ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

РОЗРОБКА РОЗДІЛІВ Е-ПІДРУЧНИКА ДЛЯ ПІДТРИМКИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ»

ЖЕНДЕЙ ДАВИД ЛЕВЕНТОВИЧ

Студент IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол **№ 3 від 17 жовтня 2022 року**

Науковий керівник: **Головач Йожеф Ігнацович**

доктор технічних наук, професор

Завідувач кафедрою математики та інформатики: **Кучінка Каталін Йожефівна**

к. ф.-м. н

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

РОЗРОБКА РОЗДІЛІВ Е-ПІДРУЧНИКА ДЛЯ ПІДТРИМКИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

Жендей Давид Левентович

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Головач Йожеф Ігнацович**

доктор технічних наук, професор

Рецензент: **Стойка Мирослав Вікторович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Берегове
2023

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.
Ф-КДМ-2

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

AZ E-TANKÖNYV FEJEZETÉNEK FEJLESZTÉSE A „DESCARTES-FÉLE KOORDINÁTÁK A SÍKON” TÉMAKÖR TANULMÁNYOZÁSÁNAK TÁMOGATÁSÁRA

Szakdolgozat

Képzési szint: alapképzés

Készítette: Zsendej Dávid

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

Témavezető: Holovács József

műszaki tudományok doktora, professzor

Recenzens: Sztojka Miroszláv

docens, fizika és matematika tudományok kandidátusa

Beregszász – 2023

Tartalom

Bevezetés

Az elmúlt évszázadok során a matematika számos területén történtek olyan felfedezések és fejlesztések, amelyek átformálták az emberiség szemléletmódját és lehetővé tették az életünket megkönnyítő technológiák kifejlesztését. Az egyik ilyen terület a Descartes-féle koordináta rendszer, amely az alapját képezi az elemi geometria, az analitikus geometria, valamint a lineáris algebra tanulmányozásának.

Diplomamunkám célja, hogy részletesen bemutassa a Descartes koordináta rendszer alapvető fogalmait és alkalmazásait. A munka első részében rövid történelmi áttekintést adok a koordinátageometria fejlődéséről és a Descartes-féle koordináta rendszer megjelenéséről. Ezután a Descartes-koordináták fogalmát, azok ábrázolási módját és az egyenesek és pontok Descartes-féle koordinátáinak meghatározását tárgyalom.

A dolgozat második részében bemutatom a Descartes-koordináták alkalmazásait a geometriában, a fizikában és a matematikában. Számos példán keresztül mutatom be, hogyan lehet a Descartes-koordináták segítségével megoldani geometriai és fizikai problémákat, valamint hogyan lehet a koordinátákat alkalmazni lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek megoldására.

A diplomamunka összességében azt igyekszik bemutatni, hogy a Descartes-féle koordináta rendszer a matematika és a tudományok számos területén nélkülözhetetlen eszköz, és fontos megérteni annak alapvető fogalmait és alkalmazásait.

1. A Kotobee szoftver bemutatása

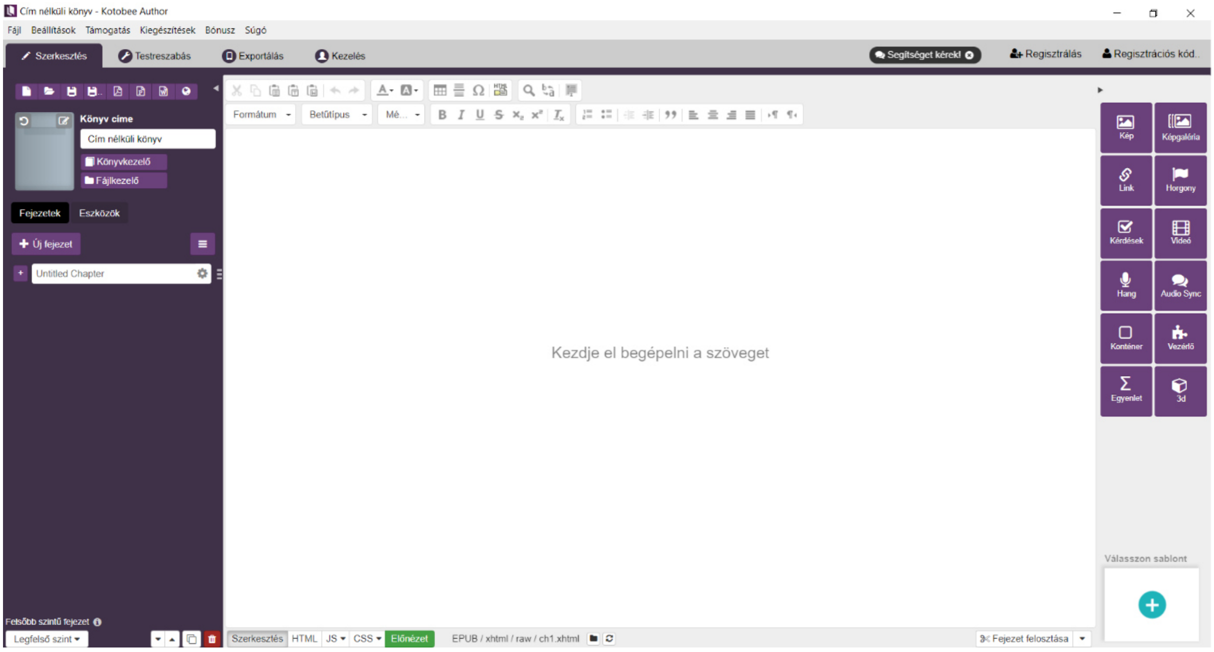
1. ábra - Szoftver ikon *[5]*.

A Kotobee egy könnyen használható és rugalmas ebook készítő szoftver, amely lehetővé teszi a felhasználók számára, hogy saját ebookjukat készítsék el. A szoftver funkciói közé tartozik többek között a képek, videók, hangok, interaktív elemek és feladatok hozzáadása az ebookhoz, valamint a testreszabható design sablonok és az ebookok formátumának kiválasztása.

Az ebook készítése során a felhasználók először az ebook címét és írónevét adhatják meg, majd hozzáadhatnak fejezeteket és alfejezeteket az ebook struktúrájának megtervezéséhez. A fejezetek és alfejezetek között a felhasználók a szükséges tartalmakat adhatják meg, beleértve a szövegeket, képeket, videókat, hangokat és interaktív elemeket. A Kotobee lehetővé teszi a felhasználók számára, hogy testreszabják az ebookjukat a saját brandjüknek megfelelően, például az ebook borítóképének vagy a színeknek a testreszabásával.

A Kotobee ebook készítő szoftver kétségkívül egy nagyon hatékony eszköz a szakdolgozatok, oktatási anyagok, kézikönyvek, regények és sok más típusú ebookok készítéséhez. A felhasználóbarát felülete és a széles körű testreszabási lehetőségei lehetővé teszik a felhasználók számára, hogy saját ebookjaikat készítsék el, amelyek megfelelnek az egyéni igényeiknek és brandjüknek.

A Kotobee Ebook Készítő további előnye, hogy rengeteg beépített funkciót kínál, például interaktív tartalmak létrehozását, multimédiás tartalmak integrálását, tesztek és kvízek létrehozását, szótárfunkciókat, valamint az ebookok nyomtatását és exportálását különböző formátumokba, mint például PDF, EPUB, MOBI és még sok más.



2. ábra - Kezelő felület.

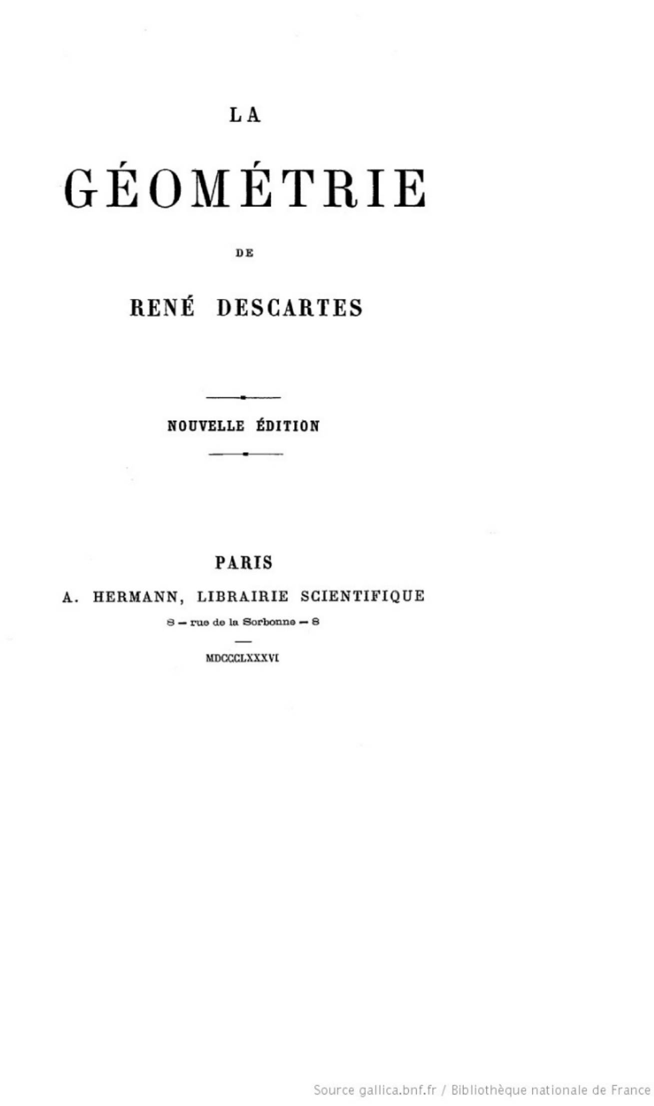
Az alkalmazás több mint 25 nyelven érhető el, így könnyen alkalmazkodhat az olvasók nyelvi igényeihez. Emellett a Kotobee Ebook Készítő rendelkezik egy felhőalapú platformmal is, amely lehetővé teszi az ebookok megosztását és közzétételét az interneten.

Összességében a Kotobee Ebook Készítő egy hatékony és sokoldalú eszköz az ebookok létrehozásához és szerkesztéséhez. A program könnyen használható felhasználói felülete és számos beépített funkciója lehetővé teszi az olvasók számára, hogy magával ragadó és interaktív tartalmakat érjenek el, miközben a szerzőknek lehetőségük van saját ebookjaik testreszabására és közzétételére az interneten.

2. A Descartes típusú koordináta rendszer története

A matematikáról és a geometriáról tanulva, mindannyian találkozunk a Descartes típusú koordináta rendszerrel. Ez a rendszer az egyik legfontosabb és legelterjedtebb matematikai eszköz, amely lehetővé teszi számunkra a pontok és alakzatok elhelyezkedésének leírását a síkon és a térben. Azonban sokan nem ismerik ennek a rendszernek a történetét és a fejlődését, amelyen keresztül eljutottunk a modern koordináta geometriához.

A Descartes típusú koordináta rendszer elnevezése René Descartes francia filozófusra és matematikusra utal, aki a 17. században élt. Descartes úttörő szerepet játszott a matematikában és a filozófiában, és újításaival forradalmasította a geometriát. A rendszer kifejlesztése és kidolgozása Descartes híres művében, a "La Géométrie"-ben található.


LA

GÉOMÉTRIE

DE

RENÉ DESCARTES

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 – rue de la Sorbonne – 8

MDCCCLXXXVI

3. ábra - Descartes híres műve [4].

A koordináta geometria elődjének tekinthető az apollóni geometria, amely az ókori görögök által kidolgozott geometriai elméletek gyűjteménye volt. Az apollóni geometria egy adott alakzatot vagy pontot más alakzatok vagy pontok segítségével határozott meg. Azonban Descartes továbblépett, és egy új módszert vezetett be a geometria számára. A Descartes típusú koordináta rendszer alapja az ún. Descartes-koordináták. Ez egy olyan módszer, amely lehetővé teszi a pontok elhelyezkedésének meghatározását a síkon vagy a térben, segítségül véve az x és y tengelyeket. Az x tengely az oldalirányú mozgást, míg az y tengely a függőleges mozgást jelképezi. Ezenkívül a háromdimenziós térben egy z tengelyt is bevezethetünk.

A Descartes-koordináták segítségével minden pontot egyedi számpárral vagy szárhármassal tudunk jelölni. Például, ha a síkon az (x, y) pontban vagyunk, akkor az x a vízszintes elhelyezkedést, míg az y a függőleges elhelyezkedést jelzi. Ezzel a rendszerrel könnyedén megadhatjuk az alakzatok és a görbék egyenleteit, valamint kiszámíthatjuk távolságaikat és területeiket. Descartes rendszerének kifejlesztése forradalmi hatást gyakorolt a matematikára és a geometriára. A koordinátageometria bevezetése lehetővé tette az absztrakt matematikai objektumok, például az egyenletek és a görbék, vizuális megjelenítését. Ezáltal könnyebbé vált a geometriai problémák elemzése és megoldása.

Az 1637-ben megjelent "La Géométrie" Descartes műve, amelyben részletesen bemutatja a koordináta geometria alapjait. Ebben a műben Descartes kifejti, hogy a pontok elhelyezkedése leírható az x és y koordináták segítségével, valamint bemutatja az egyenletek és a görbék geometriai interpretációját. Descartes rendszere a matematikában és a fizikában is forradalmasította a gondolkodást. Lehetővé tette például az analitikus geometriát, amely az algebrai és a geometriai fogalmak összekapcsolásával foglalkozik. Ezáltal a geometriai problémák elemzése és megoldása algebrai eszközökkel történhetett. Descartes rendszerének hatása azóta is érezhető. A koordináta geometria az alapja számos matematikai és tudományos területnek, beleértve a fizikát, az informatikát, a gépészetet és még sok mást. Descartes geometriai megközelítése a modern tudományok alapjává vált, és a koordináta rendszer széles körben elfogadott és alkalmazott eszközzé vált. Fontos megérteni és értékelni a Descartes típusú koordináta rendszer történetét, mert ez a fejlesztés egy új paradigmát hozott a matematikába és a geometriába. Descartes munkássága a tudomány és a technológia fejlődését is elősegítette, és a koordináta geometria mai napig alapvető eszköze a matematikai elemzésnek és a valós világ problémáinak megoldásának.

2.1 Descartes életéről:

Descartes vagyonos nemesi családból származott. Ifjú korában a jezsuitáknál tanult. Fiatal korában katonáskodott, szolgált Hollandiában, majd a bajor hadseregben. Harcolt a fehérhegyi ütközetben, ahol a katolikus liga leverte a protestáns cseh rendeket. Végül részt vett Richelieu alatt La Rochelle ostromában. Egész életében nőtlen maradt. A tudományok és a matematika iránti érdeklődését iskolatársa Marin Mersenne (1588-1648) tartotta ébren, aki maga is matematikus volt, aki elsősorban számelmélettel foglakozott (Mersenne-féle prímek.) Descartes a racionalizmust hirdette. Mindenféle ismeret helyességében kételkedett. „Semmit ne fogadjunk el igaznak, aminek igaz voltát tisztán és világosan fel nem ismertük". Nem kevesebbet, mint új filozófiai rendszert akart alkotni, úgy, hogy megkeresi az igazságok kutatására legalkalmasabb deduktív matematikai módszert. Ennek érdekében a legkülönfélébb tudományokkal is foglalkozott. Fő műve az Értekezések a módszerről. Filozófiájának sok hívet szerzett, ezért sem a francia egyház, sem a hollandiai protestáns egyház nem nézte jó szemmel. 1647-ben Krisztina svéd királynő levelet írt Descartes-nak, hogy megtudja tőle, mi a legfőbb jó. Descartes válasza: „Hogy erényesek legyünk." Későbbi levelei is olyan hatással voltak a svéd királynőre, hogy meghívta Svédországba. Descartes 1649-ben elfogadta a meghívását és Svédországba ment. A svéd akadémia megszervezése közben érte a halál [1].

2.2 Munkásságáról:

Arisztotelész nyomán Descartes is megpróbálkozott a matematikai logika megteremtésével, de kezdeti próbálkozásai nem jártak sikerrel. Descartes a geometria problémák megoldásához gyakran alkalmazott algebrai módszereket. Az 1637-ben megjelent Értekezések a módszerről című könyvének függeléke a Geometrie, amely lendületet adott az analitikus geometria fejlődésének. Ez a műve nagy hatással volt a fiatal Newtonra is. Műveiben azonban még nem szerepel a koordináta rendszer, amely ma az ő nevét viseli. Apollóniosz-hoz hasonlóan ő is még csak egyetlen tengellyel dolgozott, és ezen sem vette figyelembe a negatív számokat, bár már számolt is velük, de „hamis" számoknak nevezte őket. Igen fontos lépés volt a változó fogalmának a használata, amellyel a függvénytan fejlődését segítette elő. A szakaszok közötti alapműveleteket úgy igyekezett definiálni, hogy az eredmény ismét szakasz legyen. Azért, hogy két szakasz szorzata és hányadosa is szakasz legyen, bevezette az egységszakasz fogalmát és a negyedik arányos szerkesztését. Descartes volt, aki elkezdte a hatványkitevők használatát, és aa helyett a2-t írt. Ő már ismerte a testekre (poliéderekre) vonatkozó un. Euler tételt, amit Euler tőle függetlenül újra felfedezett. Ő fedezte fel a (9363584; 9437056) barátságos számpárt. A halmazok direkt szorzata is Descartes nevét őrzi [1].

2.3 A koordináta rendszer fejlődése az idők során

A koordináta rendszer fejlődése az idők során az egyik legfontosabb és jelentős mérföldkő a matematika, a fizika és más tudományágak történetében. Kezdetben a koordináta geometria alapjait Descartes fektette le a XVII. században, azonban az idő múlásával és más tudósok hozzájárulásával továbbfejlődött és kibővült.

Az analitikus geometria további fejlődésével olyan újabb dimenziók jelentek meg, mint például a háromdimenziós térben való koordináták használata. Az 1800-as években az elismert matematikusok, például Gauss, Bolyai és Lobachevsky, megkezdték a nem-euklideszi geometria fejlesztését, amely további lehetőségeket nyitott a koordináta rendszer alkalmazására.

Az 1900-as években a koordináta geometria és a lineáris algebra szorosan összekapcsolódott. Az absztrakt vektorok bevezetése lehetővé tette a többdimenziós koordinátageometria elméleti kidolgozását. A mátrixok és lineáris transzformációk használatával a koordináta rendszer még hatékonyabbá vált a lineáris egyenletek és a lineáris transzformációk vizsgálatában.

Az informatika és a számítástechnika fejlődésével a koordináta rendszer új dimenziókat nyert. A számítógépek és a digitális technológiák lehetővé tették a koordináta geometria széles körű alkalmazását, például a számítógépes grafikában, a térbeli modellezésben és a mesterséges intelligenciában.

A modern korban a koordináta rendszer új fejleményeket is magával hozott, mint például a koordináta alapú gépi tanulás és a mély neurális hálózatok. Ez az újabb dimenzió adataink analízisében és az adatvezérelt döntéshozatalban játszik szerepet.

A koordináta rendszer fejlődése az idők során a technológiai és tudományos haladásnak köszönhetően tovább folytatódott. Az űrkutatás és a navigáció terén például a térbeli koordináták használata vált nélkülözhetetlenné. Az űrkutatásban az űrhajók és műholdak pozíciójának pontos meghatározása, a pályák tervezése és követése során a koordináta rendszer kulcsfontosságú.

A digitális tér térnyerésével a koordináta rendszer tovább fejlődött az internetes térben is. A földrajzi koordináták, például a hosszúság és szélesség, a térképek és a GPS használatával lett könnyen hozzáférhetővé és alkalmazhatóvá az online helymeghatározásban és navigációban.

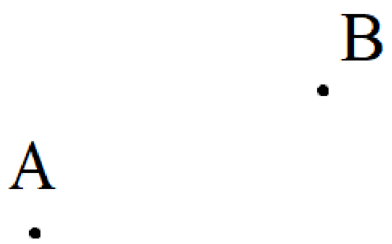
A koordináta rendszer fejlődése az idők során tehát megmutatkozott az újabb technológiákban és alkalmazásokban. A mai világban a koordináták és a koordináta geometria széles körben elterjedt, a közlekedéstől a kommunikációig, a tudományos kutatásoktól a mindennapi életig számos területen alkalmazzák.

Ez a folyamatos fejlődés és alkalmazásainak kibővülése azt mutatja, hogy a koordináta rendszer alapvető és időtálló eszközzé vált a gondolkodásban, a tervezésben és a problémamegoldásban. Az emberi tudás és technológia fejlődésével valószínűleg további újítások és fejlesztések várhatók a koordináta rendszer terén, ami még inkább elősegíti majd az emberi tevékenységeket és a tudományos kutatásokat.

3. Alapfogalmak

3.1 A pont

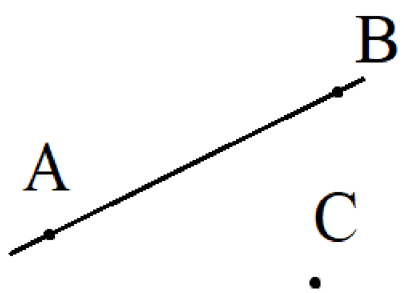
A pont a geometria egyik alapfogalma. A legegyszerűbb mértani alakzat. Ez az egyetlen alakzat, amely nem bontható részekre. Vagyis a pontnak nincs kiterjedése semmilyen irányba. A pontot tekintik továbbá a 0. dimenziónak.



4. ábra - Két pont

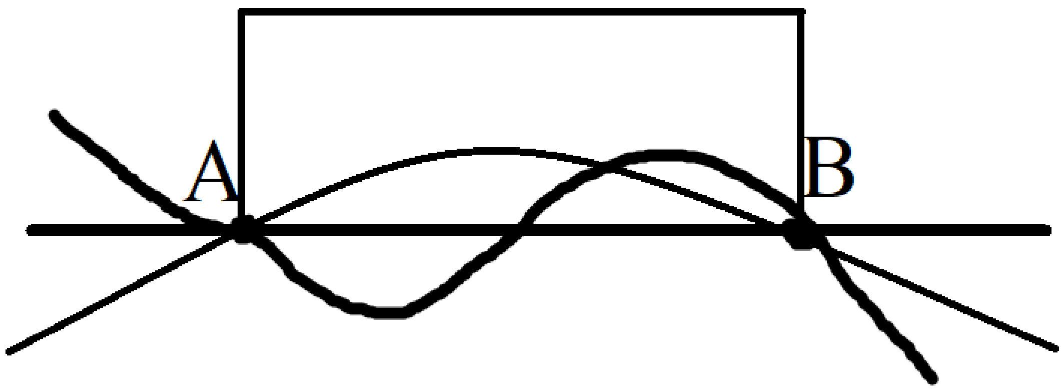
3.2 Az egyenes

Az egyenes - meghatározott tulajdonságokkal rendelkező mértani alakzat.



5. ábra - Egyenes és pont

Az ábrán láttható esetetben a C pont nem tartozik az AB egyeneshez. A pontok és az egyenesek esetében két lehetőség van, az adott pont hozzátartozik az egyeneshez, vagy sem.



6. ábra - Az egyenes alaptulajdonsága

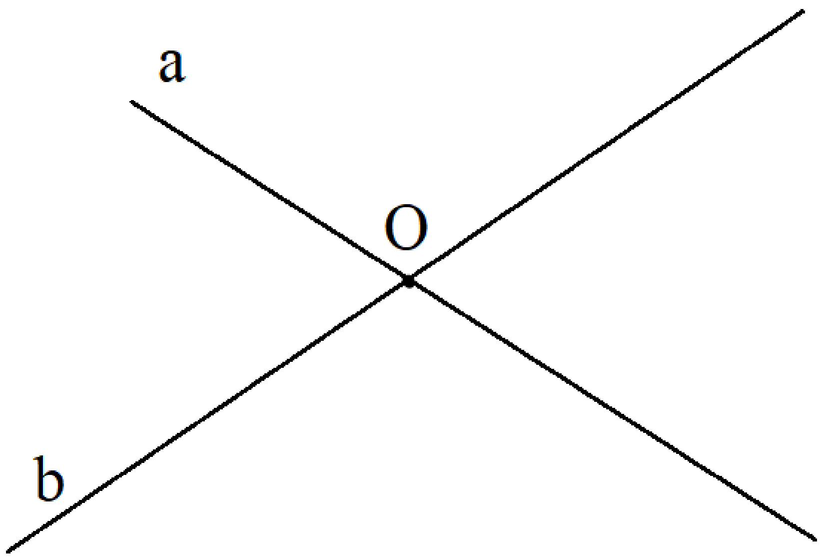
Az egyenes alaptulajdonsága: Bármely két ponton át egyenest lehet húzni, méghozzá csakis egyet [2].

Miért tartják úgy, hogy ez az egyenes alaptulajdonsága?

Legyen egy bizonyos vonalról csak az ismert, hogy átmegy az *A* és *B* ponton. Ahhoz, hogy elképzeljük, hogyan is néz ki ez az alakzat, ez az információ szemmel láthatóan hiányos. Hiszen az *A* és *B* pontokon át sok különböző vonalat lehet meghúzni. Az egyenest egyértelműen meghatározza ez a két pont. Éppen ebben rejlik az egyenes alaptulajdonságának a lényege [2].

Ez a tulajdonság lehetővé teszi az egyenes megjelölését két tetszőleges pontja megnevezése által [2].

A közös ponttal rendelkező két egyenest egymást **metszőknek** nevezik.



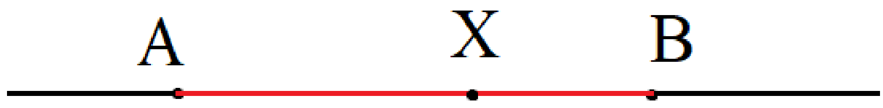
7. ábra - Metsző egyenesek

Bármely két egyenesnek, amelyek metszik egymást, csak egy közös pontjuk van.

8. ábra - Szakasz

A fenti ábrán látható egyenes vörössel jelölt részét szakasznak nevezzük, amelyet az A és B pont határol beleértve az A és B pontot. Az A és B pontot a szakasz végpontjainak nevezzük.

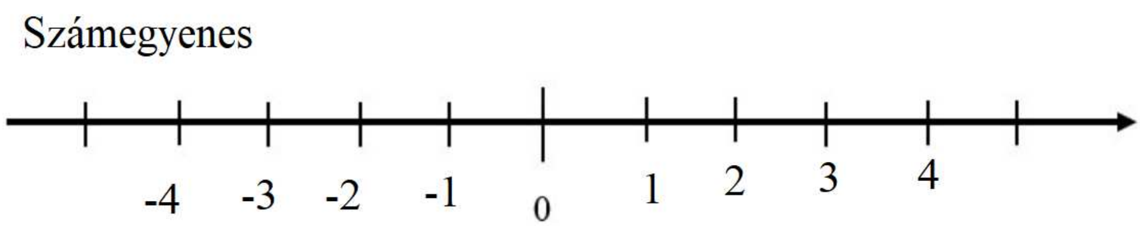
Az összes olyan pontot amely a szakasz végpontja között helyezkedik el, pedig belső pontoknak nevezzük.



9. ábra - Belső pont

Két szakaszt egybevágónak nevezünk, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

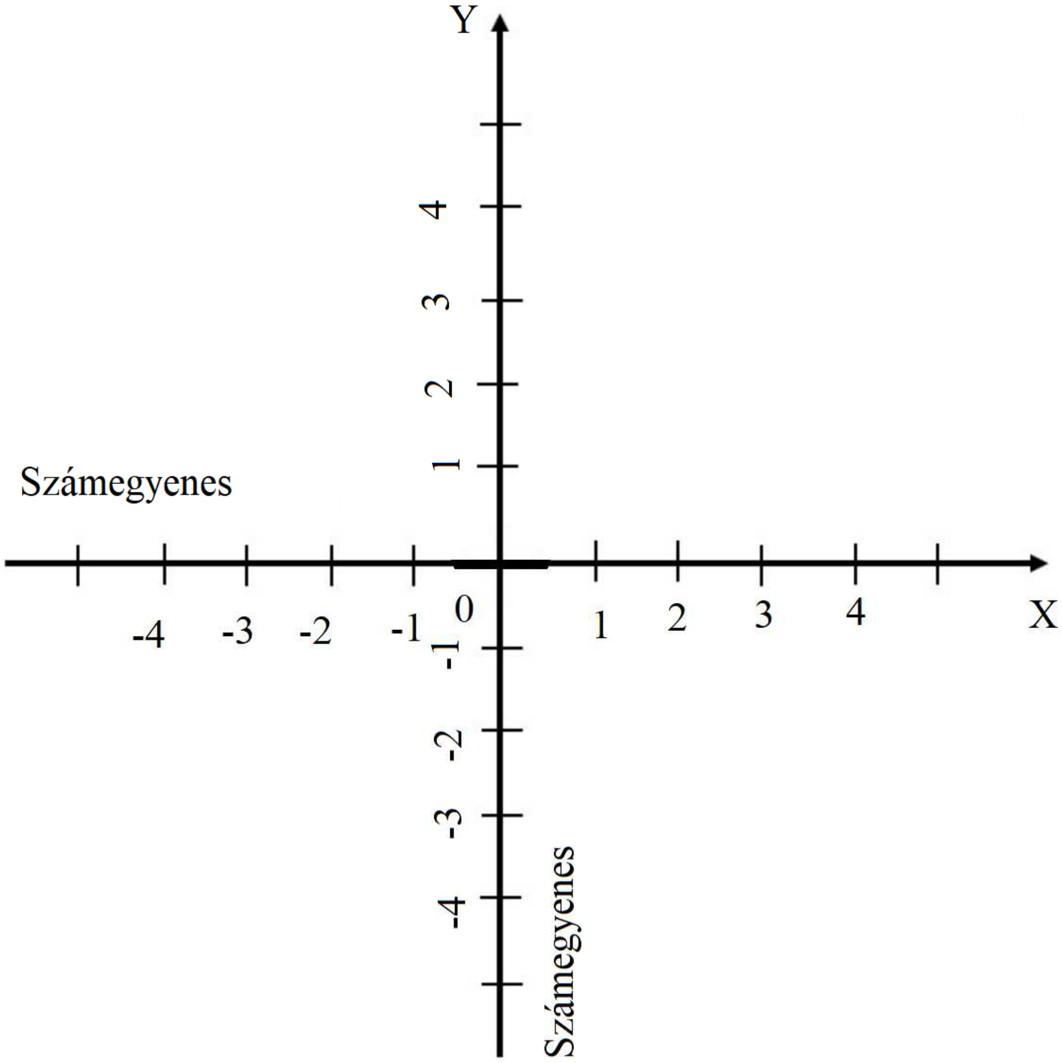
3.3 A tengelyek



10. ábra - Számegyenes

Az a szögek melynek fokmértéke 90^0 derékszögnek nevezzük. Az olyan egyeneseket, melyek 90^0-ban metszik egymást pedig merőleges egyeneseknek nevezzük.

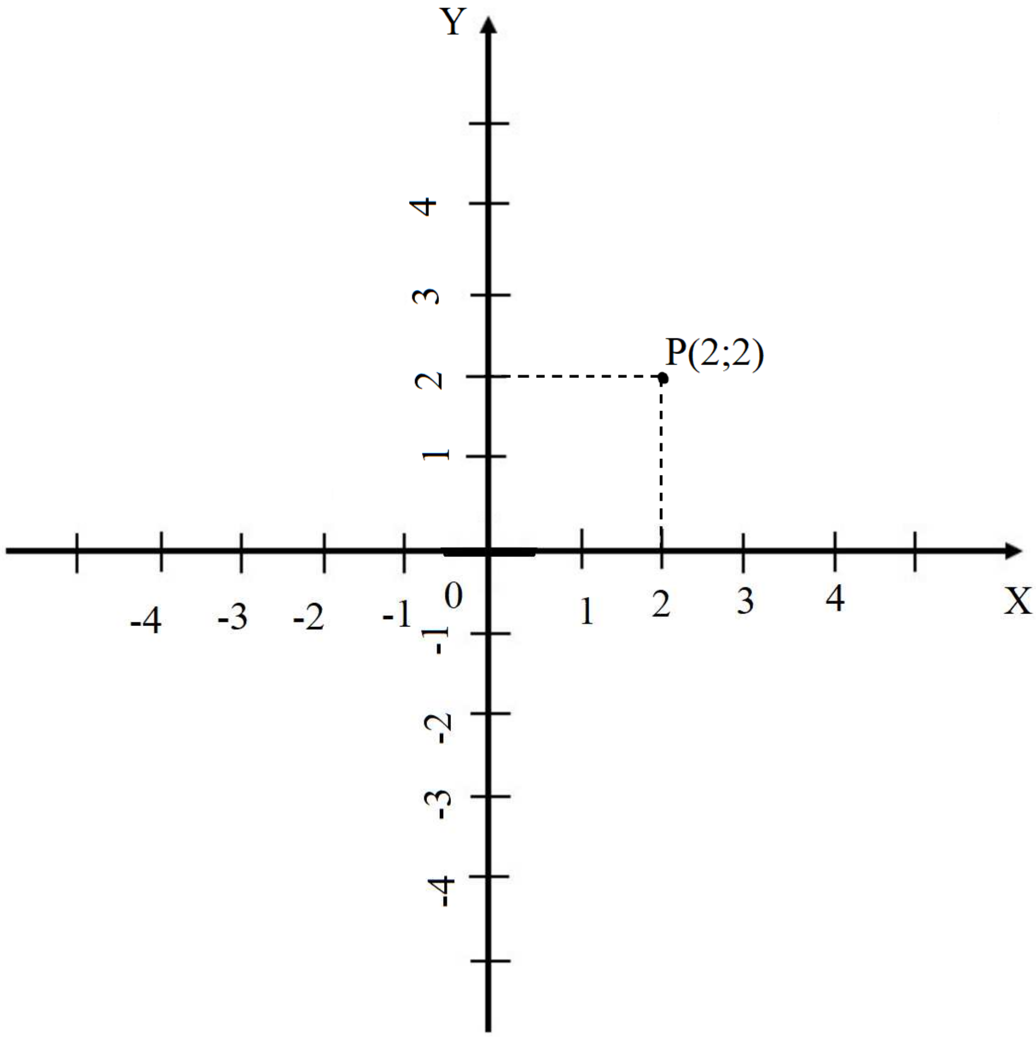
A tengelyek nem mások, mint két számegyenes amelynek közös pontja A „0” és egymásra merőlegesen helyezkednek el. Az első számegyenest(X tengely) **abszcisszának** míg a másodikat(Y tengely) **ordinátának** nevezzük.



11. ábra – Koordinátarendszer

3.4 A koordináták

A koordináták nem másak mint számpárok, ahol az első szám egy tetszőleges valós szám és a második is.

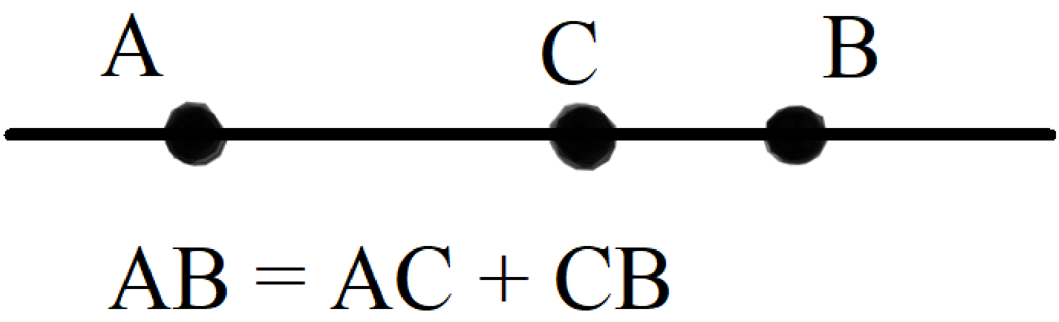


12. ábra - Koordináta

Az ábrán a P pont látható, melynek koordinátái (2;2). Az első koordinátát szokás még X koordinátának is nevezni, a másodikat pedig Y koordinátának. Azt a pontot melyenek koordinátája (0;0) **origónak** nevezzük, jelölése pedig: „O”.

3.5 Távolság

A szakasz hosszának alaptulajdonsága:
Ha a C pont az AB szakasz belső pontja, akkor az AB szakasz egyenlő az AC és a CB szakasz összegével, vagyis $AB = AC + CB$ [2].



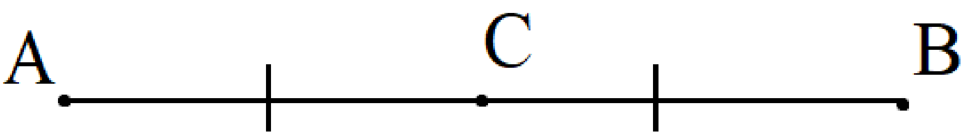
13. ábra – A szakasz hosszának alaptulajdonsága(képlet)

Meghatározás:

Az A és a B pontok közötti távolságot az AB szakasz hosszának nevezzük. Ha az A és a B pontok egybeesnek, akkor úgy tekintik, hogy a köztük lévő távolság nulla [2].

Meghatározás:

Az AB szakasz felezőpontjának ennek a szakasznak azt a C pontját nevezik, amelyre nézve $AC = CB$ [2].



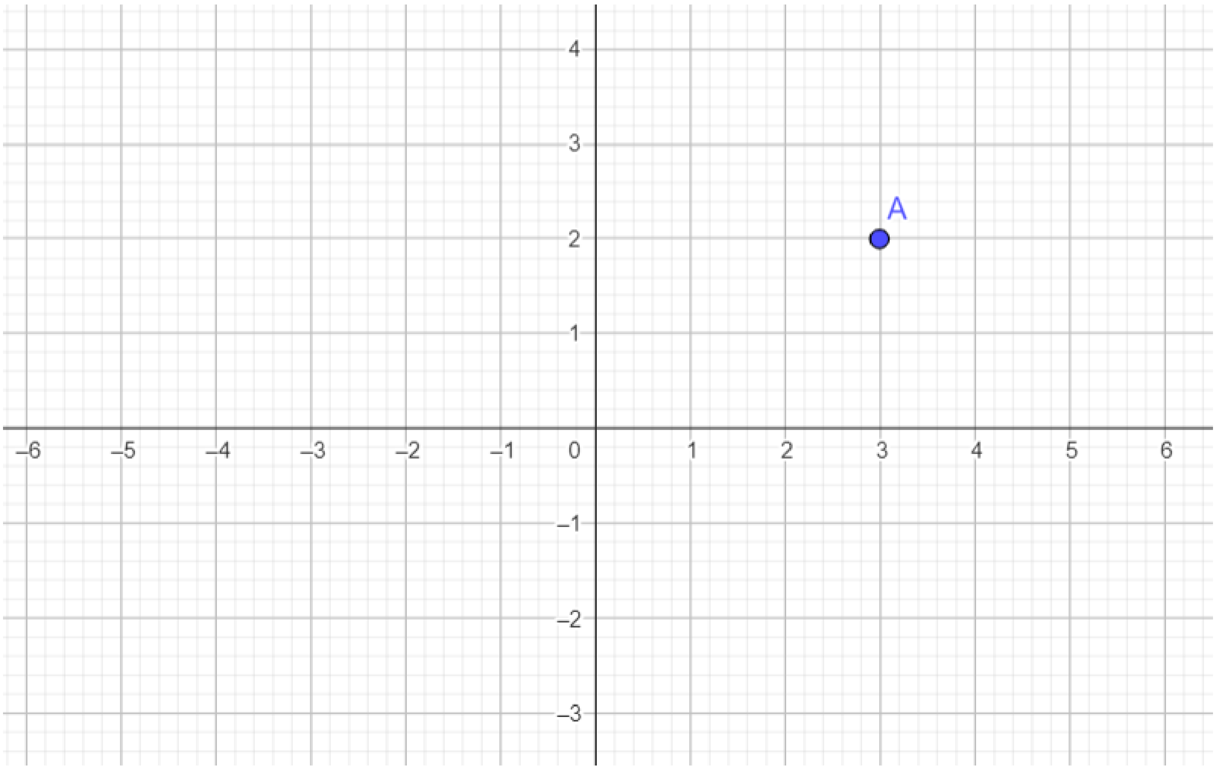
14. ábra - A szakasz felezőpontja

4. Pontok ábrázolása a Descartes koordináta rendszerben

4.1 Pontok ábrázolása a Descartes koordináta rendszerben

Az ábrázolás alapja, hogy minden pontot a síkon egyértelműen leírunk két koordináta segítségével, amelyek a pont távolságát adják meg az x- és y-tengelyektől.

Például a pont A(3;2) koordinátái azt jelzik, hogy a pont 3 egységgel van a y-tengelytől jobbra, és 2 egységgel van az x-tengelytől felfelé.

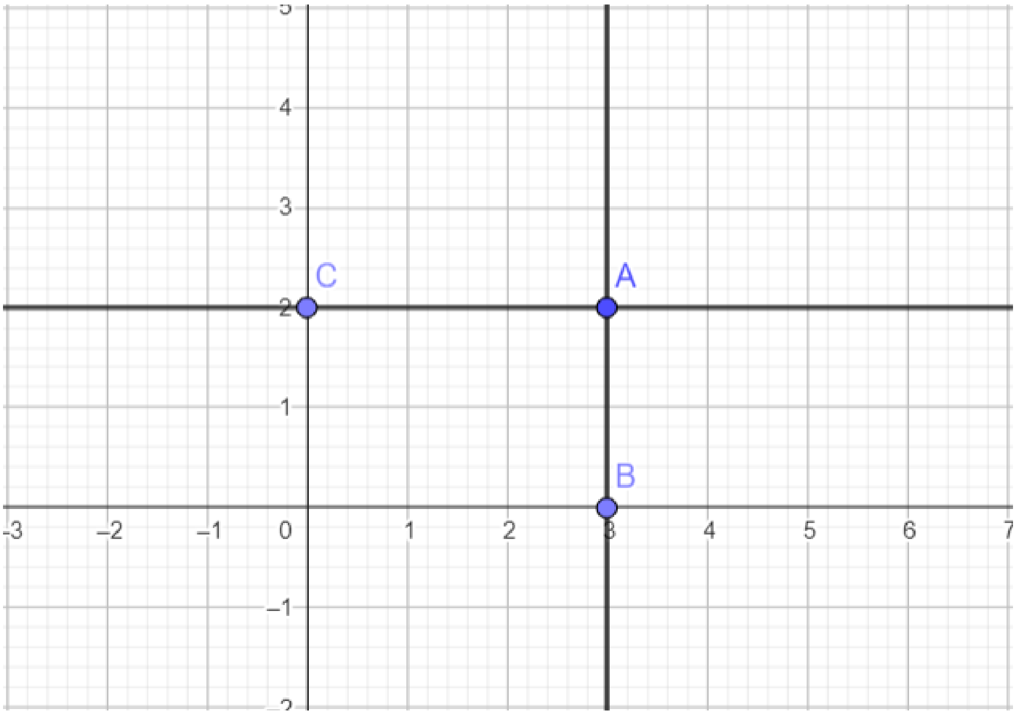


15. ábra - Koordináta értelmezés

Fontos megjegyezni, hogy a koordináták sorrendje nagyon fontos, mivel megváltoztatja a pont helyzetét.

A pontokat a koordinátatengelyek mentén húzott vonalak metszéspontjai jelölik, amelyek az adott pont koordinátáival megegyező távolságra vannak a koordináta-rendszer középpontjától.

Például az A(3;2) pontot az x-tengelyen 3 egységgel jobbra, és az y-tengelyen 2 egységgel felfelé kell ábrázolni, majd a két vonal metszéspontjában jelölni a pontot.



16. ábra - Koordinátapont felvétele

5. Távolság- és felezővonal képletek

5.1 Távolság

Távolságképlet:

Két pont közötti távolság kiszámításához a Pitagorasz-tételt használjuk. Ha az adott pontok koordinátáit az (x_1;y_1) és (x_2;y_2) jelöli, akkor a két pont közötti távolság a következőképpen számítható ki:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Például az A(3;4) és B(6;8) pontok közötti távolságot a következőképpen számoljuk ki:

$$d = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2}$$

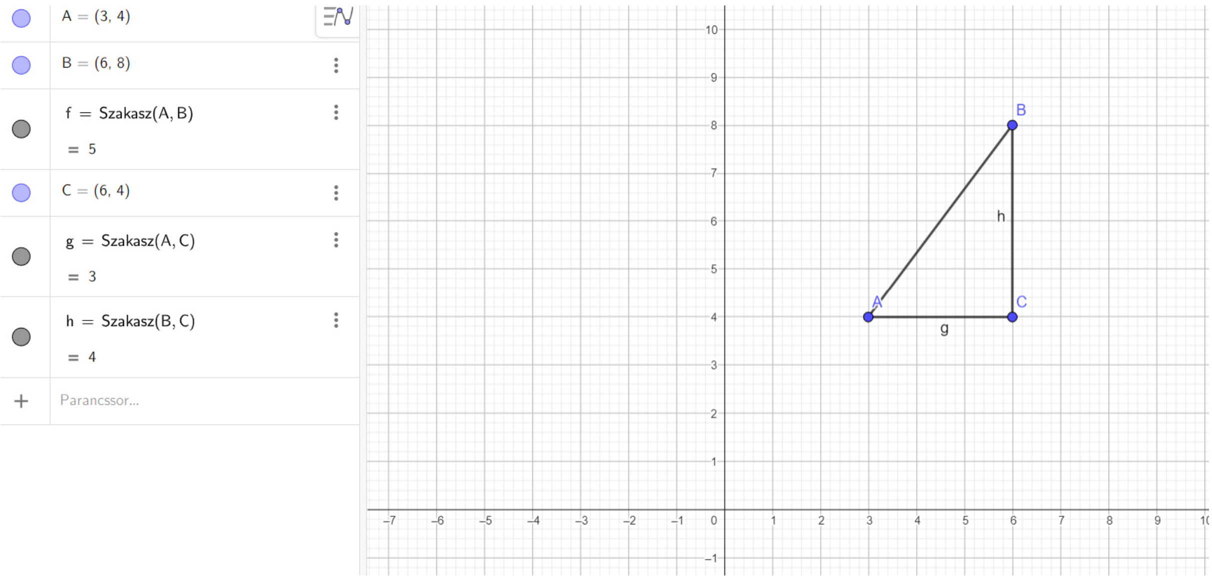
$$d = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

Ez azt jelenti, hogy a két pont közötti távolság 5 egység.



17. ábra - Két pont közötti távolság

5.2 Felezővonal

Felezővonal képlet:

Egyenes felezővonalat húzni két pont között azt jelenti, hogy az egyenes azon pontja, amelyre a két ponttól való távolság azonos. Ha az adott pontok koordinátáit az $(x_1;y_1)$ és $(x_2;y_2)$ jelöli, akkor az egyenes felezővonalának egyenlete a következőképpen számítható ki:

$$y - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(x - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) * \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Ahol $\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ és $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ az adott pontok átlaga.

Például a A(3;4) és B(6;8) pontok felezővonalát a következőképpen számoljuk ki:

Az x-koordináták átlaga: $\frac{3+6}{2} = 4{,}5$

Az y-koordináták átlaga: $\frac{4+8}{2} = 6$

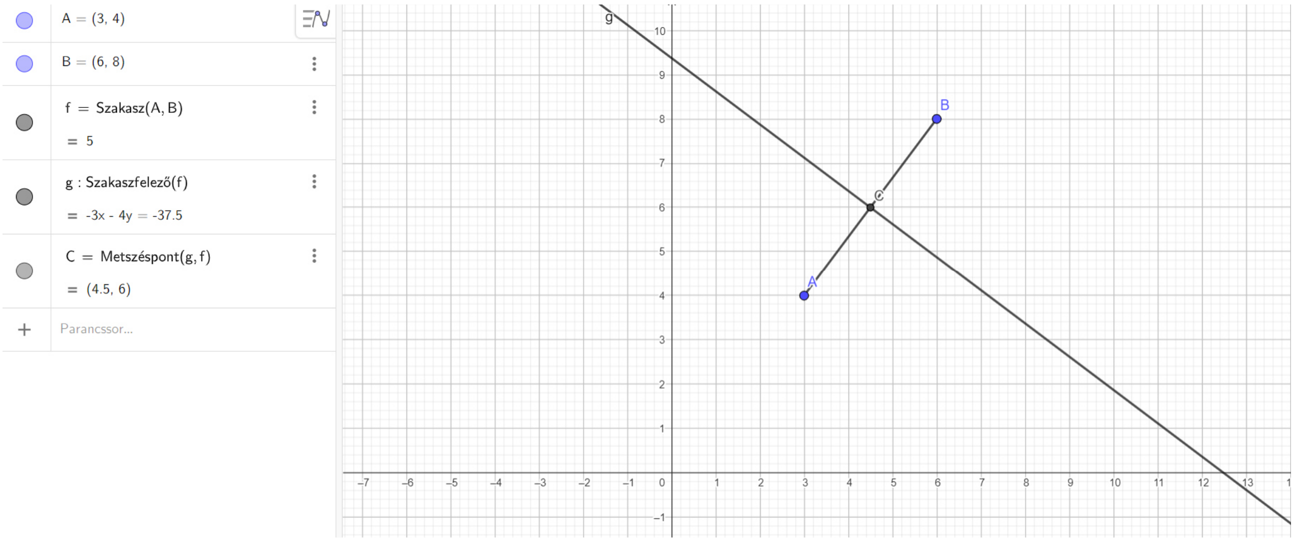
A felezővonal egyenlete tehát:

$$y - 6 = (x - 4{,}5) * \left(\frac{8 - 4}{6 - 3}\right)$$

$$y - 6 = (x - 4{,}5) * \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2$$

Az általános képlet használata lehetővé teszi a felezővonalak gyors és pontos számítását bármely két pont között a Descartes-koordináta-rendszerben.



18. ábra - Felezőmerőleges

6. Egyenes egyenleteinek ábrázolása

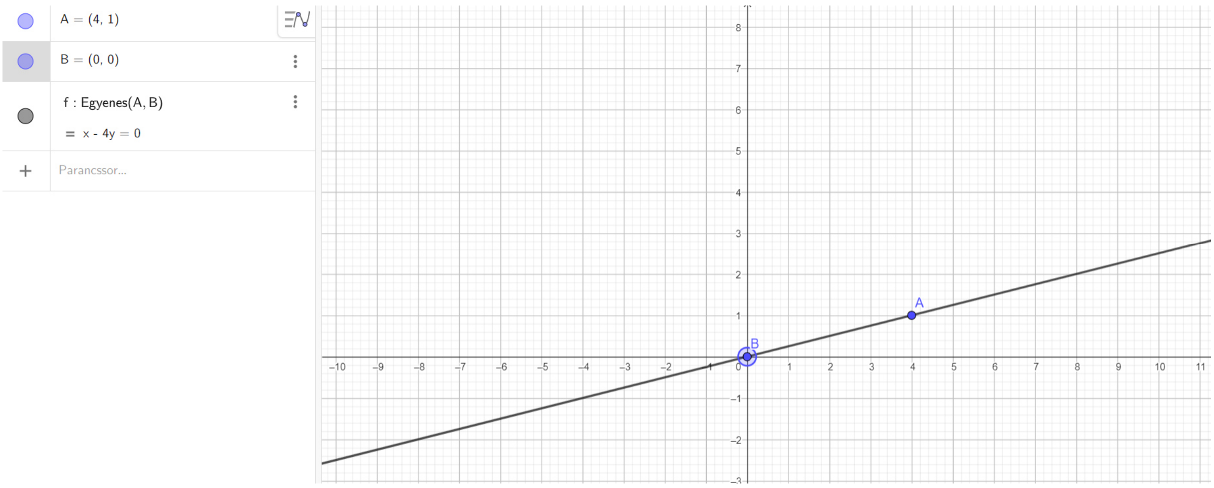
Az egyenesek általában az $y = kx + b$ egyenlettel írhatók le, ahol k a meredekség(iránytangens), b pedig az y-tengelyt metsző pont. Ha az egyenes két pontjának koordinátáit ismerjük, akkor a meredekség és az y-tengelyt metsző pont értékei kiszámíthatók.

Például ha az A(x_1; y_1) és B(x_2; y_2) pontok közötti egyenest szeretnénk meghatározni, akkor először kiszámítjuk a meredekséget:

$$k = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Ezután a y-tengelyt metsző pontot kiszámíthatjuk :

$$b = y_1 - k * x_1$$



19. ábra - Egyenes ábrázolása

Egy másik lehetőség az egyenes ábrázolására a pont-meredekség formában történik. Ebben az esetben az egyenes egy adott pontjának koordinátáit és a meredekségét használjuk az egyenes egyenletének meghatározásához.

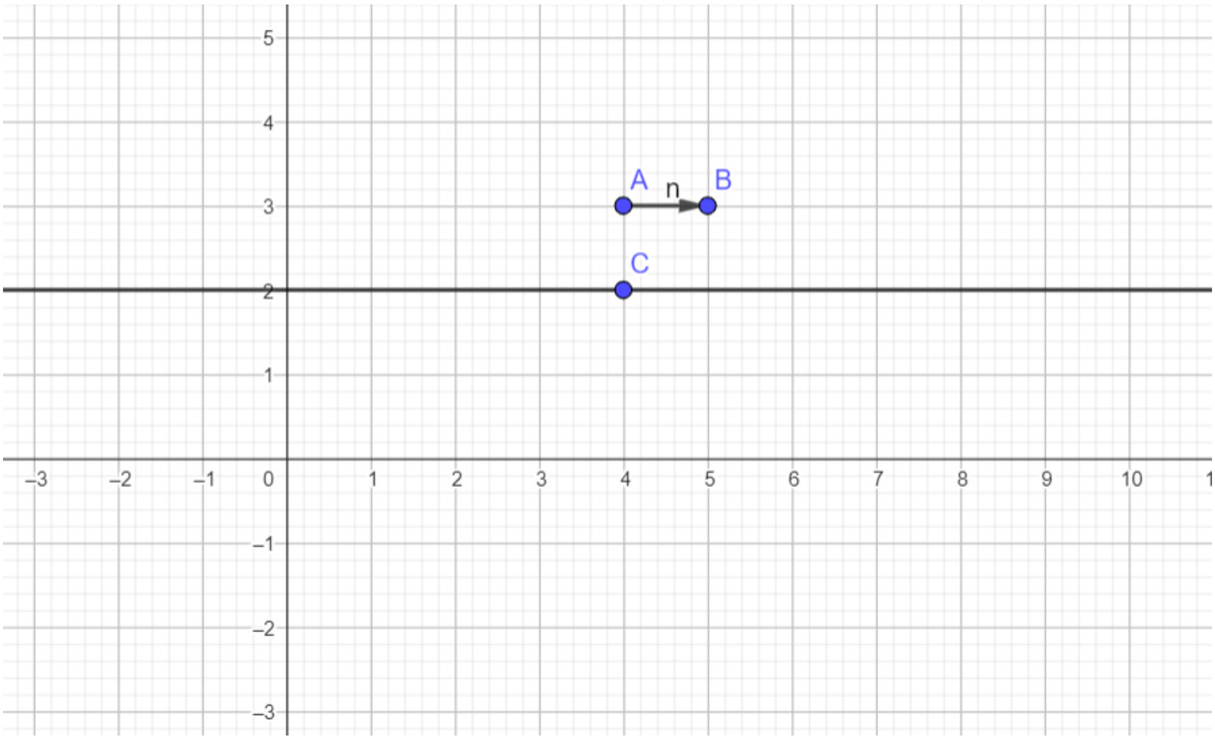
Tegyük fel, hogy az egyenes meredeksége k, és az $(x_1; y_1)$ pont rajta van az egyenesen. Az egyenes egyenlete a következőképpen adható meg:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Az egyenesek ábrázolásának egy másik módja az egyenes normálvektorral történő ábrázolása. Az egyenes normálvektora az egyenesre merőleges vektor, amelynek hossza 1. Az egyenes normálvektorának meghatározásához az egyenesnek csak az egyik pontjára van szükségünk, valamint az egyenes irányvektorára, amely az egyenes irányát határozza meg.

Az egyenes normálvektorával az egyenes egyenlete az alábbi módon írható fel:

$$n * (x - x_1; y - y_1) = 0$$



20. ábra - Irányvektor

ahol n = (a; b) a normálvektor, és $C(x_1; y_1)$ az egyenes egyik pontja. Az egyenlet szabad paramétereit különböző módon választhatjuk meg, például ha a normálvektor hossza 1, akkor az egyenletben csak a koordináták szorzatának összege szerepel.

Az egyenes normálvektorral történő ábrázolásának előnye, hogy könnyen meghatározható az egyenes iránya és az egyenes meredeksége, valamint az egyenesek közti szög is egyszerűen kiszámítható.

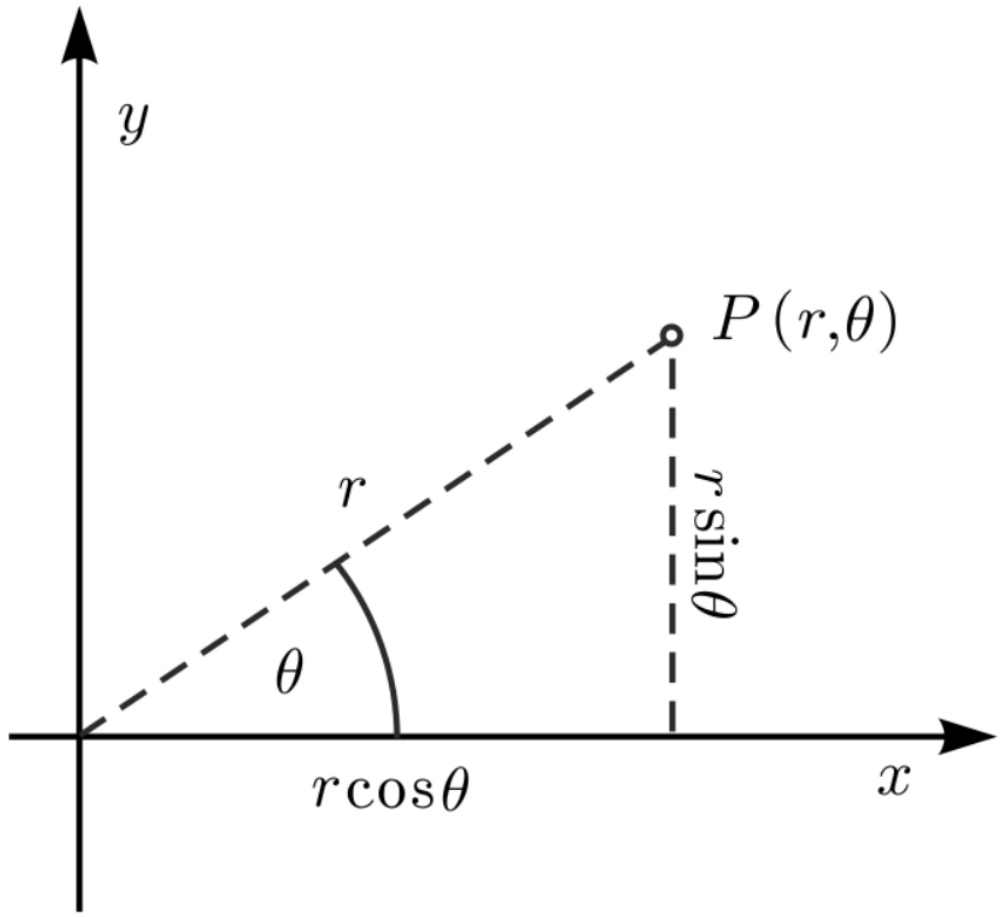
Az egyenesek ábrázolása a Descartes-koordináta-rendszerben az egyenlettel, a két pont által meghatározott egyenessel és a normálvektorral történhet. Minden módszernek megvannak az előnyei és hátrányai, és a választás az adott probléma jellegétől függ.

7. Egyéb koordináta rendszerek

Gyakran nem lehet, vagy nem célszerű a Descartes-féle koordináta-rendszert használni. Előfordulhat, hogy a koordináta-rendszer az alakzat minden pontjában más és más, és a koordinátatengelyek állása is pontonként változik az adott feladat jellegéhez illeszkedően. Ha például egy gömb alakú térrésszel kapcsolatos feladatot kell megoldanunk, akkor általában célszerű olyan pontonként változó koordináta-rendszert alkalmaznunk, amely „hozzásimul" a gömb alakjához. Ekkor ugyanis a gömb egyenlete ebben a koordináta-rendszerben egyszerűbb lesz, és ez megkönnyíti a számítást [3].

7.1 Polárkoordináta-rendszer

A sík pontjait (síkbeli) polárkoordinátákkal is jellemezhetjük. Ezt a koordináta-rendszert az $\boldsymbol{O}$ kezdőpontja (az origó) és egy ebből kiinduló $\boldsymbol{L}$ félegyenes definiál, melynek irányát kezdőiránynak nevezzük. A P pont polárkoordinátái az $r = OP$ távolság, valamint a kezdőirány és az $\boldsymbol{OP}$ irány által meghatározott θ irányított szög. Mivel θ mértéke $360°$ bármely egész többszörösével megváltoztatható, ezért minden ponthoz többféle koordinátapár adható meg. Magának az $\boldsymbol{O}$ kezdőpontnak a θ koordinátája tetszőleges lehet [3].



21. ábra - Polárkoordináta-rendszer

Polárkoordináta-rendszerben egy $\boldsymbol{P}$ pont helyét két adattal adhatjuk meg: (r, θ), ahol

- r a sugár $(0 \leq r)$, azaz a pontnak az origótól való távolsága,
- θ a szög $(0° \leq \theta < 360°)$ pedig az $\boldsymbol{L}$ félegyenes és a sugár által bezárt szög.

Ha Descartes koordináta-rendszerben polárkoordinátákkal kell megadni adatokat, akkor általában origóként a $(\mathbf{0;0})$ pontot $\boldsymbol{L}$ félegyenesként pedig az $\boldsymbol{x}$ tengely pozitív részét (az origótól jobbra eső részt) választjuk. Ekkor az $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}$ polárkoordinátájú pont közönséges koordinátái:$x = r\cos\theta$

$$y = r\sin\theta$$

Így például az $x^2 + y^2 = 1$ egységkör poláregyenlete $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 1$, vagyis egyszerűen $r = 1$.

A polárkoordináták különösen alkalmasak az olyan mozgások és hasonlósági leképezések leírására, amelyeknek van invariáns pontjuk. Ekkor ugyanis ezt a pontot kezdőpontnak választva az $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$ általános helyzetű pontot

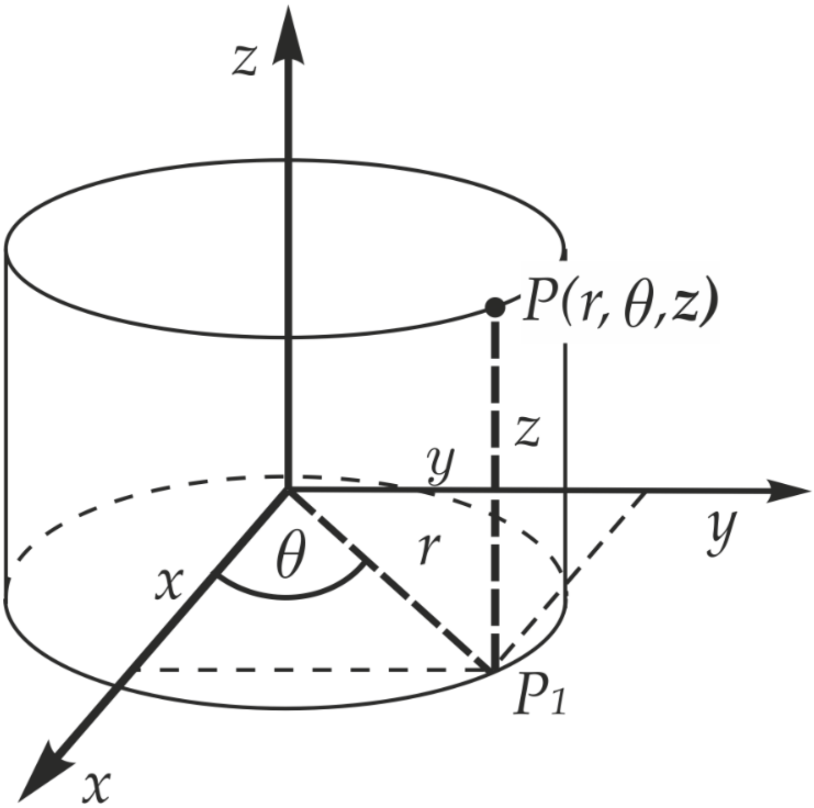
- az α szöggel forgatás az $(r, \theta + \alpha)$,
- félfordulat az $(r, \theta + \pi)$,

- kezdőegyenesre tükrözés az $(r, -\theta)$,
- $O\mu$ nyújtás $(\mu r, \theta)$,
- egy $\boldsymbol{O}$ középpontú nyújtva forgatás a $(\mu r, \theta + \alpha)$,

pontba transzformál.

7.2 Hengerkoordináta-rendszer (Cylindrical coordinates)

A hengerkoordináta-rendszer a polárkoordináta-rendszer térbeli általánosítása a magasság bevezetésével a **z** tengely irányában. A tér pontjait hengerkoordinátákkal is meg tudjuk adni. Egy alapsíkot (az **x**, **y** tengelyek által meghatározott sík), egy rá merőleges irányított egyenest (a **z** tengely), az alapsíkon belül pedig az origóból induló félegyenest (a **x** tengely pozitív félegyenese) veszünk fel. Az irányított egyenes mind a vele párhuzamos egyenesek, mind az alapsík irányítását is megszabja. Az irányított alapsíkban a megadott félegyenes egy polárkoordináta-rendszert határoz meg. A **P** pont polárkoordinátái az alapsíkra vetett $\boldsymbol{P_1}$ vetületének $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}$, polárkoordinátái, valamint az irányított $\boldsymbol{P_1 P}$ szakasz előjeles **z** hossza [3].



22. ábra - Polárkoordináta-rendszer a térben

Ezért egy $\boldsymbol{P}$ pontot három koordinátája (r, θ, z) definiál:

- $\boldsymbol{r}$ a tengelytől mért merőleges távolság;
- $\boldsymbol{\theta}$ a $\boldsymbol{P}$ pont és a tengely által meghatározott sík hajlásszöge a $\theta = 0(x - z)$ síkhoz. θ-t azimuth szögnek is nevezik (lásd gömbikoordináták);
- $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{P}$ pont és a pont merőleges vetületének, $\boldsymbol{P_1}$-nek a távolsága;

Sajnálatos módon az irodalomban sok eltérő jelölést használnak, mivel mi a polárkoordinátáknál is $\boldsymbol{\theta}$ -val jelöltük a fenti szöget, ezért használjuk továbbra is így. Ellenben pl. Arfken. $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{z})$ jelölést használja.

Az összes olyan pont, amelynek egyik hengerkoordinátája rögzített érték, ún. **koordinátafelület**et határoz meg. Így az $r = r_0$ egyenletű koordinátafelületek a **z** tengely körüli végtelen hosszú körhengerek, a $\theta = \theta_0$ koordinátafelületek a **z** tengelyre illeszkedő félsíkok, míg a $z = z_0$ koordinátafelületek a **z** tengelyre merőleges síkok.

Ha azokat a pontokat keressük, amelyeknek hengerkoordinátája rögzített, akkor az ún. **koordinátagörbék**et kapjuk. Így , $r = r_0,\ \theta = \theta_0$ esetén **z** tengellyel párhuzamos egyeneseket; $r = r_0,\ z = z_0$ esetén (x, y) síkkal párhuzamos, **z** tengely körüli körvonalakat; míg $\theta = \theta_0,\ z = z_0$ esetén (x, y) síkkal párhuzamos, a **z** tengelytől induló félegyeneseket kapunk.

Ha az alapsíkbeli polárkoordináta-rendszerhez derékszögű xy koordináta-rendszert illesztünk, és irányított egyenesünket **z** tengelyül választjuk, akkor a közönséges koordinátákat az r, θ, z polárkoordinátákból a következőképp számítjuk ki:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

A Descartes-féle koordinátákból a hengerkoordinátákat a következő összefüggés alapján kapjuk meg:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

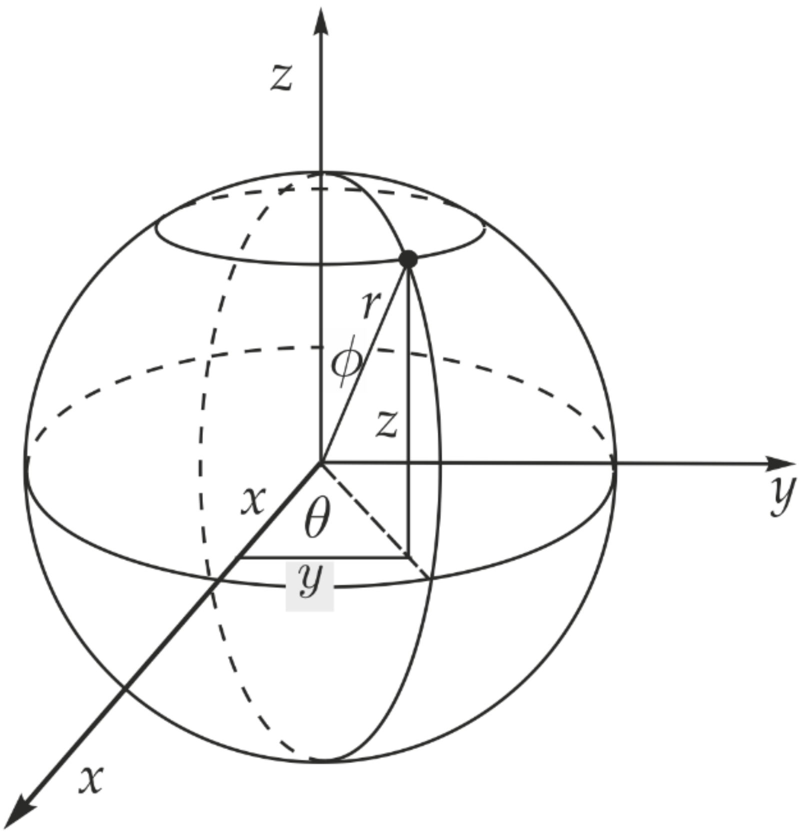
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$z = z$$

Gömbi koordináta-rendszer (Spherical coordinates)

A gömbi koordinátákat gömbi polárkoordinátáknak is nevezik. Most egy félsíkot (a **z** tengely, illetve az **x** pozitív fele által meghatározott félsík) és ennek határán egy origó kezdőpontú félegyenest (**z** tengely pozitív fele) veszünk fel. A $\boldsymbol{P}$ pont első koordinátája az $r =$

OP távolság. A második koordináta az a θ irányított szög, amelyet az adott félsík, valamint a vele közös határú, a ***P*** pontot tartalmazó félsík határoz meg. Ennek az irányított szögnek a mérésénél azt a forgásirányt választjuk pozitívnak, amely az adott félegyenes irányából nézve pozitívnak látszik. Végül a harmadik koordináta az adott és az ***OP*** félegyenes ϕ hajlásszöge. Eszerint ϕ konvex szög; θ minden pontra több értékű, mégpedig $360°$ bármely egész többszörösével megváltoztatható; az **O** kezdőpont θ, ϕ koordinátái pedig tetszőlegesek lehetnek [3].



23. ábra - Gömbkoordináta-rendszer

Egy P pontot három koordináta (r, θ, ϕ) határoz meg, ahol

- $\boldsymbol{r}$ az origótól mért távolság, azaz a gömb sugara;
- θ a P pont és a $\phi = 0$ tengely által meghatározott sík, valamint $\theta = 0$ sík közötti hajlásszög az $x - y$ koordinátasíkban, θ-t azimut szögnek is nevezik;
- ϕ a pontot és az origót összekötő egyenes hajlásszöge a $\phi = 0$ irányhoz, azaz a z tengellyel bezárt szög.

A $\boldsymbol{\theta}$-t a földrajzi hálózatban hosszúsági foknak (longitude) nevezik, továbbá $\phi = 90° - \delta$, ahol δ-t pedig szélességi foknak (latitude) hívják [3].

8. A Descartes koordináták alkalmazásai

A Descartes koordináták alkalmazásai nagyon széleskörűek, és számos területen használják őket, például a matematikában, a fizikában, a mérnöki tudományokban, a csillagászatban, a számítástechnikában és az üzleti tervezésben. Néhány példa az alkalmazásokra:

1. Geometria: A Descartes-koordináta-rendszer segítségével könnyen ábrázolhatók és vizsgálhatók a geometriai alakzatok, például a síkidomok és testek. A síkidomok területe, kerülete és azonos oldalhosszúságú szabályos sokszögek átlóinak hossza is kiszámítható a Descartes-koordináta-rendszerben.

2. Fizika: A fizikában a Descartes-koordináták segítségével határozzuk meg a testek mozgását és helyzetét az űrben. Az erők és mozgások ábrázolása, a pályák meghatározása és a sebességek kiszámítása mind megvalósítható a Descartes-koordináták alkalmazásával.

3. Mérnöki tudományok: Az építészetben, az épületek és hidak tervezésénél a Descartes-koordináták alkalmazása rendkívül fontos. Az építészeti tervek, a statikai számítások és a szerkezetek elemzése mind a Descartes-koordinátákra épül.

4. Csillagászat: A csillagászatban a Descartes-koordináták segítségével határozzák meg a csillagok helyzetét és mozgását az égbolton. A csillagászati távcsövek irányítása és a csillagászati megfigyelések tervezése is a Descartes-koordinátákra épül.

5. Számítástechnika: A Descartes-koordináták az informatikában is széles körben alkalmazottak. Az adatok, képek és grafikonok tárolása és ábrázolása, valamint az algoritmusok és programok fejlesztése és optimalizálása mind a Descartes-koordinátákra épül.

6. Üzleti tervezés: A Descartes-koordináták a pénzügyi tervezésben is alkalmazhatóak, például a kockázatok értékelése és a befektetési portfóliók diverzifikációja során. Az üzleti folyamatok és adatok elemzése és ábrázolása is a Descartes-koordinátákra épül.

Az alkalmazási skála nagyon nagy. Azért is fontos a megfelelő ismerete a Descartes-koordináta rendszernek.

Összefoglaló

A diplomamunkám témája a Descartes-féle koordináták alkalmazása a síkon. Az első részben részletesen bemutattam a Descartes-féle koordinátarendszert és az alapfogalmakat, amelyeket ismerni kell ahhoz, hogy hatékonyan tudjuk alkalmazni a koordináták rendszerét. Azután a pontok ábrázolását, a távolság- és felezővonalak képleteit, valamint az egyenesek egyenleteinek ábrázolását mutattam be.

Ezen túlmenően, a második részben a Descartes koordináták alkalmazásait ismertettem. A koordináták rendszerének alkalmazása által lehetővé válik az egyenesek, pontok és alakzatok helyzetének hatékonyabb meghatározása. Például a Descartes koordináták rendszerét alkalmazzuk a geometriában és a matematikában, de a fizikában és a mérnöki területeken is hasznos lehet.

A diplomamunka harmadik részében pedig bemutattam néhány alternatív koordináta rendszert is, amelyek hasonlóak a Descartes-féle koordinátarendszerhez, de eltérő felépítéssel rendelkeznek. Ez azért fontos, mert az alternatív koordináta rendszerek szintén hasznosak lehetnek bizonyos területeken, és a megértésükhöz szükséges alapfogalmak hasonlóak a Descartes-féle koordinátákhoz.

Összességében a diplomamunka célja az volt, hogy bemutassa a Descartes-féle koordináták rendszerét és azok alkalmazásait a síkon. Remélem, hogy ez a munka hozzájárul az olvasók megértéséhez és segíti őket abban, hogy hatékonyabban tudják alkalmazni a koordináták rendszerét a mindennapi életben és a különböző tudományágakban.

Irodalomjegyzék

[1] https://matekarcok.hu/descartes-rene/.

[2] А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір; пер. Д. Ф. Поллої, А. А. Штер, Ю. І. Кулін, Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. угорською мовою., Львів: Світ, 2015.

[3] Dr. Kovács Emőd, Komputergrafika - Matematikai alapok, Eger: Eszterházy Károly Főiskola, Matematikai és Informatikai Intézet, 2011.

[4] https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29040s.image.

[5] https://www.kotobee.com/.

Ábrák jegyzéke

Резюме

Тема моєї дипломної роботи - застосування декартових координат на площині. У першій частині я детально представив систему координат Декарта та основні поняття, які необхідно знати, щоб мати можливість ефективно використовувати систему координат. Потім я навів представлення точок, формули відстані та серединного перпендикуляра, а також представлення рівнянь прямих.

Крім того, у другій частині я пояснив застосування декартових координат. Використовуючи систему координат, стає можливим більш ефективно визначати положення ліній, точок і фігур. Наприклад, декартова система координат використовується в математиці, але вона також може бути корисною у фізиці та техніці.

У третій частині дипломної роботи я також представив деякі альтернативні системи координат, які схожі на систему координат Декарта, але мають іншу структуру. Це важливо, оскільки альтернативні системи координат також можуть бути корисними в певних областях, а основні поняття, необхідні для їх розуміння, подібні до декартових координат.

Загалом, метою дипломної роботи було представити систему декартових координат та їх застосування на площині. Я сподіваюся, що ця робота сприятиме розумінню читачів і допоможе їм більш ефективно застосовувати систему координат у повсякденному житті та в різних дисциплінах.

UNICHECK

Ім'я користувача:
Пап Габріелла

Дата перевірки:
29.05.2023 15:43:35 CEST

Дата звіту:
29.05.2023 15:48:22 CEST

ID перевірки:
1015301824

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

ID користувача:
100011749

Назва документа: Szakdolgozat_Zsendej_D

Кількість сторінок: 34 **Кількість слів:** 4732 **Кількість символів:** 49076 **Розмір файлу:** 1.95 MB **ID файлу:** 1014973503

15.6% Схожість

Найбільша схожість: 11.4% з Інтернет-джерелом (http://docplayer.hu/7312792-Eszterhazy-karoly-foiskola-matematikai-...

15.6% Джерела з Інтернету | 94 .... Сторінка 36

Не знайдено джерел з Бібліотеки

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

7.59% Вилучень

Деякі джерела вилучено автоматично (фільтри вилучення: кількість знайдених слів є меншою за 8 слів та 0%)

7.59% Вилучення з Інтернету | 25 .... Сторінка 37

Немає вилучених бібліотечних джерел

Nyilatkozat

Alulírott, Zsendej Dávid, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.