Барвінок Р. Л., Козлова О. М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом. - Черкаси, 2013. - 96 с.

[11] Кучик А. О. За лаштунками шкільної математики. Факультативні заняття – Костопіль, 2018. – 140 с.

[12] Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. — Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2011. — 400 с.

[13] Требенко Д. Я., Требенко О. О. Алгебра і теорія чисел. Частина 1. - Видавництво НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. - 400 с.

[14] Bege Antal: *Bevezetés a számelméletbe*. Scientia Kiadó, Kolozsvár, 2002. 198 o.

[15] Gyarmati Edit: **Számelmélet**. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997. 541 o.

[16] Isa Sani, Abdulaziz B. M. Hamed: Cryptography Using Congruence Modulo Relations // American Journal of Engineering Research (AJER), Volume-6, Issue-3, 2017, pp. 156-160

Список ілюстрацій

Összefoglaló

A munkában a kongruenciák használatának hatékonyságát vizsgáltuk matematika versenyfeladatok megoldásában. A kutatás eredményei azt mutatják, hogy a kongruenciák módszerének alkalmazása a feladatok megoldásában hasznos és ígéretes megközelítést nyújt a változatos megoldást illetően.

A dolgozat részletesen ismerteti a kongruencia elméleti alapjait, tulajdonságait és a kongruenciával kapcsolatos feladatok megoldásának módszereit. Emellett különböző matematikaversenyek kongruencia feladatait számos példával mutatja be.

A matematikai versenyek a matematika oktatásában fontos szerepet játszanak, amelyek elősegítik a kreativitás, a logika és a kritikai gondolkodás fejlődését. Lehetőséget biztosítanak a tanulóknak a matematika elmélyült tanulmányozására és tudásuk magasabb szintre emelésére. Az olimpiádák fontos részét képező kongruenciával kapcsolatos feladatok megkövetelik, hogy a diákok mélyen megértsék a kongruencia fogalmát, és képesek legyenek azt a gyakorlatban alkalmazni.

A matematika tanárok körében végzett felmérés eredményei megerősítették a kongruenciák tanulmányozásának és a velük kapcsolatos feladatok megoldásának fontosságát. Emellett az eredményből jól látható, hogy az iskolai tantervben csekély a kongruenciákat tartalmazó rész, így a diákok nem részesülnek megfelelő képzésben a téma kapcsán. Ez befolyásolhatja a komplex feladatok megoldására és a kongruencia különböző területein való alkalmazására való képességüket. Ezért fontos, hogy az iskolai tanterv nagyobb figyelmet fordítson a témára, és biztosítsa, hogy a tanulók megfelelően felkészüljenek a kongruencia feladatok megoldására.

Tekintettel arra, hogy az olimpiádákat az utóbbi években már online is rendezik, a technikai szempontokra is figyelmet kell fordítani, nem utolsó sorban megbízható internetkapcsolatot kell biztosítani a résztvevők számára. Emellett az olimpiádák előkészítését és lebonyolítását illetően fontos figyelembe venni a külső körülmények miatt bekövetkező esetleges változásokat.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

ID перевірки:
1015128352

Дата перевірки:
17.05.2023 11:59:44 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
17.05.2023 12:08:49 EEST

ID користувача:
100011749

Назва документа: Kolozsvári_Gabriella

Кількість сторінок: 52 **Кількість слів:** 21366 **Кількість символів:** 77200 **Розмір файлу:** 1.05 MB **ID файлу:** 1014810058

1.82% Схожість

Найбільша схожість: 0.42% з Інтернет-джерелом (https://ro.scribd.com/doc/165179259/tncarte-1-2)

1.82% Джерела з Інтернету | 397 .... Сторінка 54

0.35% Джерела з Бібліотеки | 41 .... Сторінка 56

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 418

Nyilatkozat

Alulírott, Kolozsvári Gabriella, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Додатки

Олімпіадні задачі на конгруенції / Kongruenciákat tartalmazó versenyfeladatok

Шановні вчителі математики!
Я, Коложварі Габріелла, студентка Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II спеціальності "Математика". Заповнюючи цю анкету, Ви робите внесок у дослідження теми моєї дипломної роботи. Анкета анонімна, ваші відповіді не будуть оприлюднені.
Дякую за відповіді!

Kedves matematika tanárok!
Kolozsvári Gabriella vagyok, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola matematika szakos hallgatója. Jelen kérdőív kitöltésével hozzájárul diplomamunkám témájának kutatásához. A kérdőív anonim és a válaszai nem kerülnek ki nyilvánosságra.
Válaszait előre is köszönöm!

Зірочка (*) указує, що запитання обов’язкове

1. 1. Який у Вас досвід роботи з викладання математики? / Hány éves tapasztalattal rendelkezik Matematika tanárként? *

Виберіть лише один варіант.

- до 5 років / 0-5 év
- 5-10 років / 5-10 év
- більше 10 років / több mint 10 év

2. 2. Чи є у вас досвід в організації або підготовці учнів до олімпіад з математики? / Vett-e részt matematika versenyeken valamilyen formában? *

Виберіть лише один варіант.

- Так, регулярно беру участь у підготовці та проведенні олімпіад / Igen, rendszeresen részt veszek a verseny lebonyolításában és a gyerekek felkészítésében
- Так, але не регулярно / Igen, de nem veszek részt rendszeresen a rendezésben vagy a felkészítésben
- Ні, але, якщо матиму можливість, то залюбки/ Még nem vettem részt, de ha lesz rá lehetőségem, szeretnék
- Не беру участі взагалі / Egyáltalán nem veszek részt

3. 3. Як ви допомагаєте учням підготуватися до олімпіадних задач? / Hogyan segít a tanulóknak felkészülni a versenyre? *

Виберіть усе, що підходить.

- [ ] Надаю матеріал із олімпіадними задачами з попередніх років / A korábbi versenyfeladatokból összeállított feladatsort teszek elérhetővé a diákok számára
- [ ] Проводжу додаткові уроки / Különórákat tartok, korrepetálást vállalok
- [ ] Проводжу факультативний гурток з математики / Szakkör formájában, fakultatív módon külön foglalkozást tartok a diákoknak
- [ ] Не беру участі, тому і не допомагаю в підготовці. / Mivel nem veszek részt, így nem is nyújtok segítséget
- [ ] Інше: ______________________

4. 4. Коли розпочинаєте підготовку до олімпіад з математики? / Mikor kezdi meg a matematikai versenyfeladatokra való felkészítést? *

Виберіть лише один варіант.

- З початком навчального року / A tanév kezdetével
- За місяць до олімпіади / A versenyt megelőző hónapban
- За два тижні до олімпіади / A verseny előtt két héttel
- Не проводжу уроки підготовки / Nem tartok felkészítő órát
- Інше: ______________________

5. 5. Як ви проводите уроки підготовки до олімпіадних задач? / Hogyan tartják a felkészítő órát? *

Виберіть усе, що підходить.

- [ ] Пояснення матеріалу та демонстрація прикладів / A típusfeladatok bemutatása, magyarázása példákkal alátámasztva
- [ ] Розв'язування прикладів (з попередніх років)/ Példák bemutatása és megoldása (korábbi versenyfeladatokból)
- [ ] Матеріал, який не опрацювали на уроці, даю на самостійне опрацювання (підручники, статті, відео тощо) / Az órán el nem hangzott, kiegészítő anyagok bemutatása és ajánlása önálló feldolgozásra (könyvek, cikkek, videók stb.)
- [ ] Інше: ____________________

6. 6. Як ви оцінюєте рівень учнів у розв'язуванні олімпіадних задач? / Véleménye szerint a diákok hogyan teljesítenek a megrendezett versenyeken? *

Виберіть лише один варіант.

- ( ) Високий / Magas színvonalon
- ( ) Середній / Elfogadható, átlagos
- ( ) Низький / Alacsony színvonalon
- ( ) Немає досвіду в підготовці до олімпіад / Nincs tapasztalatom a versenyfeladatokkal kapcsolatosan

7. 7. Які методи використовуєте для розв'язання олімпіадних задач з математики? / Milyen módszereket használ a felkészítő óra során? *

Виберіть усе, що підходить.

- [ ] Розв'язування різних типів задач на одному занятті / Különböző típusfeladatok megoldása egy foglalkozáson
- [ ] Детальний аналіз кількох важливих задач на конкретну тему / Egy adott téma részletes feldolgozása
- [ ] Розв'язування задач у групі / Csoportmunka
- [ ] Розв'язування задач самостійно / Önálló munka
- [ ] Проведення спільних уроків та олімпіад з іншими школами / Iskolán belül, vagy akár iskolák közötti órák vagy verseny szervezése és lebonyolítása
- [ ] Інше: ____________________

8. 8. Як ви вважаєте, яку роль відіграють конгруенції у підготовці до олімпіад з математики? / Ön szerint milyen szerepe van a kongruenciának a matematikai versenyekre való felkészülésben? *

Виберіть лише один варіант.

- Вони є важливим елементом підготовки та повинні вивчатися ретельно / Ez egy fontos része a versenynek, amelynek több figyelmet kellene szentelni
- Вони не є дуже важливим елементом підготовки, але варто знати основні поняття та використання в найпростіших задачах / Nem a legfontosabb része a versenyfeladatoknak, azonban érdemes ismerni az általános fogalmakat, és tudni megoldani az alapvető feladatokat
- Вони не є необхідним елементом підготовки і можуть бути опущені / Nem annyira fontosak, hogy a feladatok között szerepeljenek
- Інше: ____________________

9. 9. Як учні зазвичай справляються з розв'язуванням задач на конгруенції? / Általában hogyan boldogulnak a tanulók a kongruenciával kapcsolatos feladatok megoldásával? *

Виберіть лише один варіант.

- Відмінно / Tökéletesen
- Добре / Jól
- Іноді можуть вирішити / Esetenként előfordul
- Не добре, важко / Nem jól, nehezen
- Важко розуміють завдання / Nem tudják értelmezni
- Інше: ____________________

10. 10. Які математичні поняття пов'язані з конгруенціями ви навчаєте учнів на підготовчих заняттях до олімпіад? / Milyen kongruenciákkal kapcsolatos matematikai fogalmakat tanít a diákoknak a felkészülés során? *

Виберіть усе, що підходить.

- [ ] конгруенція / kongruencia
- [ ] ділення з остачею / maradékos osztás
- [ ] клас лишків / maradékosztály
- [ ] НСД, НСК / lnko, lkkt
- [ ] теорема Ейлера / Euler tétel
- [ ] мала теорема Ферма / kis Fermat-tétel
- [ ] Інше: ______________________

11. 11. Чи рекомендували б ви приділяти більше уваги завданням на конгруенції, і щоб вони постійно були включені до олімпіадних завдань? / Javasolná-e, hogy a kongruenciával kapcsolatos feladatok nagyobb figyelmet kapjanak, és állandó szereplőjévé váljon a versenyfeladatokban? *

Виберіть лише один варіант.

- ( ) Так, обов'язково потрібно більше завдань. / Igen, mindenképp több feladat lenne szükséges
- ( ) Достатньо тієї кількості, яку зустрічаємо тепер. / Elegendő az a mennyiség, amennyivel jelenleg találkozhatunk
- ( ) Достатньо декілька разів, не є обов'язковим на всіх олімпіадах. / Néhány alkalommal elegendő használni, nem kell minden egyes versenyen
- ( ) Можна їх пропустити, є більш важливі типи завдань. / Elhanyagolható, vannak fontosabb tételek és feladattípusok
- ( ) Інше: ______________________

12. 12. Чи брали участь Ваші учні на олімпіаді з математики обласного рівня за останні 10 років? / Az elmúlt 10 év során vett-e részt megyei fordulón valamely tanulója? *

Виберіть лише один варіант.

- так, і більше учнів / Igen, több tabuló is
- так, один учень / Igen, egy tanuló
- ні / nem
- Інше: ______

13. Інші зауваження та пропозиції щодо олімпіадних завдань, що містять конгруенції: / Egyéb megjegyzések, javaslatok a kongruenciákat tartalmazó versenyfeladatokkal kapcsolatban:

Олімпіадні задачі на конгруенції / Kongruenciákat tartalmazó versenyfeladatok

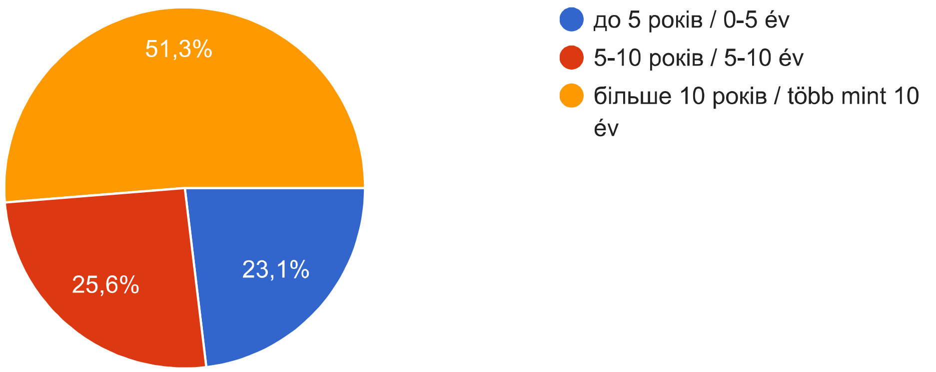
39 відповідей

Опублікувати дані аналітики

1. Який у Вас досвід роботи з викладання математики? / Hány éves tapasztalattal rendelkezik Matematika tanárként?

Копіювати

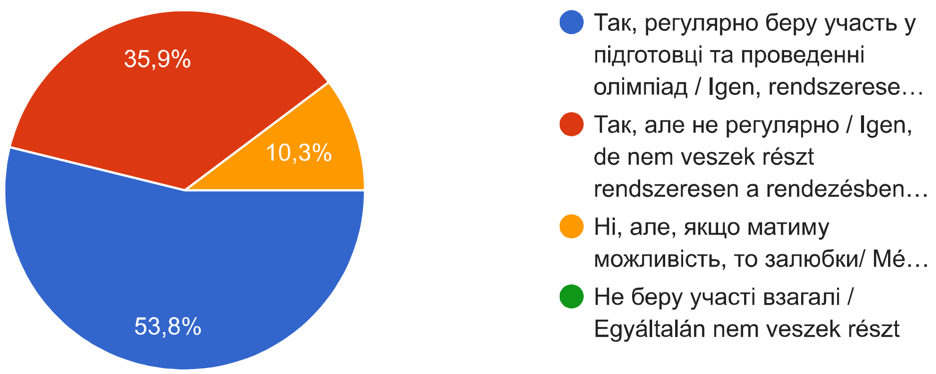
39 відповідей



2. Чи є у вас досвід в організації або підготовці учнів до олімпіад з математики? / Vett-e részt matematika versenyeken valamilyen formában?

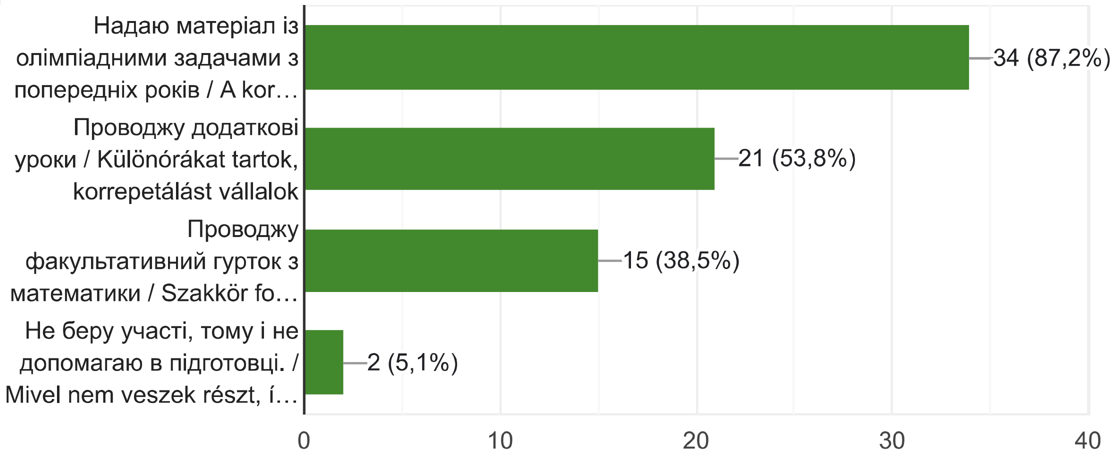
Копіювати

39 відповідей



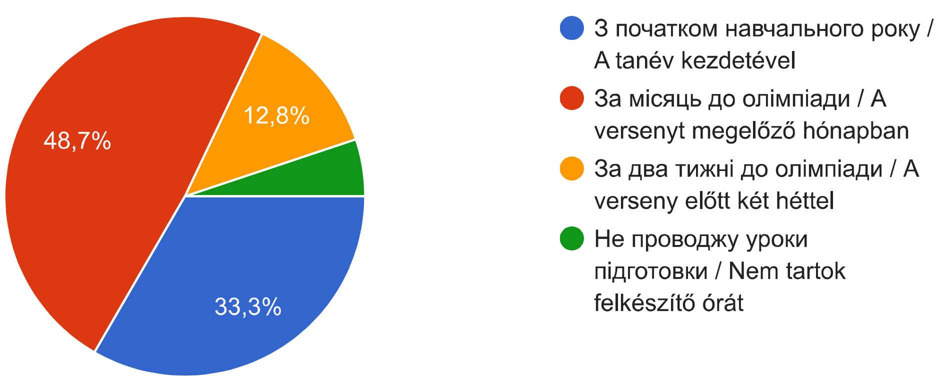
3. Як ви допомагаєте учням підготуватися до олімпіадних задач? / Hogyan segít a tanulóknak felkészülni a versenyre?

39 відповідей



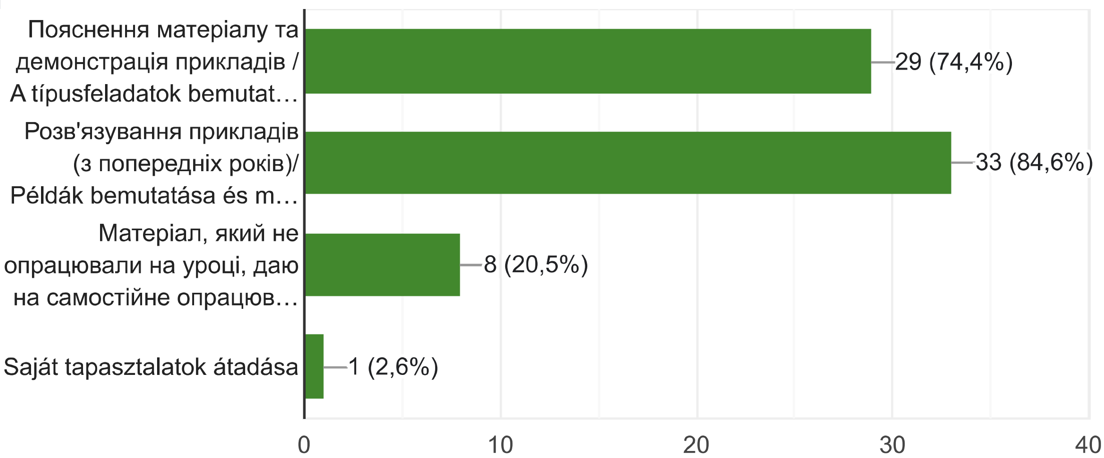
4. Коли розпочинаєте підготовку до олімпіад з математики? / Mikor kezdi meg a matematikai versenyfeladatokra való felkészítést?

39 відповідей



5. Як ви проводите уроки підготовки до олімпіадних задач? / Hogyan tartják a felkészítő órát?

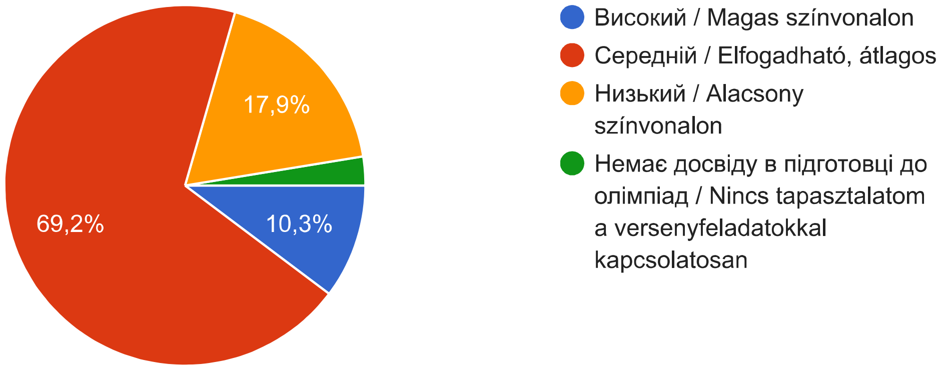
39 відповідей



6. Як ви оцінюєте рівень учнів у розв'язуванні олімпіадних задач? / Véleménye szerint a diákok hogyan teljesítenek a megrendezett versenyeken?

Копіювати

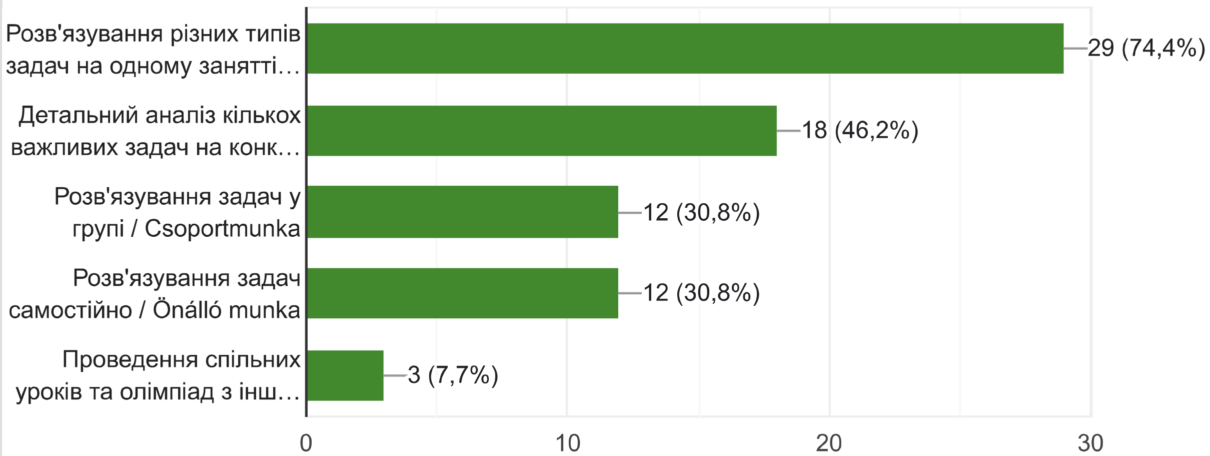
39 відповідей



7. Які методи використовуєте для розв'язання олімпіадних задач з математики? / Milyen módszereket használ a felkészítő óra során?

Копіювати

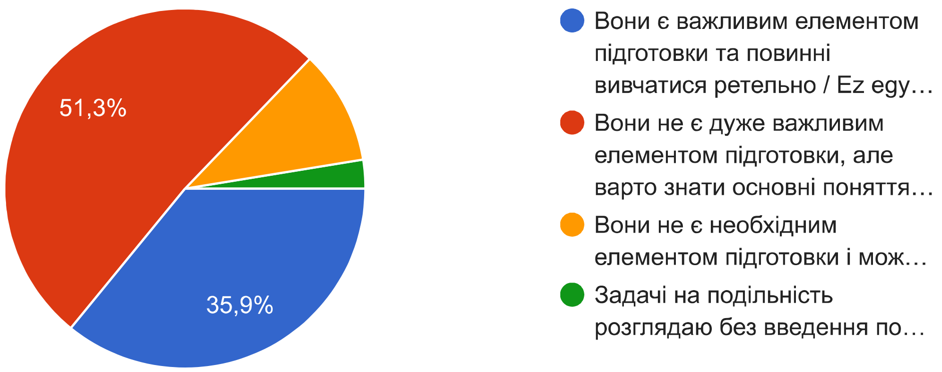
39 відповідей



8. Як ви вважаєте, яку роль відіграють конгруенції у підготовці до олімпіад з математики? / Ön szerint milyen szerepe van a kongruenciának a matematikai versenyekre való felkészülésben?

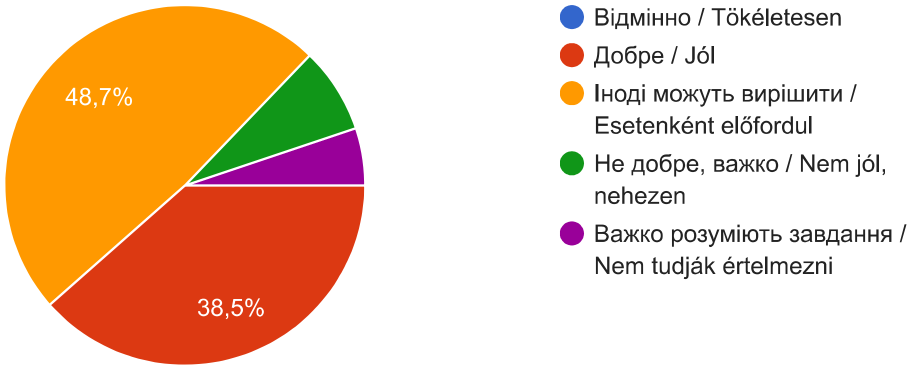
Копіювати

39 відповідей



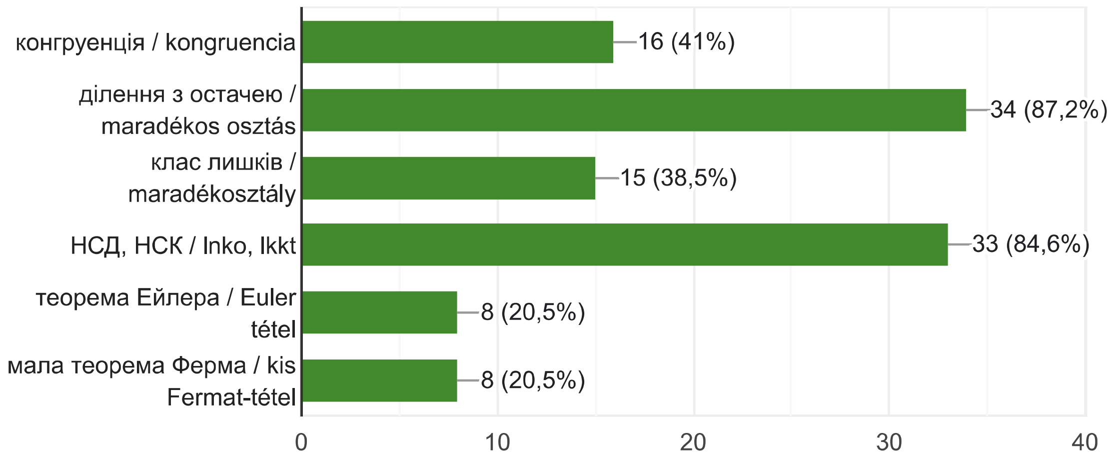
9. Як учні зазвичай справляються з розв'язуванням задач на конгруенції? / Általában hogyan boldogulnak a tanulók a kongruenciával kapcsolatos feladatok megoldásával?

39 відповідей



10. Які математичні поняття пов'язані з конгруенціями ви навчаєте учнів на підготовчих заняттях до олімпіад? / Milyen kongruenciákkal kapcsolatos matematikai fogalmakat tanít a diákoknak a felkészülés során?

39 відповідей



11. Чи рекомендували б ви приділяти більше уваги завданням на конгруенції, і щоб вони постійно були включені до олімпіадних завдань? / Javasolná-e, hogy a kongruenciával kapcsolatos feladatok nagyobb figyelmet kapjanak, és állandó szereplőjévé váljon a versenyfeladatokban?

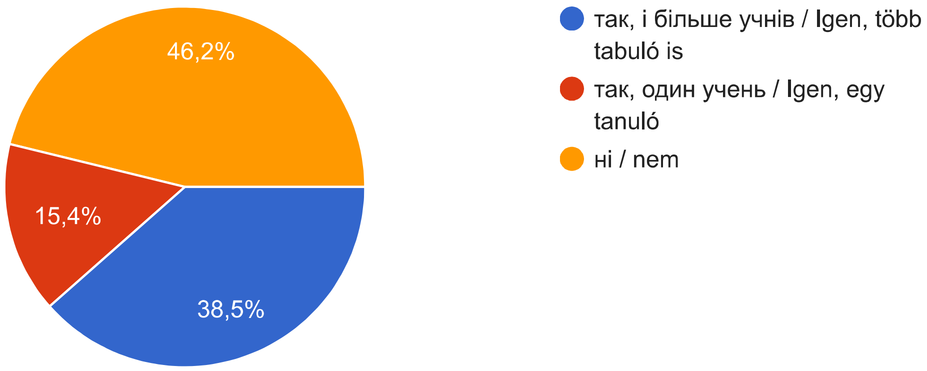
Копіювати

39 відповідей

12. Чи брали участь Ваші учні на олімпіаді з математики обласного рівня за останні 10 років? / Az elmúlt 10 év során vett-e részt megyei fordulón valamely tanulója?

Копіювати

39 відповідей



Інші зауваження та пропозиції щодо олімпіадних завдань, що містять конгруенції: / Egyéb megjegyzések, javaslatok a kongruenciákat tartalmazó versenyfeladatokkal kapcsolatban:

5 відповідей

Nincs

Такого рівня складності, який є зараз, достатньо, принаймні на II етапі олімпіади

Ilyen feladatokat a jelenlegi tantervek esetén csak órán kívüli foglalkozások van mód megismerni, gyakorolni. Az általános iskolai tanmenet sem teszi lehetővé a vesenyszintű feladatok gyakorlását, a kongruenciákkal kapcsolatok ismeretk gyakorlását verseny szintű feladatok esetén

Jó lenne verseny előtt közzétenni gyakorló feladatokat, és az előző évi feladatokat nem felhasználni élesben.