ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Розвиток математичної культури старшокласників у навчанні теми: «Тригонометричні функції» в курсі алгебри і початків аналізу

Кіш Цінтія Калманівна

Студентка IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к. ф. -м. н, доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Розвиток математичної культури старшокласників у навчанні теми: «Тригонометричні функції» в курсі алгебри і початків аналізу

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студентка IV-го курсу

Кіш Цінтія Калманівна

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Стойка Мирослав Вікторович**

к. ф. -м. н, доцент

Рецензент: **Петечук Юлія Василівна**

доцент кафедри математики та інформатики

Берегове
2023

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

KÖZÉPISKOLÁSOK MATEMATIKAI KOMPETENCIÁJÁNAK FEJLESZTÉSE A "TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK" TÉMAKÖR TANULMÁNYOZÁSÁBAN AZ ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS KEZDETEI SORÁN

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Kiss Cintia

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Sztojka Miroszláv

fiz. – mat. tud. doktora, docens

Recenzens: Petecsuk Júlia

Matematika és Informatika Tanszékének docense

Beregszász – 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A tanulók matematikai kompetenciáinak fejlesztését szolgáló tanítási módszerek kutatása az oktatás egyik legfontosabb része. A matematikai kompetencia sikeres fejlesztéséhez azonban szükséges a matematikai nevelési folyamat céljának és tartalmának, a tanítási módszereknek az összehangolása.

A matematikai kompetencia alapjainak elsajátítása segít minden tanulónak az oktatási és kognitív motiváció, a gondolkodás és a kreatív képességek fejlesztésében; sikeresen elsajátítja a gyakorlati matematikai ismereteket és készségeket. Ez hozzájárul a tudás alkalmazásához más tantárgyak tanulmányozása során, az életben, a továbbtanulásban, figyelembe veszi az életkori és egyéni sajátosságokat, a társadalom fejlődési irányait.

Az algebra és mértan iskolában való tanulása széles lehetőségeket kínál a tanulók matematikai kompetenciájának olyan fontos összetevőinek fejlesztésére, mint az algoritmikus, logikai, grafikai, transzformációs kompetencia, rajzkompetencia, számítástechnikai kompetencia, matematikai nyelv.

A koronavírus miatti karantén és a háború Ukrajnában új oktatási formára kényszerítette az iskolákat, az online oktatásra. A digitális iskola létrehozása az oktatáspolitika egyik kiemelt területe, a kormány 2010 óta fokozatosan vezeti be a távtechnológiát az oktatásba.

Munkámban három fő fejezet van, ahol az első fejezetben a középiskolások matematikai kultúrájának fejlődésének elméleti alapjait tárjuk fel a trigonometrikus függvények tanulmányozása során. A második fejezet a matematikai kultúra fejlesztésének módszerét írja le különféle típusú trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek tanulmányozása során. A harmadik fejezetben hat 10. osztályos tankönyvet elemeztem és hasonlítottam össze 3 szempont szerint.

Szakdolgozatom célja feltárni olyan módszereket, amelyek a középiskolások matematikai kompetenciájának fejlesztésére szolgál a trigonometrikus függvények, illetve egyenletek és egyenlőtlenségek tanulmányozása során.

1. Középiskolások matematikai kompetenciáinak fejlesztésének elméleti alapjai a trigonometrikus függvények vizsgálatával

1.1. A tanulók matematikai kompetenciájának fejlesztése algebra-órákon

Az elmúlt években sok változás történt az ukrán társadalmi életben: az oktatási rendszer reformja, gazdaság és világszínvonalú termelés, integráció a világ oktatási rendszerébe, átmenet a piaci kapcsolatokra és bármilyen termék versenyére, és beleértve intellektuálisan. A társadalmi kapcsolatrendszer minden változása megköveteli a megfelelő válaszokat az oktatás előtt álló feladatokra.

A matematikai oktatás az iskolások alapképzésének legfontosabb eleme. A matematikatanítás fő feladata, hogy a tanárok biztosítsák a matematikai kompetencia fejlesztésének színvonalát, ami szükséges a mindennapi életben való teljes részvételhez, a továbbtanuláshoz és majd később a munkavégzéshez. Éppen ezért jelentősen megnőtt az érdeklődés a matematikai kompetencia fejlesztésének problémája iránt [2].

Hazánkban az alapelvekre vonatkozó nézetrendszer, célok, feladatok fő irányait "A matematikai oktatás fejlődésének koncepciója Ukrajnában" mutatja be. A koncepció három problémacsoportot jelöl meg a matematikaoktatás és a természettudományok fejlesztésében, amelyek a modern iskolákban erősen jelentkeznek. Az első csoportba tartozik az az iskolások alacsony motivációja, amely a matematikaoktatás jelentőségének társadalmi alábecsülésével, az oktatási programok, valamint az elavult tartalmú értékelési és módszertani anyagok túlterhelésével jár. A második csoportba tartoznak a tartalmi jellegű problémák, ahol valójában nincs különbség a tantervek, az értékelési és módszertani anyagok között a különböző tanulói csoportok számára, ami az oktatási folyamatban alacsony hatékonysághoz vezet. A harmadik csoportba a munkaerőhiány tartozik, akik minőségi matematika tanítást nyújtanának, figyelembe véve a fejlesztő és formáló oktatási és különböző tanuló csoportok létfontosságú érdekeit [6].

Valójában a matematika tanulása és az oktatási folyamat megszervezése során az 5-8.

osztályos tanulóknak más jellegű problémáik vannak. A számolási kompetencia a matematika tanfolyam minden szakaszában kialakul a tanulókban, és az oktatás első öt évében rakódik le. Ebben az időszakban tanulják meg a matematikai műveletek törvényszerűségeinek tudatos használatának képességét, a jövőben pedig a megszerzett készségek és képességek megszilárdítását, fejlesztését. Így az 5-8. osztályos tanórákon a szóbeli munka minden eddiginél fontosabb, de különösen az 5-6. osztályokban, mert a legegyszerűbb számtani műveletek okoznak nehézséget az iskolásoknak és ilyenkor késztetést éreznek számológép használatára [2].

Az utóbbi években különösen foglalkoztatott volt az a kérdés, hogy szükség van-e speciális tanári munkára a tanulók logikai gondolkodásának fejlesztésére. Az iskolai tanórák a korábbiakhoz hasonlóan a program teljesítését célozzák, nem pedig a gyerekek gondolkodásának fejlesztését, így felmerül a logikus gondolkodás fejlesztésének problémája [7].

A geometria tanulmányozása során megfigyelhető a tendencia, hogy csökken a tanulók geometriai anyagok elsajátításának szintje. A matematikai diagnosztikai munkák elemzése azt mutatja, hogy a geometriai tartalmú feladatok megoldása során nehézségek adódnak a térbeli gondolkodás nem megfelelő fejlettsége miatt [4].

A geometriával ellentétben az algebra órákon kevesebb figyelmet fordítanak a matematikai fogalmakra. A geometriában minden a fogalmakon alapul, míg az algebrában a tanárok igyekeznek kerülni a fogalmak tanulmányozását, hisz elég a gyakorlati anyagot ismerni [4].

Az elmondottak alapján arra a kiábrándító következtetésre juthatunk, hogy a matematikai kompetenciák elsajátításának problémáit a következők okozzák: számítási kompetencia, logikus gondolkodás, geometriai anyag elsajátítása, matematikai fogalmak kialakítása, modellezési készség, matematikai ismeretek hiányosságai, matematikai szabályok lényegének félreértése stb.

A matematikai kompetencia fejlesztésének koncepciója számos olyan feladatot mutat be, amelyek célja a matematika tanítása közben felmerülő problémák leküzdése: az oktatási programok tartalmi korszerűsítése, annak érdekében, hogy ne legyenek hiányosságok az alapismerekben, nyilvánosan elérhető információs források biztosítása, a tehetséges tanulóknak biztosítani külön tudásszintjüknek megfelelő anyagot képességeik tovább fejlesztésére, a matematikai ismeretek és a matematikaoktatás népszerűsítése [2].

Ezeket a feladatokat az állami oktatási szabvány keretein belül kell végrehajtani, amely követelményeket állapít meg a középfokú oktatási intézmények alapképzési programjának, az eredményesebb oktatás végett: személyes és tárgyilagos a matematika és az informatika területén [1].

A tanórai és tanórán kívüli önálló munka megszervezése és a tanulók motivációjának növelése kapcsán a következők lesznek a legfontosabbak.

Személyes [2]:

- a tanuláshoz, a felkészültséghez való felelősségteljes hozzáállás kialakítása, azon tanulók számára, akik önfejlesztés és önképzés céljából tanulnak;
- kommunikációs kompetencia kialakítása a kommunikációban és az együttműködésben a különféle tevékenységek során.

Tárgyilagos [2]:

- képes önállóan meghatározni tanulmányai céljait, új feladatokat kitűzni és megfogalmazni, kognitív tevékenysége indítékait és kialakítani érdeklődési körét;
- képes önállóan megtervezni a célok elérésének módjait, tudatosan megválasztani a leghatékonyabb módszereket az oktatási és kognitív feladatok megoldására;
- képes legyen cselekvéseit a tervezett eredményekkel összefüggésbe hozni;
- az önértékelés, a döntéshozatal elsajátítása az oktatási és kognitív tevékenységekben.

A tárgyi eredmények elérése érdekében a középiskola 10-11. osztályaiban a matematika tantárgy tanításának tapasztalatait figyelembe véve megjegyezhetjük, hogy a nagy mennyiségű matematikai anyag feldolgozásakor szükséges a tanulók tevékenységének megszervezése, képességek és készségek kialakítása, megszilárdítása. Növelni kell az önállóan végzett feladatok arányát a tanórai és a tanórán kívüli munka során. Ebben a vonatkozásban a tanárnak a feladata, hogy kiválassza a tanórán végzett feladatokat és önállóan végzett feladatokat, amelyeket egyre összetettebb mértékben kell differenciálni, és különféle lehetőségeket kell tartalmaznia. Az önálló munkavégzés során szükség van a feladatok azonnali áttekintésére, hogy a tanuló elemezze a hibáit, visszatérjen a feladathoz és kijavítsa azokat [7].

Az alapfokú általános műveltség állami oktatási színvonala tartalmazza az információs és kommunikációs technológiák használatát [3]. Az információs és kommunikációs technológiák az információgyűjtés, tárolás, feldolgozás, bemutatás és továbbítás módszereinek összességét jelentik számítógépes eszközök segítségével. Ide tartoznak az asztali számítógépek, laptopok, perifériás eszközök, táblagépek stb., telepített szoftverrel és internet-hozzáféréssel. Ma a számítógépes eszközök a diákok rendelkezésére állnak, és az élet szerves részét képezik, de ennek ellenére nem minden családban van vagy nagy családban nem minden gyermek számára adott egy számítógép vagy laptop, a meglehetősen magas költségek miatt. Az utóbbi években már számítógép helyett mobiltelefonokat, laptopokat és táblagépeket használnak, amelyek már műszaki jellemzőikkel is felülmúlják a számítógépeket.

Ebben az esetben a matematikai kompetencia tanulói fejlesztésének több problémáját is figyelembe veszik, amelyek közül az egyik a matematikai képességek és készségek kialakítását és megszilárdítását szolgáló képzési feladatok hiánya, amelyek az önálló munka részeként az órán és azon kívül is megvalósíthatók mobilalkalmazások és szolgáltatások segítségéve és azok oktatási módszerekbe való beépítésével. A középfokú oktatási intézmények felső tagozatos osztályaiban matematika tantárgy tanulása során célszerű megvizsgálni a mobilalkalmazások, szolgáltatások használatának didaktikai lehetőségeit [6].

A matematikai kompetencia formálása, fejlesztése a tanulás folyamatában matematikai állítások bizonyításával valósítható meg. A matematika, különösen a mértan jó lehetőségeket kínál a szükséges logikai ismeretek elsajátítására, a logikai kompetencia megalapozására. A matematika tanórákon a matematikai kompetencia alábbi összetevői emelhetők ki: algoritmikus, logikai, grafikus, transzformációs kompetencia, rajz kompetencia, számítási kompetencia, matematikai nyelv [5].

A matematikai állításoknak a bizonyítása az egyik fontos eszköz, amely hozzájárul a matematikai kompetencia kialakításához, a tanulók kreatív és logikus gondolkodásának fejlesztéséhez. A „matematikai bizonyítás" kifejezés a mondatok bizonyítását jelenti bármely matematikai elméleten belül [5].

A középiskolások a tanulást részesítik előnyben, melynek során nemcsak a tények alátámasztására, hanem azok bizonyíthatóságára is szükség van [5].

A matematikai elmélet alapját a bizonyítással ellátott tételek alkotják. A tételekkel való munka során logikai-matematikai elemzést kell végezni, amely magában foglalja: logikai elemzés (a tétel szerkezetének feltárása) és matematikai elemzés (a struktúra kiválasztott elemeinek matematikai tartalma) [5].

A matematikai állítások bizonyításával a tanulók hozzászoknak a teljes értékű érveléshez, vagyis nem megengedettek a törvénytelen általánosítások, az alaptalan hasonlatok, és megjelenik a diszjunkció teljességének követelménye. Kialakul egy speciális gondolkodási stílus: a formai és logikai érvelési séma betartása, a gondolatok rövid és tömör kifejezése, a gondolatmenet egyértelmű felosztása. [5]

A matematikai kompetencia kialakítási folyamatának a teljes megértésének érdekében számos feladatot kell átnézni.

A tanulók matematikai kompetenciájának kialakítására szolgáló módszertan a matematikai állítások megerősítésére és annak módszertani támogatása nagy gyakorlati jelentőséggel bír a felsőbb osztályú diákok tanítása szempontjából [5].

1.2. A trigonometrikus kifejezések és átalakításuk tanulmányozásának sajátosságai, egyenletek és egyenlőtlenségek

A "Trigonometrikus egyenletek" rész a matematika iskolai szakaszában egy nagy részét foglalja el. Az anyag tartalmának egyik jellemzője, hogy a trigonometrikus egyenletek megoldása előfeltételeket teremt a tanulók tudásának rendszerezésére és általánosítására a "Trigonometrikus függvények" fejezetben az általános iskolában tanult anyag szerint. Ezért a tanárnak az a feladata, hogy kiemelje az anyag azon részeit, amelyek a megoldási módszerek és technikák alapját képezik [8].

Az oktatási és módszertani szakirodalomban különböző nézőpontok vannak a trigonometrikus egyenletek osztályozására vonatkozóan. Ez elsősorban annak köszönhető, hogy a trigonometrikus egyenletek rendkívül változatosak. Ha egy trigonometrikus egyenlet megoldási módszerének kiválasztását követjük az osztályozás alapjául, a következő típusok különböztethetők meg [4]:

1. azon egyenletek, amelyek megoldása során a trigonometrikus függvények tulajdonságait használják;

2. a legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek és az ezekre azonos átalakítás után redukált egyenletek;

3. trigonometrikus egyenletek, amelyek bármilyen trigonometrikus függvényre vonatkoztatva algebrai egyenletekre redukálódnak;

4. az $a \sin x + b \cos x = c$ egyenlet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$

5. homogén trigonometrikus egyenletek ugyanazon argumentum szinuszára és koszinuszára vonatkozóan;

6. trigonometrikus egyenletek, amelyek megoldásának módszerei visszavezethető mesterséges technika alkalmazására;

7. vegyes trigonometrikus egyenletek.

Oktatási és módszertani irodalom elemzése mutatja, hogy a (2-5) típusú trigonometrikus egyenletek meglehetősen jól leírtak, különösen az iskolai tankönyvekben, és az első és az utolsó két egyenlettípusra nem fordítanak kellő figyelmet, sőt egyes tankönyvekben meg sem találhatók [4].

Az első típusú trigonometrikus egyenletek megoldása a trigonometrikus függvények olyan tulajdonságaira vonatkozó következtetéseken alapul, mint az értelmezési tartomány és érték készlet. A megoldás visszavezethető az értelmezési tartomány vagy a kifejezés értékére, amelyek az egyenlet bal és jobb oldalát határozzák meg. Bizonyos esetekben, amikor egy trigonometrikus egyenlet megoldását csak az egyenlet jobb és bal oldali részének érték készletének megtalálására vezethető vissza, ezt a módszert értékelési módszernek nevezzük [4].

Mivel ezek gyakorlatilag hiányoznak az iskolai tankönyvekből, ajánlott, hogy a tanár maga készítsen ilyen példákat, a legegyszerűbbekkel kezdve. Például, először ajánljuk fel, hogy oldják meg szóban és indokolják meg a választ.

1. Példa Oldd meg az egyenletet [9]

a) $\sin 2x = \sqrt{2}$

b) $\cos 3x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

c) $\cos x \cdot tgx = 1$

d) $\cos^2 x = 2$

A *c*) egyenletben a tangens függvény értelmezési tartományából kikövetkeztetve kapjuk a választ: $\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$ innen $\sin x = 1$, $\cos x \neq 0$ Az egyenletrendszernek nincsenek megoldásai, ezért az egyenletnek nincsenek megoldásai.

Az $a), b), d)$ egyenletek a legegyszerűbbek és nincs megoldásuk, mert a bal oldal mindegyiknél nagyobb, mint abszolut érték 1.

2. Példa Oldd meg a $\sin 7x - \sin x = 3$ egyenletet [9].

A szinusz különbsége nehéz átalakításokat eredményez, ezért irracionális.

Helyezzük át $sinx$-et jobb oldalra és kapjuk, hogy $\sin 7x = \sin x + 3$.

Az egyenlet jobb és bal oldalát kiértékelve a következőket kapjuk: $-1 \leq \sin 7x \leq 1$; $2 \leq \sin x + 3 \leq 4$, amiből arra következtetünk, hogy az egyenletnek nincs megoldása.

Tudjuk az egyenletet módosítani, mivel az egyenlet jobb és bal oldalának sok közös része van.

3. Példa Oldd meg a $\sin 7x - \sin x = 2$ egyenletet [9].

Hasonlóan gondolkodva azt kapjuk, hogy $-1 \leq \sin 7x \leq 1$; $1 \leq \sin x + 2 \leq 3$.

Ekkor az egyenlet akkor lehetséges, ha az egyenlet mindkét oldala egyenlő 1-el és az egyenlet megoldását az egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza:

$$\begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin x + 2 = 1 \end{cases}$$

Néhány ilyen típusú egyenlet megoldása során gyakran szükség van az azonos transzformációk végrehajtására, amely után meg kell vizsgálni az egyenlet jobb és bal oldalát.

4. Példa Oldd meg a $\sin^3 x + \sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ egyenletet [9].

Alakítsuk át az egyenletet $\sin^2 x \cdot (\sin x + 1) - 2\sin x - 2 = 1$, innen $\sin^2 x \cdot (\sin x + 1) - 2 \cdot (\sin x + 1) = 1$. Akkor $(\sin x + 1)(\sin^2 x - 2) = 1$.

Vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalát. Mivel $\sin x \geq -1$, ezért $\sin x + 1 \geq 0$ és mivel $\sin^2 x \leq 2$, ezért $\sin^2 x - 2 < 0$.

Ezért $(\sin x + 1)(\sin^2 x - 2) \leq 0$. Másrészt a jobb oldalon $1 > 0$.

Ezért az egyenletnek nincs megoldása.

<u>5. Példa</u> Oldd meg a következő egyenletet [9]

$$|5-6x| - 4\sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{8tg\frac{\pi x}{3}}{1+tg^2\frac{\pi x}{3}}$$

Írjuk át az egyenletet a következő alakba:

$$|5-6x| = 4\sin\frac{\pi x}{3} + 4\sin\frac{2\pi x}{3} - \frac{8tg\frac{\pi x}{3}}{1+tg^2\frac{\pi x}{3}}$$

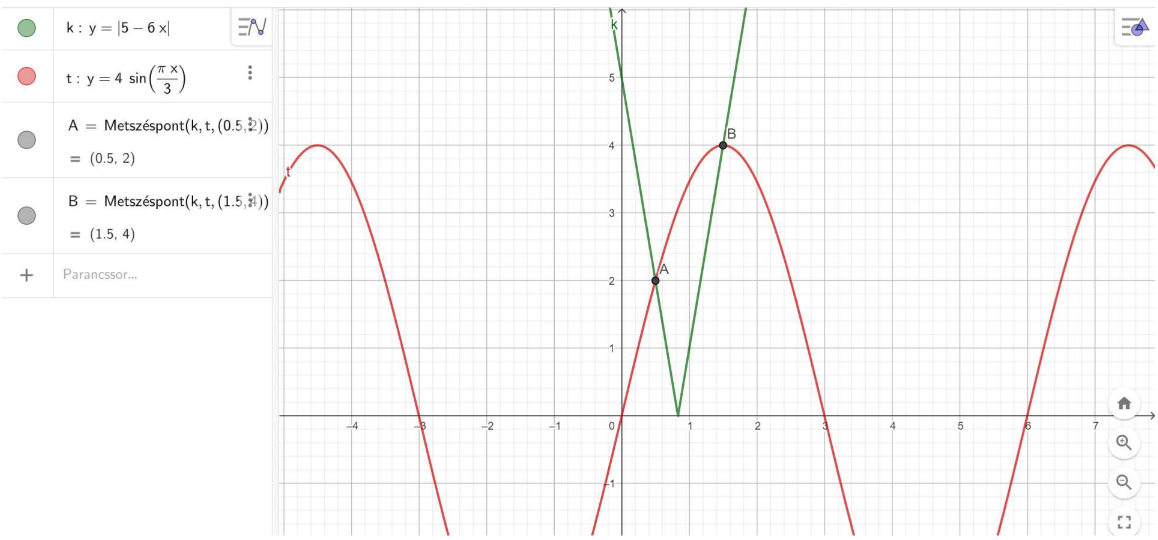
Alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát, figyelembe véve a megengedett értékeket, azaz $x \neq \frac{3}{2} + 3k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Helyettesítsük be $\frac{\pi x}{3} = t$, akkor $4\sin t + 4\sin 2t - \frac{8tgt}{1+tg^2t} = 4\sin t + 4\sin 2t - 8\sin t \cdot \cos t = 4\sin t + 4\sin 2t - 4\sin 2t = 4\sin t$

Ezután az eredeti egyenletet egyszerűbb formára alakítjuk:

$$|5-6x| = 4\sin\frac{\pi x}{3}$$

Oldd meg az egyenletet grafikusan a függvények grafikonjainak ábrázolásával, az egyenlet bal és jobb oldalát ábrázolva. (1. ábra)



1. ábra. A $|5-6x| = 4\sin\frac{\pi x}{3}$ függvény garfikonja

Az 1. ábrán látható, hogy a grafikonon két pontban metszik az abcisszán, $x = \frac{1}{2}$ és $x = \frac{3}{2}$, de az $x = \frac{3}{2}$ nem megengedett érték, ezért az egyenletnek egyetlen gyöke van, az $x = \frac{1}{2}$.

Nézzünk meg néhány technikát a trigonometrikus egyenletek megoldására. Az egyik ilyen módszer a trigonometrikus egyenletek megoldásának módszere, amely az $\sin x+\cos x$ vagy $\sin x - \cos x$ és $\sin x \cdot \cos x$ kifejezések közötti kapcsolat használatán alapul.

Ha $\sin x + \cos x = t$, akkor $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Ezért olyan trigonometrikus egyenletek megoldásánál, amelyekben a bal és a jobb oldali rész tartalmazza az $\sin x \pm \cos x$ és $\sin x \cdot \cos x$ kifejezéseket, célszerű a $\sin x \cdot \cos x = t$ behelyettesítést használni.

6. Példa Oldd meg a $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ egyenletet [9].

Az egyenlet bal oldalát figyelembe véve azt kapjuk, hogy $(\sin x - \cos x) \cdot (\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1$ vagy $(\sin x - \cos x) \cdot (1 + \frac{1}{2} \sin 2x) = 1$.

Használva a $\sin x - \cos x = t$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy $t(1 + \frac{1}{2}(1 - t^2)) = 0$ vagy $t^3 - 3t + 2 = 0$.

A kapott köbös egyenletet átalakítjuk: $t^3 - 2t - t + 2 = 0$ vagy $(t^3 - t) - (2t - 2) = 0$. Akkor $t(t^2 - 1) - 2(t - 1) = 0$ vagy $(t - 1)(t^2 + t - 2) = 0$, ahonnan a megoldás $t = -2$ és $t = 1$.

Visszahelyettesítve a t változót, kapjuk $\sin x - \cos x = 1$ vagy $\sin x - \cos x = -2$.

Mivel $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$, akkor a második egyenletnek nincs megoldása, és az első egyenlet megoldásai:

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Egyes trigonometrikus egyenletek megoldása az úgynevezett konvolúciós módszeren (a kettős argumentum szinuszképletének ismételt alkalmazása) alapul. Nézzünk néhány példát.

7. Példa Oldd meg a következő egyenletet [9]:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x$$

.

Az egyenlet bal oldali része a koszinuszok osztása, amelynek argumentumai alá vannak rendelve a következőnek: minden következő argumentum kétszer akkora, mint az előző. Ez konvolúciós technikával egyszerűsíthető.

Ebben a példában ez abból áll, hogy megszorozzuk $8\sin x$-el, és többször használjuk a dupla argumentum szinuszképletét. Ekkor a bal oldali rész leegyszerűsödik.

$8\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\sin x\cdot\cos 15x;$

$4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{2}(\sin 16x-\sin 14x);$

$4\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\sin 16x-\sin 14x;$

$2\sin 8x\cdot\cos 8x=\sin 16x-\sin 14x;$

$\sin 16x=\sin 16x-\sin 14x;$

$\sin 14x=0;$

$14x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

$x=\frac{\pi n}{14},\ n\in\mathbb{Z};$

8. Példa Oldd meg a következő egyenletet [9]:

$$\cos\frac{\pi x}{15}\cdot\cos\frac{2\pi x}{15}\cdot\cos\frac{4\pi x}{15}\cdot\cos\frac{8\pi x}{15}=0,0625$$

.

Az előbbi módszert alkalmazva a következőt kapjuk:

$$16\sin\frac{\pi x}{15}\cdot\cos\frac{\pi x}{15}\cdot\cos\frac{2\pi x}{15}\cdot\cos\frac{4\pi x}{15}\cdot\cos\frac{8\pi x}{15}=\sin\frac{\pi x}{15}$$

.

Akkor $\sin\frac{16\pi x}{15}=\sin\frac{\pi x}{15}$. Az utolsó egyenletet az egyszerűbb $\sin\frac{\pi x}{2}=0$ vagy $\cos\frac{17\pi x}{30}=0$ egyenletekre egyszerűsítjük, amelyeket probléma nélkül megoldunk.

Ezért amikor a tanulókat tanítja a tanár a trigonometrikus egyenletek megoldására, különféle módszereket kell alkalmaznia.

2. A középiskolások matematikai kompetenciájának kialakításának módszere a trigonometrikus függvények vizsgálatában

2.1. A trigonometrikus egyenletek megoldásához szükséges képességek és készségek fejlesztésének technikái

A tanulók trigonometrikus egyenletek megoldására való képességének kialakítása során ajánlatos három szakaszt megkülönböztetni [8]:

1) előkészítő;

2) az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldási képességének kialakítása;

3) egyéb típusú trigonometrikus egyenletek bevezetése és megoldási technikáinak kialakítása.

Az előkészítő szakasz célja először is a tanulók azon képességének kialakítása, hogy egységkört vagy grafikont alkalmazzanak egy egyenlet megoldásához; másodszor, megismertesse a tanulókkal a trigonometrikus függvények tulajdonságainak használatát a $\sin x = 1, \cos x = 1, tgx = 0$ és hasonló alakú egyenletek megoldására; harmadszor, külön felhívni a tanulók figyelmét a kifejezések különböző transzformációs módszereinek használatára a trigonometrikus egyenletek megoldása során [8].

Javasolhatjuk, hogy ezt a szakaszt a tanulók a trigonometrikus függvények tulajdonságaival kapcsolatos ismereteinek rendszerezése során valósítsák meg. A tanulóknak javasolt feladatok jelenthetik a fő eszközt, amelyeket vagy önállóan vagy tanár segítségével végeznek el. Néhány példa ilyen feladatokra [9]:

1) keresse meg a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallum összes számát, amelyre igaz $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és így tovább,

2) jelölje be az egységkörön azokat a P_t pontokat, amelyekre a t lehetséges értékei megfelelnek a $\sin t = \frac{1}{2}$; $tgt = -\sqrt{3}$ egyenlőségeknek és így tovább,

3) az $y = \cos x$ függvény grafikonjának segítségével, mutassa meg azt a számhalmazt, amelyre igaz $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{8}{7}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

4) oldja meg az egyenleteket:

- $\cos x = 1$,
- $\cos 3x = \cos^2 x + \sin^2 x$,
- $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x = 1$,
- $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin x = 1$,
- $1 + \cos 2x - \cos^2 x = 1$

5) oldja meg az egyenleteket:

- $\sin x \cos 2x = 0$,
- $(1 - \sin x) tgx = 0$,
- $2\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 4x = 1$

Az utolsó két feladatra figyeljünk oda. Az ajánlott egyenletek megoldása általában a szinusz és a koszinusz definiciójának alkalmazásán alapul. Az ötödik feladat elvégzése magába foglalja a vizsgált típusú trigonometrikus egyenlethalmazok megoldását. Például az utolsó egyenletet a következőképpen alakítjuk át: $1 + \cos 2x - \sin 2x \cos 2x = 1$, $\cos 2x(1 - \sin 2x) = 0$, vagyis van egy $\cos 2x = 0$, $\sin 2x = 1$. Az ajánlott egyenletek megoldása során a tanulóknak különös figyelmet kell fordítaniuk a trigonometrikus kifejezések átalakításainak céljára: ennek a kifejezésnek a helyettesítése, amely megegyezik vele, és egy trigonometrikus függvénytől függ, vagy a kifejezés lineáris tényezővé alakítása a trigonometrikus függvények tekintetében.

Az iskolások trigonometrikus egyenletek megoldására való tanításának második szakaszának megvalósítása, amely során kialakul a egyszerűbb egyenletek megoldásának képessége, magába foglalja a szám arcszinusza és a szám arckoszinusza stb. fogalmak bevezetését, általános képletek megtanulása az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldásához, az egyenletek szemléltetési képességének kialakítása a megfelelő függvény vagy az egységsugarú kör grafikonjával. Jelenleg az arcszinusz, egy szám arckoszinusza stb. fogalmak a függvényre való hivatkozás nélkül kerülnek bevezetésre, amely a szinusz, koszinusz stb. függvények inverze. E fogalmak bevezetésének alapjául az úgynevezett gyöktétel szolgál. A megadott tételt az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldási módszerének bevezetésében is felhasználjuk. Ehhez több pontot kell kiemelni a sok megoldást meghatározó képletek megtanulásának folyamatában[8]:

1. olyan intervallumot veszünk figyelembe, amelynek hossza megegyezik az egyenlet bal oldalán ábrázolt függvény legkisebb pozitív periódusával, és amelyen egy szám arcszinusza, arkoszinusza vagy arktangensének fogalma van meghatározva (az ajánlott egyenlettől függően); ha ez a függvény szinusz vagy koszinusz, akkor az intervallum két részre oszlik;

2. ezt az egyenletet minden intervallumon megoldjuk; a megoldás alapja a megfelelő trigonometrikus függvényhez megadott gyöktétel;

3. az elemzett trigonometrikus függvény periodicitási tulajdonsága alapján arra a következtetésre jutunk, hogy az $\alpha + 2\pi k$ vagy $\alpha + \pi k$ $k \in \mathbb{Z}$ (itt α a kiválasztott intervallumokhoz tartozó egyenlet megoldása) számok ennek az egyenletnek a megoldásai; ezt a következtetést használjuk a megoldási képlet előállításához.

A középiskolások trigonometrikus egyenletmegoldó képességének kialakítása folyamatának harmadik szakaszának megvalósításával kapcsolatban két dologra fontos odafigyelnünk [8]:

1. Ajánlott megismertetni a tanulókkal a trigonometrikus egyenletek megoldásának módszereit, amelyek nem a legegyszerűbbek, a következő séma szerint: rátérni egy adott trigonometrikus egyenletre $\rightarrow$ keresni egy megoldási módszert (tanár a diákkal) $\rightarrow$ a keresett módszer átvitele azonos típusú egyenletekre $\rightarrow$ következtetések levonása a megoldás jellemzőiről

2. Ha kellően begyakoroltak egy megoldási módszert, akkor mutatni kell ugyanazon példára egy másik megoldási módszert is. Ennek érdekében célszerű egy olyan összetett egyenletet választani, olyan módszereket keresni, amelyek a megoldás során

alkalmazhatók és a tanulók figyelmét arra összpontosítani, ami nekik a legkézenfekvőbb.

Például egy ilyen összetett trigonometrikus egyenlet [9]: $\sin x + 5 = 7\cos x$.

Ez az egyenlet megadható:

1) az $\sin\frac{x}{2}$ és $\cos\frac{x}{2}$ tekintetében homogén típusban

   $(6\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}) = 0$

2) másodfokúra a $tg\frac{x}{2}$ használva automatikus helyettesítéssel

   $6tg^2\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2} - 1 = 0;$

3) egyszerűbb trigonometrikus formára

   $\cos\left(x + arccos\frac{7}{\sqrt{50}}\right) = \frac{5}{50}$ a segédváltozó bevitelének alkalmazása után

Az egyenlet megoldási módszereinek összehasonlítása ezekben az esetekben azt mutatja, hogy a legcélszerűbb ezt az egyenletet a legegyszerűbb trigonometrikusra redukálni, mivel a megoldási folyamat a legkevesebb műveletből áll, és ezen műveletek végrehajtása után a kapott egyenlet egyenlő lesz az eredetivel.

Befejezésül példákat adunk azokra a trigonometrikus egyenletekre, amelyeket ajánlunk a tanulóknak önállóan elvégezni [9]:

– Az első csoportba a trigonometrikus egyenletek tartoznak, amelyek megoldási módja a trigonometrikus függvények definícióján és egyes tulajdonságain alapul.

  a) $\cos x \cdot tgx = 1$

  b) $\cos x - \sin x = 3$

  c) $\sin 3x = 2 + \sin x$

  d) $\sin x = a + \frac{1}{a}$, $a \neq 0$

– A második csoportba az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek tartoznak, amelyek megoldási módja a trigonometrikus függvények definícióján, valamint a szám arcszinusza, arckoszinusza és arctangensén alapul.

  a) $2\cos\frac{x+60^\circ}{2} + \sqrt{3} = 0;$

b) $3tg(2x + \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} = 0$;

c) $3\sin x - 3 = \sqrt{10}$;

d) $\frac{\pi}{7} - \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

– A harmadik csoport trigonometrikus egyenleteket egyesít, amelyek megoldásához trigonometrikus és algebrai átalakjtásokra lesz szükség ahhoz, hogy az egyenletet az ismert formák valamelyikére redukáljuk.

a) $\cos^2(x + \pi) + \cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) + 2 = 0$;

b) $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z = \sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}$;

c) $\frac{3}{\sin x+1} = 2\sin x - 3$;

d) $2\sin^2 t + \sin t\cos t - 3\cos^2 t = 0$;

e) $\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = 0$

2.2. A matematikai kompetencia kialakításának módszertana trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásában

A tanulók trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldására való képességének kialakítása során három szakaszt tudunk megkülönböztetni [8]:

1) előkészítő;

2) az egyszerűbb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldási képességének kialakítása;

3) egyéb típusú trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása.

Az előkészítő szakasz célja, hogy a tanulókban kialakuljon az egység kör vagy grafikon használatának képessége az egyenlőtlenségek megoldására, ugyanis [8]:

– az $\sin x > 1, \sin x < -1, \cos x > 1, \cos x < -1$ alakú egyszerűbb egyenlőtlenségek megoldásának képessége a szinusz- és koszinuszfüggvény tulajdonságainak segítségével;

– a kettős egyenlőtlenségek hozzáadásának képessége egy számkör ívéhez vagy függvénygrafikon ívéhez;

– a trigonometrikus kifejezések különféle átalakításainak végrehajtásának képessége.

Ajánlatos, hogy ezt a szakaszt a tanulók a trigonometrikus függvények tulajdonságaival kapcsolatos ismereteinek rendszerezése során valósítsák meg. Fő eszközként szolgálhatnak az ajánlott feladatok, amelyeket önállaón vagy a tanárral végez el, valamint a trigonometrikus egyenletek megoldása alatt szerzett készségek.

Néhány példa az ilyen feladatokra [9]:

1. Jelölje be a P_α pontot az egységkörön, ha:

   $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = 2\pi$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

2. A koordinátasík melyik negyedében található a P_α pont, ha α egyenlő: $\frac{3\pi}{8}$; $-\frac{2\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{4}$; $-2,3\pi$; $\frac{17\pi}{5}$

3. Jelölje be a P_α pontokat az egység körön, ha:

   a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

   b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

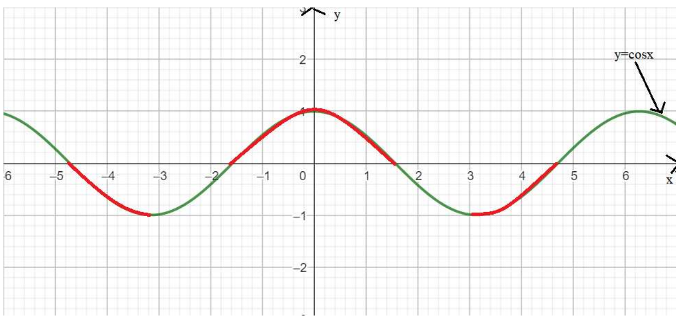
   c) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$;

   d) $\cos\alpha = -1$;

   e) $tg\alpha = -1$;

   f) $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

4. Írjon fel kettős egyenlőtlenséget a grafikon kiválasztott piros szakaszaira:



2. ábra. Az $y = \cos x$ függvény grafikonja

5. Old meg az egyenlőtlenségeket: $\sin x > 1$, $\sin x < -1$, $\cos x > 1$, $\cos x < -1$

6. Alakítsd át a kifejezést: $\sin 5x \cos 4x - \cos 5x \sin 4x$

A trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásának elsajátításának második szakaszában, a tanulói tevékenységszervezés módszerével kapcsolatban, az alábbi ajánlások adhatók. Ugyanakkor oda kell figyelnünk, hogy a tanulóknak már az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldása során megtanult egységkörrel kell dolgozniuk.

Először is az egyszerűbb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldására szolgáló általános módszerrel motiválhatjuk, például egy ilyen típusú egyenlőtlenséggel: $\sin 5x \cos 4x \cos 5x \sin 4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Az előkészítő szakaszban megszerzett tudás és készségek segítségével egyszerűbb alakra lehet hozni: $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, azonban nehezen találhatják meg a kapott egyenlőtlenség megoldási halmazát, mivel azt lehetetlen csak a szinuszfüggvény tulajdonságaival megoldani. Ez elkerülhető, ha megfelelő ábrát alkalmaz (az egyenlet grafikus megoldása vagy egység kör segítségével).

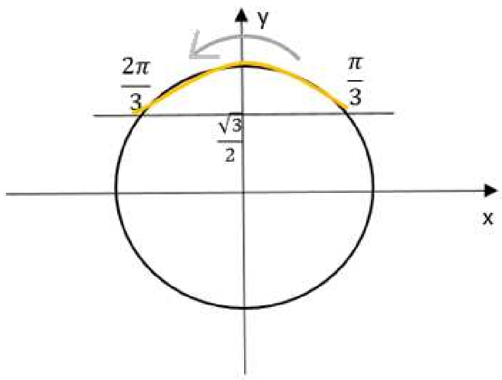
Másodszor, a tanárnak felkell hívnia a tanulók figyelmét, a feladat különböző megoldási módjaira és megfelelő példát kell bemutatni az egyenlőtlenség megoldására, az egységkör segítségével. Ezt az egyenlőtlenséget az egységkör segítségével a következőképpen oldhatjuk meg:

1. lépés Rajzoljunk egy egységkört, jelöld meg a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pontot az ordináta tengelyen és ezen a pontot keresztül húzz egy párhuzamos egyenest az abcissza tengellyel. Ez az egyenes két pontban metszi az egységkört. Ezen pontok mindegyike olyan számokat jelöl, amelyek szinusza $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. lépés Ez a vonal két ívre osztotta a kört. Válasszuk ki azt, ahol azok a számok vannak ábrázolva, amelyek szinusza nagyobb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Természetesen ez az ív a húzott egyenes felett helyezkedik el.

3. lépés Válasszuk ki a kapott ív egyik végét. Írjuk fel az egyik számot, amelyet az egységkör $\frac{\pi}{3}$ pontja képvisel.

4. lépés Most pedig a kiválasztott végtől menjünk át a másik végig. Itt emlékezzünk arra, hogy az óramutató járásával ellentétes irányba haladunk, amerre növekednek a számok (ellenkező irányba haladva a számok csökkennének). írjuk fel az ív másik végén szereplő $\frac{2\pi}{3}$ számot is.



3. ábra. Az egyenlőtlenség megoldása egységkörrel

Így azt látjuk, hogy az $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenségnek megfelel $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. Megoldottuk a szinuszfüggvény azonos periódusán elhelyezkedő számok egyenlőtlenségét. Ezért az egyenlőtlenség minden megoldása felírható $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ alakban, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Felhívjuk a diákok figyelmét arra, hogy a koszinuszfüggvény egyenlőtlenségeinek megoldása során az ordináta tengellyel húzunk párhuzamos egyenest.

A tanulók trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldási képességének kialakítása folyamatának harmadik szakaszának megvalósításával kapcsolatban csak két dolgot említünk meg [8].

Először is ajánlott a diákokat megismertetni a trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásának módszereivel, amelyek nem a legegyszerűbbek, a következő séma szerint: választani egy konkrét trigonometrikus egyenlőtlenséget $\rightarrow$ közösen (tanár a tanulókkal) megkeresni a megoldást $\rightarrow$ a talált megoldási módszer átvitele hasonló egyenlőtlenségekre[8].

Másodszor, a tanulók tudásához mérten, olyan egyenlőtlenséget kell választani, aminek megoldása különféle, a megoldás során megvalósítható átalakításokat igényel és a tanulók figyelmét arra öszpontosítsa amelyik nekik a legkézenfekvőbb. Néhány ilyen egyenlőtlenség [8]:

- $\cos^2 x + \cos x \leq -\sin^2 x$;
- $tg(3x - \frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$;

- $5 - 7\sin x = 3\cos^2 x$

Néhány példa a tanulóknak az önálló munkához [9]:

1) $2\cos x + \sqrt{3} \leq 0;$

2) $\sin^2 x - 6\sin x \geq 0;$

3) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2};$

4) $\sin x > -\frac{1}{2};$

5) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2};$

6) $tgx > \sqrt{3};$

7) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$

8) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2};$

9) $2\sin x + \sqrt{3} \leq 0;$

10) $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$

Tehát a Trigonometrikus egyenlőtlenségek témában ajánlatos azt tanulmányozni, ami lehetővé teszi a tanulók számára, hogy észrevegyék a trigonometrikus egyenlőtlenségek sajátosságait, ezzel fejlesztve matematikai kompetenciájukat.

3. A trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek téma összehasonlítása Ukrajnai tankönyvekben

A tanulók számára a tanári magyarázat mellett a tankönyv a fő tudásforrás. A „Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek” minden tankönyvben másképpen van bemutatva. A következő hat 10. osztályos tankönyv került elemzésre:

- A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. C. Jakir: Algebra és az analízis elemei. Térmértan (alap szint) 10. osztály, 2018
- J. P. Nelin: Algebra és az analízis elemei (profil szint) 10. osztály, 2010
- J. P. Nelin: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018
- H. P. Bevz, V. H. Bevz: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018
- O. Sz. Iszter: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018
- A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. C. Jakir, D. A. Nomirovszkij: Algebra és az analízis elemei, (profil szint), 10. osztály, 2010

1. A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. C. Jakir: Algebra és az analízis elemei. Térmértan (standard szint) 10. osztály, 2018 [10]

   - *A kutatási téma felépítése.*

     A trigonometrikus egyenletek nem külön paragrafusban szerepelnek, hanem a „Trigonometrikus függvények” paragrafusában. A következő altémák külön kiemelve:

     – A $\cos x = b$ egyenlet

     – A $\sin x = b$ és a $tgx = b$ egyenletek

     – Algebrai egyenletekké alakítható trigonometrikus egyenletek

- *Elméleti anyag bemutatása.*

  Más tankönyvektől eltérően a szerző az elméleti anyagot a következő séma szerint mutatja be: trigonometrikus egyenlet → inverz trigonometrikus függvény. Ezenkívül a szerző nem használja a "legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek" fogalmát és a paragrafusban nincs meghatározozva, hogy mi is az a trigonometrikus függvény. Az elméleti anyag átláthatóan van bemutatva. A trigonometrikus egyenletek megoldását grafikusan ábrázolja trigonometrikus függvények grafikonjain, de nincs elmagyarázva az egységkör használata. Ezenkívül a szerző nem sorol fel különböző trigonometrikus egyenlettípusokat, csak példák vannak az algebraira redukálható egyenletekről. A tankönyv nem alkalmas önálló tanulásra.

- *Feladatok felépítése.*

  Minden elméleti anyag után találunk megoldott minta feladatokat. Az altémákhoz önálló megoldást kívánó feladatokat is találunk, nehézségi szintű sorrendben. Véleményem szerint a kiválasztott feladatok mennyisége nem elegendő a téma alapfogalmainak elsajátításához. Különösen kevés feladat jut a közepes szintű tanulóknak. Mint ismeretes, a téma elsajátításához minél több gyakorlati feladatot kell elvégezni, ami ebben a tankönyvben nincs elég. Ami a magas szintet illeti, csak néhány azonos típusú feladat kerül bemutatásra.

2. J. P. Nelin: Algebra és az analízis elemei (akadémiai szint) 10. osztály, 2010 [11]

   - *A kutatási téma felépítése.*

     A trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek ebben a tankönyvben külön paragrafusban szerepelnek a trigonometrikus függvényektől. A trigonometrikus függvények fejezetben a $\cos x, \sin x, tgx$ és $ctgx$ függvények és tulajdonságaik külön alfejezetként ki vannak emelve. A trigonometrikus egyenletek és egynlőtlenségek fejezetében is alfejezetként a következők vannak kiemelve:

     - Az $y = \arcsin x$ függvény
     - Az $y = \arccos x$ függvény
     - Az $y = arctgx$ függvény
     - Az $y = arcctgx$ függvény

Illetve

  - A $\cos x = a$ egyenlet
  - A $\sin x = a$ egyenlet
  - A $tgx = a$ és a $ctgx = a$ egyenletek

- *Elméleti anyag bemutatása.*

  A tankönyvben minden témánál magyarázat és indoklás található. A fontos adatok táblázatban átláthatóan vannak feltüntetve. A trigonometrikus egyenletek megoldását grafikusan ábrázolja trigonometrikus függvények grafikonjain, egységkörön a részesete van ábrázolva. A témáknál nincsenek definíciók megfogalmazva. Önálló tanulásra ez a tankönyv alkalmas, mivel minden magyarázva van benne.

- *Feladatok felépítése.*

  Ebben a könyvben is találunk az elméleti anyag után minta feladatokat, de ebben magyarázat is található. Az altémákhoz tartoznak önálló megoldást kívánó feladatok, nehézségi szintű sorrendben. A feladatok mennyisége szerintem nem elegendő egy gyengébb tanulónak ahhoz, hogy kellően begyakorolja. A magas szintű feladatokból szintén nincs elég.

3. J. P. Nelin: Matematika. Algebra és az analízis elemi és mértan (standard szint), 10. osztály, 2018 [12]

   - *A kutatási téma felépítése.*

     A trigonometrikus egyenletek a „Trigonometrikus függvények" fejezetben találhatók. Csak egyetlen paragrafus van az egyenleteknek, "A legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek". Ami a következő alfejezetekre oszlik:

     - Inverz trigonometrikus függvények;
     - Az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldása;
     - Trigonometrikus egyenletek megoldása a legegyszerűbbre redukálva.

   - *Elméleti anyag bemutatása.*

     A szerző az elméleti anyagot táblázat formájában mutatja be a főbb definíciókkal. A trigonometrikus egyenlet fogalmát előzetes magyarázat és szemléltetés nélkül vezeti be. A tanulóknak nem célszerű ezt a tankönyvet önálló tanulásra használni, mivel az nem tartalmaz elegendő anyagmagyarázatot.

A szerző egyetlen módszert ad a legegyszerűbbre redukált egyenletek megoldására - a változók cseréjének módszerét. Minden más egyenlettípus és megoldási módszer egy csoportba kerül.

- *Feladatok felépítése.*

  Az elméleti anyag után minden paragrafusban példák találhatók a feladatok megoldására utasításokkal és megjegyzésekkel. A tanóra és a házi feladatra szánt gyakorlatok nehézségi szintekre vannak osztva. A paragrafusok viszonylag elegendő számú, változó nehézségű feladatot tartalmaznak, de grafikai jellegű feladatok nincsenek. Céljuk, hogy bemutassák, hogy a trigonometrikus egyenleteknek végtelen számú megoldása van, ami megkülönbözteti őket az összes többi egyenlettől.

4. H. P. Bevz, V. H. Bevz: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018 [13]

   - *A kutatási téma felépítése.*

     Ez a tankönyv azon osztályok tanulóinak szól, ahol heti két órát szánnak az algebra órára. A Trigonometrikus egyenletek téma, a Trigonometrikus függvények fejezetben található. Erre a témára csak egy paragrafus van szentelve.

   - *Elméleti anyag bemutatása.*

     A trigonometrikus egyenletek megismertetésére a szerző a szemléletesség és probléma megoldás módszerét alkalmazta. Két inverz trigonometrikus függvény (arcszinusz, arckoszinusz) definíciója van megadva. Ebben a tankönyvben megvan fogalmazva, hogy mi is az a trigonometrikus egyenlet. A szerző az egyszerűbb trigonometrikus egyenleteket csak egy táblázatba foglalta össze, de konkrétan nincsenek elmagyarázva, csak pár egyszerűbbre redukálható trigonometrikus egyenletről ejt néhány szót. Ami van a könyvben elméleti anyag az érthetően van bemutatva. Ha például a $\sin x = b$ egyenletet a tanár elmagyarázza a tanulóknak, akkor a tanulók képesek lesznek önállóan más típusú egyenleteket megoldani.

A tankönyv hátránya, hogy a "Trigonometriai egyenletek" témakör összes elméleti anyaga egy paragrafusban kerül bemutatásra.

- *Feladatok felépítése.*

  Már az elméleti anyagban magyarázatként is vannak megoldva feladatok, majd van egy külön "Csináljuk együtt" rész, ahol bemutatásra kerülnek a példa feladatok megoldva. Itt az egyiknél egységkörön is ábrázolva van a megoldás. Hátránya, hogy csak egy különböző nehézségi szintű feladat kerül bemutatásra.

  A tankönyvben az a jó, hogy számos feladat van ajánlva az osztálytermi és az önálló munkához, különböző nehézségi szintűek. Illetve van szóbeli megoldásra is és a témát megismétlésre is ajánlva feladat. Érdemes megfigyelni, hogy a 471, 472 és 474 feladatokban grafikonról kell leolvasni a megoldást.

5. O. Sz. Iszter: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018 [14]

   - *A kutatási téma felépítése.*

     A Trigonometrikus egyenletek téma a Trigonometrikus függvények fejezetben található, az "Egyszerűbb trigonometrikus egyenletek" paragrafusban. A témát a következő séma szerint tanulmányozzuk: inverz trigonometrikus függvények→ egyszerűbb trigonometrikus egyenletek → egyszerűbbre redukálható egyenletek.

   - *Elméleti anyag bemutatása.*

     A szerző megadja az inverz trigonometrikus függvények definícióját és mindegyikhez kiemeli a magyarázatot, de grafikonon és egységkörön nincsenek elmagyarázva. A trigonometrikus egyenletek fogalmait és megoldásait egységkörön bemutatva is megadta.

     Az egyszerűbbre redukálható trigonometrikus egyenletek résznél a szerző nem emel ki külön módszereket a megoldásukra, csak néhány példát mutat be.

   - *Feladatok felépítése.*

     Minden definíció után a szerző példákat mutat be a megoldással és magyarázattal. A bekezdésben elegendő számú feladat van mind az órai munkához, mind a házi feladathoz, de nincsenek feladatok grafikonok készítésére és egység kör ábrázolására.

6. A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. C. Jakir, D. A. Nomirovszkij: Algebra és az analízis elemei, (profil szint), 10. osztály, 2010 [15]

- *A kutatási téma felépítése.*

  Ebben a tankönyvben külön fejezetekben van a Trigonometrikus függvények téma és a Trigonometrikus egyenletek. Az alábbiak külön paragrafusban vannak:

  1) A $\cos x = b$ egyenlet;

  2) A $\sin x = b$ egyenlet;

  3) A $tgx = b$ és a $ctgx = b$ egyenletek;

  4) Az $y = \arccos x$ és az $y = \arcsin x$ függvények;

  5) Az $y = arctgx$ és az $y = arcctgx$ függvények;

  6) Algebrai egyenletekké alakítható trigonometrikus egyenletek;

  7) Trigonometrikus egyenletek megoldása tényezőkre bontás módszerével;

  8) Trigonometrikus egyenlőtlenségek

- *Elméleti anyag bemutatása.*

  Az elméleti anyag bemutatásához a szerző jól alkalmazta a szemléltetés módszerét. Az arccos (arcsin, *arctg*, *arcctg*) fogalmát grafikusan ábrázolva vezeti be, ami hozzásegíti az általános kép kialakítását. A szerző kiemeli a trigonometrikus egyenletek sajátosságát is a megoldásaik végtelen sokasága miatt, felhívja a figyelmet a trigonometrikus egyenletek megoldásának minden lehetőségére.

  Ebben a tankönyvben a tananyag bemutatása nagyon részletes, és lehetővé teszi a tanulók számára a téma önálló feldolgozását.

- *Feladatok felépítése.*

  A tananyag bemutatása után konkrét példák kerülnek bemutatásra az elméleti anyagról. A szerző részletes megoldást nyújt ezekre a példákra, a megoldáshoz lépésről lépésre szóló utasításokkal. A paragrafus számos megoldandó feladatot mutat be. Nagyon sok fajta és tudásszinthez elegendő feladat van. Különösen sok elegendő és magas szintű példa van, amely lehetővé teszi a diákok számára, hogy többet gyakoroljanak és jobban tanulják meg a témákat.

Mindegyik tankönyvben van ami jól van bemutatva és van ami hiányos. Az újabb tankönyvek már össze vannak vonva a mértan könyvekkel, így a témákból is szinte csak a lényeg van benne. Aki jobban beleszeretne mélyülni a trigonometria világába akkor ajánlatos, hogy a 2. vagy 6. tankönyvet használja, ami profil szintű. Szerintünk az elméleti anyag a 2. tankönyvben van kidolgozva a legérthetőbben. A feladatok mennyisége az 5. és 6. tankönyvekben a legtöbb, ezért begyakorlásra ezeket ajánlanánk. Az alapszintű tankönyvek közül még a 4. tankönyvet ajánlanánk gyakorlásra.

A tankönyvek az oktatási folyamat fontos elemei, és eszközként működnek a tanár kezében. Ezért szükséges, hogy minden tankönyv megfeleljen az oktatási programoknak, és teljes mértékben lefedje az elméleti anyagot.

Összegzés

Az iskolások matematikai kompetenciájának fejlesztési folyamata nagyon összetett és sokrétű. A munka során rákellett jönnünk, hogy ennek a fogalomnak nincs egységes értelmezése. A matematikai kompetencia fogalmába tartozik: algoritmikus, logikai, grafikus, transzformációs kompetencia, rajzkompetencia, számítási kompetencia, matematikai nyelv. A matematikaoktatás kiemelt feladata, hogy megtanítsa a tanulót bármilyen helyzet szimbólumnyelven történő értelmezésére, matematikai eszközökkel történő megoldására.

A matematikai, oktatási és módszertani irodalmak tanulmányozása lehetővé tette számunkra, hogy rendszerezzük a különböző típusú trigonometrikus egyenletekről és egyenlőtlenségekről szóló információkat, valamint megoldási módszereket.

A szakdolgozat során a kitűzött célt sikerült elérni.

Hivatkozások

[1] Babanszki J.: Pedagógia. 2. kiadás, 2018

[2] Бормотова А. Г., Мамалига Р. Ф.: З досвіду проектування уроку математики з використанням моделі «перевернутий клас». Актуальні питання викладання математики, інформатики та інформаційних технологій: міжвузівська збірка наукових праць, 2018.

[3] Галіцина І. М., Половнікова Н. Л. Мобільне навчання як нова технологія в освіті. Освітні технології та суспільство. 2011. № 1.

[4] Кара-Сал Н. М.: Використання властивостей функцій під час вирішення математичних завдань. Навчально-методичний посібник з практикуму вирішення математичних завдань, 2017.

[5] Коробова Т. М., Овчарова Л. А.: Застосування Web 2.0 технологій під час уроків математики для формування основних математичних компетенцій за умов ДОС, 2017.

[6] Kolesznikova O. I.: Дидактичний потенціал мобільних технологій у навчанні школярів математики на щаблі основної загальної освіти, 2019

[7] Тализіна Н. Ф. Управління процесом засвоєння знань, 2014.

[8] Теорія та методика навчання математики: загальна методика: навч. посібник / за ред. Є. А. Суховієнко, З. П. Самігулліна, С. А. Севостьянова, Є. М. Ерентраут, 2010.

[9] Збірник завдань з математики для вступників до вузів. Навчальний посібник / за ред. М. І. Сканаві. Київ : Вища школа, 2012.

[10] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. C. Jakir: Algebra és az analízis elemei. Térmértan (alap szint) 10. osztály, 2018

[11] J. P. Nelin: Algebra és az analízis elemei (profil szint) 10. osztály, 2010

[12] J. P. Nelin: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018

[13] H. P. Bevz, V. H. Bevz: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018

[14] O. Sz. Iszter: Matematika. Algebra és az analízis elemei és mértan (alap szint), 10. osztály, 2018

[15] A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. C. Jakir, D. A. Nomirovszkij: Algebra és az analízis elemei, (profil szint), 10. osztály, 2010

Ábrák jegyzéke

Резюме

Процес розвитку математичної компетентності учнів є дуже складним і багатогранним. Під час нашої роботи нам довелося зрозуміти, що цей термін не має єдиного визначення. До поняття математичної компетентності входять: алгоритмічна, логічна, графічна, трансформаційна компетентність, малюнкова компетентність, обчислювальна компетентність, математична мова. Основне завдання математичної освіти полягає у навчанні учня інтерпретувати будь-яку ситуацію за допомогою символьної мови та знаходити математичні шляхи її вирішення.

Вивчення математичної, освітньої та методичної літератури дало нам змогу систематизувати інформацію про різні типи тригонометричних рівнянь та нерівностей, а також методи їх розв'язання.

Під час написання дипломної роботи нам вдалося досягти поставленої мети.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

Дата перевірки:
17.05.2023 11:05:50 EEST

Дата звіту:
17.05.2023 11:13:29 EEST

ID перевірки:
1015127029

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
100011749

Назва документа: szakdolgozat_Bara_Cintia

Кількість сторінок: 30 **Кількість слів:** 6387 **Кількість символів:** 45299 **Розмір файлу:** 453.74 KB **ID файлу:** 1014808769

3.65% Схожість

Найбільша схожість: 0.85% з Інтернет-джерелом (https://archive.org/stream/newplanespherica00went/newplanespheric

3.65% Джерела з Інтернету | 210 .... Сторінка 32

0.41% Джерела з Бібліотеки | 5 .... Сторінка 34

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 99

Nyilatkozat

Alulírott, Kiss Cintia, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.