ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Розробка розділів е-підручника для підтримки вивчення теми «Тригонометрія»

_____________Тар Бенце-Балаж Олександрович______________

Студент IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **____Головач Йожеф Ігнацович ___**

_____ Доктор технічних наук, професор _____

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Розробка розділів е-підручника для підтримки вивчення теми «Тригонометрія»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

Тар Бенце-Балаж Олександрович

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Головач Йожеф Ігнацович**

Доктор технічних наук, професор

Рецензент: **Стойка Мирослав Вікторович**

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

Берегове
2023

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

E-tankönyv fejezetének fejlesztése a "Trigonometria" téma tanulmányozásának támogatására

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: ________Tar Bence Balázs__________

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: ___ Holovács József________

___ Műszaki tudományok doktora, professzor_

Recenzens: ______Sztojka Miroszláv____

__Docens, fizika és matematika tudományok kandidátusa_

Beregszász – 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez a szakdolgozat az elmúlt hónapok munkájának eredménye, melynek célja egy e-tankönyv készítése. Ez az interaktív tankönyv a trigonometria számos részét magába foglalja. Ajánlom mindazoknak a diákoknak, akik szeretnék elsajátítani a trigonometria alapjait, és segítséget keresnek a témakör tanulmányozásában.

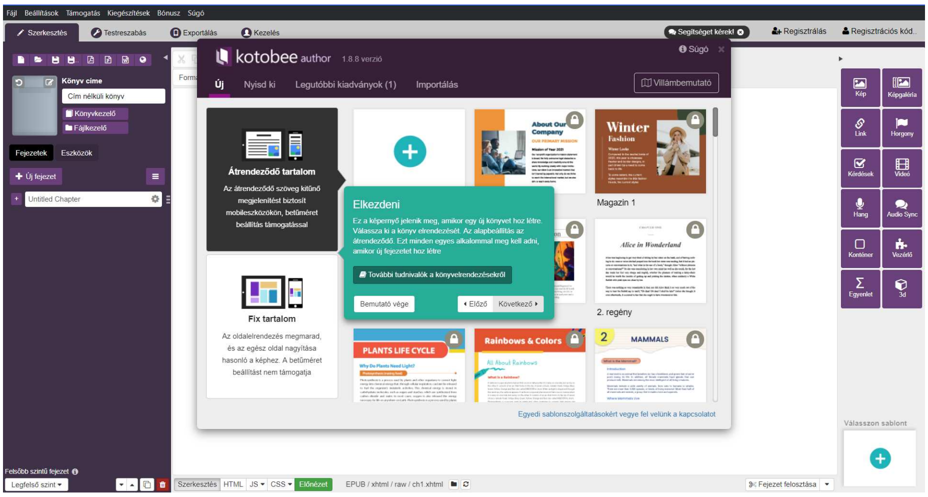
Az tananyag megírásakor alaposan tanulmányoztam az adott témakört, melyhez számos irodalmat és forrást felhasználtam. Az alapfogalmakat és a szögfüggvényeket a lehető legegyszerűbben igyekeztem bemutatni, hogy az olvasók könnyen megérthessék a témát. Az e-tankönyvben a fontosabb témaköröket részletesen taglalom, és példákkal szemléltetem a különböző fogalmakat és képleteket.

Az e-tankönyv készítéséhez a Kotobee nevű szoftvert használtam, melynek segítségével interaktív és multimédiás tartalmakat tudtam létrehozni. Az e-tankönyvben megtalálhatóak videók, képek, és interaktív feladatok, amelyek segítik a diákok tanulását és megértését. Célom, hogy bemutassam milyen előnyökkel rendelkeznek az elektronikus tananyagok.

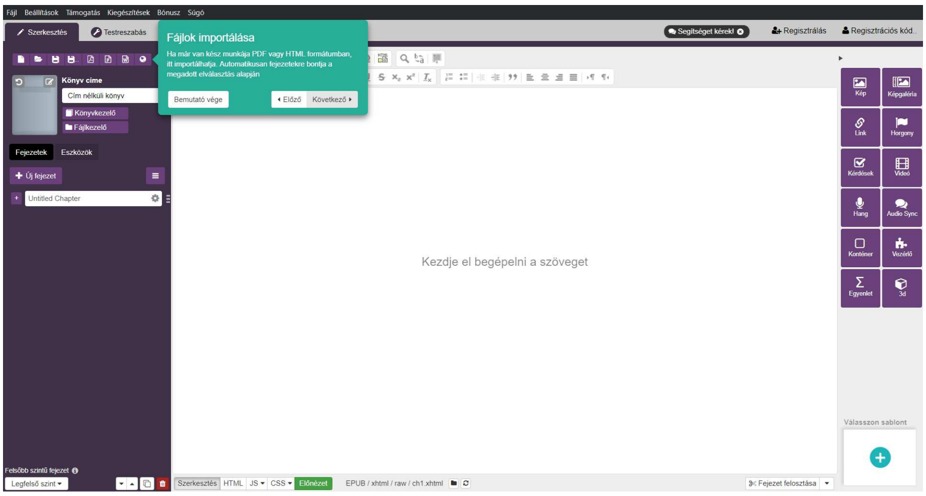
Remélem, hogy munkám segítséget nyújt a trigonometria alapjainak elsajátításában, hasznos eszköz lesz mindazoknak akik használják és az e-tankönyv olvasása során élvezetes és eredményes időtöltést nyújt!

1. A Kotobee elektronikus könyvtár bemutatása

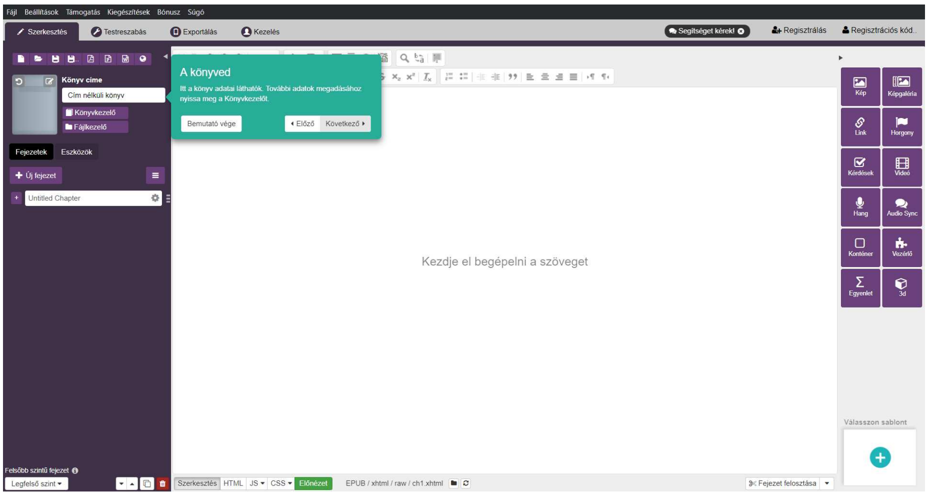
1.1. Felhasználói felület



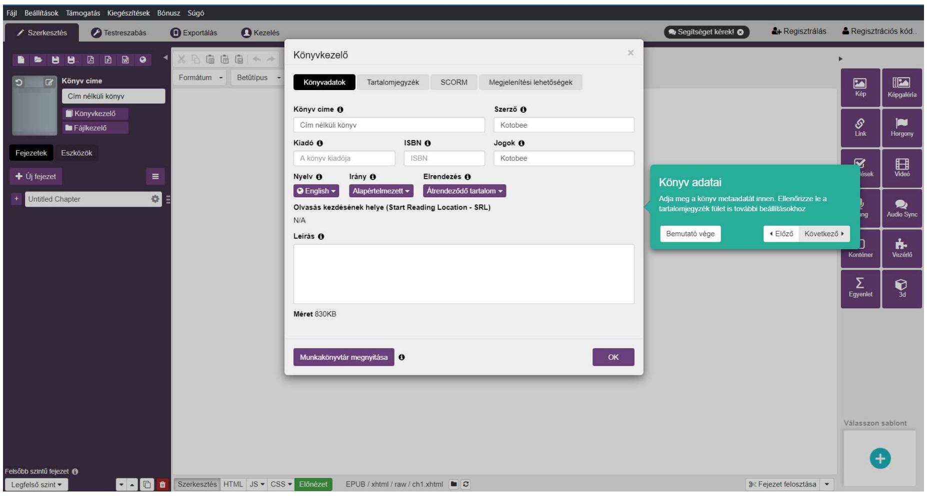
1. ábra. Új tartalom létrehozása



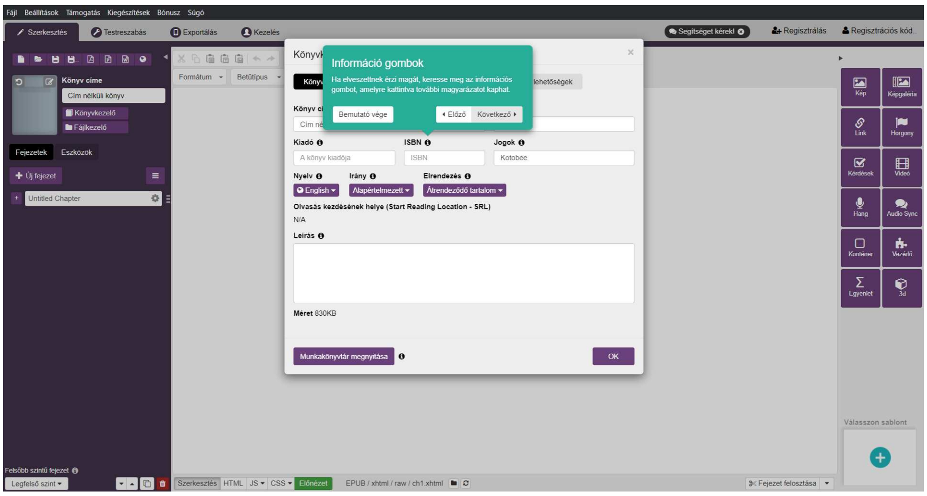
2. ábra. Fájlok importálása



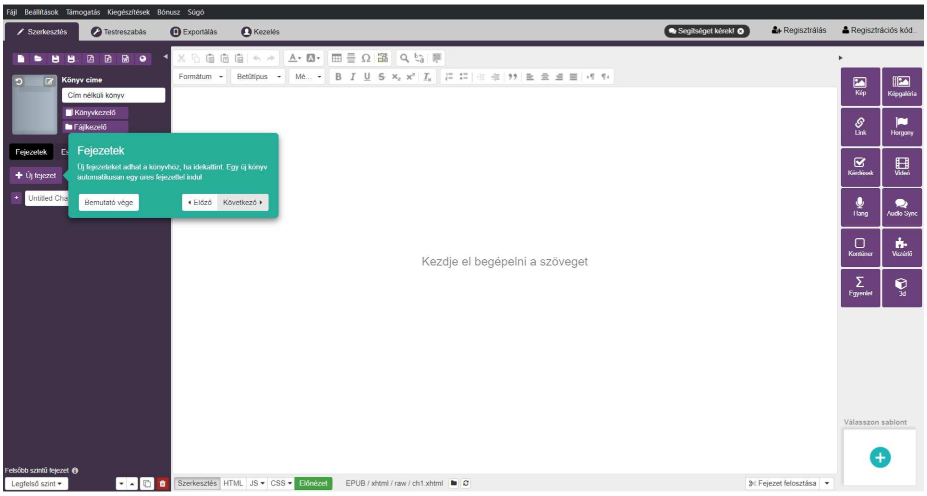
3. ábra. A könyv adatai-1



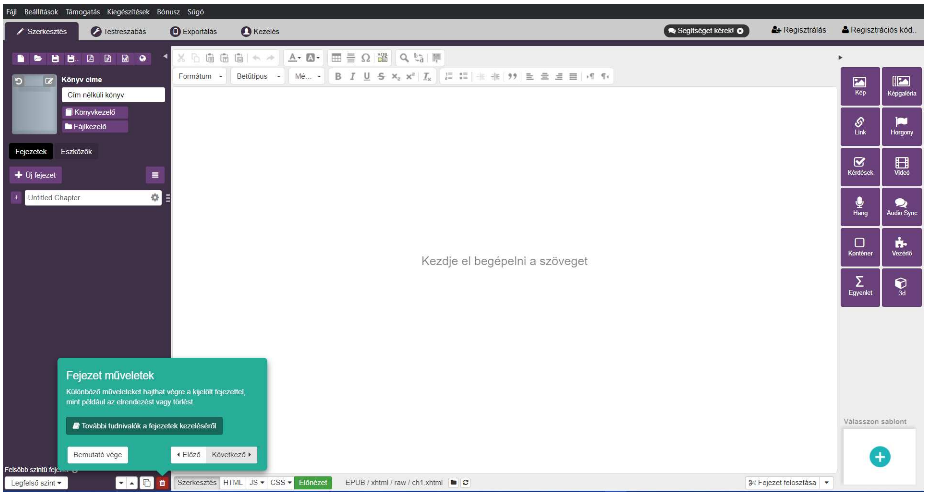
4. ábra. Könyv adatai-2



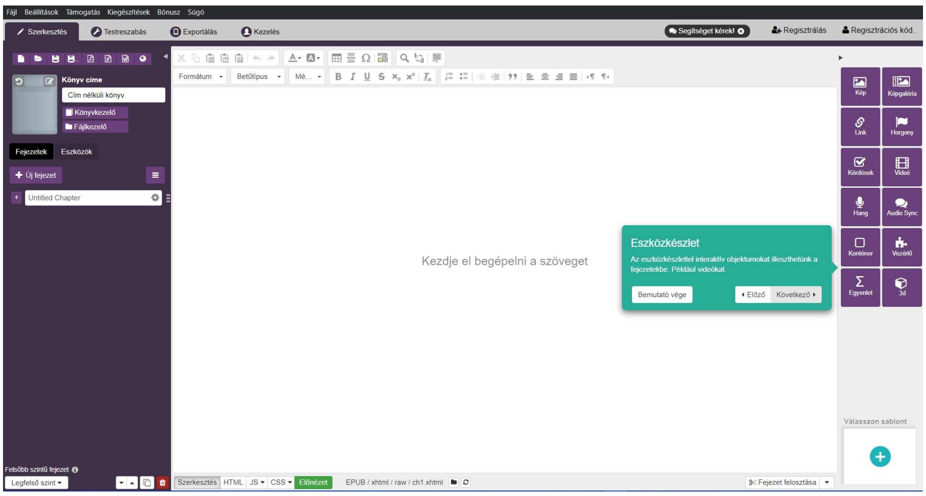
5. ábra. Információs gombok



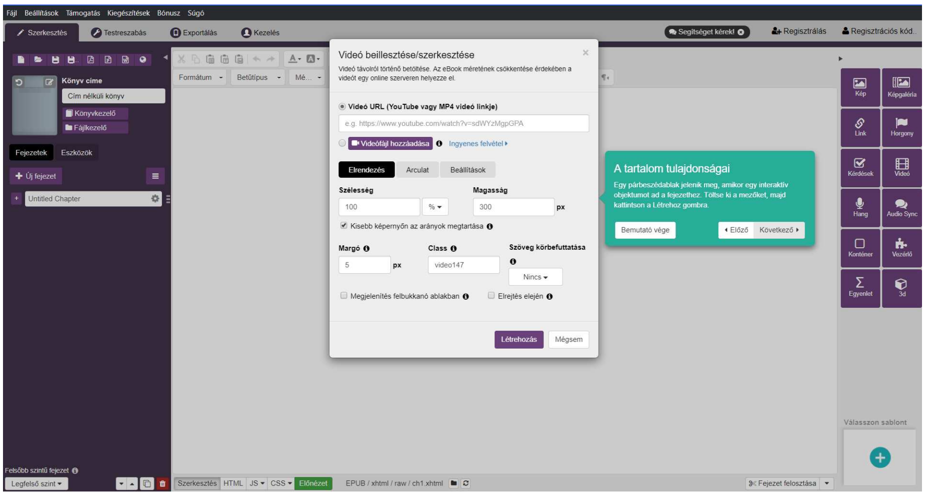
6. ábra. Fejezetek létrehozása



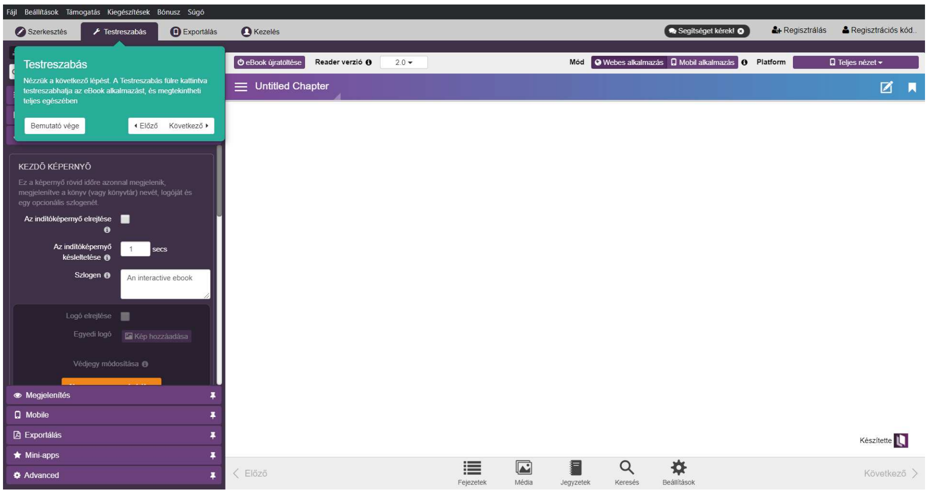
7. ábra. Műveletek fejezetekkel



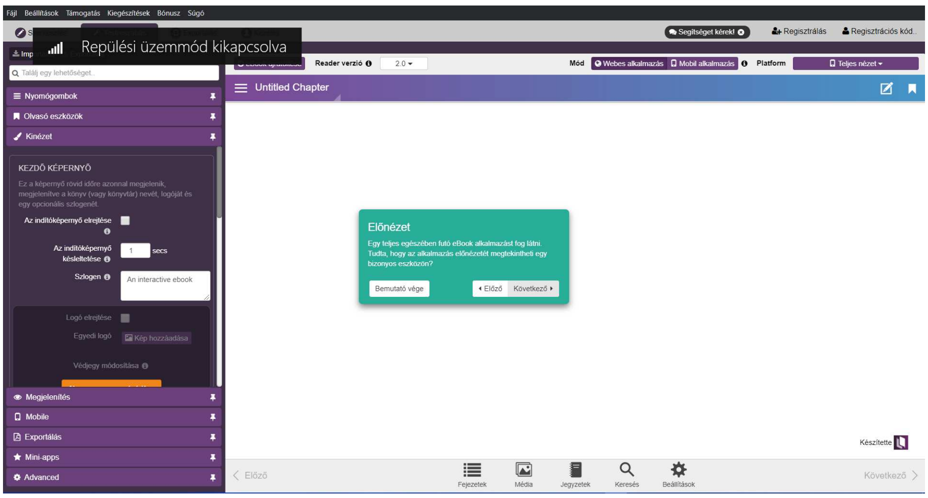
8. ábra. Eszközkészlet



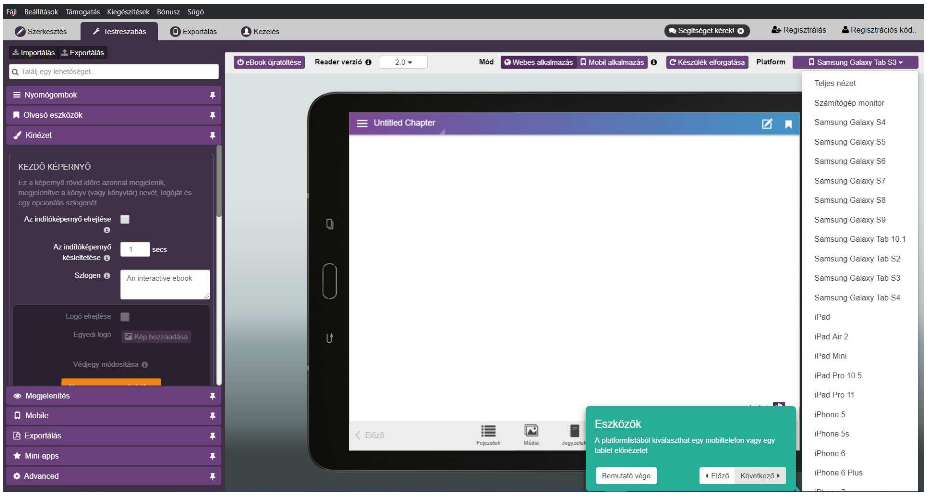
9. ábra. Tartalom tulajdonságai



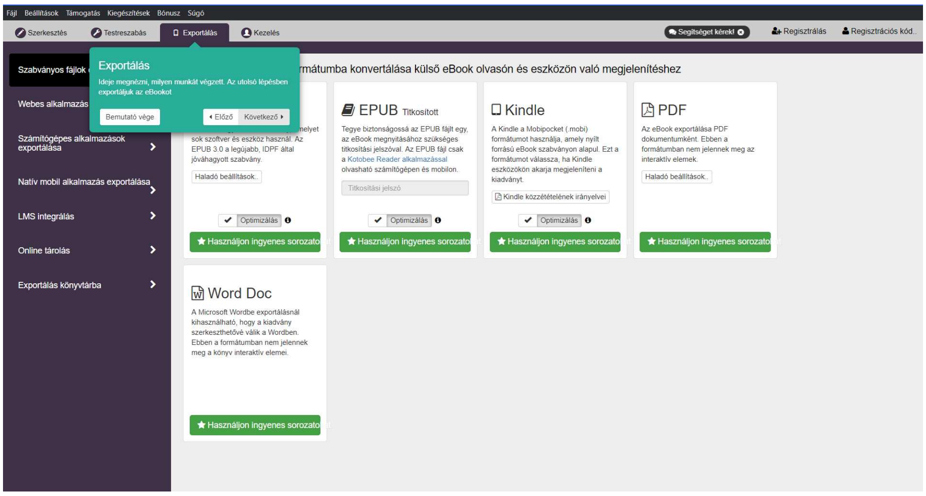
10. ábra. Testreszabás munkalap



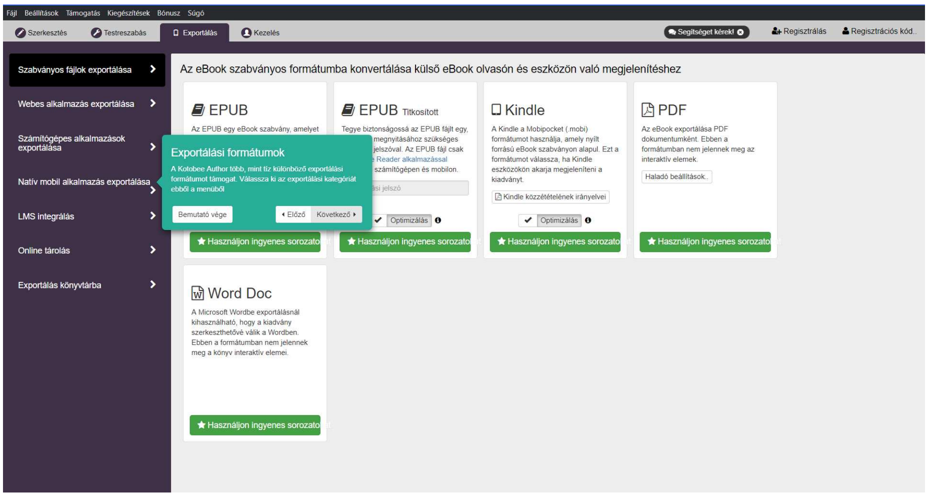
11. ábra. Könyv előnézete



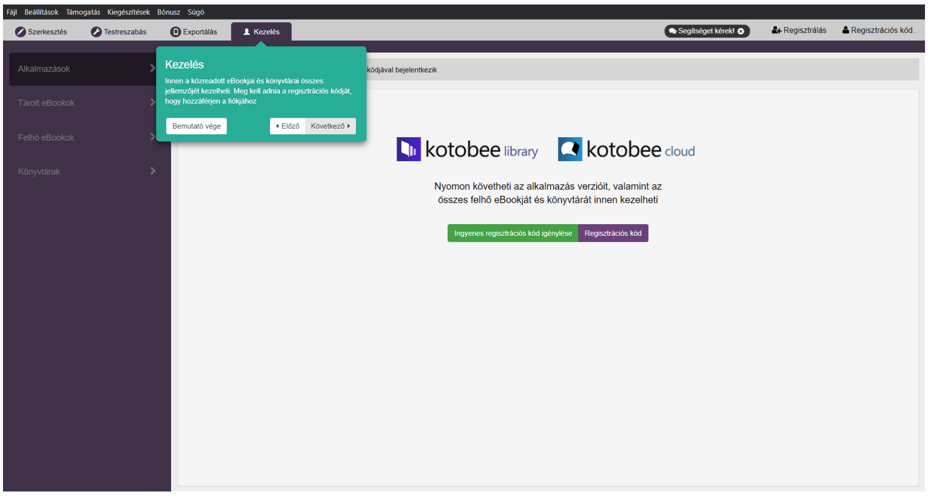
12. ábra. Előnézet opciók



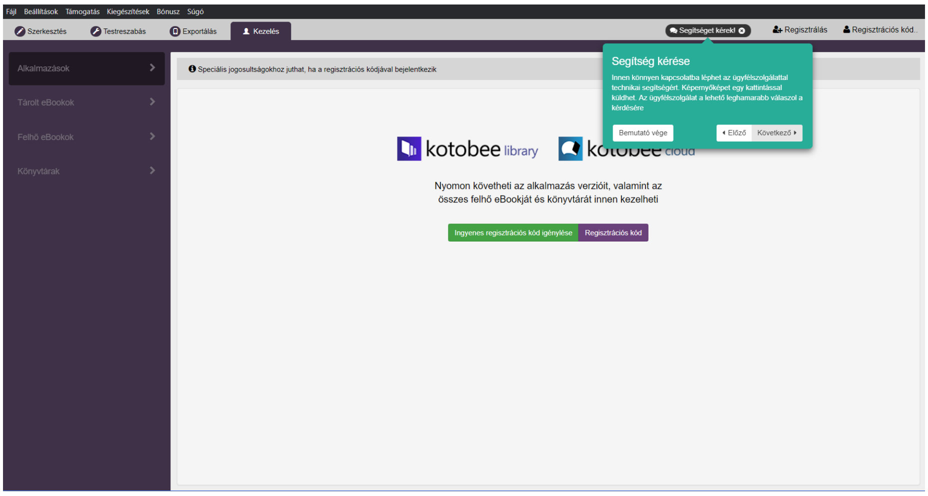
13. ábra. Exportálás munkalap



14. ábra. Exportálás formátumok



15. ábra. Kezelés munkalap



16. ábra. Támogatás kérése

A Kotobee egy egyszerűen használható, de mégis hatékony e-könyv készítő szoftver. Lehetővé teszi a felhasználók számára, hogy professzionális minőségű interaktív e-könyveket hozzanak létre saját tartalmukból, amelyeket számos formátumban exportálhatnak, beleértve az EPUB, PDF, MOBI, illetve a webes publikációt. A Kotobee szoftvert kifejezetten az oktatási anyagok létrehozására tervezték, és lehetővé teszi a felhasználók számára, hogy könnyedén hozzáadjanak interaktív elemeket, mint például kérdőívek, feladatok, videók, animációk és sok más interaktív eszköz a tananyagokhoz. A szoftver könnyen kezelhető, és az egyes lépések intuitívak, így a felhasználók könnyen elkészíthetik saját e-könyveiket, majd elérhetővé tehetik azokat diákjaik, hallgatóik vagy a nagyközönség számára az interneten keresztül.

1.2. Elektronikus könyv készítése

Az elektronikus tananyagok számos előnnyel járnak a hagyományos tananyagokhoz képest. Az egyik legfontosabb előnye az interaktivitás, amely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy aktívan részt vegyenek a tanulási folyamatban. Az elektronikus tananyagok sokféle médiumot használhatnak, például szöveges, hang- és videóanyagokat, interaktív animációkat, virtuális környezeteket és játékos feladatokat, amelyek segítenek a tanulóknak jobban megérteni és emlékezni a tananyagra.

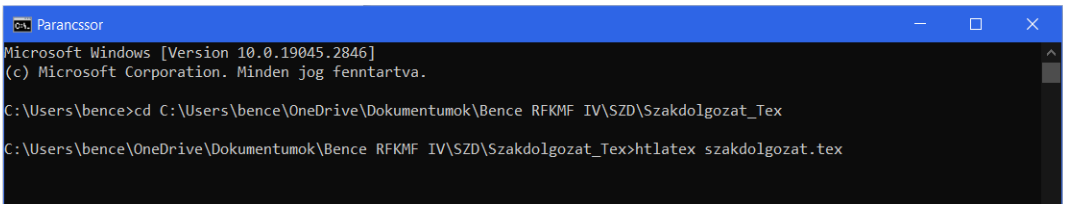
Az elektronikus tananyagok nagyobb rugalmasságot is biztosítanak a tanulóknak és az oktatóknak egyaránt. A tanulók bármikor és bárhol hozzáférhetnek az anyagokhoz, ami különösen hasznos lehet azoknak, akiknek szükségük van rugalmas tanulási lehetőségekre. Az oktatók pedig könnyebben testre szabhatják az anyagokat az egyéni tanulási igényeknek megfelelően. Az elektronikus tananyagoknak az is előnye, hogy azonnali visszajelzést adnak a tanulóknak, ami segíti őket a hibáik javításában és a tanulási folyamat javításában. Ezenkívül az elektronikus tananyagok csökkentik a papíralapú tananyagok használatát, és így kisebb az ökológiai lábnyomuk.

1. **A Kotobee szoftver telepítése**

   Egyszerűen telepítési útmutató segítségével történik.

2. **Tananyag kidolgozása**

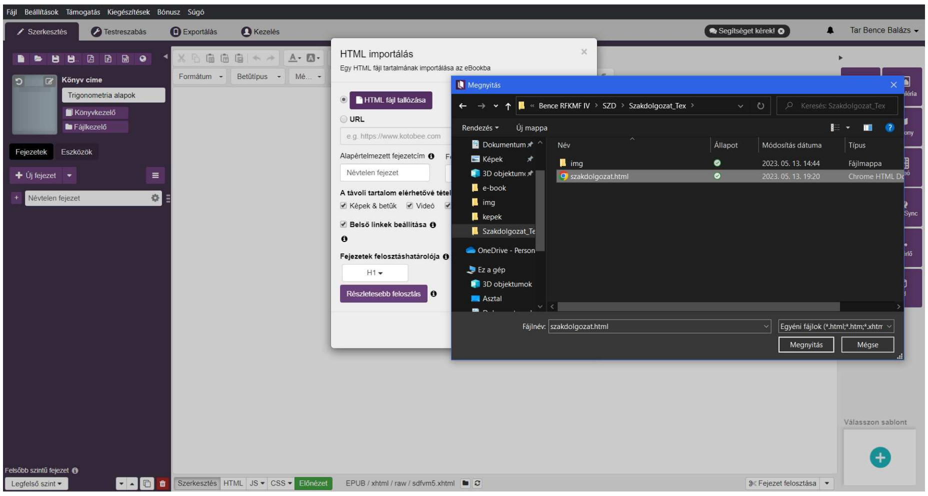
   Az e-könyv tartalmát LaTeX-ben dolgoztam ki, majd a kapott pdf állományt átkonvertáltam html dokumentumra parancssorban a *htlatex fájnlév.tex* parancs segítségével, annak érdekében, hogy a tartalom később szerkeszthető legyen az e-könyv létrehozásakor.



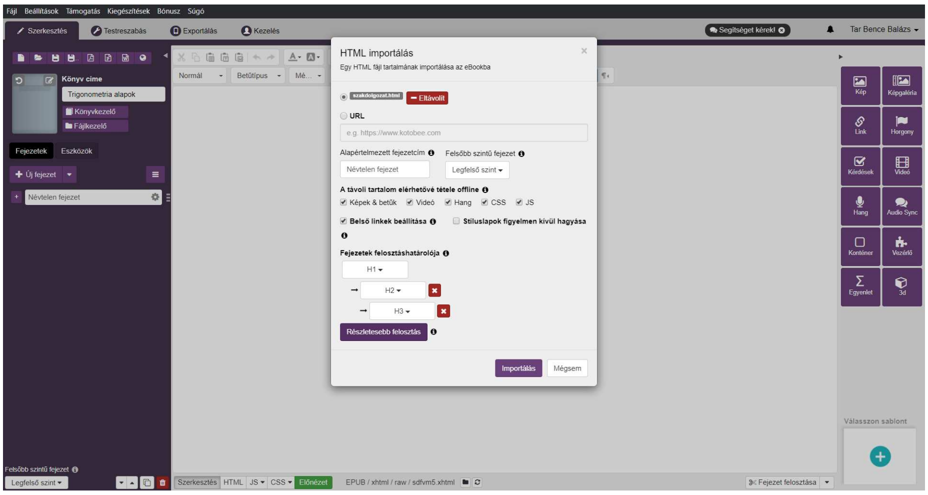
17. ábra. LaTeX fájl konvertálása

3. **Tananyag importálása Kotobee-ba**

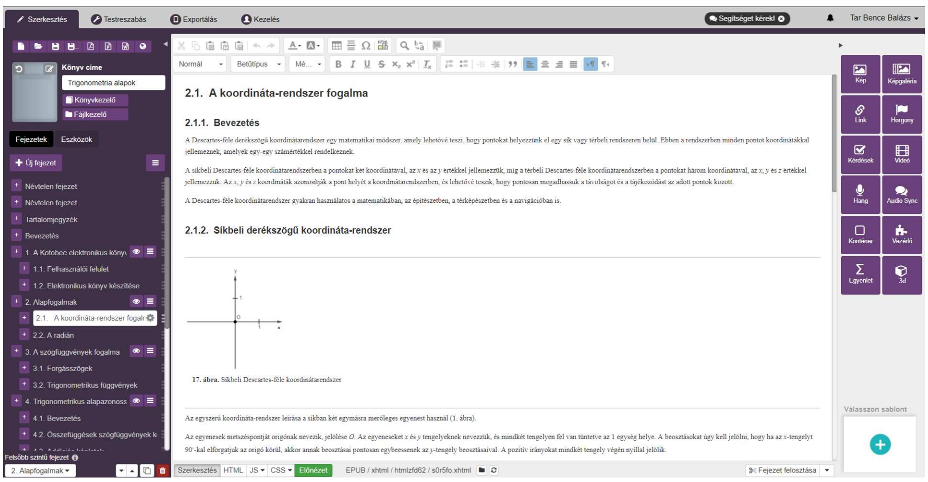
   Egy tiszta mappába létrehoztam egy új projektet, majd importáltam a tananyagot html formátumban és elvégeztem pár alapvető formázást.



18. ábra. Importálás-2



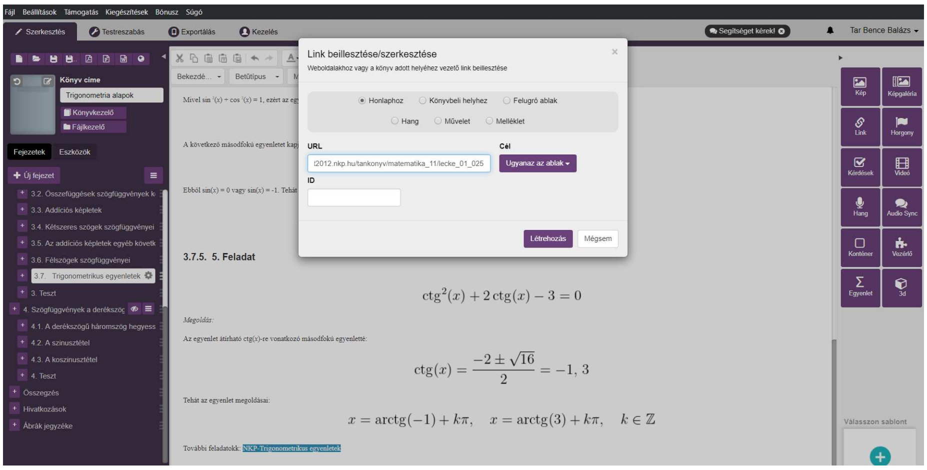
19. ábra. Importálás-1



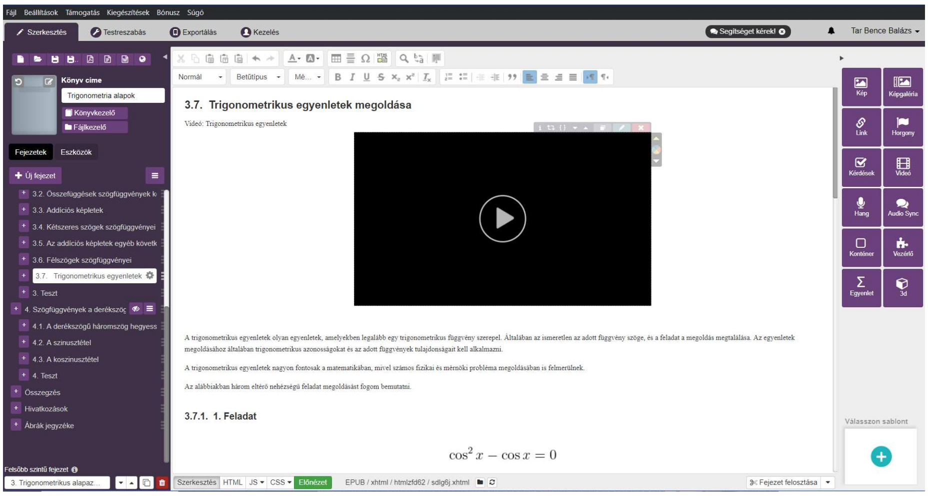
20. ábra. Importált-3

4. **Interaktív elemek hozzáadása**

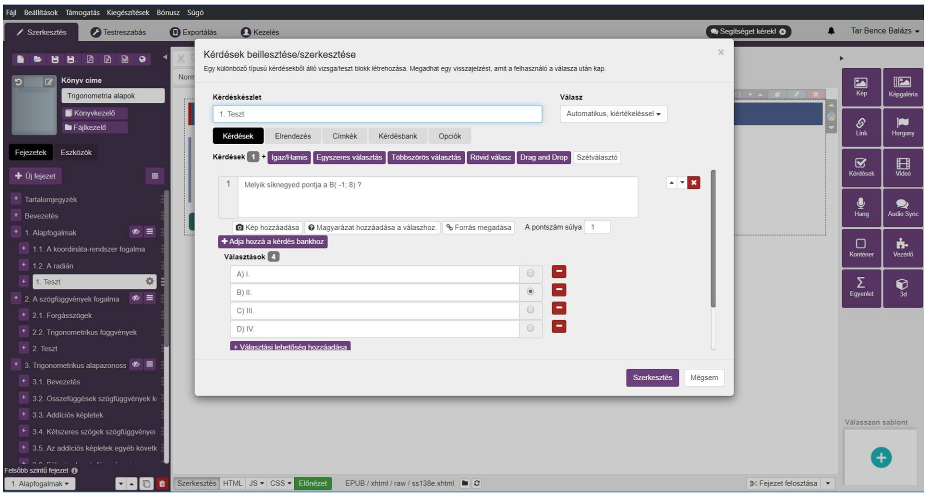
Végül létrehoztam/beillesztettem az interaktív elemektet a tananyagba (tesztek, képek, videóanyagok, hivatkozások külső forrásra).



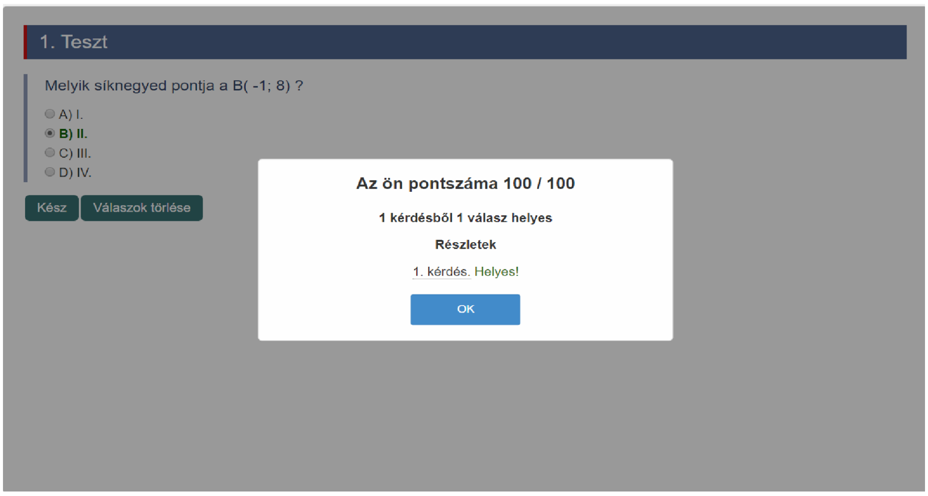
21. ábra. Weboldalre mutató link beszúrása



22. ábra. Videó beszúrása



23. ábra. Tesztfeladatok beszúrása-1



24. ábra. Tesztfeladatok beszúrása-2

2. Alapfogalmak

2.1. A koordináta-rendszer fogalma

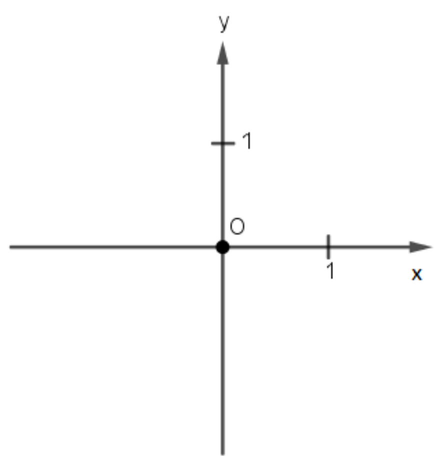
2.1.1. Bevezetés

A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer egy matematikai módszer, amely lehetővé teszi, hogy pontokat helyezzünk el egy sík vagy térbeli rendszeren belül. Ebben a rendszerben minden pontot koordinátákkal jellemeznek, amelyek egy-egy számértékkel rendelkeznek.

A síkbeli Descartes-féle koordinátarendszerben a pontokat két koordinátával, az x és az y értékkel jellemezzük, míg a térbeli Descartes-féle koordinátarendszerben a pontokat három koordinátával, az x, y és z értékkel jellemezzük. Az x, y és z koordináták azonosítják a pont helyét a koordinátarendszerben, és lehetővé teszik, hogy pontosan megadhassuk a távolságot és a tájékozódást az adott pontok között.

A Descartes-féle koordinátarendszer gyakran használatos a matematikában, az építészetben, a térképészetben és a navigációban is.

2.1.2. Síkbeli derékszögű koordináta-rendszer

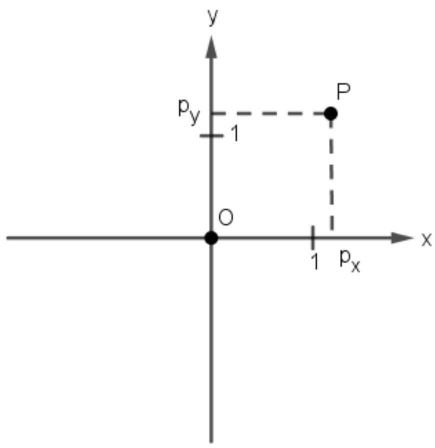


25. ábra. Síkbeli Descartes-féle koordinátarendszer

Az egyszerű koordináta-rendszer leírása a síkban két egymásra merőleges egyenest használ (1. ábra).

Az egyenesek metszéspontját origónak nevezik, jelölése O. Az egyeneseket x és y tengelyeknek nevezzük, és mindkét tengelyen fel van tüntetve az 1 egység helye. A beosztásokat úgy kell jelölni, hogy ha az x-tengelyt $90°$-kal elforgatjuk az origó körül, akkor annak beosztásai pontosan egybeessenek az y-tengely beosztásaival. A pozitív irányokat mindkét tengely végén nyíllal jelölik.

A koordináta-rendszer használatával objektumok helyét lehet meghatározni a síkon (2. ábra).



26. ábra. Pont helyzetének meghatározása

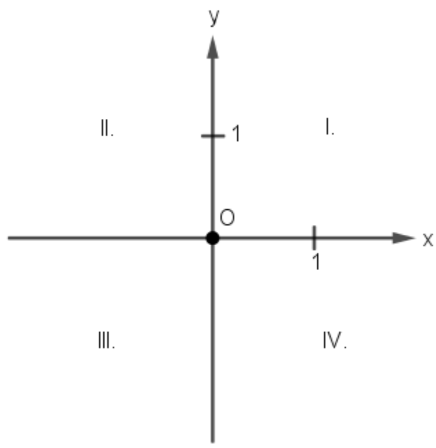
Ha a koordináta-rendszer használatával egy P pont helyzetét szeretnénk meghatározni a síkon, akkor meghatározzuk a pont merőleges vetületét az x tengelyen (p_x), majd meghatározzuk a pont merőleges vetületét az y tengelyen (p_y).

A P pont koordinátáit így definiáljuk: p_x és p_y.

Az P pont koordinátáit a következő módon jelöljük: $P = (p_x, p_y)$. A koordinátapár pontosan meghatározza a P pont helyzetét a síkon.

A koordináta-rendszerben az p_x értéket P x koordinátájának vagy abszcisszájának, míg az p_y értéket P y koordinátájának vagy ordinátájának nevezzük. Az x és y tengelyek számegyenesként működnek, így a koordináták lehetnek pozitívak, negatívak vagy 0 értékűek.

Ennek megfelelően a síkot négy részre osztjuk, ezeket a részeket nevezzük síknegyedeknek. Az I, II, III és IV halmazok az x és y koordináták előjele alapján határozzák meg a sík négy részének halmazait (3. ábra).



27. ábra. Síknegyedek

Az I halmaz azon pontok halmaza, amelyeknek az x és y koordinátái is nemnegatív értéket vehetnek fel:

$$I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Az II halmaz azon pontok halmaza, amelyeknek az x koordinátája nempozitív, míg az y koordinátája nemnegatív:

$$II = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \leq 0, y \geq 0\}$$

Az III halmaz azon pontok halmaza, amelyeknek az x és y koordinátái is nempozitív értéket vehetnek fel:

$$III = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \leq 0, y \leq 0\}$$

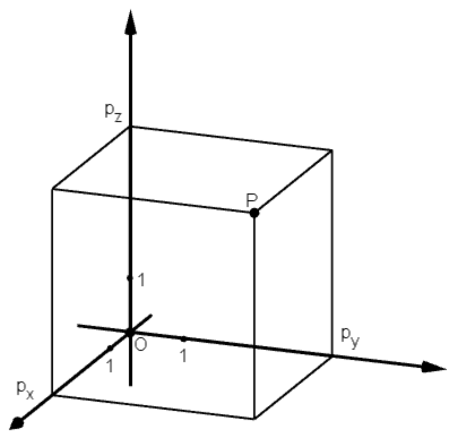
Az IV halmaz azon pontok halmaza, amelyeknek az x koordinátája nemnegatív, míg az y koordinátája nempozitív:

$$IV = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \leq 0\}$$

2.1.3. Térbeli derékszögű koordináta-rendszer

Az origót O-val jelöljük. A tengelyek mentén vett távolságokat pedig x, y és z koordinátákkal jelöljük. Tehát egy pontot a következőképpen adhatunk meg: $P = (x, y, z)$.

A három tengely együttesen határozzák meg a tér pontjainak helyzetét. A koordinátarendszer segítségével pontosan meghatározhatjuk egy térbeli objektum helyzetét, alakját és méretét (4. ábra).



28. ábra. Térbeli Descartes-féle koordinátarendszer

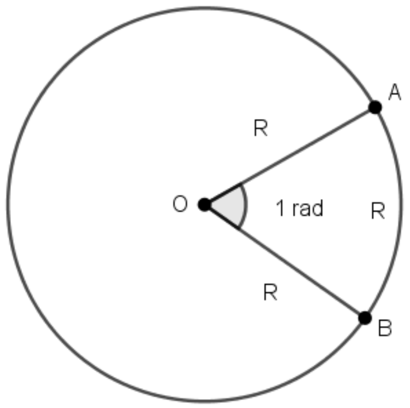
2.2. A radián

2.2.1. A radián fogalma

1. DEFINÍCIÓ. *1 radián olyan középponti szög, melynek ívhossza egyenlő a körvonal sugarával [2].*

Az 5. ábrán egy AOB középponti szög látható. E szög egy olyan AB ívre támaszkodik, melynek hossza a kör sugarával egyenlő.

Tehát az AOB szög mértéke egy radián lesz. ($AOB\angle = 1$ rad.) Úgy is mondhatjuk, hogy az AB ív radiánmértéke egy radiánnal egyenlő ($\widehat{AB} = 1$ rad).

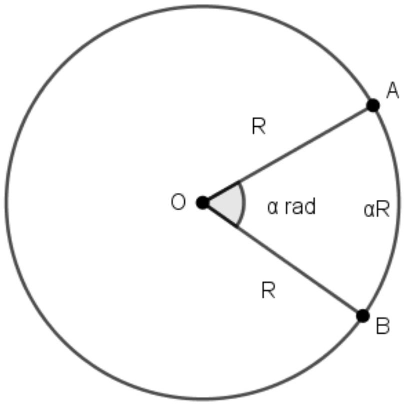


29. ábra. A radián fogalma

A radián használata előnyös, mert a trigonometrikus függvények értékei radiánban kifejezve egyszerűbb és elegánsabb formában írhatók le, és könnyebb velük számolni. Például, ha egy szög értékét radiánban ismerjük, akkor a szinusz, koszinusz és tangens értékei egyszerűen kiszámíthatók az adott radián értéke alapján.

A szög radiánmértéke független a körvonal sugarától.

Általánosítva, ha egy R sugarú kör középponti szöge αR hosszúságú ívre támaszkodik, akkor ennek a szögnek a radiánmértéke (ívmértéke) α radián lesz (6. ábra)[2].



30. ábra. Adott szög radiánmértéke

2.2.2. Kapcsolat szögek fokmértéke és a radiánértéke között

Az egy teljes fordulat ($360°$) megfelel 2π radiánnak, mivel az egységkör kerülete 2π egység. Így egy szög értéke fokban kifejezve könnyen átszámítható radiánra a következőképpen:

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}\ \ [2]$$

Hasonlóan, egy szög radiánban kifejezve átszámítható fokra a következőképpen:

$$1\mathrm{rad} = \left(\frac{180°}{\pi}\right)\ [2]$$

3. A szögfüggvények fogalma

3.1. Forgásszögek

Ahhoz, hogy meghatározzuk az elforgatás szögét radiánban, át kell váltanunk a fokos mértékegységből radiánra.

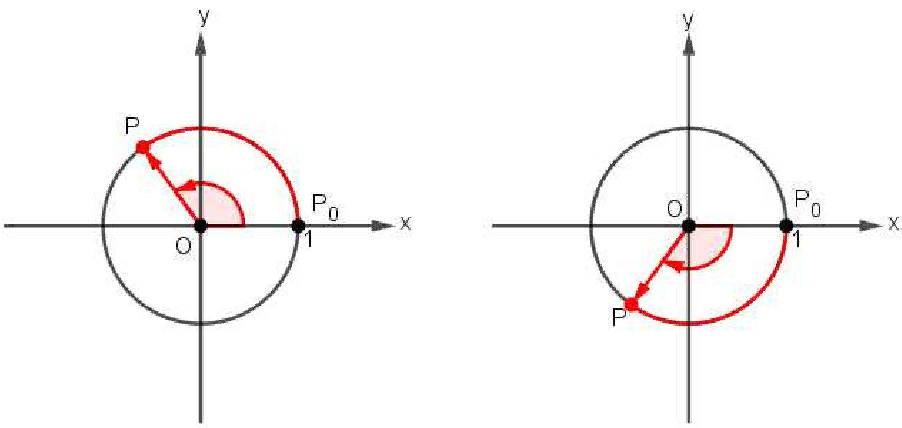
Ha az elforgatás szöge $120°$, akkor radiánban: $120° = \frac{120\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$ rad

Ha az elforgatás az óramutató járásával ellentétes irányban történt, akkor a szög előjele pozitív (7.ábra-1). Ekkor P_0-t elforgatjuk P-be, kapjuk:

$$P_0OP\angle = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$$

Ha az elforgatás az óramutató járásával megegyező irányban történt, akkor a szög előjele negatív (7.ábra-2). P_0-t elforgatjuk P-be, kapjuk:

$$P_0OP\angle = -\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$$



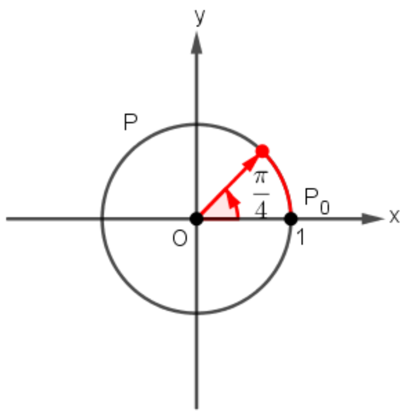
31. ábra. Forgásszögek előjelei

Az elforgatás szöge egyértelműen kifejezi a P pont helyzetét az egységkörön. Ugyanakkor a P pont egy adott helyzetének számtalan elforgatási szög felel meg.

Például a P pontnak a 8. ábrán a következő szögek felelnek meg:

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi$, $\frac{\pi}{4} + 4\pi$ és így tovább. Emellett szintén megfelel $\frac{\pi}{4} - 2\pi$, $\frac{\pi}{4} - 4\pi$ stb.

Az összes ilyen szög megkapható az $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ alapján[2].



32. ábra. Azonos forgásszögek

3.1.1. Forgásszögek szinusza és koszinusza

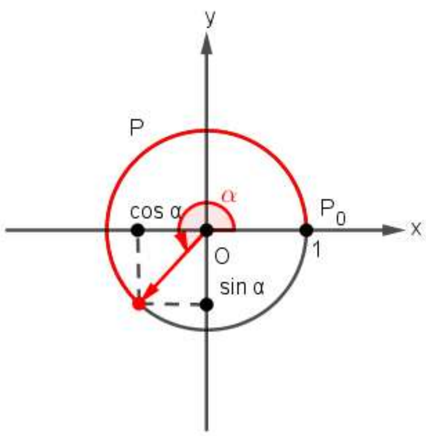
Az α szög szinusza és koszinusza az egységkörön lévő pont koordinátáiból határozható meg. Az $P(x, y)$ pontnak a $(1, 0)$ pont körüli α szöggel történő elforgatása után kapjuk (9. ábra).

A $\cos\alpha$ a forgatott pont x koordinátája, azaz x értéke:

$$\cos\alpha = x$$

A $\sin\alpha$ a forgatott pont y koordinátája, azaz y értéke:

$$\sin\alpha = y$$



33. ábra. Forgásszögek szinusza és koszinusza

A 9. ábra alapján:

$$\sin\alpha = 0,\ ha\ \ \alpha = k\pi,\ k \in Z$$

$$\cos\alpha = 0,\ ha\ \ \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

3.1.2. Forgásszögek tangense és kotangense

Az α szög tangense alatt szinuszának és koszinuszának hányadosát értjük.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Az α szögre tehát akkor értelmezzük a tangensfüggvényt, ha

$$\cos\alpha \neq 0,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

Az α szög kotangense alatt koszinuszának és szinuszának hányadosát értjük.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Hasonlóan tangenshez, egy α szögre tehát akkor értelmezzük a kotangens függvényt, ha

$$\sin\alpha \neq 0,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z$$

3.2. Trigonometrikus függvények

3.2.1. Trigonometrikus függvények fogalma

Tudjuk, hogy az egységkörön minden a elfordulási szögnek egy pont felel meg. Tehát az a minden értékének egyetlen egy szám felel meg, amelyet az a szög szinuszának (koszinuszának, tangensének, kotangensének) nevezünk. Emiatt a szög szinusza (koszinusza, tangense, kotangense) és az elfordulási szög között függvénykapcsolat áll fenn.

Az $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ és $i(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ a függvényeket az a szög trigonometrikus függvényeinek nevezzük.

Minden valós a számnak megfeleltethetünk egy α radián nagyságú szöget. Ez lehetőséget ad arra, hogy a trigonometrikus függvényekre számargumentumú függvényekként tekintsünk[3].

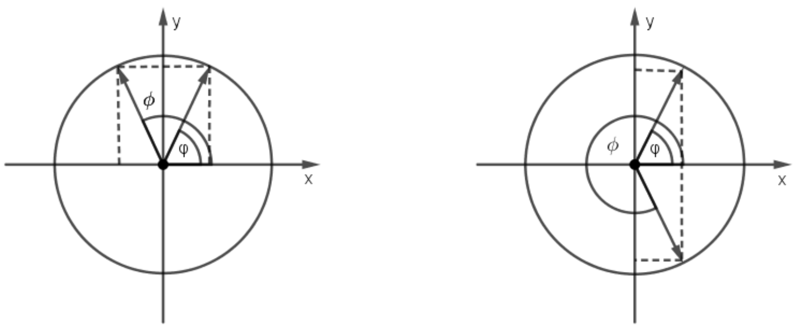
Mivel az egységkör pontjainak abszcisszái és ordinátái a -1 és az 1 között az összes értéket felveszi, ezért az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények értékkészletei a $[-1; 1]$ intervallum lesz[3].

A trigonometrikus függvények értelmezési taromány a valós számok halmaza (R) lesz.

Tanges értelmezési tartományai R, kivéve a $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ (kotangens esetében R, kivéve $k\pi,\ k \in Z$) számok, értékkészletük R.

3.2.2. Trigonometrikus függvények előjelei

A koordináta-rendszerben egy szög a négy síknegyed egyikében helyezkedhet el, kivételt képeznek a $\frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$ alakú szögek. Ezeket egyik negyedbe sem soroljuk.



34. ábra. y és x tengelyekre szimetrikus forgásszögre

Tegyük fel, hogy a ϕ és φ forgásszögekhez tartozó vektorok egymás tükörképei az y tengelyre. Ekkor

$$\sin\phi = \sin\varphi, \quad \cos\phi = -\cos\varphi.$$

Ha a ϕ és φ forgásszögekhez tartozó vektorok egymás tükörképei az x tengelyre, akkor

$$\sin\phi = -\sin\varphi, \quad \cos\phi = \cos\varphi.$$

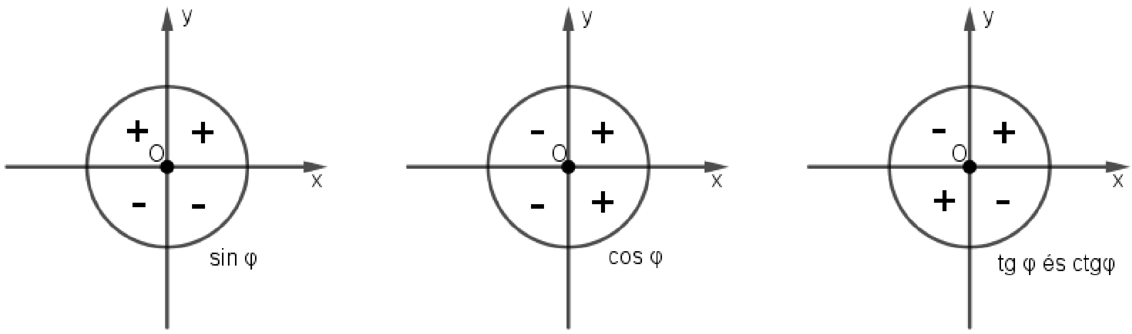
Ebből az következik, hogy

$$\sin(-x) = -\sin(x), \ \ \cos(-x) = \cos(x),$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x), \ \ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x).$$

Az első két azonosság könnyedén belátahtó, ha felhasználjuk a ϕ és φ tükörképeit szemléltető ábrákat. A másik kettőt úgy kapjuk meg, hogy elosszuk az első azonosságot a másodikkal, majd pedig fordítva[1].

(Ugyanakkor azt is elmondhatjuk, hogy $\sin(x)$ páratlan, $\cos(x)$ páros, $\operatorname{tg}(x)$ és $\operatorname{ctg}(x)$ szintén páratlan függvények lesznek.)



35. ábra. Trigonometrikus függvények előjelei

3.2.3. Trigonometrikus függvények grafikonja és tulajdonságaik

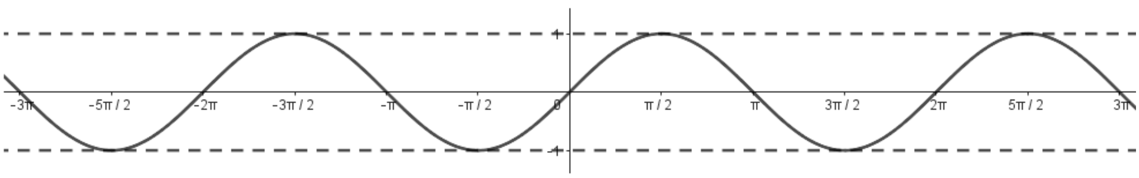
2. DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik egy olyan $T \neq 0$ szám, hogy az f függvény értelmezési tartományának bármely x értékére teljesülnek a következő egyenlőségek:*

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

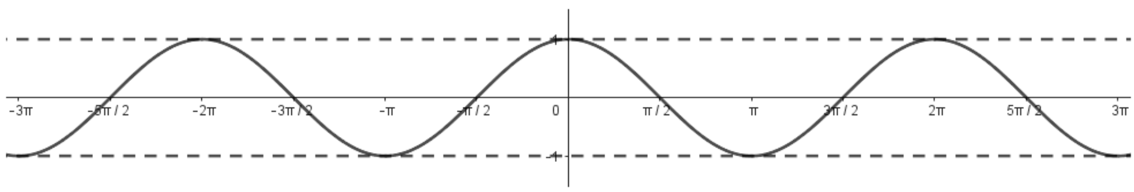
A T számot a függvény periódusának nevezzük[4].

1. TÉTEL. *Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvények fő periódusa a 2π, az $y = \operatorname{tg} x$ és $y = \operatorname{ctg} x$ függvény fő periódusa a π lesz[4].*

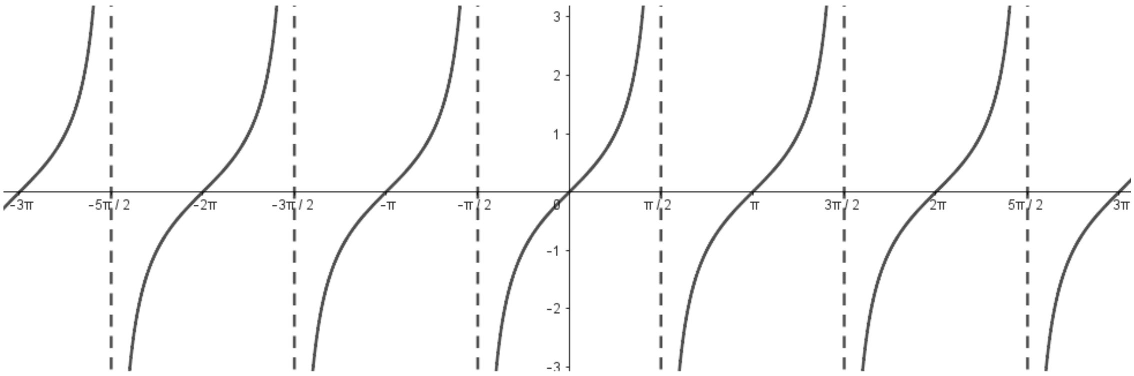
Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvények grafikonjait **szinuszoid**nak vagy **szinusz-vonal**nak nevezzük.



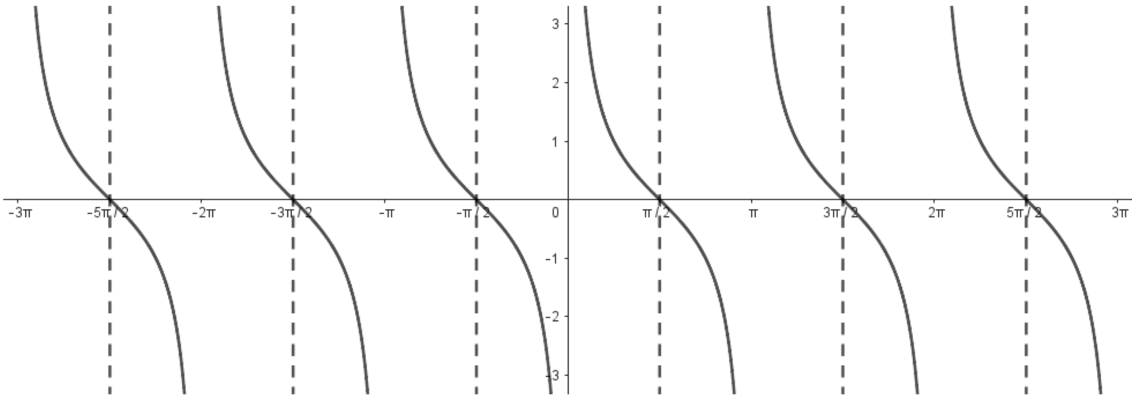
36. ábra. Az $y = \sin x$ függvény grafikonja



37. ábra. Az $y = \cos x$ függvény grafikonja



38. ábra. Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja



39. ábra. Az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja

Tulajdonságok	y = sin x	y = cos x
D(x)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
E(y)	$[-1;1]$	$[-1;1]$
Fő periódus	2π	2π
Zérushelyek	πn	$\frac{\pi}{2}+\pi n$
Pozitív	$(2\pi n;\pi+2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$
Negatív	$(\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$
Paritás	páratlan	páros
Növekedés intervalluma	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n]$
Csökkenés intervalluma	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n;\pi+2\pi n]$
Legnagyobb értéke	1	1
Legkisebb értéke	−1	−1

Tulajdonságok	y = tg x	y = ctg x
D(x)	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x\neq\pi n$
E(y)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Fő periódus	π	π
Zérushelyek	πn	$\frac{\pi}{2}+\pi n$
Pozitív	$\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$
Negatív	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi n\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+\pi n\right)$
Paritás	páratlan	páratlan
Növekedés intervalluma	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	–
Csökkenés intervalluma	–	$(\pi n;\pi+\pi n)$
Legnagyobb értéke	–	–
Legkisebb értéke	–	–

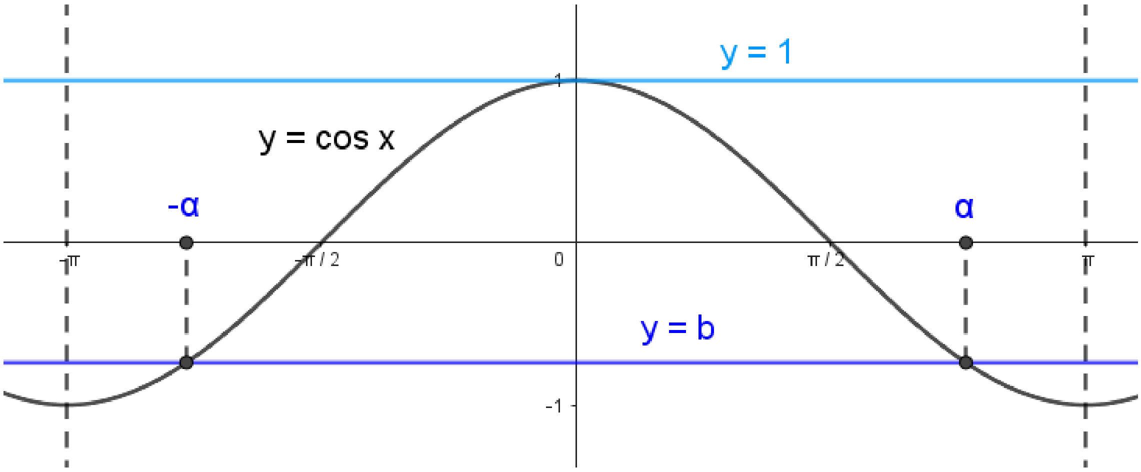
40. ábra. Trigonometrikus függvények tulajdonágai

3.2.4. sin(x)=b, cos(x)=b és tg(x)=b alakú trigonometrikus egyenletek

cos(x)=b alakú egyenletek

Mivel az $y = \cos x$ függvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum, ezért $|b| > 1$ esetén a $\cos x = b$egyenletnek nincs megoldása. Viszont bármilyen b esetére, ha $|b| \leq 1$, ennek az egyenletnek számtalan megoldása van[5].

A 17. ábrán látható, hogy a $\cos(x) = b$ egyenletnek a $[-\pi;\pi]$ intervallumon két megoldása lesz, az α és a $-\alpha$, ahol $\alpha \in [0;\pi]$ (ha $b = 1$, akkor ezek egybeesnek és nullával lesznek egyenlők).



41. ábra. $\cos(x) = b$ alakú egyenletek megoldása

A $\cos x = b$ egyenletnek minden gyöke a következő alakú lesz:

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, \;\; n \in Z$$

3. DEFINÍCIÓ. *A b szám arkusz koszinuszának , ahol $|b| \leq 1$, azt a $[0; \pi]$ intervallumon vett α számot nevezzük, melynek koszinuszértéke b-vel egyenlő [5].*

A b szám arkusz koszinuszát $\arccos b$-vel jelöljük. Például: $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, ahol $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ és $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Általánosítva, $\arccos b = \alpha$, ha $\alpha \in [0; \pi]$ és $\cos \alpha = b$.

Most már $\cos x = b$, $|b| \leq 1$, egyenlet gyökeit a következő alakban írhatjuk fel:

$$x = \pm \arccos b + 2\pi n, \;\; n \in Z \; [5]$$

cos x = 1	cos x = 0	cos x = -1
$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

42. ábra. $\cos(x) = b$ triviális esetei

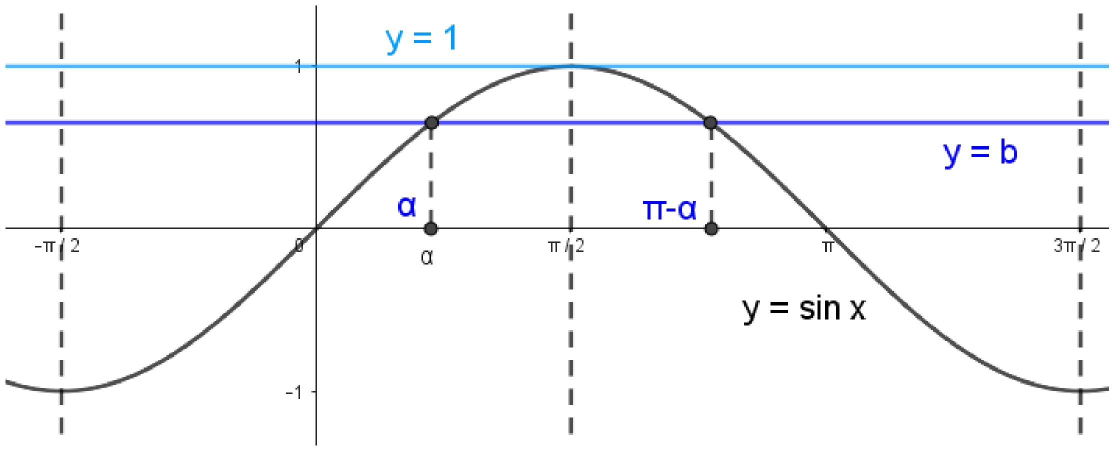
A következő egyenlőség is teljesül:

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b$$

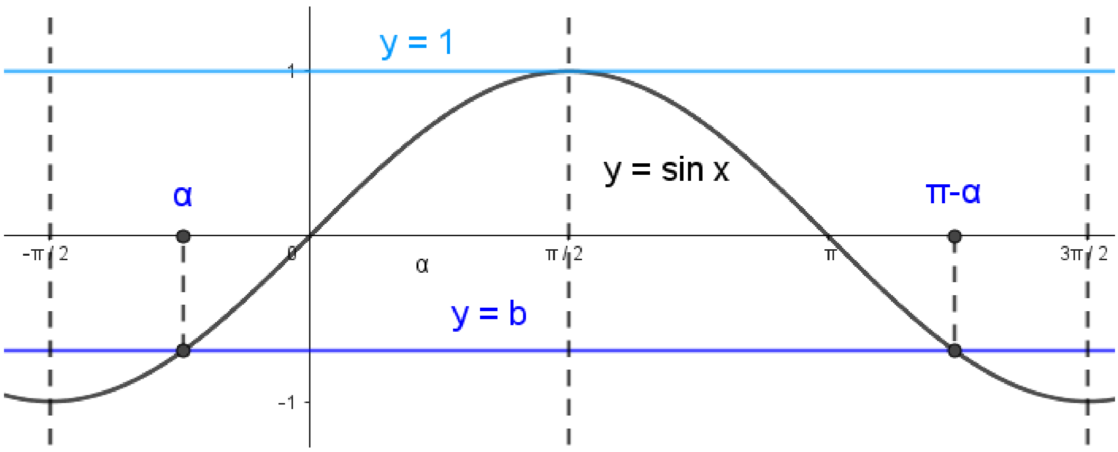
sin(x)=b alakú egyenletek

Mivel az $y = \sin x$ függvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum, ezért $|b| > 1$ esetén a $\sin x = b$egyenletnek nincs megoldása. Viszont bármilyen b esetére, ha $|b| \leq 1$,, ennek az egyenletnek számtalan megoldása van[5].

A 19. és 20. ábrákon láthatók a $\sin(x) = b$, $y = b$ (ha $|b| \leq 1$) egyenletnek.



43. ábra. $\sin(x) = b$ alakú egyenletek megoldása (1)



44. ábra. $\sin(x) = b$ alakú egyenletek megoldása (2)

Vizsgáljuk meg az $y = \sin x$ függvény grafikonját a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon. Az adott intervallumon az egyenletnek két megoldása van, az α és a $\pi - \alpha$, ahol $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (ha $b = 1$, akkor ezek egybeesnek és $\frac{\pi}{2}$-vel lesznek egyenlők)[5].

A $\sin x = b$ egyenletnek minden gyöke a következő alakú lesz:

$$x = \alpha + 2\pi n, \ illetve \ x = \pi - \alpha + 2\pi n, \ n \in Z$$

Ez összevonva:

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\ n \in Z$$

4. DEFINÍCIÓ. *A b szám arkusz szinuszának , ahol $|b| \leq 1$, azt a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon vett α számot nevezzük, melynek szinuszértéke b-vel egyenlő[5].*

A b szám arkusz szinuszát $\arcsin b$-vel jelöljük. Például: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, ahol $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ és $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Általánosítva, $\arcsin b = \alpha$, ha $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ és $\sin \alpha = b$.

Most már $\sin x = b$, $|b| \leq 1$, egyenlet gyökeit a következő alakban írhatjuk fel:

$$x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ \ k \in Z\ [5]$$

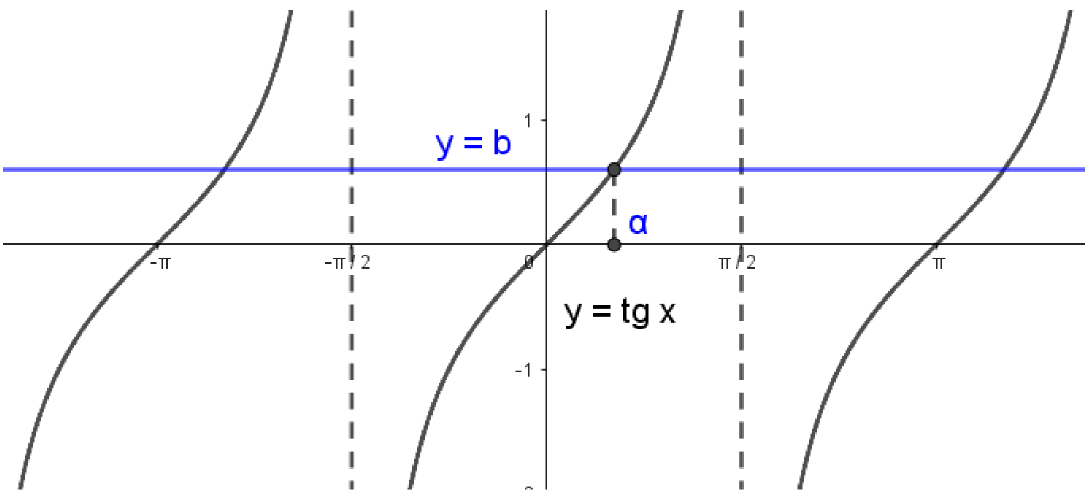
sin x = 1	sin x = 0	sin x = -1
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$

45. ábra. $\sin(x) = b$ triviális esetei

A következő egyenlőség is teljesül:

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b$$

tg(x)=b alakú egyenletek



46. ábra. $\mathrm{tg}(x) = b$ alakú egyenletek megoldása

Mivel az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értékkészlete R, ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek bármilyen b esetén van megoldása.

A 22. ábrán az $y = \operatorname{tg} x$ és az $y = b$ függvények grafikonjai láthatók.

Vizsgáljuk meg az $y = \operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. Ezen az intervallumon a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek bármilyen b esetében csak egy α megoldása lesz [5].

Tangens periódusa π, ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képlete a következő képlettel adható meg:

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in Z$$

5. DEFINÍCIÓ. *A b szám arkusz tangensének azt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon vett α számot nevezzük, melynek tangense b-vel egyenlő [5].*

A b szám arkusz tangensét az $\operatorname{arctg} b$-vel jelöljük. Például: $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, ahol $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Általánosítva, $\operatorname{arctg} b = \alpha$, ha $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg} \alpha = b$.

Most már a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeit a következő alakban írhatjuk fel:

$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in Z \ [5]$$

A következő egyenlőség is teljesül:

$$\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$$

4. Trigonometrikus alapazonosságok és alkalmazásuk

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben olyan trigonometrikus azonosságokról lesz szó, amelyek a bennük szereplő változók esetében minden lehetséges értékre igazak.

Célom a trigonometriai egyenletek megoldásainak előkészítése, amelyekben az ismeretlen általában valós szám. Az alábbi azonosságokban a szögeket (x és y) radiánban mérik.

4.2. Összefüggések szögfüggvények között

4.2.1. Összefüggés szinusz és koszinusz között

2. TÉTEL. $\forall x$ *esetén igaz a következő azonosság:*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ [\textit{1}]}$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy egy $v = (v_1; v_2)$ vektor abszolutértékére teljesül az $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ összefüggés. Amennyiben az x forgásszöghöz tartozó $(\cos x; \sin x)$ egységvektorra írjuk fel ezt az összefüggést és az oldalakat négyzetre emeljük, a tételünk állítását kapjuk.

□

4.2.2. Összefüggés tangens és kotangens között

3. TÉTEL.

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \;\; \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \;\; ha \;\; x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in Z \text{ [\textit{1}]}$$

Bizonyítás

Ezek az azonosságok a tangens és kotangens definíciójának közvetlen következményei. A feltételben az adott követelményt ifigyelembe kell venni, hogy a szóban forgó két szögfüggvény egyaránt értelmezhető legyen.

□

1. KÖVETKEZMÉNY.

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \quad ha\; x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} \quad ha\; x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \text{ [\textit{1}]}$$

Bizonyítás

A tg, illetve ctg szögfüggvényeket definiáló összefüggések mindkét oldalát négyzetre emelve, és az 1. Tétel állítását felhasználva megkapjuk a fenti egyenlőségeket.

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\text{ha } x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel megkapjuk a másik képletet.

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\text{ha } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

□

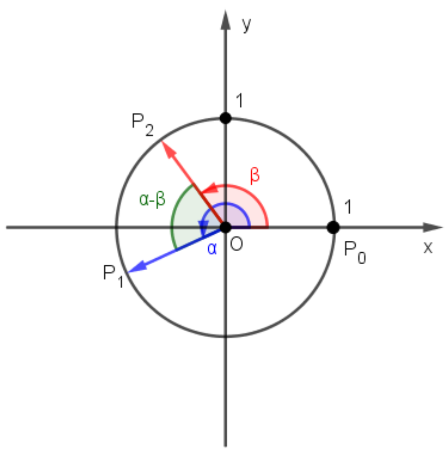
4.3. Addíciós képletek

4.3.1. Addíciós képletek szinuszra és koszinuszra

4. TÉTEL.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \text{ [6]}$$



47. ábra. Forgásszögek az addíciós képeltek bizonyításához

Bizonyítás

Legyen $x = \alpha$, $y = \beta$.

Bebizonyítjuk a különbség koszinuszának képletet:

Legyenek a P_1 és P_2 pontok olyanok, amelyeket a $P_0(1;0)$ pontnak az α, illetve a β szöggel való elforgatásával kapunk.

Bizsgáljuk, amikor $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$. Ekkor az $\vec{OP_1}$ és $\vec{OP_2}$ vektorok közötti szög $\alpha - \beta$ lesz.

A P_1 és P_2 pontok koordinátái megfelelően $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ és $(\cos\beta; \sin\beta)$. Ekkor az $\vec{OP_1}$ és $\vec{OP_2}$ vektorok koordinátái $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ és $(\cos\beta; \sin\beta)$ lesznek.

Kifejezzük a két vektor skaáris szorzatát a koordináták segítségével:

$$\vec{OP_1} \cdot \vec{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

A vektorok skaláris szorzatának definíciója alapján felírható, hogy:

$$\vec{OP_1} \cdot \vec{OP_2} = \left|\vec{OP_1}\right| \cdot \left|\vec{OP_2}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$$

Innen megkapjuk a **különbség koszinuszának** képletet:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Ez a képlet abban az esetben is igaz lesz, ha az $(\alpha - \beta) \in [0; \pi]$ intervallumhoz.

Bebizonyítjuk az **összeg koszinuszának** képletét, felhasználva a trigonometrikus függvények előjeleinek azonosságait:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Az **összeg szinuszának** és a **különbség szinuszának** képleteit hasonlóan bizonyítjuk.

$\square$

4.3.2. Addíciós képletek tangensre és kotangensre

5. TÉTEL.

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad ha \;\; x, y, x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}, \quad ha \;\; x, y, x \pm y \neq k \cdot \pi, k \in Z \; [1]$$

Bizonyítás

Ezt a tételt szinusz és koszinusz addíciós képletei alapján bizonítjuk. Mindössze el kell osztanunk az egyik egyenletet a másikra, majd fordítva. Az esetleges 0-val való osztást a feltüntetett kritériumoknak köszönhetően elkerüljük.

$$\frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y}$$

A jobb oldali törtet egyszerűsítjük $\cos x \cos y$-nal és felhasználjuk a szögek tangensének definícióját.

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} \pm \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} \mp \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \pm \frac{\sin y}{\cos y}}{1 \mp \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

A kotangensre vonatkozó állítását hasonlóan kapjuk meg. Ebben az esetben forítva osszuk el az addíciós képleteket, majd a kapott törteket $\sin x \sin y$-nal egyszerűsítjük le.

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \mp \frac{\sin x \sin y}{\sin x \sin y}}{\frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} \pm \frac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y}} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} \mp 1}{\frac{\cos y}{\sin y} \pm \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

$\square$

4.4. Kétszeres szögek szögfüggvényei

6. TÉTEL.

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \ \ ha \ \ x \neq \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}, \ \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in Z$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}, \ \ ha \ \ x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z \ [1]$$

Bizonyítás

A képletek igazolásához az előbbi addíciós tételeket használjuk fel, ahol y értékét x-nek választjuk.

1. $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$
2. $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}\cdot\operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \ \ ha \ \ x \neq \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}, \ \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, k \in Z$ teljesül.
4. $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}(x+x) = \frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} x-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg} x}, \ \ ha \ \ x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$ tejlesül.

□

4.5. Az addíciós képletek egyéb következményei

7. TÉTEL.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \ [1]$$

Bizonyítás

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő két trigonometrikus azonosságot:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{és} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ezeket a következő módon alkalmazzuk:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

valamint

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

□

4.5.1. Visszavezetési képletek

8. TÉTEL. *1. szinusz visszavezetési képletei [7]:*

$$\sin(\pi \mp x) = \pm \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \pm \sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x$$

2. koszinusz visszavezetési képletei [7]:

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x$$

3. koszinusz visszavezetési képletei [7]:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x, \quad ha \;\; x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \quad ha \;\; x \neq k \cdot \pi, k \in Z$$

Bizonyítás

A trigonometrikus függvények periodikussága lehetőséget ad arra is, hogy visszavezessük azok értékeit, amikor az argumentum a $[0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozik.

Ehhez az intervallumhoz tartozó valamennyi szög megadható a $\pi \pm x$, $\frac{\pi}{2} \pm x$, $\frac{3\pi}{2} \pm x$ formulákkal, ahol $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

A képletek vizsgálata során olyan törvényszerűségeket vehetünk észre, amelyek megkönnyítik e képletek megjegyzését. Ezek a következők:

- Az egyenlőség jobb oldalának előjele megegyezik a baloldal előjelével, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- Ha a bal oldalon az argumentum $\frac{\pi}{2} \pm x$, $\frac{3\pi}{2} \pm x$ akkor a szinusz nevét koszinuszra, a koszinuszét pedig szinuszra kell cserélni. Ha az argumentum $\pi \pm x$ alakú, akkor a függvény neve nem változik.

Alkalmazzuk ezeket a szabályokat egy példán. Határozzuk meg mivel lesz egyenlő $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$?

Amennyiben feltételezzük, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor a $\frac{3\pi}{2} - x$ a koordináta-rendszer III. negyedében lesz, vagyis $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0$. Az első szabály alapján az eredmény negatív előjelű lesz. A második szabály szerint a szinusz nevet koszinuszra kell cserélni. Kapjuk:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x$$

Az visszavezetési képleteket az addíciós képletek alkalmazásával is megkaphatjuk. Nézzunk egy példát:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$$

Tangens és kotangens esetén másképp igazoljuk a visszavezetési képleteket. Ehhez felhasználjuk, hogy a két függvény felírható szinusz és koszinusz segítségével. Kiszámítjuk az argumentumot szinusz és koszinusz visszavezetési keppleteivel, majd elvégezzük az osztást.

Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

Tudjuk, hogy $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x}{\sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x} = \frac{0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x}{1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Megjegyzés: Figyeljünk arra, hogy elkerüljük a 0-val való osztást. Ezesetben figyelembe kell vennünk, hogy $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z$.

Hasonlóan bizonyítjuk a többi képletet tangensre és kotangensre.

□

4.6. Félszögek szögfüggvényei

9. TÉTEL.

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\quad ha\ \ x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z$$

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}},\quad ha\ \ x \neq 2k\pi, k \in Z$$

Bizonyítás [1]

Az első képletet bizonyításához felhasználjuk a $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ összefüggést:

$$\cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos\left(2\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{2}$$

Gyökvonást követően kapjuk:

$$\left|\sin^2\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{2}}$$

A második képlet bizonyítása hasonló, mindössze a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ kell felhasználnunk.

A harmadik képlet esetében a bizonyítás az előzőek alapján történik, mindössze el kell osztani a két azonosságot.

A negyedik képlet bizonyítása a harmadikhoz hasonló, mindössze felcseréljök a számlálóban és a nevezőben szereplő azonosségokat és azután osztunk.

Az utóbbi két esetben nem fordulhat elő a nullával való osztás a megszabott feltételek miatt.

□

10. TÉTEL.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x},\quad ha\ \ x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x},\quad ha\ \ x \neq 2k\pi, k \in Z\ [1]$$

Bizonyítás

Felhasználjuk a 7. Tétel harmadik állítását, majd a kapott kifejezést bővítjük jobb oldalon $\sqrt{1-\cos x}$ mennyiséggel.

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1-\cos x}{|\sin x|}$$

Figyelnünk kell, hogyha x a harmadik, vagy a negyedik síknegyedbe tartozik, akkor $\sin x$ és $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ is negatív lesz, igy azt kapjuk, hogy

$$-\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{-\sin x}$$

Ezesetben -1 gyel kell szoroznunk, hogy megkapjuk az tétel állítását. Egyéb esetben azonnal megkapjuk az eredményt.

Az első képlet második egyenlőségéhez az elsőt bővítjük $1+\cos x$-el:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

A kotasngensre vonatkozó képletet reciprok alkalmazásának segítségvel kapjuk meg.

□

4.6.1. Szögfüggvények összegének szorzattá alakítása

11. TÉTEL.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \quad ha \;\; x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}, \quad ha \;\; x, y \neq k\pi, k \in Z$$

Bizonyítás [1]

Legyen

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\beta = \frac{x-y}{2}$$

Ekkor $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta$ lesz.

Ezek az azonosságok az addíciós képletek és az 5. Tétel segítségével igazolhatók. Tangens és kotangens esetében annyi a különbség, hogy az addíciós képletek meleltt felhasználjuk a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ és $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ összefüggéseket.

Az alábbiakban tételben szereplő 1. és 5. képletet bizonyítom be, a többi hasonló módon tötlnik.

Az 1. képlet:

$$\sin x + \sin y = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) =$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta =$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Az 5. képlet:

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos y} \pm \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

A tételben megszabott feltételekkel elkerüljük a nullával való osztást.

$\square$

4.7. Trigonometrikus egyenletek megoldása

A trigonometrikus egyenletek olyan egyenletek, amelyekben legalább egy trigonometrikus függvény szerepel. Általában az ismeretlen az adott függvény szöge, és a feladat a megoldás megtalálása. Az egyenletek megoldásához általában trigonometrikus azonosságokat és az adott függvények tulajdonságait kell alkalmazni.

A trigonometrikus egyenletek nagyon fontosak a matematikában, mivel számos fizikai és mérnöki probléma megoldásában is felmerülnek.

Az alábbiakban három eltérő nehézségű feladat megoldásást fogom bemutatni.

4.7.1. 1. Feladat

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

Megoldás:

Az egyenletet $\cos x(\cos x - 1) = 0$ alakba hozva, látható, hogy a gyökei $x = 2k\pi$ és $x = 2k\pi + \pi$, ahol k egész szám.

4.7.2. 2. Feladat

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

Megoldás:

Az egyenlet bal oldalának a kétszeres szög formula szerinti átalakítása után

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

alakra hozható. Ennek megoldásai

$$x = k\pi s x = \frac{1}{2}(2k\pi + \frac{\pi}{3}), k \in Z$$

4.7.3. 3. Feladat

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$$

Megoldás:

Az egyenlet bal oldalának négyzetre emelése után

$$\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 4$$

alakra hozható. Ezt az egyenletet átalakíthatjuk a $\sin 2x$ és $\cos 2x$ képlet felhasználásával, majd egy másodfokú egyenletet kapunk $\cos 2x$-re vonatkozóan. Ennek megoldásai

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$$

4.7.4. 4. Feladat

$$\cos(x) - \sin(x) = 1$$

Megoldás:

Az egyenlet átrendezése:

$$\cos(x) = \sin(x) + 1$$

Mivel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, ezért az egyenletbe helyettesítve:

$$\sin^2(x) + (\sin(x) + 1)^2 = 1$$

A következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$2\sin^2(x) + 2\sin(x) = 0$$

Ebből $\sin(x) = 0$ vagy $\sin(x) = -1$. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4.7.5. 5. Feladat

$$\operatorname{ctg}^2(x) + 2\operatorname{ctg}(x) - 3 = 0$$

Megoldás:

Az egyenlet átírható $\operatorname{ctg}(x)$-re vonatkozó másodfokú egyenletté:

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1,\ 3$$

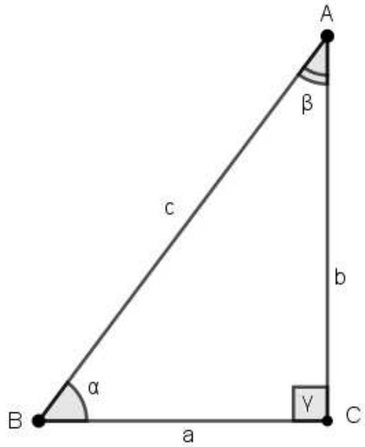
Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi, \quad x = \operatorname{arctg}(3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

5. Szögfüggvények a derékszögű háromszögben. Szögfüggvény tételek

5.1. A derékszögű háromszög hegyesszögeinek szögfüggvényei

Legyen adott egy derékszögű háromszög, melynek két befogója a és b, az átfogója pedig c. Az ezekkel szemközti csúcsok és szögek rendre A, B, C, illetve α, β és γ.



48. ábra. ACB derékszögű háromszög és szögei

Ekkor a hegyesszögek szögfüggvényeit a következőképpen adhatjuk meg [10]:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c},\quad \cos\beta = \frac{a}{c},\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$$

Más szavakkal a derékszögű háromszög bármely hegyesszögének

- szinusza a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa,
- koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hányadosa,
- tangense a szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hányadosa,
- kotangense a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hányadosa.

Az alábbi szögek értékei a 10. ábra segítségével bizonyíthatók[1].

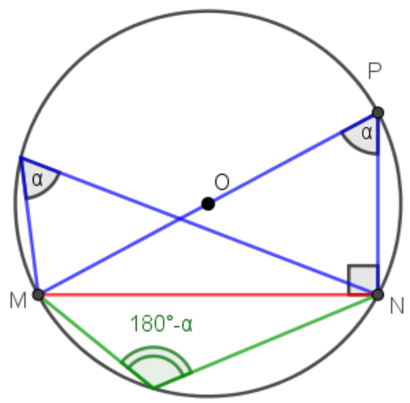
Fok (°)	Radián	sin α	cos α	tg α	ctg α
0°	0	0	1	0	–
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0	–
210°	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	–	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	–

49. ábra. Nevezetes szögek táblázata

5.2. A szinusztétel

A tétel bizonyításához alkalmazzuk a következő lemmát.

1. LEMMA. *A körvonal húrja egyenlő az átmérőjének és a neki megfelelő kerületi szög szinuszának szorzatával [9].*



50. ábra. Melléklet az 1. Lemma bizonyításához

Bizonyítás

A mellékelt ábrán az MN szakasz az O középpontú körvonal húrja. Meghúzzuk az MP átmérőt. Ekkor az $MNP\angle = 90°$, mint az átmérőre támaszkodó kerületi szög.

Legyen az MPN kerületi szög mértéke α. Ekkor az MPN derékszögű háromszögben kapjuk, hogy:

$$MN = MP \cdot \sin\alpha \quad (1)$$

Minden, az MN húrra támaszkodó kerületi szög mértéke α vagy $180° - \alpha$ lesz. Tehát szinuszaik egyenlők. Ezért az (1) egyenlőség minden, az MN húrra támaszkodó kerületi szögre igaz lesz.

A háromszögek egybevágóságának második ismertetőjeléből következik, hogy egy oldala és a rajta fekvő két szöge egyértelműen meghatározzák a háromszöget. Tehát ezen elemei alapján meg lehet határozni a háromszög másik két oldalát. Ebben lesz számunkra segítségül a szinusztétel.

□

12. TÉTEL (Szinusztétel). *A háromszögek oldalai arányosak a szemben lévő szögek szinuszával [9].*

Bizonyítás

Legyen az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Legyen az ABC háromszög köré írt körének sugara R. Ekkor a lemma alapján $a = 2R \cdot \sin A$, $b = 2R \cdot \sin B$, $c = 2R \cdot \sin C$. Innen

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

□

5.3. A koszinusztétel

13. TÉTEL. *Bármely háromszög egyik oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal és az általuk bezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát [8].*

Bizonyítás [8]

Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget. Bebizonyítjuk, hogy például

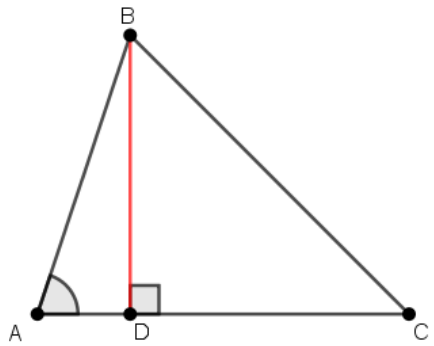
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Három esetet vizsgálunk meg:

1) az $A\angle$ hegyesszög;

2) az $A\angle$ tompaszög;

3) az $A\angle$ derékszög.



51. ábra. A koszinusz tétel 1. esete

Első eset. Legyen az A hegyesszög. Akkor legalább az egyik szög, a $B\angle$ vagy a $C\angle$ hegyesszög lesz.

Legyen $C\angle < 90°$. Meghúzzuk a BD magasságot. Az teljesen az ABC háromszögben lesz.

Az ABD derékszögű háromszögben:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A$$

A BDC derékszögű háromszögben:

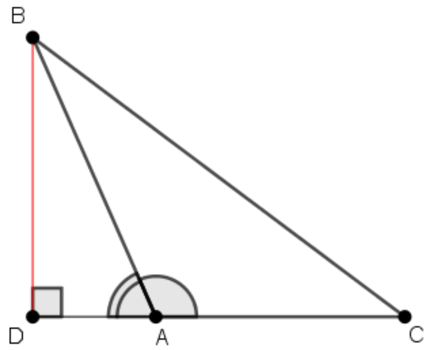
$$BC^2 = BD^2 + CD^2 =$$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$

$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$



52. ábra. A koszinusz tétel 2. esete

Amennyiben $B\angle < 90°$. Az ABC háromszög C csúcsából meghúzzuk a magasságot. Az teljesen az ABC háromszögben lesz. Ennek az esetnek a bizonyítása teljesen hasonló az előbbi esethez.

Második eset. Legyen az $A\angle$ tompaszög. Az ABC háromszögben meghúzzuk a BD magasságot.

Az ABD derékszögű háromszögben:

$$BD = AB \cdot \sin BAD\angle = AB \cdot (180° - BAC\angle) = AB \cdot \sin BAC\angle$$

$$AD = AB \cdot \cos BAD\angle = AB \cdot \cos(180° - BAC\angle) = -AB \cdot \cos BAC\angle$$

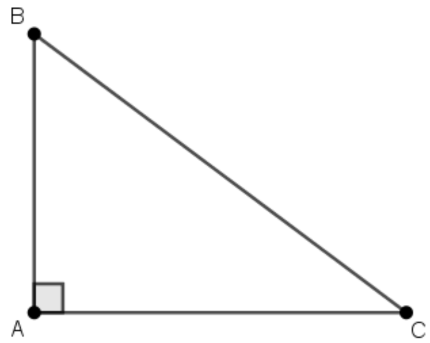
Az BDC derékszögű háromszögben:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 =$$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2$$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 BAC\angle + (AC - AB \cdot \cos BAC\angle)^2 =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC\angle$$



53. ábra. A koszinusz tétel 3. esete

Harmadik eset. Legyen az A derékszög. Ekkor $\cos A = 0$. Be kell bizonyítani, hogy $BC^2 = AB^2 + AC^2$. A Pitagorasz-tételből következően ez az egyenlőség az ABC háromszögre igaz lesz.

A koszinusztétel bizonyítása megmutatta, hogy a Pitagorasz-tétel a koszinusztétel egy részesete, a koszinusztétel pedig a Pitagorasz-tétel általánosítása. Ha alkalmazzuk az ABC háromszög oldalainak és a szögeinek jelölését, akkor például az a oldal hosszára fel lehet írni:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos a$$

□

Összegzés

A szakdolgozatom témája egy interaktív elektronikus könyv készítése volt, amely a trigonometria alapjait dolgozta fel és modern, interaktív elemeivel, gyszerűen elérhető és használható a diákok számára.

A könyv az alapfogalmakat, a szögfüggvények fogalmát, az azonosságokat és alkalmazásukat mutatja be. A megírása során fontos volt számomra, hogy az elméleti ismeretek mellett gyakorlati alkalmazásokat is bemutassak. Az elkészített példák remélhetőleg segítenek abban, hogy a témakört valós helyzetekben is alkalmazni tudjuk. Az interaktivitás lehetővé teszi, hogy a diákok saját tempójukban tanuljanak és megértsék a téma alapelveit. Remélem, hogy hasznos és érdekes volt az általam feldolgozott téma, és sikerült jobban megérteni az adott területet.

A szakdolgozat célja az volt, hogy bemutassa, milyen hatékony és korszerű módon lehet az oktatási anyagokat előállítani és terjeszteni, és remélhetőleg hozzájárul a modern oktatási módszerek elterjedéséhez. Bízom benne, hogy az általam elkészített tananyag hozzájárul az érdeklődők ismereteinek bővítéséhez és szilárd alapismereteket ad a trigonometria területén való továbbhaladáshoz.

Sok sikert kívánok a továbbiakban!

Hivatkozások

[1] Dr. Czinder Péter 2014: A trigonometria alapjai. Budapest: Eötvös Kiadó.

[2] A. H. Merzljak et al. 2018: Matematika 10: Algebra és az analízis elemei. Térmértan. Standard szint. Lemberg: Szvit Kiadó. 49-52

[3] A. H. Merzljak et al. 2018: Matematika 10: Algebra és az analízis elemei. Térmértan. Standard szint. Lemberg: Szvit Kiadó. 55-57

[4] A. H. Merzljak et al. 2018: Matematika 10: Algebra és az analízis elemei. Térmértan. Standard szint. Lemberg: Szvit Kiadó. 63-69

[5] A. H. Merzljak et al. 2018: Matematika 10: Algebra és az analízis elemei. Térmértan. Standard szint. Lemberg: Szvit Kiadó. 85-94

[6] A. H. Merzljak et al. 2018: Matematika 10: Algebra és az analízis elemei. Térmértan. Standard szint. Lemberg: Szvit Kiadó. 76-77

[7] A. H. Merzljak et al. 2018: Matematika 10: Algebra és az analízis elemei. Térmértan. Standard szint. Lemberg: Szvit Kiadó. 82-83

[8] A. H. Merzljak et al. 2017: Mértan 9. Lemberg: Szvit Kiadó. 12-14

[9] A. H. Merzljak et al. 2017: Mértan 9. Lemberg: Szvit Kiadó. 21-22

[10] A. H. Merzljak et al. 2016: Mértan 8. Lemberg: Szvit Kiadó. 122-126

Ábrák jegyzéke

Висновок

Темою моєї дипломної роботи було створення інтерактивної електронної книги, яка охоплювала основи тригонометрії та мала сучасні, інтерактивні елементи, які були легко доступні та зрозумілі для учнів.

Книга представляє основні поняття, теореми та застосування тригонометричних функцій. Під час написання мені було важливо не тільки навести теоретичні знання, але й показати їх практичне застосування. Складені приклади сподіваюся, допоможуть учням застосовувати знання в реальних ситуаціях. Інтерактивність дозволяє учням навчатися в своєму власному темпі та зрозуміти основні принципи теми.

Я сподіваюся, що моя робота була корисною та цікавою, і ви змогли краще зрозуміти обраний мною предмет. Метою дипломної роботи було продемонструвати, як ефективно та сучасно можна створювати та поширювати навчальні матеріали, і, сподіваюся, моя робота допоможе поширити використання сучасних методик навчання. Я сподіваюся, що навчальний матеріал, який я створив, допоможе збагатити знання всіх, хто цікавиться тригонометрією, та надасть стійкі основи для подальшого вивчення цієї теми.

Бажаю успіху у подальшому навчанні!

Nyilatkozat

Alulírott, Tar Bence Balázs, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

Дата перевірки:
16.05.2023 15:07:27 EEST

Дата звіту:
16.05.2023 16:07:32 EEST

ID перевірки:
1015113199

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
100011749

Назва документа: Szakdolgozat_Tar Bence Balázs

Кількість сторінок: 55 **Кількість слів:** 7173 **Кількість символів:** 49254 **Розмір файлу:** 3.49 MB **ID файлу:** 1014795774

14.7% Схожість

Найбільша схожість: 3.61% з Інтернет-джерелом (https://issuu.com/portfel_schoolbooks/docs/9_klas_geometrija_merzlja.

14.4% Джерела з Інтернету | 413 .... Сторінка 57

1.16% Джерела з Бібліотеки | 1 .... Сторінка 62

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0% Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 134