

**Міністерство освіти і науки України**  
**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**  
**Кафедра математики та інформатики**

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

**Кваліфікаційна робота**  
**Розробка електронних навчальних ресурсів на тему функцій**

**Гейці Янош Андорович**

Студент IV -го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 3 / 2023

Науковий керівник:

**Кучінка Каталін Йожефівна**

**к. ф.-м. н**

Завідувач кафедри математики та інформатики:

**Кучінка Каталін Йожефівна**

**к. ф.-м. н**

Робота захищена на оцінку \_\_\_\_\_, «\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ року

Протокол № \_\_\_\_\_ / 202\_

**Міністерство освіти і науки України  
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

**Кафедра математики та інформатики**

**Кваліфікаційна робота  
Розробка електронних навчальних ресурсів на тему функцій**

Рівень вищої освіти: бакалавр

Виконавець: студент IV-го курсу

**Гейці Янош Андорович**

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йозефівна**

**к. ф.-м. н**

Рецензент: **Петечук Юлія Василівна**

**к. ф.-м. н, доцент, доцент кафедри математики та інформатики**

Берегове  
2024

# Зміст

<b>Вступ.....</b>	<b>6</b>
<b>1. Основи функцій.....</b>	<b>7</b>
1.1. Поняття і визначення функції.....	7
1.2. Область визначення та множина значень.....	8
1.3. Графічне зображення функції.....	8
1.4. Характеристика функції.....	9
<b>2. Елементарні функції.....</b>	<b>13</b>
2.1. Константна функція.....	13
2.2. Лінійна функція.....	14
2.3. Квадратична функція.....	14
2.4. Функція абсолютного значення.....	16
2.5. Коренева функція.....	16
2.6. Експоненціальна функція.....	17
2.7. Логарифмічна функція.....	18
2.8. Раціональна функція першого ступеня.....	19
<b>3. Трансформації функцій.....</b>	<b>21</b>
3.1. Трансформація змінної.....	21
3.2. Трансформація значень функції.....	22
<b>4. Результати опитування.....</b>	<b>24</b>
<b>5. Розробка онлайн навчальних матеріалів.....</b>	<b>29</b>
5.1. Процес планування.....	29
5.2. Технічні засоби реалізації.....	30
5.3. Структура онлайн матеріалів.....	31
5.3.1. Основи функцій.....	33
5.3.2. Типи функцій.....	39
5.3.3. Трансформації функцій.....	48
<b>6. Висновки.....</b>	<b>54</b>
<b>7. Список літератури.....</b>	<b>55</b>
<b>8. Список ілюстрацій.....</b>	<b>57</b>
<b>9. Додатки.....</b>	<b>59</b>
<b>10. Резюме.....</b>	<b>62</b>

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma  
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Matematika és Informatika Tanszék**

**ONLINE TANANYAG FEJLESZTÉSE FÜGGVÉNYEK TANANYAG  
TÉMAKÖRBEN**

Szakdolgozat  
Képzési szint: alapképzés

**Készítette: Géczy János**

IV. évfolyamos hallgató

Képzési program: 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

**Témavezető: Dr. Kucsinka Katalin**

*tanszékvezető, Matematika és Informatika Tanszék*

**Recenzens: Petecsuk Júlia**

*Petecsuk Júlia fiz.-mat. tud. kandidátusa, PhD, docens, a Matematika és Informatika*

*Tanszék docense*

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>6</b>
<b>1. Függvények alapjai</b>	<b>7</b>
1.1. Függvény fogalma és definíciója	7
1.2. Értelmezési tartomány és értékkészlet	8
1.3. Függvény ábrázolása	8
1.4. Függvény jellemzése	9
<b>2. Elemi függvények</b>	<b>12</b>
2.1. Konstans függvény	12
2.2. Lineáris függvény	13
2.3. Másodfokú függvény	13
2.4. Abszolútérték függvény	15
2.5. Gyökfüggvény	15
2.6. Exponenciális függvény	16
2.7. Logaritmus függvény	17
2.8. Elsőfokú törtfüggvény	18
<b>3. Függvény transzformációk</b>	<b>20</b>
3.1. Változótranszformáció	20
3.2. Függvényértéktranszformáció	21
<b>4. Felmérés eredményei</b>	<b>23</b>
<b>5. Online tananyag fejlesztése</b>	<b>28</b>
5.1. Tervezési folyamat	28
5.2. Technikai megvalósítás eszközei	29
5.3. Az online tananyag struktúrája	30
5.3.1. Függvények alapjai	32
5.3.2. Függvények típusai	38
5.3.3. Függvénytranszformációk	47
<b>6. Összegzés</b>	<b>54</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>54</b>
<b>Ábrák jegyzéke</b>	<b>57</b>
<b>Mellékletek</b>	<b>59</b>
<b>Резюме</b>	<b>62</b>

# Bevezetés

A matematikai tudás alapvető fontosságú az oktatásban, különösen a középiskolai szinten. A diákok itt találkoznak olyan alapvető fogalmakkal, mint a függvények, amelyek fontos szerepet játszanak a későbbi tanulmányaikban és a mindennapi életben is. A függvények segítenek megérteni, hogyan változnak az egyik mennyiségek a másikhoz képest, és számos tudományos és technológiai területen alkalmazzák őket. A függvények oktatása azonban gyakran kihívást jelent a tanárok és a diákok számára is.

Az utóbbi években az oktatásban egyre nagyobb szerepet kapnak az online tananyagok és digitális eszközök. Ezek az eszközök lehetőséget kínálnak arra, hogy a tanulás interaktívabb és érdekesebb legyen. Az online tananyagok különösen hasznosak lehetnek a matematikai fogalmak, például a függvények tanításában. Az online tananyagok segítségével a diákok könnyebben megérthetik a bonyolultabb fogalmakat is, mivel az interaktív elemek és vizuális ábrák segítik a tanulást.

A diplomamunka célja egy olyan online tananyag fejlesztése, amely a függvények tananyagát dolgozza fel. Ez a tananyag a középiskolai tanárok és diákok igényeit figyelembe véve készült, és a függvény fogalmát, az elemi függvényeket és a függvény transzformációit tárgyalja. A tananyag interaktív elemeket és vizualizációkat tartalmaz, hogy a diákok könnyebben megértsék a tananyagot.

A fejlesztés során a SITE123 platformot használtam, ahol a tananyag fő oldala található. Erre az oldalra Google Slides dokumentumokat töltöttem fel, amelyek részletes magyarázatokat és példákat tartalmaznak. Emellett LearningApps játékokat készítettem, amelyek interaktív módon segítik a diákokat a tananyag gyakorlásában. Továbbá, GeoGebra ábrákat használtam a függvények vizuális bemutatásához, hogy a diákok jobban megértsék a fogalmakat és azok alkalmazását.

Ezen felül, a kutatás részeként készítettem egy online felmérést is, amely a függvények oktatásának nehézségeiről gyűjt adatokat a tanárok szempontjából. A felmérés célja, hogy feltárja, milyen problémákkal szembesülnek a tanárok a függvények tanítása során. A felmérést kizárólag tanárok töltötték ki, és az eredmények segítenek megérteni a gyakorlati kihívásokat.

A dolgozat során bemutatom az online tananyag fejlesztésének folyamatát, a felmérés eredményeit és azok elemzését. Remélem, hogy munkánk hozzájárul a matematikai oktatás színvonalának növeléséhez és segíti a diákokat a sikeres tanulásban.

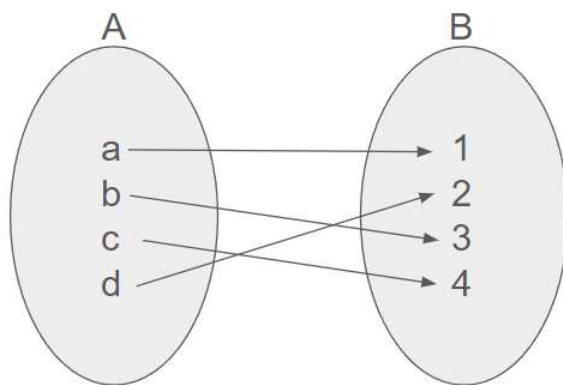
# 1. Függvények alapjai

A függvények alapvető fogalmai kulcsfontosságúak a matematika és más tudományterületek számára. Ebben a részben részletesen vizsgáljuk ezeket a fogalmakat, kitérve az értelmezési készletre és értelmezési tartományra, valamint bemutatva a függvények ábrázolásának különböző módjait, mint például a képlet, táblázat és grafikon. Ez segít a tanulóknak jobban megérteni a függvényeket és hatékonyabban megoldani a matematikai problémákat.

## 1.1. Függvény fogalma és definíciója

Egy függvény egy hozzárendelés, amely egy egyértelmű kapcsolatot határoz meg két halmaz között. Általánosan egy függvény egy bemeneti értéket (független változó), és ehhez rendel egy kimeneti értéket (függő változó).

**1.1. Definíció.** Adott az  $A$  és  $B$  nem üres halmaz. Egy, az  $A$  halmazon értelmezett  $f$  függvényt, melynek értékei a  $B$  halmazban vannak, úgy adunk meg, hogy az  $A$  halmaz minden  $x$  eleméhez hozzárendeljük a  $B$  halmaz egy és csak egy  $y$  elemét.[1]



1.1. ábra. Az  $A$  halmaz hozzárendelése a  $B$  halmazhoz

Jelölése:

$$f : A \rightarrow B, \quad (1)$$

vagy bővebben

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto (x), \quad (2)$$

vagy

$$f : A \rightarrow B, f(x) = y(y \in B) \quad (3)$$

Például az  $f(x) = 2x+1$  függvény, amely azt jelenti hogy az minden kétszeres eleméhez adunk egyet így megkapva az  $y$  értéket.

## 1.2. Értelmezési tartomány és értékkészlet

Az 2.1 ábrán látható  $A$  halmazt a függvény alaphalmazának és a  $B$  halmazt a képhalmazának nevezzük.

A  $A$  alaphalmaznak azt részhalmazát, amelyhez a képhalmaznak valamely eleme hozzá lett rendelve, a függvény értelmezési tartományának nevezzük.[1] Jelölése:  $D_f$

A  $B$  azaz a képhalmaznak a függvény helyettesítési értékeit tartalmazó részét a függvény értékkészletének nevezzük.[1] Jelölése  $R_f$

## 1.3. Függvény ábrázolása

Vegyük példának a előzőekben bemutatott  $f(x) = 2x + 1$  függvényt és adjunk neki értékeket. Miután elvégeztük a megfelelő műveleteket a következő értékeket kapjuk:

$$f(-2) = 2(-2) + 1 = -3$$

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

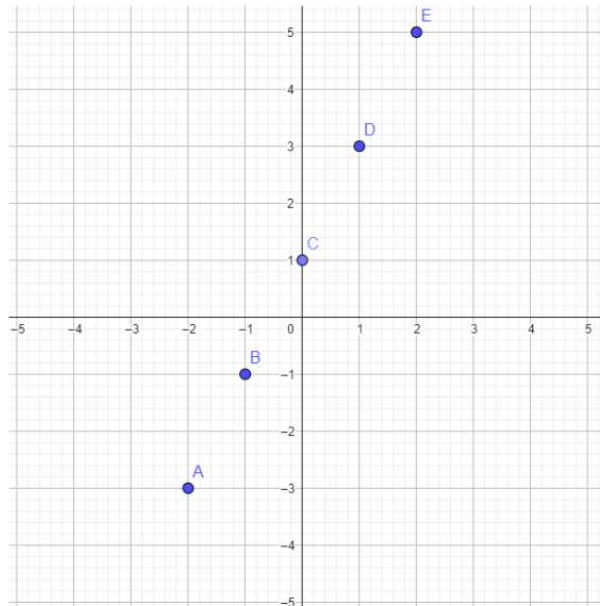
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Ezáltal megkaptuk a  $y$  függvény értékeit az  $x$  pontokban. Most ezeket táblázatba beírva megkapjuk a következő táblázatot:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	-3	-1	1	3	5

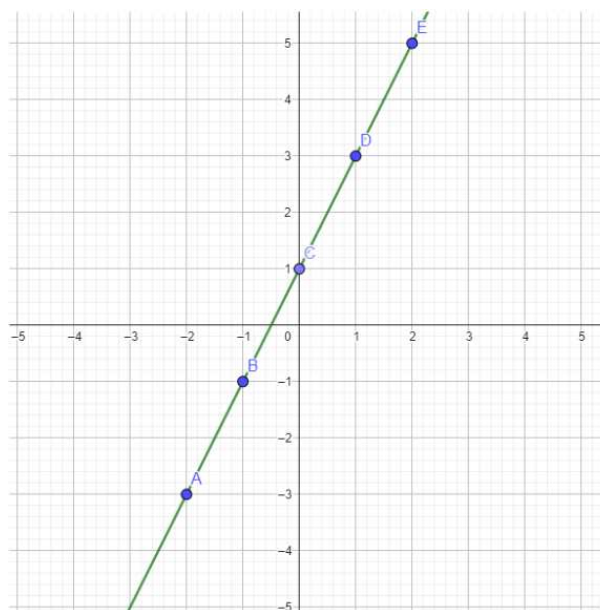
Ezután ábrázoljuk ezeket egy derékszögű-koordináta rendszerben aminek első lépése felvenni az adott pontokat:





1.2. ábra. Pontok felvétele Derékszögű-koordinátarendszerben

Majd rajzoljuk meg a függvényt.



1.3. ábra. Függvény megrajzolásán

## 1.4. Függvény jellemzése

**1.2. Definíció.** Az  $f$  függvény zérushelyeinek nevezzük az értelmezési tartományának mindazon  $x$  értékeit, amelyeknél  $f(x) = 0$ . [2]

Például az  $f(x) = 2x + 1$  függvény zérushelyének meghatározásához az  $f(x) = 0$

egyenletet kell megoldani.

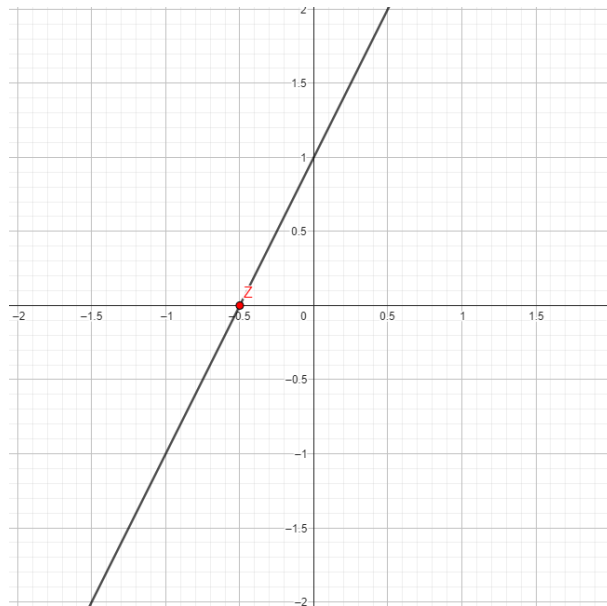
$$f(x) = 2x + 1$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

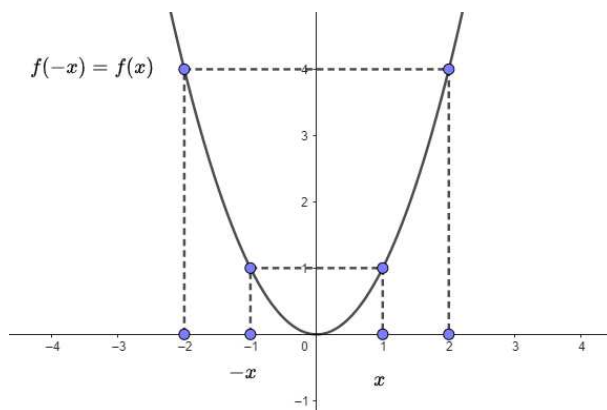
Grafikonon:



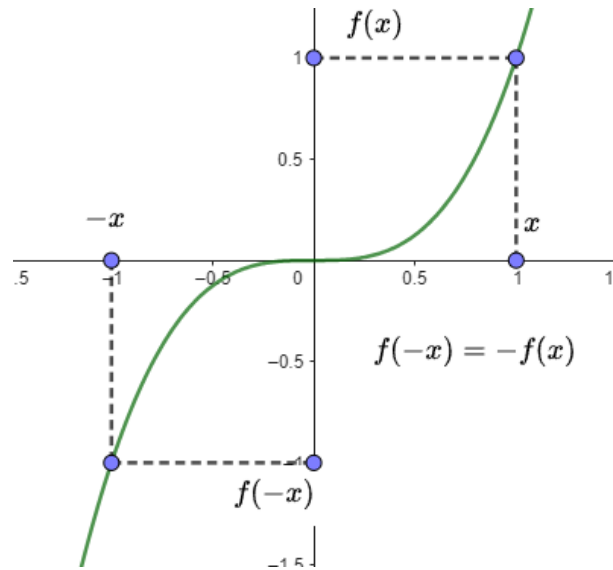
1.4. ábra. A  $2x+1$  függvény zérushelye

**1.3. Definíció.** Az  $f(x)$  függvény paritása:

- páros, ha  $f(-x) = f(x)$
- páratlan, ha  $f(-x) = -f(x)$  [1]



1.5. ábra. A  $f(x) = x^2$  páros függvény



1.6. ábra. az  $f(x) = x^3$  páratlan függvény

Páros függvény képe az  $y$  tengelyre, páratlan függvény képe az origóra szimmetrikus.

**1.4. Definíció.** A függvény monotonitása:

- monoton, ha növekvő vagy csökkenő
  - növekvő, ha  $f(x_1) \leq f(x_2)$
  - csökkenő, ha  $f(x_1) \geq f(x_2)$
- szigorúan monoton, ha szigorúan növekvő vagy szigorúan csökkenő
  - szigorúan növekvő, ha  $f(x_1) < f(x_2)$
  - szigorúan csökkenő, ha  $f(x_1) > f(x_2)$  [1]

**1.5. Definíció.** A függvény minimuma (vagy maximuma) van a változó  $x_0$  értékénél, ha az ott felvett  $f(x_0)$  függvényértékénél a függvény sehol nem vesz felkisebb (vagy nagyobb) értékeket. [2]

## 2. Elemi függvények

Az elemi függvények fejezetben részletesen megvizsgáljuk az elemi függvények legfontosabb típusait, beleértve a konstans, lineáris, másodfokú, abszolútérték, gyök, exponenciális és logaritmus függvényeket. Ezáltal bemutatjuk ezeknek a függvényeknek a matematikai definícióit, tulajdonságait és gyakorlati alkalmazásait, példákkal és grafikonokkal illusztrálva.

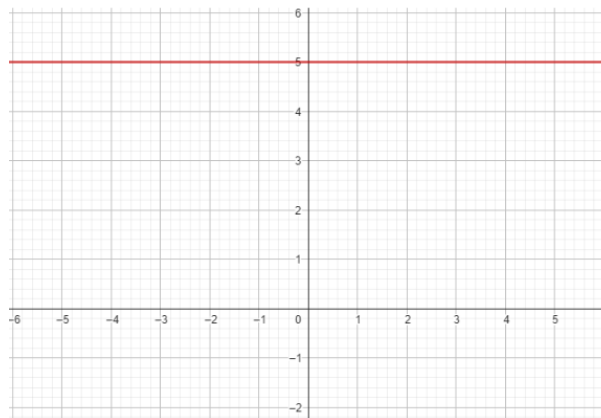
### 2.1. Konstans függvény

Az

$$f(x) = c, \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

függvényt konstans függvénynek nevezzük.

Legyen  $c = 5$ , ekkor a függvény grafikonja a következő:



2.1. ábra. Konstans függvény grafikonja

**Az  $f(x) = 5$  függvény tulajdonságai:**

Értelmezési tartománya:  $D_f \in \mathbb{R}$

Értékkészlete:  $R_f \in 5$

Grafikonja egy egyenes.

Páros függvény, de ha  $c = 5$  akkor páratlan is.

Zérushelye nincs, kivéve ha  $c = 0$ .

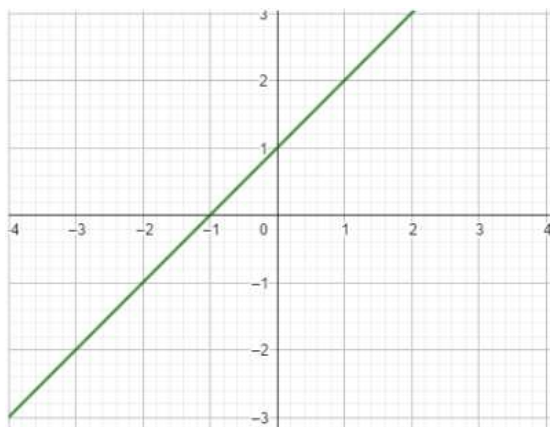
## 2.2. Lineáris függvény

Az

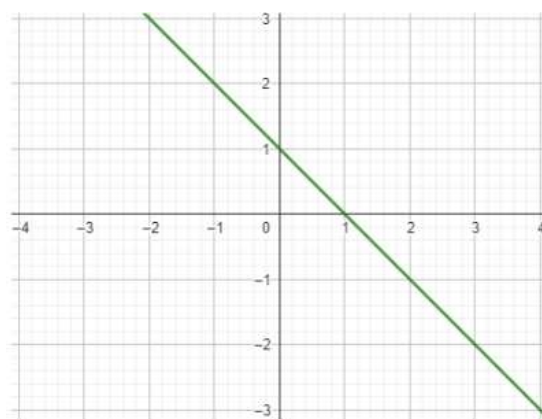
$$f(x) = ax + b, \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad (5)$$

függvényt lineáris függvénynek nevezzük.

Legyen  $a = 1$  és  $b = 1$ , ekkor a függvény grafikonja:



2.2. ábra. Ha  $a > 0$ , akkor szigorúan növekvő a függvény



2.3. ábra. Ha  $a < 0$ , akkor szigorúan csökkenő a függvény

**Az  $f(x) = ax + b$  függvény tulajdonságai:**

Értelmezési tartománya:  $D_f \in \mathbb{R}$

Értékkészlete:  $R_f \in \mathbb{R}$

Grafikonja egy egyenes.

Se nem páros, se nem páratlan.

Zérushelye  $x = \frac{-b}{a}$ .

## 2.3. Másodfokú függvény

Az

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad (6)$$

függvényt másodfokú függvénynek nevezzük.

A másodfokú függvény másodfokú egyenlete:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

A diszkrimináns:

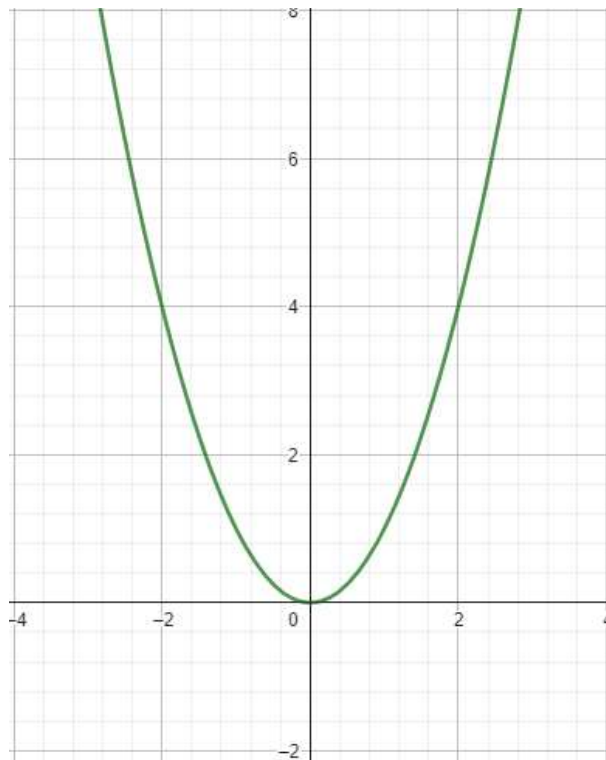
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ha  $\Delta > 0$ , akkor az egyenlet gyökei  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Ha  $\Delta = 0$ , akkor az egyenlet gyökei  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$

Ha  $\Delta < 0$ , akkor  $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ , azaz nincs valós megoldása.

Legyen az  $a = 1, b = 0, c = 0$ , ekkor az  $f(x) = x^2$  függvény grafikonja:



2.4. ábra. Az  $f(x) = x^2$  függvény grafikonja

**Az  $f(x) = ax^2 + bx + c$  függvény tulajdonságai:**

Értelmezési tartománya:  $D_f \in \mathbb{R}$

Értékkészlete: nem negatív számok halmaza.

Grafikonja egy parabola.

Zérushelye az  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  egyenlet megoldásai. [2]

A parabola csúcspontja a függvény szélsőértéke, ami a  $T\left(\frac{-b}{4a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  [2]

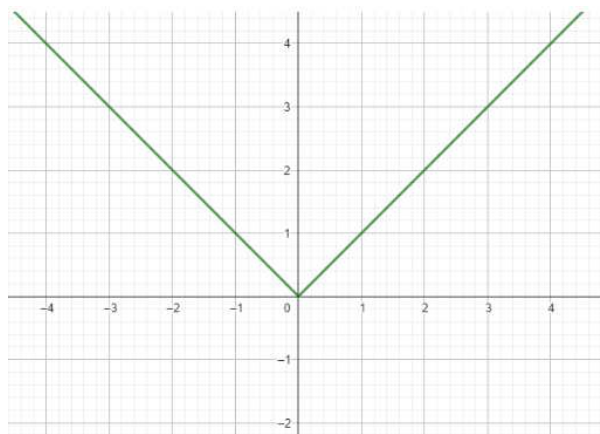
## 2.4. Abszolútérték függvény

Az

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases} \quad (7)$$

függvényt abszolútérték függvénynek nevezzük.

Az  $y = |x|$  függvény grafikonja a következő:



2.5. ábra. Az  $y = |x|$  függvény grafikonja

**A  $y = |x|$  függvény tulajdonságai:**

Értelmezési tartománya:  $D_f \in \mathbb{R}$

Értékkészlete:  $R_f \in \mathbb{R}^+$

Zérushelye:  $x = 0$ .

Páros függvény.

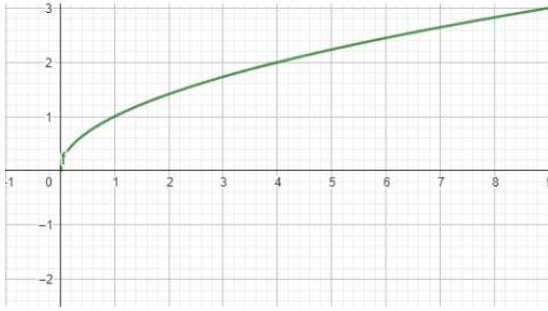
Monotonitás:  $]-\infty; 0]$  szigoruan monoton csökkenő,  $[0; +\infty[$  szigoruan monoton növekvő.

## 2.5. Gyökfüggvény

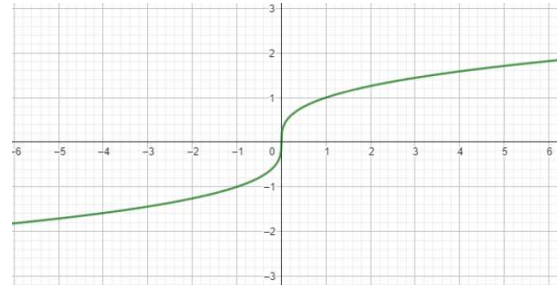
Az

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \quad (8)$$

függvényt gyökfüggvénynek nevezzük.



2.6. ábra. Páros  $n$  esetén a függvény grafikonja



2.7. ábra. Páratlan  $n$  esetén a függvény grafikonja

$f(x) = \sqrt[n]{x}$  függvény tulajdonságai:

Értelmezési tartománya: Ha  $n$  páros akkor  $D_f \in \mathbb{R}^+$ , ha  $n$  páratlan  $D_f \in \mathbb{R}$

Értékkészlete:  $R_f \in \mathbb{R}^+$

Zérushelye:  $x = 0$ .

Páros függvény.

Zérushelye  $x = \frac{-b}{a}$ .

Monotonitás: szigorúan monoton növekvő.

## 2.6. Exponenciális függvény

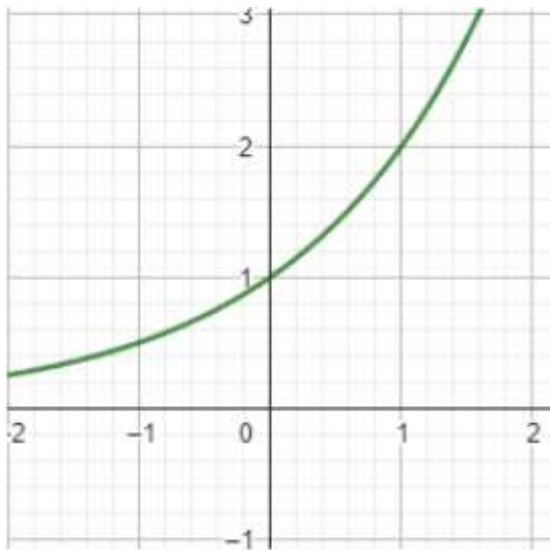
Az

$$f(x) = e^x, \quad (x > 0, x \neq 1) \quad (9)$$

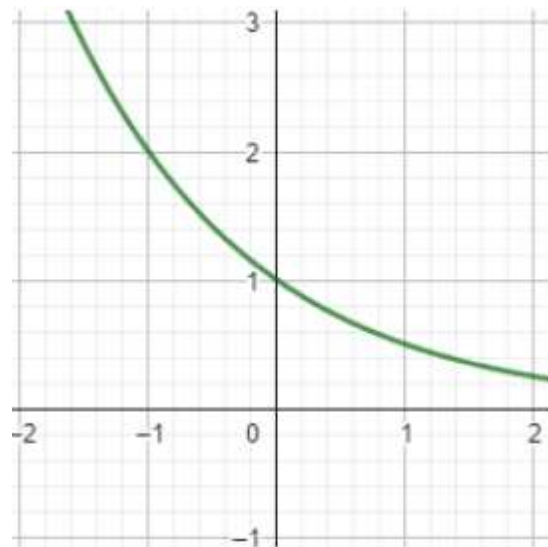
függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

Az  $f(x) = a^x$  grafikus képe:





2.8. ábra. Ha  $a > 1$ , akkor szigorúan növekvő az exponenciális függvény



2.9. ábra. Ha  $0 < a < 1$ , akkor szigorúan csökkenő az exponenciális függvény

$f(x) = a^x$  függvény tulajdonságai:

Értelmezési tartománya:  $D_f \in \mathbb{R}$

Értékkészlete:  $R_f \in (0, +\infty)$

Zérushelye:  $x = 1$ .

Ha  $a > 1$ , akkor a függvény páros.

Ha  $0 < a < 1$ , akkor a függvény páratlan.

Ha  $a > 1$ , akkor szigorúan monoton növekvő.

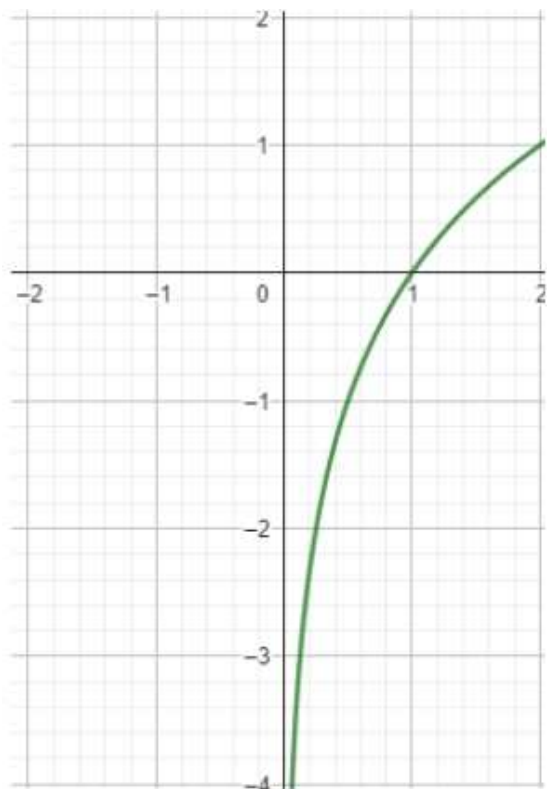
Ha  $0 < a < 1$ , akkor szigorúan monoton csökkenő.

## 2.7. Logaritmus függvény

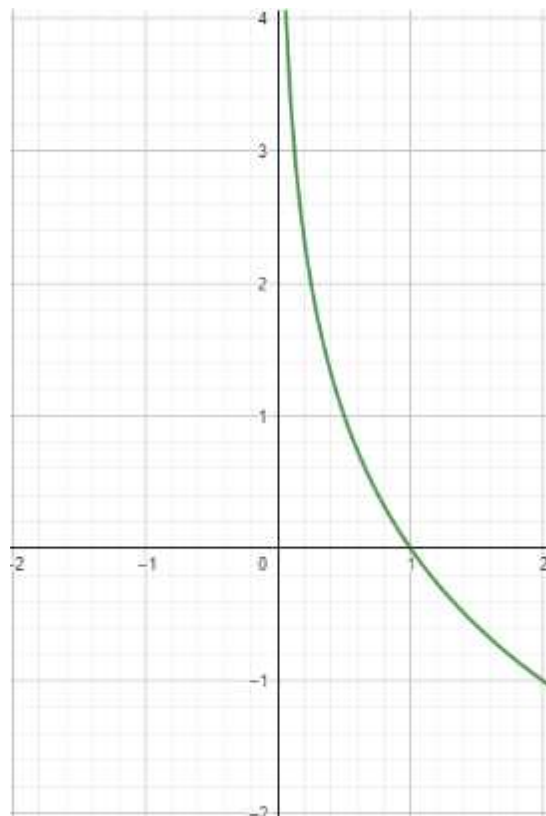
Az

$$f(x) = \log_a(x), \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (10)$$

függvényt  $a$  alapú logaritmus függvénynek nevezzük.



2.10. ábra. Ha  $a > 1$ , akkor szigorúan monoton növekvő a logaritmus függvény



2.11. ábra. Ha  $0 < a < 1$ , akkor szigorúan monoton csökkenő a logaritmus függvény

$f(x) = \log_a(x)$  **függvény tulajdonságai:**

Értelmezési tartománya:  $D_f \in \mathbb{R}^+$

Értékkészlete:  $R_f \in \mathbb{R}$

Zérushelye:  $x = 1$ .

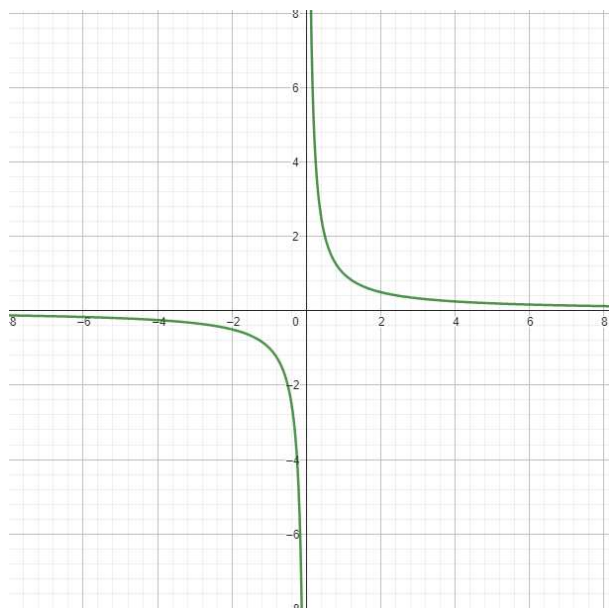
Se nem páros se nem páratlan.

Ha  $a > 1$ , akkor szigorúan monoton növekvő.

Ha  $0 < a < 1$ , akkor szigorúan monoton csökkenő.

## 2.8. Elsőfokú törtfüggvény

**2.1. Definíció.** Az  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , ( $c \neq 0, ad \neq bc$ ) függvényt elsőfokú törtfüggvénynek nevezzük.[3]



2.12. ábra. Az  $y = \frac{1}{x}$  függvény grafikonja

**Az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény tulajdonságai:**

Értelmezési tartomány:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Zérushely: nincs.

Szélsőérték: nincs.

Korlátosság: nem korlátos, sem felső, sem alsó korlátja nincs.

Monotonitás:

- szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \in ]-\infty, 0[$ ,
- szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \in ]0, \infty[$ .

Paritás: páratlan függvény.

Folytonosság: az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Periodikusság: nem periodikus.

Értékkészlet:  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

### 3. Függvény transzformációk

A függvény transzformációja lehetővé teszi a meglévő függvények módosítását vagy átalakítását új formák létrehozása érdekében. Ez a fogalom fontos szerepet játszik a matematikában és számos más tudományterületen. Ez a rész részletesen bemutatja a transzformációk alapelveit és módszereit, beleértve az eltolást, az egyenes hozzáadását vagy kivonását, és más módosításokat.

Az

$$y = b_1(a_1x + a_0) + b_0 \quad (11)$$

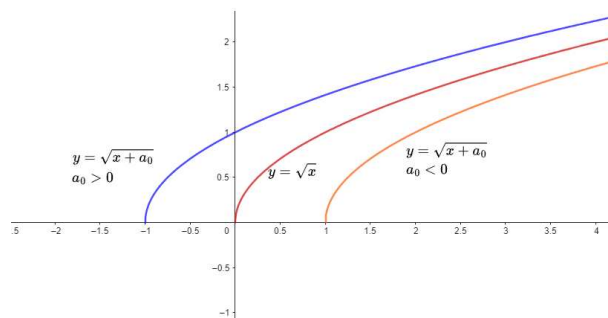
$y = f(x)$  függvény lineáris transzformáltja.

Ezeket a változó- valamint a függvényérték elemi transzformációjainak kombinálásával kapjuk.

#### 3.1. Változótranszformáció

Az  $y = f(x + a_0)$  transzformáció esetén az eltolás az  $x$  tengely mentén történik  $(-a_0; 0)$  vektorral.

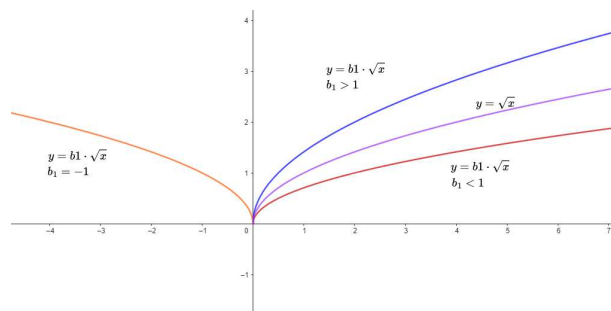
Vegyünk például az  $y = \sqrt{x}$  függvényt. Majd a változó értékéhez adjuk hozzá az  $a_0$  változót. A függvény grafikonja a következőképpen fog változni:



3.1. ábra. Az  $y = \sqrt{x + a_0}$  függvény grafikonja

Az  $y = f(a_1x)$  transzformáció esetén az  $y$  tengelyre merőleges  $\frac{1}{a_1}$  arányú hatás, azaz ha  $|a_1| > 1$  akkor összenyomás, ha  $|a_1| < 1$  akkor nyújtás. Ha  $a_1 = -1$ , akkor a függvény képe az  $y$  tengelyre tükröződik.

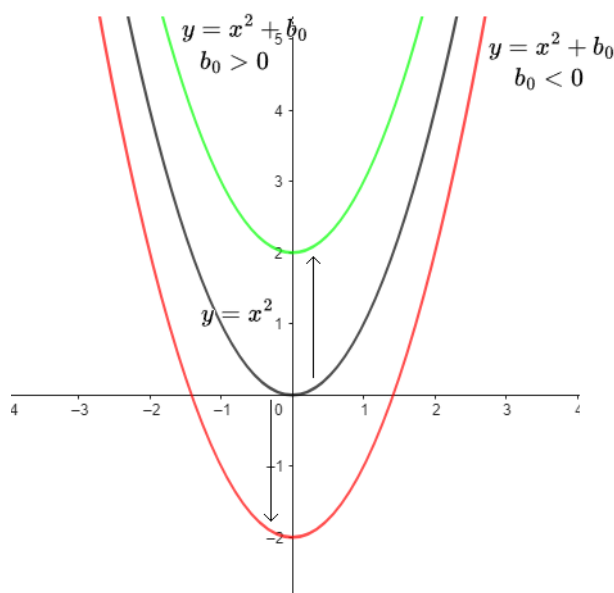
Vegyünk például ismét az  $y = \sqrt{x}$  függvényt. Majd a változó értékét szorozzuk meg  $a_1$  értékkel. A grafikon a következő képpen fog változni:



3.2. ábra. Az  $y = \sqrt{a_1 \cdot x}$  függvény grafikonja

### 3.2. Függvényértéktranszformáció

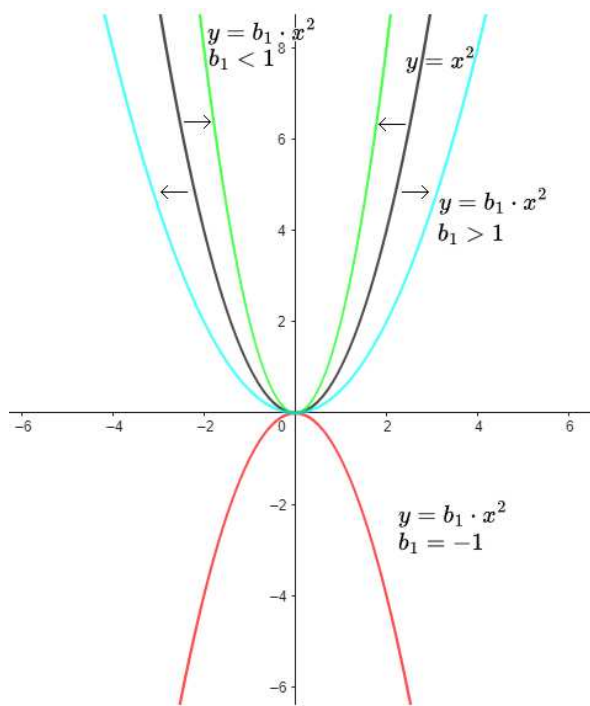
Az  $y = f(x) + b_0$  transzformáció esetén az eltolás az  $y$  tengely mentén történik  $(0; b_0)$  vektorral. Vegyük például a  $y = x^2$  függvényt, majd a függvény értékéhez adjunk hozzá  $b_0$  értéket. A függvény grafikonja a következő képpen fog változni:



3.3. ábra. Az  $y = x^2 + b_0$  grafikonja

Az  $y = b_1 \cdot f(x)$  függvény transzformációja az  $x$  tengelyre merőleges  $b_1$  irányú hatás. Összenyomás, ha  $|b_1| < 1$ , nyújtás ha  $|b_1| > 1$ . Ha  $b_1 = -1$  akkor a függvény képe az  $x$  tengelyre tükröződik.

Vegyük például ismét az  $y = x^2$  függvényt, majd a függvényértéket szorozzuk meg  $b_1$  értékkel, a függvény grafikonja a következő képpen fog változni:



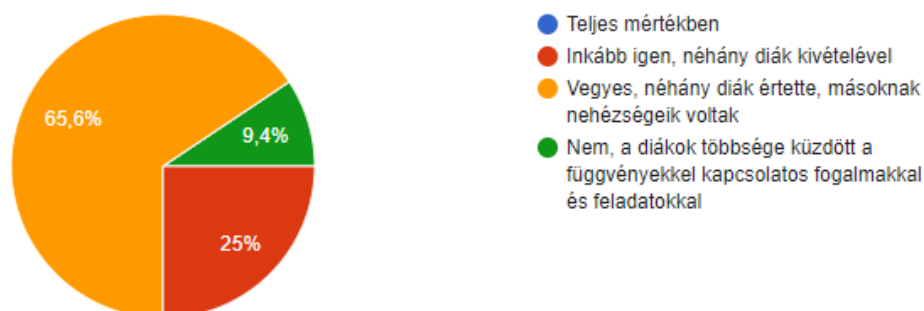
3.4. ábra. Az  $y = b_1 \cdot x^2$  grafikonja

## 4. Felmérés eredményei

Az online felmérés célja a függvények oktatásával kapcsolatos tapasztalatok és kihívások feltárása volt a pedagógusok körében. A felmérésben részt vevők demográfiai és szakmai hátterére, valamint a függvények tanításával kapcsolatos észrevételeikre vonatkozó kérdésekre adott válaszok alapján az alábbi összefoglalót készítettük:

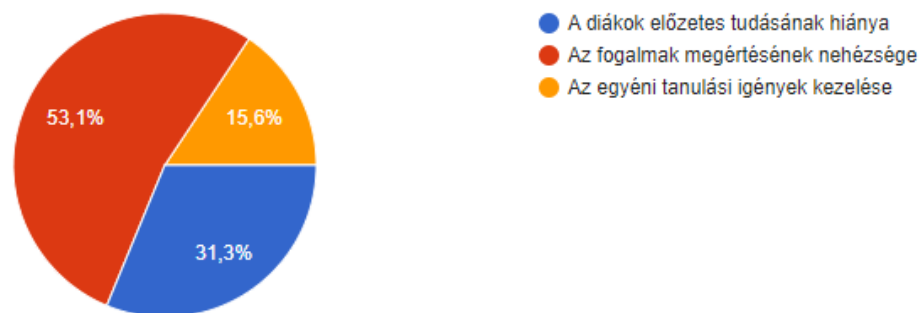
A felmérés válaszadói között a nők voltak többségben (53,1%), míg a férfiak aránya 46,1% volt. A legtöbb válaszadó Matematika MSc végzettséggel rendelkezett (50%), de jelentős arányban voltak jelen a Matematika BSc (28,1%) és egyéb végzettségűek is (37,5%). Az oktatásban eltöltött idő alapján a pedagógusok nagy része több mint 15 éve dolgozik a területen, míg kisebb arányban voltak azok, akik 1-5 éve (18,8%), 11-15 éve (15,6%), 6-10 éve (12,5%) és kevesebb mint 1 éve (12,5%) dolgoznak az oktatásban.

A válaszadók többsége a felső tagozaton (5-8.osztály) tanít vagy tanított (68,8%), míg a középiskolában (9-12. osztály) tanítók aránya 50%, az egyetemi vagy főiskolai oktatók aránya pedig 6,3%.



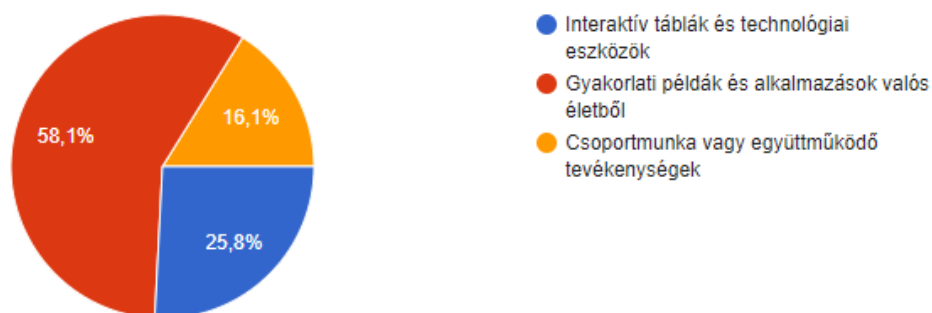
4.1. ábra. Diagram a diákok függvényekkel kapcsolatos megértéséről

A diákok függvényekkel kapcsolatos megértésében jelentős különbségek mutatkoztak. Teljes mértékben senki sem érezte, hogy diákjai megértették a függvények fogalmát. 25% szerint inkább igen, néhány diák kivételével, míg a válaszadók 65,6%-a vegyes tapasztalatokról számolt be, ahol néhány diák értette, másoknak viszont nehézségeik voltak. A fennmaradó 9,4% úgy gondolta, hogy a diákok nem értették a függvények fogalmát.



4.2. ábra. Diagram az oktatók szerint a legnagyobb kihívásokról

Az oktatók szerint a legnagyobb kihívást a fogalmak megértésének nehézsége jelentette (53,1%), ezt követte a diákok előzetes tudásának hiánya (31,3%) és az egyéni tanulási igények kezelése (15,6%).



4.3. ábra. Diagram a függvények oktatásában a legnagyobb hatékonyságú eszközökről

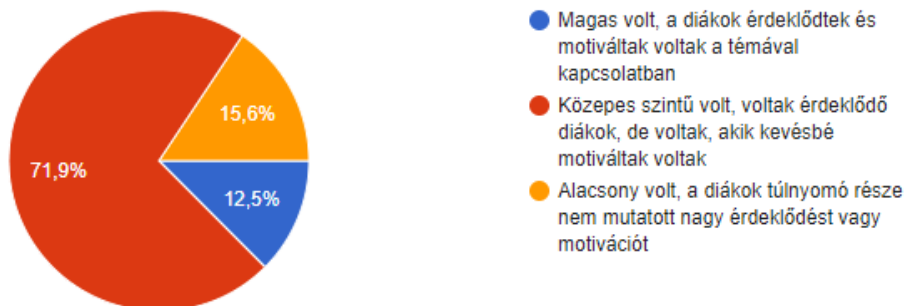
A válaszadók szerint a függvények oktatásában a legnagyobb hatékonyságot a gyakorlati példák és valós életből vett alkalmazások nyújtották (58,1%). Az interaktív táblák és technológiai eszközök is hasznosnak bizonyultak (25,8%), míg a csoportmunka és együttműködő tevékenységek 16,1%-ban voltak hatékonyak.





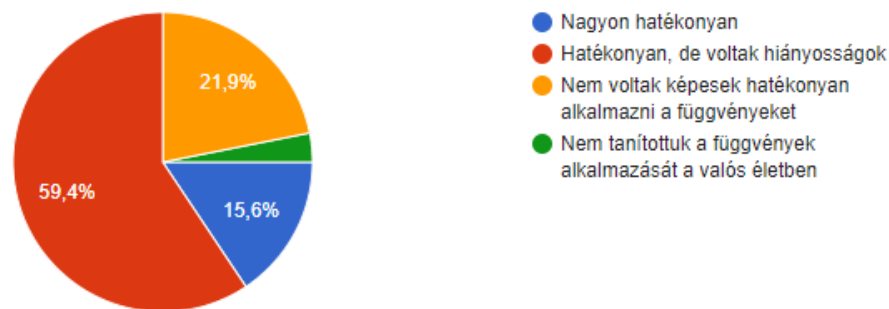
4.4. ábra. Diagram a diák-diák és tanár-diák együttműködés és kommunikáció hatékonyságáról

A diák-diák és tanár-diák együttműködés és kommunikáció hatékonysága vegyes képet mutatott. A válaszadók 25%-a nagyon hatékornak találta, 15,6% szerint inkább hatékony volt, de néhány csoportban problémák adódtak. A válaszadók többsége (53,1%) vegyes hatékonyságról számolt be, míg 6,3% szerint nem volt hatékony.



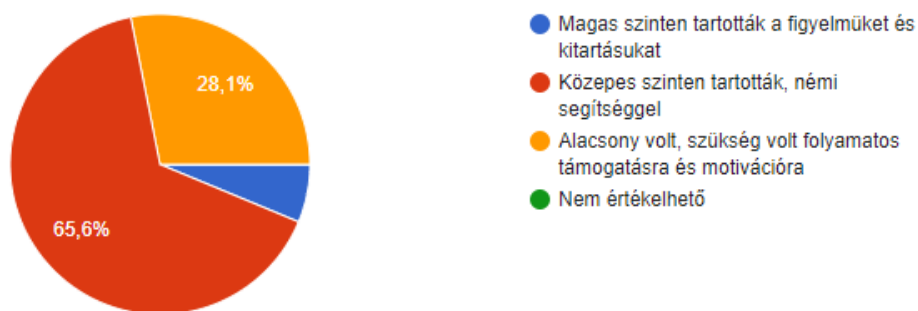
4.5. ábra. A diákok érdeklődése és motivációja a függvények iránt

A diákok érdeklődése és motivációja a függvények iránt közepes szintű volt: a válaszadók 71,9%-a számolt be közepes szintű érdeklődésről, míg 15,6% alacsony, és csak 12,5% magas érdeklődést tapasztalt.



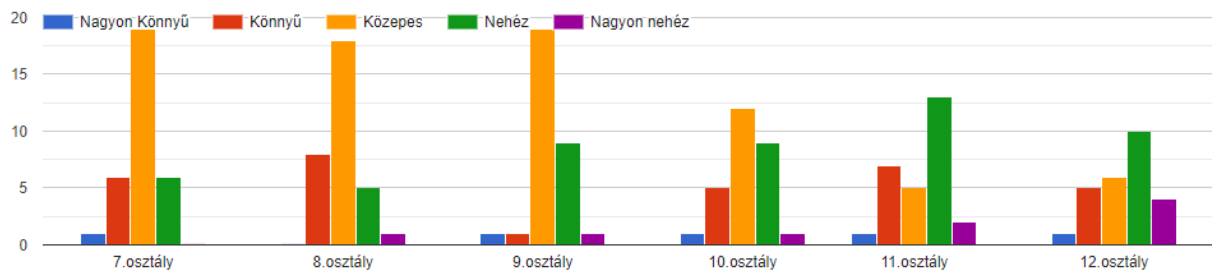
4.6. ábra. Diagram a diákok képessége a függvények alkalmazására

A diákok képessége a függvények alkalmazására szintén vegyes eredményeket mutatott. A válaszadók 59,4%-a szerint diákjaik hatékonyan, de hiányosságokkal alkalmazták a függvényeket, 15,6% nagyon hatékonynak ítélte meg az alkalmazást, 21,9% szerint a diákok nem voltak képesek hatékonyan alkalmazni a függvényeket, és 3,1% nem tanította a függvények valós életbeli alkalmazását.



4.7. ábra. Diagram a diákok önfegyelme és kitartásáról

A diákok önfegyelme és kitartása közepes szintű volt a válaszadók 65,6%-a szerint, míg 28,1% alacsony, és csak 6,3% magas szintű figyelemről és kitartásról számolt be.



4.8. ábra. Diagram a különböző osztályokban a függvények oktatása nehézségi szintjeiről

A különböző osztályokban a függvények oktatása eltérő nehézségi szintet jelentett:

- 7. osztály: A válaszadók többsége közepes nehézségűnek ítélte (19), míg 6 könnyűnek, 6 nehéznek, és 1 nagyon könnyűnek találta.
- 8. osztály: Szintén a közepes nehézség dominált (18), 8 válaszadó könnyűnek, 5 nehéznek, és 1 nagyon nehéznek találta.
- 9. osztály: A legtöbben közepes nehézségűnek (19), míg 9 nehéznek, 1 könnyűnek és 1 nagyon nehéznek ítélték.
- 10. osztály: A válaszadók közül 12 közepes, 9 nehéz, 5 könnyű, és 1-1 nagyon könnyű és nagyon nehéz választ adott.
- 11. osztály: Több válaszadó találta nehéznek (13), közepesnek (5), könnyűnek (7), nagyon könnyűnek (1), és nagyon nehéznek (2).
- 12. osztály: A legtöbben nehéznek (10) és közepesnek (6) ítélték, 5 válaszadó könnyűnek, 1 nagyon könnyűnek és 4 nagyon nehéznek találta.

A felmérés eredményei azt mutatják, hogy a pedagógusok többsége szerint a diákok közepes szintű érdeklődést és motivációt mutattak a függvények témaköre iránt. Az oktatás során a legnagyobb kihívást a fogalmak megértésének nehézsége jelentette. A gyakorlati példák és a valós életbeli alkalmazások bizonyultak a leghatékonyabb oktatási módszereknek. A diákok önfegyelme és kitartása általában közepes szintű volt, de némi segítséggel sikerült fenntartani a figyelmüket és motivációjukat. Az osztályonkénti bontásban a függvények oktatása általában közepes nehézségi szintű volt.

Ezek az eredmények arra utalnak, hogy a függvények tanítása során fontos figyelembe venni a diákok előzetes tudását és egyéni igényeit, valamint használni a technológiai eszközöket és gyakorlati példákat a fogalmak jobb megértése érdekében.

## 5. Online tananyag fejlesztése

Az online tananyag fejlesztése során az volt a fő célom, hogy könnyen átlátható és jól strukturált tananyagot hozzak létre. Ennek érdekében minden modul és témakör átgondolt és áttekinthető. A főbb témák között a függvények alapjai, az elemi függvények és a függvénytranszformációja szerepeltek. Az interaktivitás és a tanulói részvétel elősegítése érdekében a tananyagot LearningApps játékokkal kiegészítettem. Ezek az interaktív játékok nemcsak segítik a tanulókat a fogalmak gyakorlásában és elmélyítésében, hanem növelik az aktív részvételt és motivációt is a tanulási folyamatban és fenntartják a figyelmet. Valamint a tanulók kitölthetnek egy tesztet amely minden anyag végén található, ezzel felmérve mennyire sikerült elsajátítani az anyagot.

### 5.1. Tervezési folyamat

A tervezési folyamat első lépése a cél meghatározása volt, amely egy oktatási segédanyag létrehozása a függvények alapjainak megértéséhez. Ennek érdekében interaktív elemeket építettem be, mint például grafikonok és vizuális szemléltetések, amelyek segítik a diákokat a függvények fogalmának könnyebb megértésében. Játékos gyakorló feladatokat készítettem, amelyek szórakoztató módon mélyítik el a diákok tudását és alkalmazását. A tanulási folyamat értékelésére különböző felmérő teszteket fejlesztettem, amelyek lehetővé teszik a diákok számára a megszerzett tudásuk felmérését és a további gyakorlást igénylő területek azonosítását.

A Site123 weboldal használata mellett több okból döntöttem. Először is, a platform felhasználóbarát felületet kínál, amely lehetővé teszi a gyors és egyszerű weboldal-készítést anélkül, hogy mély technikai ismeretekre lenne szükség. Másodsor, a rendelkezésre álló sablonok és dizájnelemek széles választéka segítette a professzionális és vonzó oktatási segédanyag kialakítását. Végül, a Site123 integrált eszközei lehetővé tették az interaktív elemek és tesztek zökkenőmentes beillesztését, ami elengedhetetlen volt a függvények alapjainak hatékony tanításához.

Az interaktív gyakorló feladatokhoz a LearningApps platformot választottam, mert számos előnyös tulajdonsággal rendelkezik. Valamint egyszerűen használható, lehetővé téve a különböző típusú feladatok gyors és hatékony létrehozását, beleértve a kvízeket és játékokat.. Az oldal interaktív és vizuális eszközei segítik a diákokat a tananyag mélyebb megértésében és élvezetesebbé teszik a tanulási folyamatot. Továbbá, a LearningApps lehetőséget biztosít arra, hogy a feladatokat könnyen integráljuk más oktatási segédanyagokkal és weboldalakkal, így rugalmas és sokoldalú megoldást kínál.

A Geogebra az elsődleges választásom volt, mivel ideális eszköz a matematikai objektumok interaktív ábrázolására. A program lehetővé teszi a függvények grafikus megjelenítését és könnyű manipulálását, így azonnal láthatom a változtatások hatását. Emellett könnyen használható felület és a felhasználóbarát kezelhetőség segített gyorsan és hatékonyan dolgozni.

A Google Forms-ot választottam a tesztek elkészítéséhez az oldalon, mert ingyenes, könnyen hozzáférhető, és felhasználóbarát felületének köszönhetően gyorsan és hatékonyan lehet tesztek létrehozni. Rugalmas funkciói lehetővé teszik a tesztek testreszabását és beállításait a tanulási célok és igények szerint.

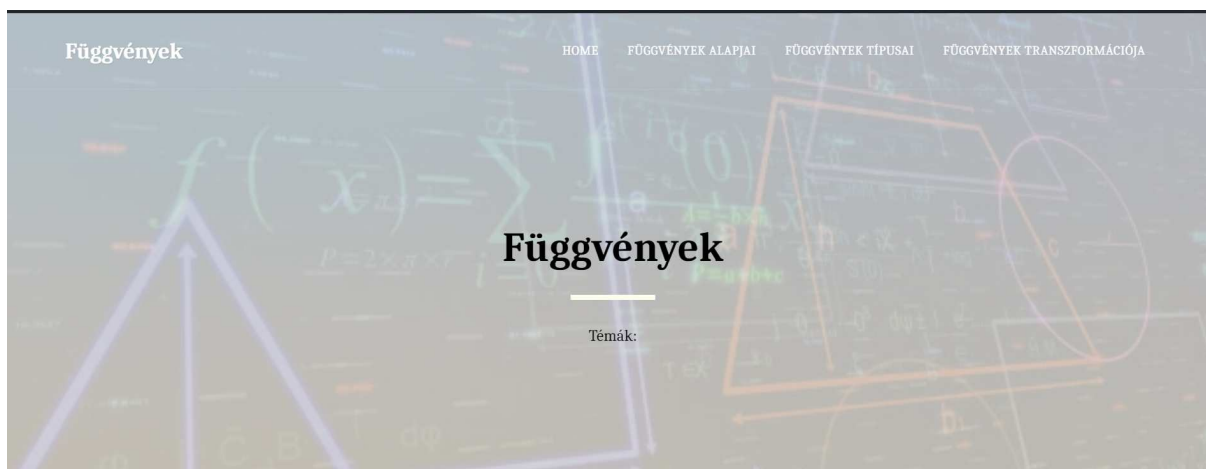
## 5.2. Technikai megvalósítás eszközei

Az online tananyag fejlesztése során különféle technikai eszközöket és platformokat használtam annak érdekében, hogy a tananyag interaktív, vizuálisan átlátható és könnyen hozzáférhető legyen a tanulók számára. Az alábbiakban bemutatom a használt eszközöket és szoftvereket:

- **SITE123:** A tananyag alapjául a SITE123 platform szolgált, amely lehetővé tette a könnyű weboldalkészítést és tartalomkezelést. Ezen a platformon keresztül hoztam létre az online tananyag weboldalát, amely átlátható és felhasználóbarát felületet biztosít a tanulók számára.
- **Google Slides:** A tananyag vizuális elemeinek létrehozásához Google Slides prezentációkat használtam. Ezek a prezentációk segítettek a tananyag strukturált bemutatásában, és könnyen beágyazhatók voltak a SITE123 platformba.
- **LearningApps:** Az interaktivitás fokozása érdekében LearningApps játékokat készítettem. Ezek az interaktív elemek lehetővé tették a tanulók számára, hogy játékos formában gyakorolják és mélyítsék el a tananyagban szereplő fogalmakat.
- **GeoGebra:** A függvények vizuális ábrázolásához és a matematikai fogalmak szemléltetéséhez GeoGebra ábrákat használtam. Ez a szoftver különösen hasznos volt a függvények transzformációjának bemutatásában, mivel dinamikus és interaktív ábrákat lehetett vele készíteni.

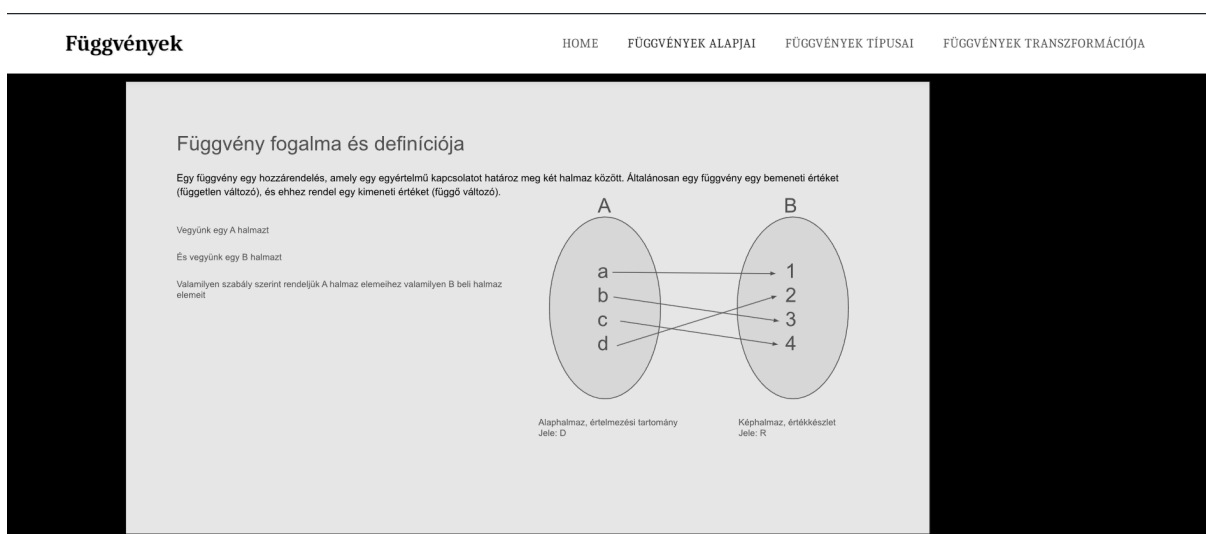
### 5.3. Az online tananyag struktúrája

Az online tananyagot tartalmazó oldalt úgy építettem fel, hogy az minél könnyebben követhető és átlátható legyen a tanulók számára. Amint az oldalra lépnek, egy kezelőfelület fogadja a felhasználókat amely lehetővé teszi, hogy könnyen navigáljanak és válasszanak az elérhető modulok közül, így gyorsan hozzáférhetnek az érdeüknek megfelelő információkhoz és tanulási tartalmakhoz. Ezen a kezelőfelületen kívül három másik oldal található, amelyek a fő modulok címeivel vannak elnevezve. A felhasználók választhatnak az egyes modulok között, és megnyithatják azokat a "Tudj meg többet" gomb segítségével.



5.1. ábra. Az online tananyag főoldala

Az oldalon az elméleti részt egy prezentációs előadással tanítom, amely jól érthető módon mutatja be az adott témakört. Az előadás célja, hogy a diákok alaposan megismerjék a szükséges fogalmakat és összefüggéseket.



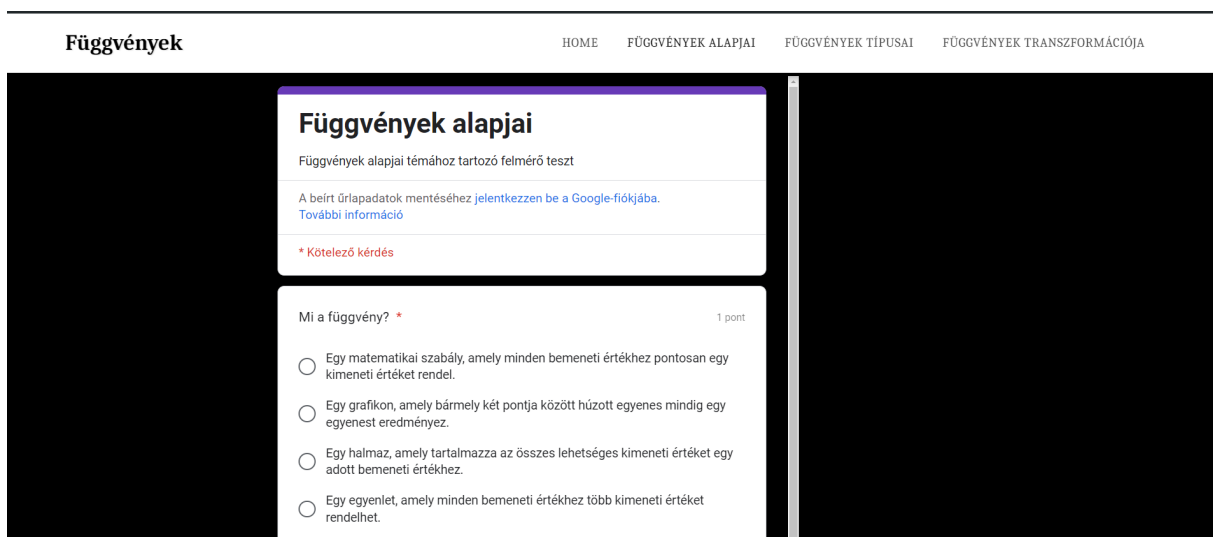
5.2. ábra. Az egyik elméleti anyagról szóló prezentáció képe

A tanulás még hatékonyabbá tétele érdekében a diákok egy interaktív Learning Apps játék segítségével gyakorolhatnak. Ez a játék lehetőséget biztosít arra, hogy a tanulókat szórakoztató és dinamikus módon alkalmazzák, mélyítve ezzel a megértésüket és tudásukat.



5.3. ábra. Egy LearningApps gyakorló játék képe

Az oldal végén található egy teszt, amely lehetőséget ad a diákoknak arra, hogy felmérjék a megszerzett tudásukat. A teszt segítségével ellenőrizhetik, mennyire sikerült elsajátítaniuk a témakört, és azonnali visszajelzést kaphatnak az eredményeikről. Ez segít abban, hogy azonosítsák az esetleges hiányosságokat és további gyakorlással javítsák a megértésüket.



5.4. ábra. Egy témakörhöz tartozó teszt feladatsor képe

A főbb modulok a következők:

### 5.3.1. Függvények alapjai

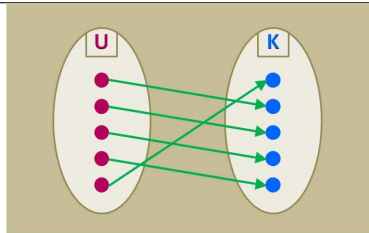
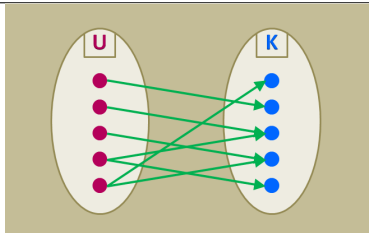
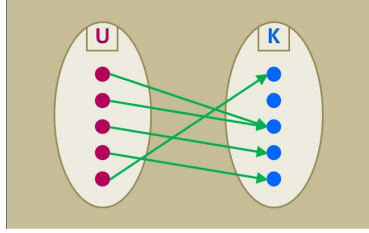
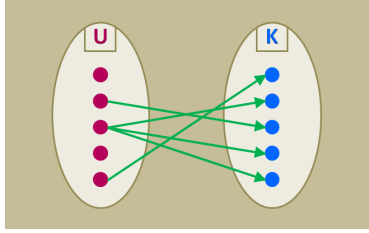
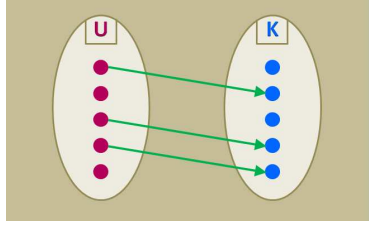
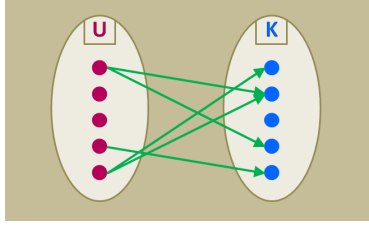
A függvények alapjai rész a matematika egyik legfontosabb területét tárgyalja, amely a középiskolai tanulók számára elengedhetetlen. Ebben a részben áttekintjük a függvény fogalmát és definícióját, valamint bemutatjuk az értelmezési tartomány és az értékkészlet fogalmait. Ismertetjük továbbá a függvények különböző ábrázolási módjait, mint például a képlet, a táblázat és a grafikon. Ezek az alapvető fogalmak segítenek a diákoknak megérteni, hogyan működnek a függvények és hogyan lehet őket alkalmazni a matematikai problémák megoldásában. Az alapos megértés érdekében gyakorlati példákat és vizuális ábrákat is bemutatunk, amelyek segítik a diákokat a fogalmak elsajátításában és alkalmazásában. Ez a fejezet tehát átfogó képet ad a függvények alapjairól, megalapozva a későbbi, bonyolultabb matematikai fogalmak és műveletek megértését.

#### A témához tartozó gyakorló feladatok és megoldásaik

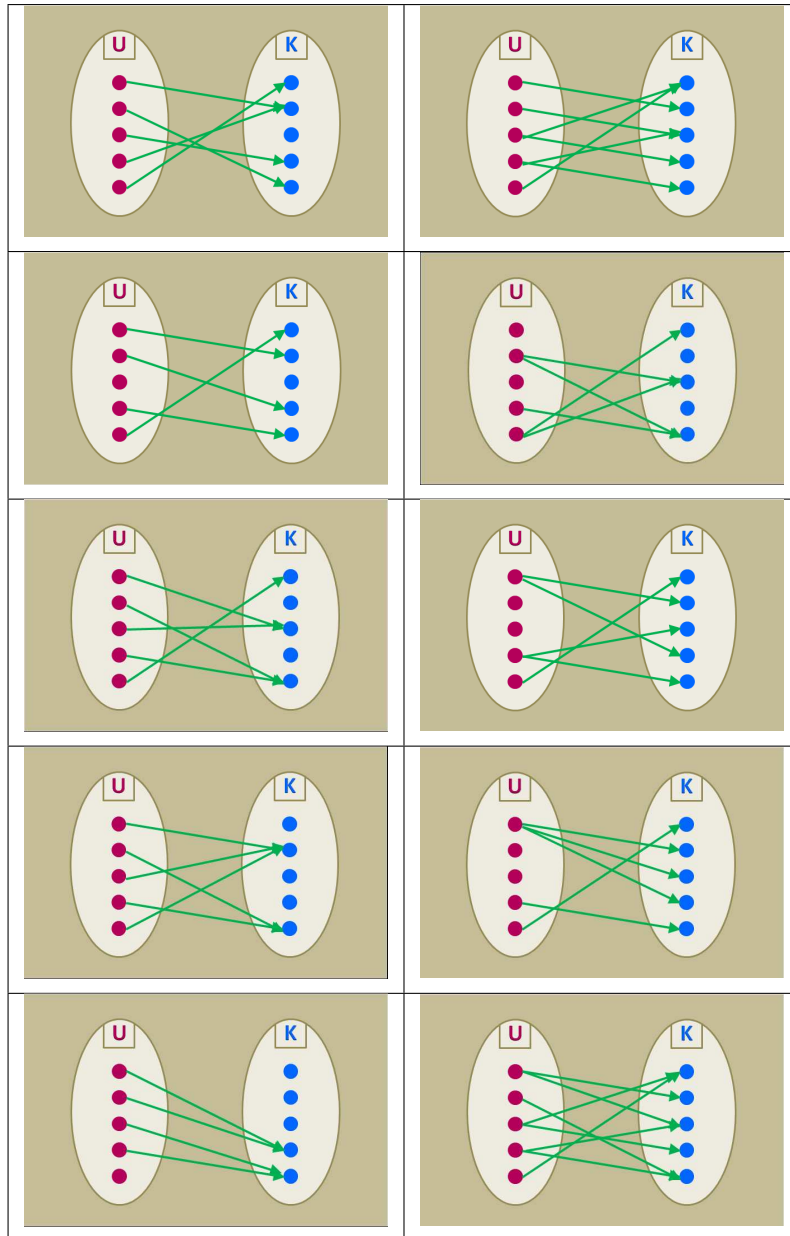
Feladat:Húzd a rajzokat a megfelelő helyre!

Megoldás:

1. táblázat. Képek táblázata

Függvény	Nem függvény
	
	
	





Feladat: Határozd meg a  $f(x)$  függvény értékeit az adott  $x$  pontokban majd válassz a megadott lehetőségek közül!

**Megoldás:**

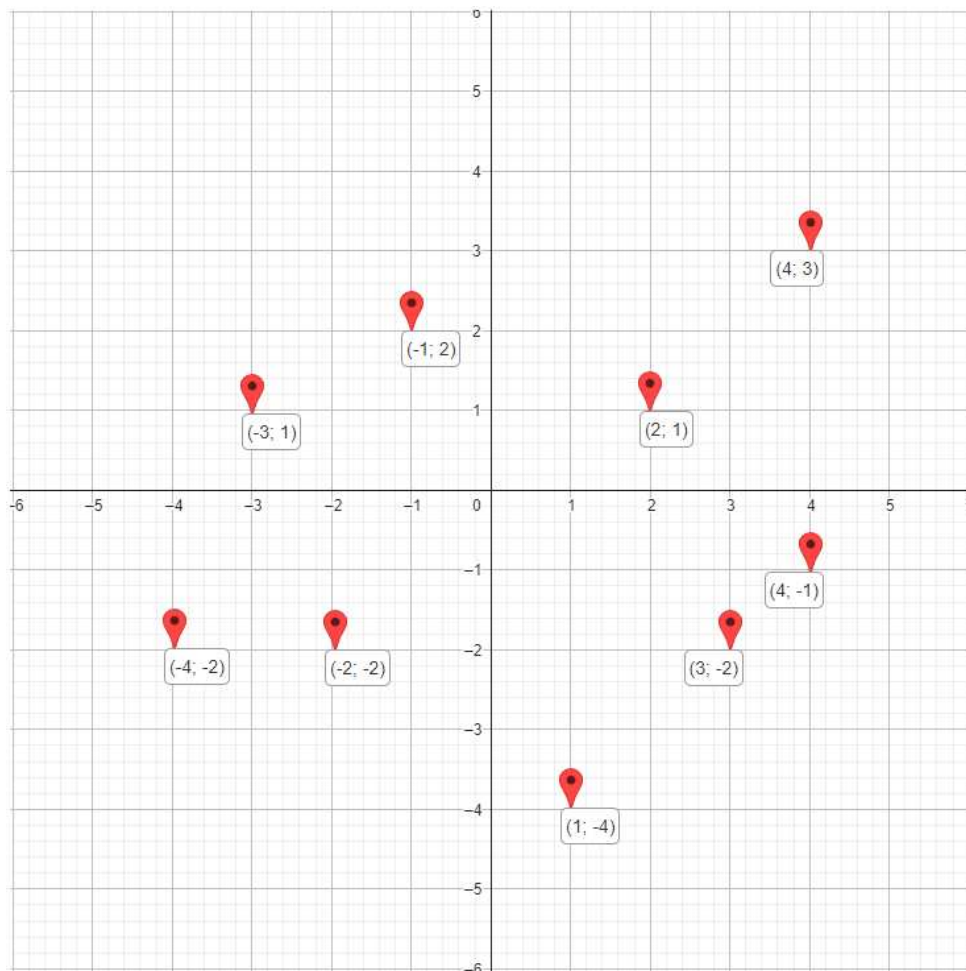
$$f(x) = 3x + 2$$

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	2	5	8	11

5.5. ábra. Függvények alapjai tananyaghoz tartozó gyakorló feladatsor 2. feladatának megoldása

Feladat: Válaszd ki a kijelölt helyen a megfelelő koordinátákat!

Megoldás:



5.6. ábra. Függvények alapjai tananyaghoz tartozó feladatsor 3. feladatának megoldása

## A témához tartozó felmérő feladatsor és megoldása:

### 1.Feladat

Mi a függvény?

- a) Egy matematikai szabály, amely minden bemeneti értékhez pontosan egy kimeneti értéket rendel.
- b) Egy grafikon, amely bármely két pontja között húzott egyenes mindig egy egyenest eredményez.
- c) Egy halmaz, amely tartalmazza az összes lehetséges kimeneti értéket egy adott bemeneti értékhez.
- d) Egy egyenlet, amely minden bemeneti értékhez több kimeneti értéket rendelhet.

**Megoldás:** Egy matematikai szabály, amely minden bemeneti értékhez pontosan egy kimeneti értéket rendel.

### 2.Feladat

Egy függvény minden eleméhez az értelmezési tartományból pontosan egy elemet rendel az értékkészletből.

- a) Igaz
- b) Hamis

**Megoldás:** Igaz

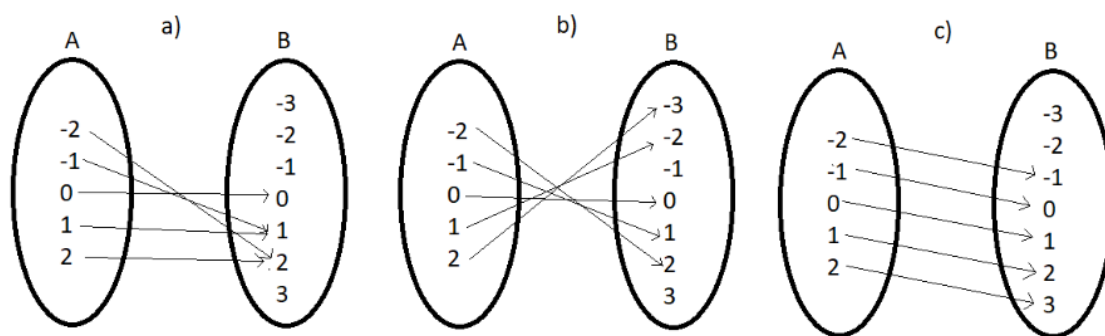
### 3.Feladat

Legyen a következő hozzárendelések alaphalmaza  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  és képhalmaza a  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  halmazok, a hozzárendelések szabálya pedig:

h: minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét

f: minden számhoz hozzárendeljük a tőle 1-el nagyobb számot

g: minden számhoz hozzárendeljük az ellentetjét



5.7. ábra. Függvények alapjai tananyaghoz tartozó feladatsor 3. feladatának ábrája

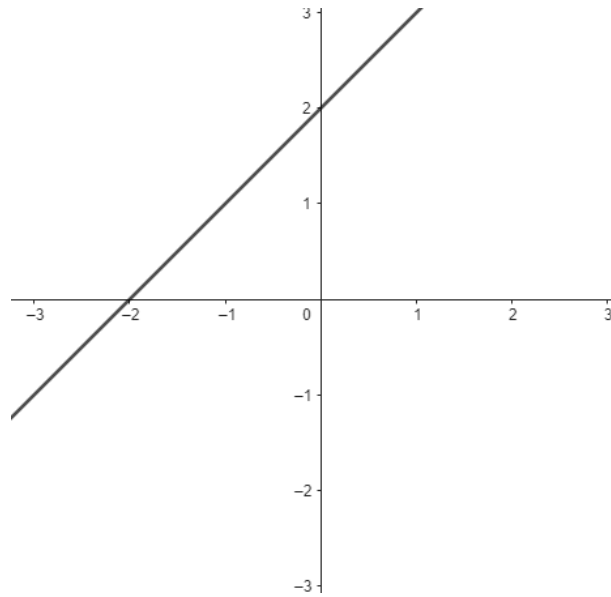
**Megoldás:**

- a) h: minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét
- b) g: minden számhoz hozzárendeljük az ellentetjét
- c) f: minden számhoz hozzárendeljük a tőle 1-el nagyobb számot

#### 4.Feladat

Válaszd ki melyik függvényhez tartozik az alábbi grafikon

- a)  $y = x^2$
- b)  $y = x + 2$
- c)  $y = \frac{1}{x}$
- d)  $y = 2x + 3$



5.8. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:**  $y = x + 2$

### 5. Feladat

Igaz-e az állítás? Az  $A(2,3)$  pont illeszkedik az  $f(x)=2x$  függvény grafikonjára.

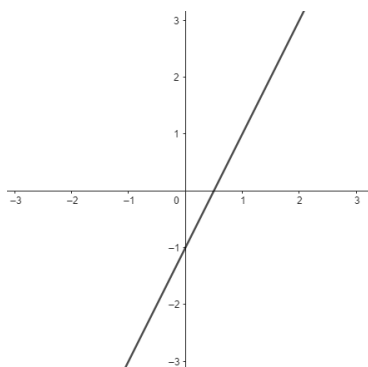
- a) Igaz
- b) Hamis

**Megoldás:** Hamis

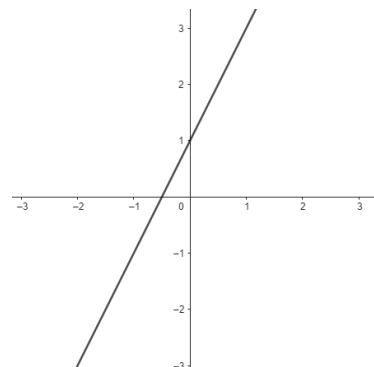
### 6. Feladat

Válaszd ki a következő függvény grafikonját!

$$y = 2x - 1$$



5.9. ábra. Feladathoz tartozó ábra



5.10. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** a)

### 7.Feladat

Igaz-e az állítás? A  $B(-4; 2)$  pont illeszkedik az  $f(x) = x + 6$  függvény grafikonjára

- a) Igaz
- b) Hamis

**Megoldás:** Igaz

### 8.Feladat

Mi az  $f(x) = 2x + 1$  függvény értéke, ha  $x = -3$ ?

- a) -2
- b) -1
- c) 5
- d) -5

**Megoldás:** d)-5

## 5.3.2. Függvények típusai


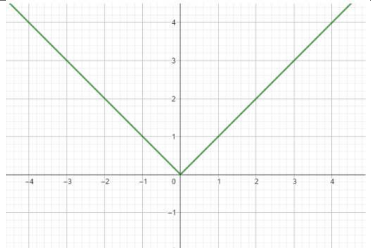
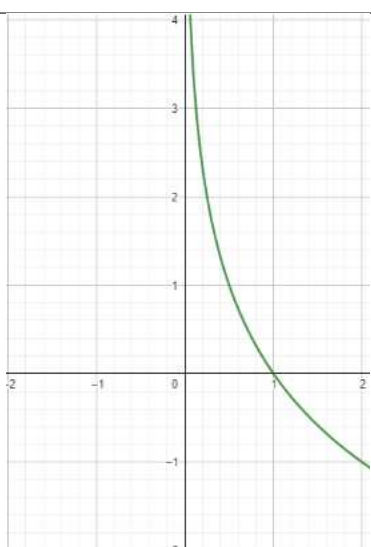
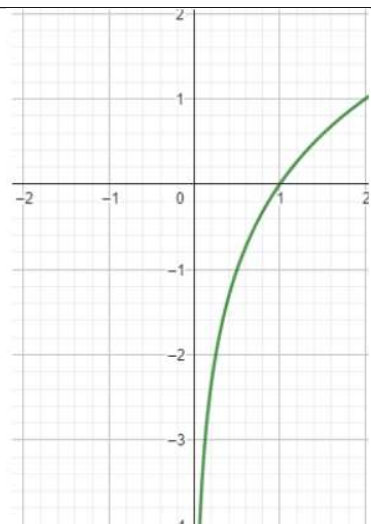
A elemi függvények alapvető fontosságúak a matematika tanulmányozásában, mivel különböző függvények különböző viselkedési mintázatokat mutatnak. Ebben a részben részletesen megvizsgáljuk az elemi függvények legfontosabb típusait, beleértve a konstans, lineáris, másodfokú, abszolútérték, gyök, exponenciális és logaritmus függvényeket. Minden függvénytípus matematikai definícióját, tulajdonságait példákkal és grafikonokkal illusztráljuk. Ezek az alapvető függvénytípusok nemcsak az iskolai matematika tananyagban játszanak központi szerepet, hanem számos tudományos és technológiai területen is. A fejezet célja, hogy a diákok átfogó képet kapjanak ezekről a függvényekről, és képesek legyenek felismerni és alkalmazni őket a különböző matematikai problémák megoldása során.

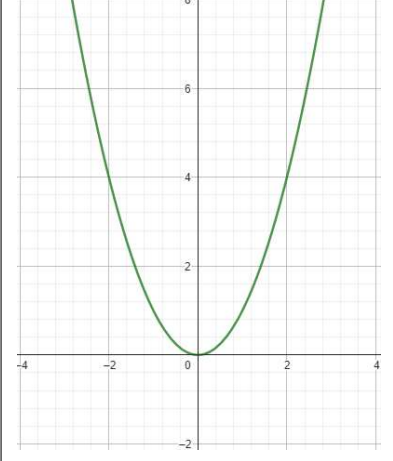
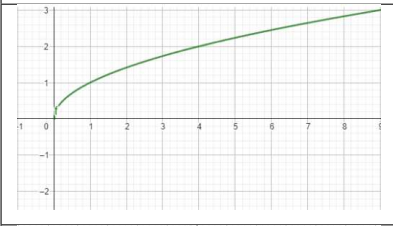
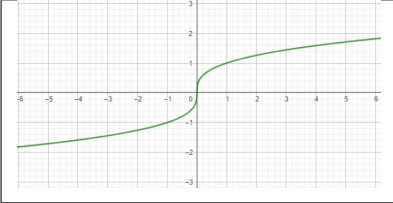
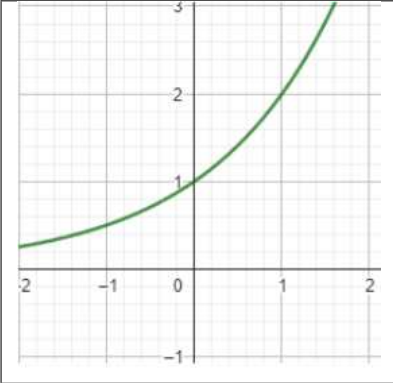
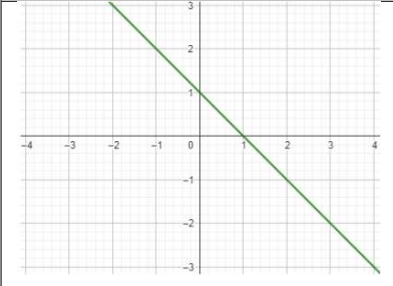
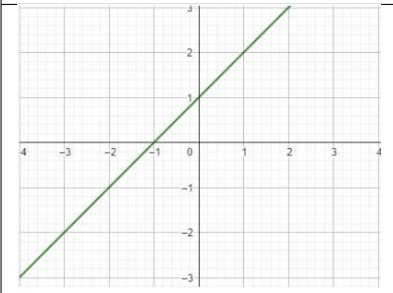
### A témához tartozó gyakorló feladatok és megoldásaik

Feladat: Párosítsd a függvényeket a grafikonokkal

**Megoldás**

2. táblázat. Képek táblázata

Függvény képe	Függvényhez tartozó egyenlet
	$f(x) = c$
	$f(x) =  x $
	$f(x) = \log_a x \quad (0 < a < 1)$
	$f(x) = \log_a x \quad (a > 1)$

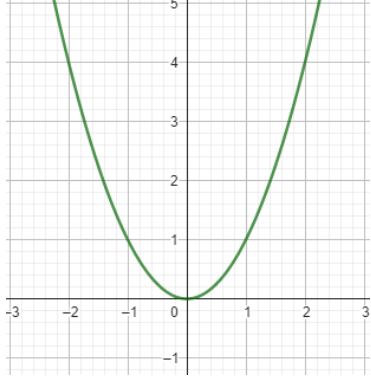
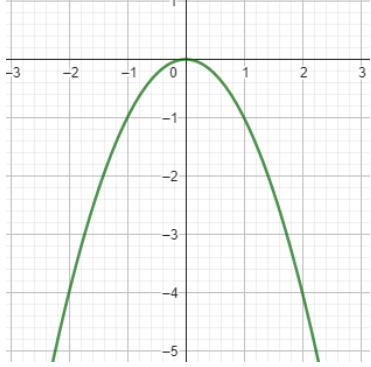
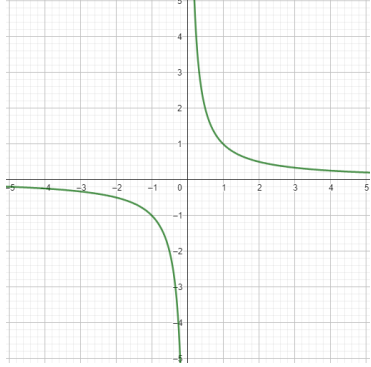
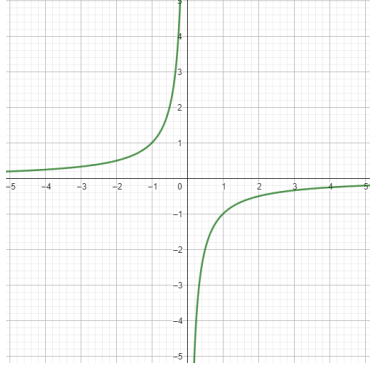
	$f(x) = x^2$
	$f(x) = \sqrt{x}$
	$f(x) = \sqrt[3]{x}$
	$f(x) = e^x$
	$f(x) = ax + b, a < 0$
	$f(x) = ax + b, a > 0$

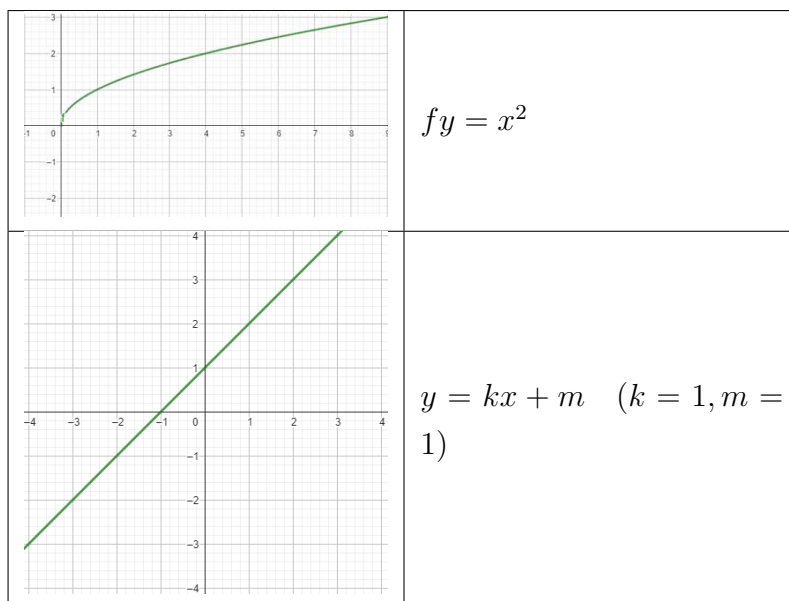


Feladat: Melyik függvényhez melyik ábra tartozik?

Megoldás

3. táblázat. Képek táblázata

Függvény képe	Függvényhez tartozó egyenlet
	$y = x^2$
	$y = -x^2$
	$y = \frac{k}{x}, \quad (k > 1)$
	$y = \frac{k}{x}, \quad (k > 1)$



**A témához tartozó felmérő feladatsor és megoldása:**

**1.Feladat**

Igaz-e az állítás? A lineáris függvény minden esetben egyenes vonalat ábrázol a koordináta-rendszerben.

- a) Igaz
- b) Hamis

**Megoldás:** Igaz

**2.Feladat**

Mi a lineáris függvény általános alakja?

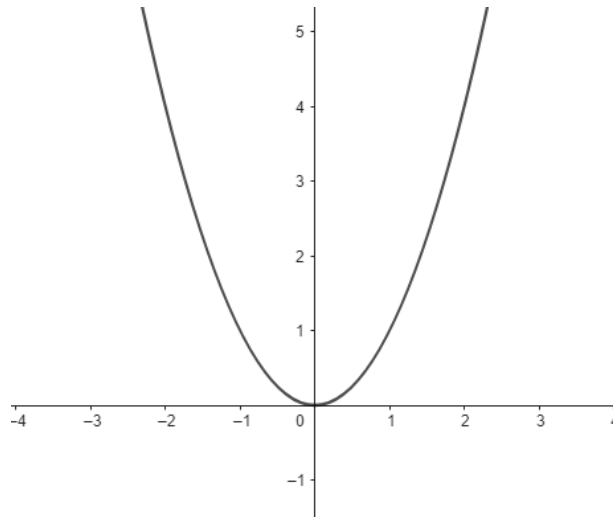
- a)  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- b)  $y = \frac{1}{x}$
- c)  $f(x) = ax + b$
- d)  $f(x) = |x|$

**Megoldás:** c)  $f(x) = ax + b$

**3.Feladat**

Melyik függvényt ábrázolja az alábbi grafikon?

- a)  $y = c$
- b)  $y = \sqrt{x}$
- c)  $y = x^2$
- d)  $y = \frac{1}{x}$



5.11. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** c)  $y = x^2$

#### 4.Feladat

Mi az alábbi függvény értékkészlete?  $y = |x|$

- a)  $y \in ]-\infty; +\infty[$
- b)  $y \in ]-\infty; +\infty]$
- c)  $y \in ]0; +\infty[$
- d)  $x \in \mathbb{R}$

**Megoldás:** b)  $y \in ]-\infty; +\infty]$

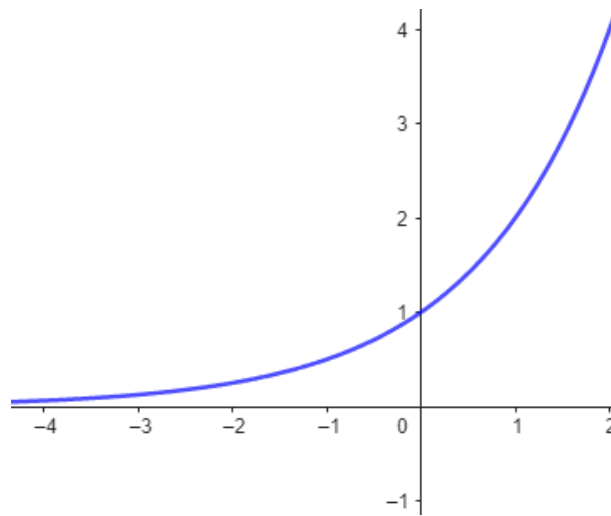
#### 5.Feladat

Párosítsd az alábbi grafikont a hozzá tartozó függvénnyel

- a)  $y = c$
- b)  $y = a^x, \quad (a > 1)$

c)  $y = \sqrt[3]{x}$

d)  $y = x^2$



5.12. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** b)  $y = a^x$ , ( $a > 1$ )

### 6. Feladat

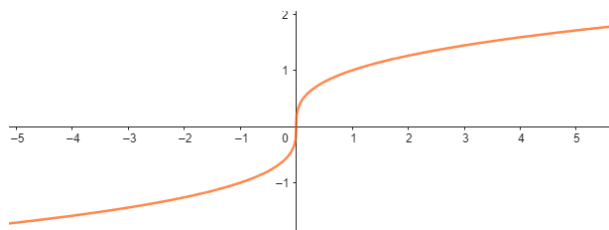
Párosítsd az alábbi grafikont a hozzá tartozó függvénnyel

a)  $y = |x|$

b)  $y = x + 2$

c)  $y = x^2$

d)  $y = \sqrt[3]{x}$



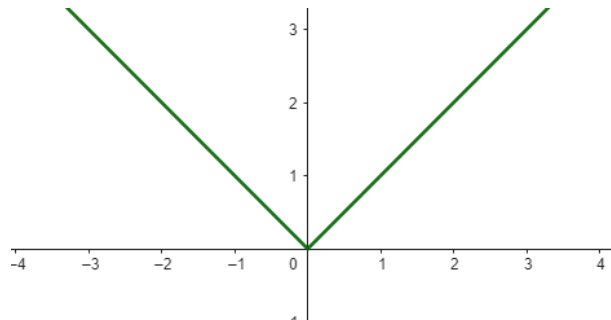
5.13. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** d)  $y = \sqrt[3]{x}$

### 7. Feladat

Párosítsd az alábbi grafikont a hozzá tartozó függvénnyel

- a)  $y = |x|$
- b)  $y = \sqrt{x}$
- c)  $y = 2x + 3$
- d)  $y = \frac{1}{x}$



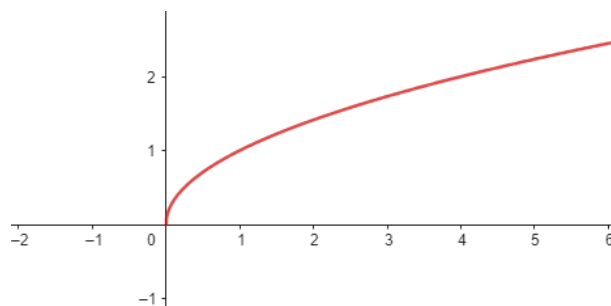
5.14. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** a)  $y = |x|$

### 8.Feladat

Párosítsd az alábbi grafikonokat a hozzá tartozó függvénnyel

- a)  $y = \sqrt[3]{x}$
- b)  $y = x^2$
- c)  $y = |x|$
- d)  $y = \sqrt{x}$



5.15. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** d)  $y = \sqrt{x}$

### 9.Feladat

Határozd meg az  $f(x) = 3x - 2$  függvény értéke, ha  $x = 4!$

- a) 8
- b) 10
- c) -10
- d) 12

**Megoldás:** b)10

**10.Feladat**

Melyik a  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény értékkészlete?

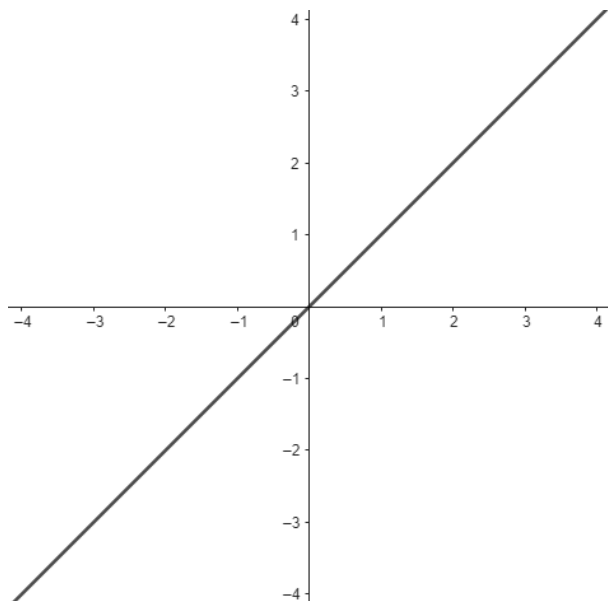
- a)  $[0; +\infty)$
- b)  $(-\infty; +\infty)$
- c)  $[0; 1]$
- d)  $[0; 10]$

**Megoldás:** a) $[0; +\infty)$

**11.Feladat**

Melyik függvénytípus ábrázolja az alábbi grafikon?

- a) Lineáris függvény
- b) Másodfokú függvény
- c) Exponenciális függvény
- d) Logaritmikus függvény

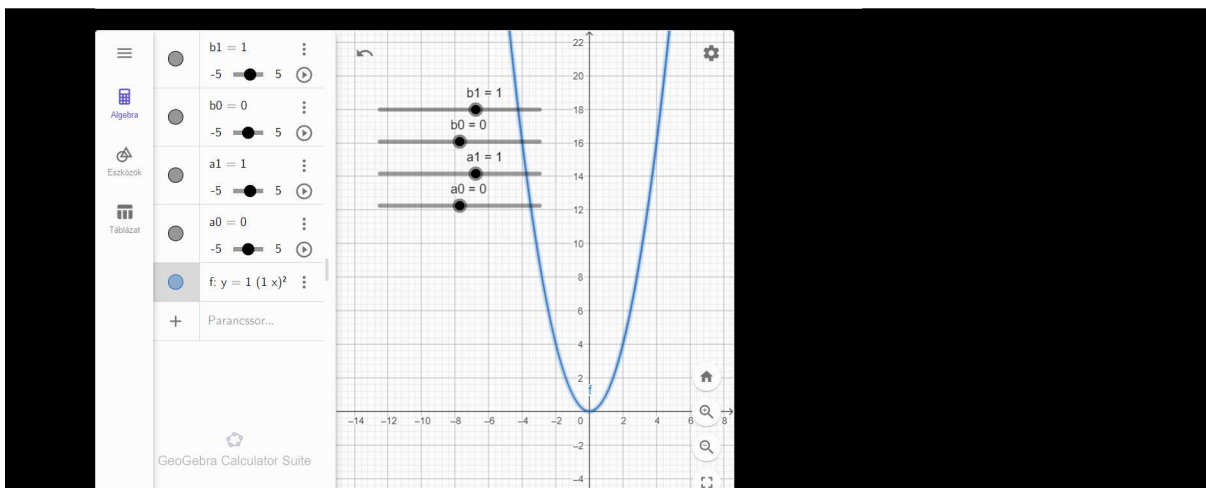


5.16. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** a) Lineáris függvény

### 5.3.3. Függvénytranszformációk

A függvények transzformációja kulcsfontosságú a matematikában, mivel lehetővé teszi a meglévő függvények módosítását és új formák létrehozását. Ez a rész részletesen bemutatja a transzformációk alapelveit és módszereit, amelyek közé tartozik az eltolás, a nyújtás és zsugorítás, valamint a tükrözés. Az eltolás során a függvény grafikonját egy adott irányba mozgatjuk, míg a nyújtás és zsugorítás a függvény alakját változtatja meg a tengelyek mentén. A tükrözés segítségével a függvény grafikonját egy tengelyre tükrözhetjük. Ezek a transzformációk nemcsak a matematikai problémák megoldásában játszanak fontos szerepet, hanem számos más tudományterületen is alkalmazhatók. A fejezet konkrét példák és vizuális ábrák segítségével szemlélteti a különböző transzformációk hatásait, ezzel segítve a tanulók megértését és a tananyag elsajátítását. Ez az oldal tartalmaz még egy Geogebra ablakot, amelyben egy függvényt a csuszák állításával interaktív módon transzformálhatunk, ezzel szemléletesebbé téve a tananyagot.



5.17. ábra. A szemléltetéshez felhasznált GeoGebra interaktív ablak képe

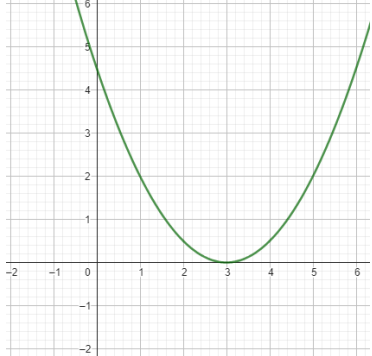
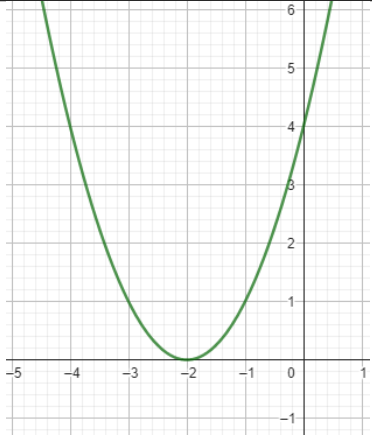
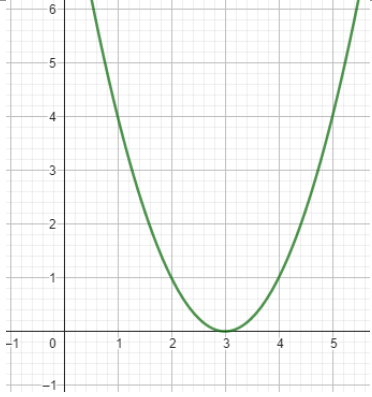
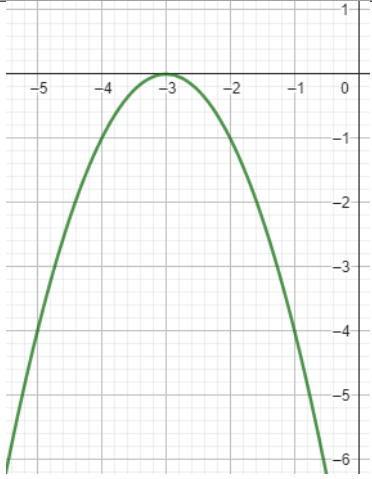
### A témához tartozó gyakorló feladatok és megoldásaik

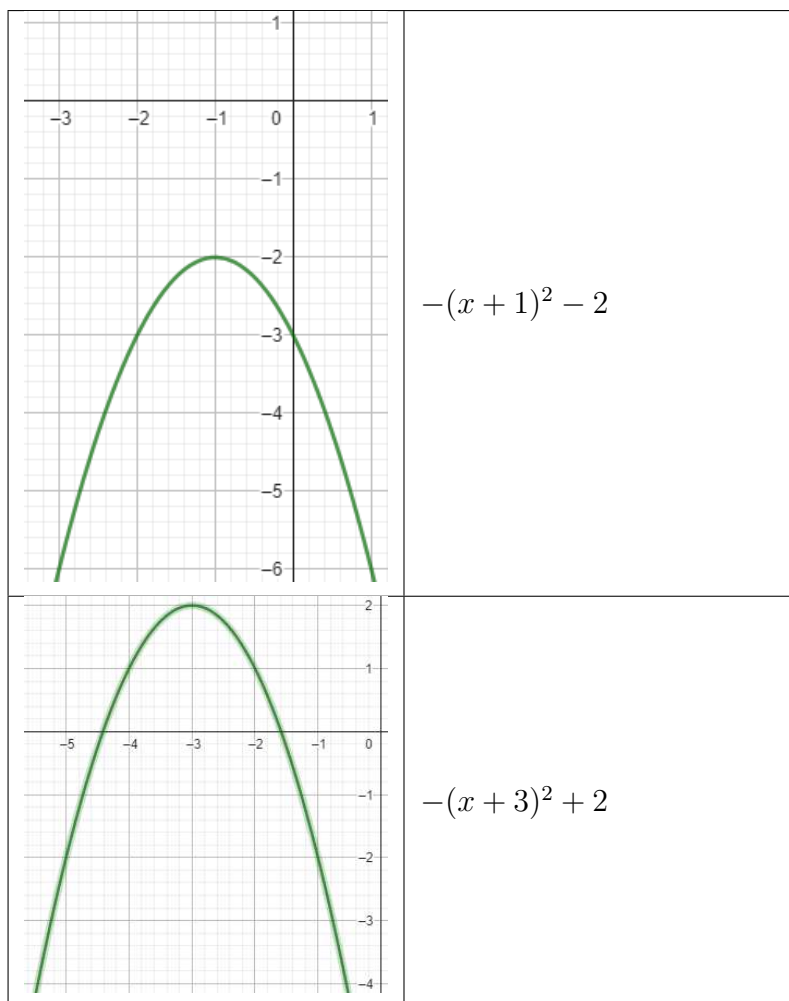
Feladat: Keresd az összeillő párokat!

4. táblázat. Képek táblázata

Függvény	Nem függvény
	$x^2 - 3$
	$x^2 + 2$



	$\frac{1}{2}(x - 3)^2$
	$(x + 2)^2$
	$(x - 3)^2$
	$-(x + 3)^2$



**A témához tartozó felmérő feladatsor és megoldása:**

**1.Feladat**

Az  $y = f(x + a_0)$  hozzárendelés hogyan hat a függvény geometriai képre

- a) Eltolás az x tengely mentén  $(-a_0; 0)$  látható vektorral
- b) Eltolás az y tengely mentén  $(a_0; 0)$  látható vektorral

**Megoldás:** a) Eltolás az x tengely mentén  $(-a_0; 0)$  látható vektorral

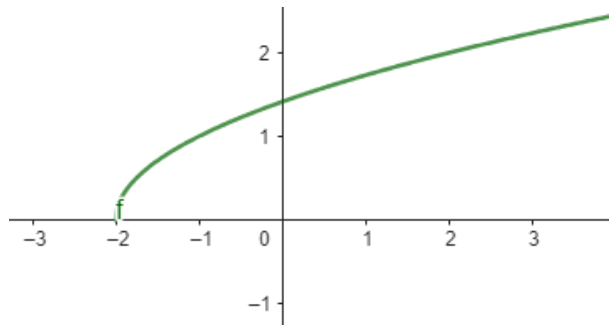
**2.Feladat**

Válaszd ki, melyik grafikonnak felel meg az alábbi függvény!

- a)  $y = \sqrt{x}$
- b)  $y = \sqrt{x} + 2$

c)  $y = \sqrt{x + 2}$

d)  $2\sqrt{x}$



5.18. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** c)  $y = \sqrt{x + 2}$

### 3.Feladat

Adott az alábbi függvény. Hogyan alakul az  $f(x)$  függvény  $f(x) + 3$  transzformáció hatására?

- a) Függőlegesen eltolódik 3 egységgel lefelé.
- b) Függőlegesen eltolódik 3 egységgel felfelé.
- c) Vízszintesen eltolódik 3 egységgel balra.
- d) Vízszintesen eltolódik 3 egységgel jobbra.

**Megoldás:**b) Függőlegesen eltolódik 3 egységgel felfelé.

### 4.Feladat

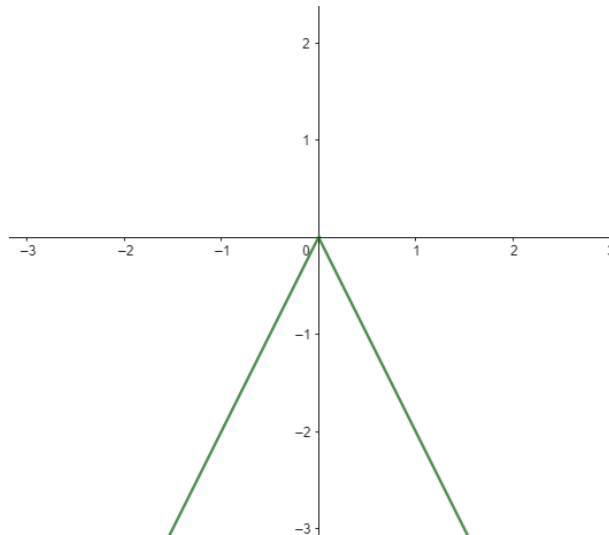
Válaszd ki, melyik függvénynek felel meg az alábbi grafikon!

a)  $y = |x - 2|$

b)  $y = -2|x|$

c)  $y = |-x|$

d)  $y = \frac{1}{x}$



5.19. ábra. Feladathoz tartozó ábra

**Megoldás:** b)  $y = -2|x|$

### 5.Feladat

Adott az  $f(x) = x^3$  függvény. Hogyan alakul az  $-f(x)$  transzformáció hatására?

- a) Tükröződik az y-tengelyre.
- b) Tükröződik az x-tengelyre.
- c) Vízszintesen eltolódik 1 egységgel jobbra.
- d) Függőlegesen eltolódik 1 egységgel felfelé.

**Megoldás:**b) Tükröződik az x-tengelyre.

### 6.Feladat

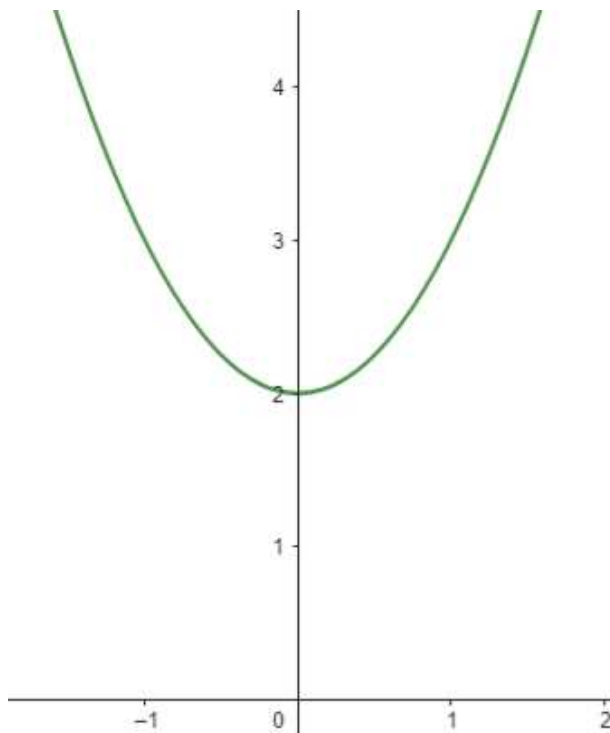
Az  $y = b_0 \cdot f(x)$  hozzárendelés hogyan hat a függvény geometriai képére?

- a) Összenyomás ha  $|b_0| > 1$ , nyújtás ha  $|b_0| < 1$
- b) Összenyomás ha  $|b_0| < 1$ , nyújtás ha  $|b_0| > 1$
- c) Tükröződés az x tengelyre
- d) Tükröződés az y tengelyre

**Megoldás:** b) Összenyomás ha  $|b_0| < 1$ , nyújtás ha  $|b_0| > 1$

## 7.Feladat

Válaszd ki melyik függvénynek felel meg az alábbi grafikon!



5.20. ábra. Feladathoz tartozó ábra

- a)  $y = x^3$
- b)  $y = \sqrt{x}$
- c)  $y = x^2$
- d)  $y = x^2 + 2$

**Megoldás:**d)  $y = x^2 + 2$

Az online tananyag minden oldala három fő részből áll: egy részletes előadásból, egy interaktív Learning Apps játékból, és egy felmérő tesztből. Az előadás bemutatja az adott témakört, segítve a diákokat a fogalmak és összefüggések megértésében. A Learning Apps játék lehetővé teszi a gyakorlást és az elmélyült tanulást interaktív módon. A felmérő teszt pedig segít a diákok tudásának értékelésében és az eddig tanultak ellenőrzésében. Ez a három rész összehangoltan támogatja a diákokat a témakör megértésében és a tudásuk gyakorlásában.

## 6. Összegzés

A diplomamunka célja egy olyan online tananyag fejlesztése volt, amely a középiskolai függvények tananyagát dolgozza fel, figyelembe véve a tanárok és diákok igényeit. A függvények alapvető fogalmai, az elemi függvények és a függvénytranszformációk részletes tárgyalása mellett a tananyag interaktív elemeket és vizualizációkat tartalmaz, hogy megkönnyítse a diákok számára a bonyolultabb matematikai fogalmak megértését. A fejlesztés során a SITE123 platformot használtam, amely lehetővé tette egy átlátható és felhasználóbarát weboldal létrehozását. A Google Slides dokumentumok részletes magyarázatokat és példákat tartalmaznak, míg a LearningApps játékok interaktív módon segítik a tananyag gyakorlását. A GeoGebra ábrák vizuálisan szemléltetik a függvények különböző tulajdonságait és transzformációit, így támogatva a diákok mélyebb megértését. A kutatás részeként egy online felmérést is készítettem, amely a függvények oktatásának nehézségeit vizsgálta a tanárok szemszögéből. Az eredmények rávilágítottak a gyakorlati kihívásokra és segítettek a tananyag fejlesztésének irányításában. Összességében a diplomamunka egy átfogó és interaktív online tananyagot hozott létre. Az eredmények remélhetőleg ösztönözni fogják a további fejlesztéseket az online oktatási eszközök terén, és segítenek a matematika tanításában rejlő kihívások leküzdésében.

Az oldal elérhető az alábbi QR-kóddal.



6.1. ábra. Az oldal elérése QR-kódon keresztül

## Irodalomjegyzék

- [1] Balogh Norbert, *Függvények jegyzet és példatár a közép- és emelt szintű matematika érettségi előkészítő segédanyagá, Gödöllői Török Ignác Gimnázium, Gödöllő, 2022.*
- [2] Birloni Szilvia, Csákvári Ágnes, Darabos Noémi Ágnes, Gidófalvi Zsuzsa, Lövey Éva, Vidra Gábor *Matematika kompetenciaterület 'A', Matematika 9.évfolyam tanulók könyve 2.félév*, Educatio Kht. 2008. URL: [https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2\\_A\\_t%C3%ADpus/9-%C3%A9vfolyam/1\\_Di%C3%A1k%20munkaf%C3%BCzetek%20%C3%A9s%20eszk%C3%B6z%C3%B6k/H-AMAT0902\\_di%C3%A1k-mf\\_2f%C3%A9l%C3%A9v.pdf](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/9-%C3%A9vfolyam/1_Di%C3%A1k%20munkaf%C3%BCzetek%20%C3%A9s%20eszk%C3%B6z%C3%B6k/H-AMAT0902_di%C3%A1k-mf_2f%C3%A9l%C3%A9v.pdf)
- [3] Csákvári Ágnes, Darabos Noémi Ágnes, Lénárt István, Lövey Éva, Kovács Károlyné, Vidra Gábor *Matematika kompetenciaterület 'A', Matematika 9.évfolyam tanulók könyve 1.félév*, Educatio Kht. 2008. URL: [https://www.kooperativ.hu/matematika/3\\_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2\\_A\\_t%C3%ADpus/9-%C3%A9vfolyam/1\\_Di%C3%A1k%20munkaf%C3%BCzetek%20%C3%A9s%20eszk%C3%B6z%C3%B6k/H-AMAT0901\\_di%C3%A1k-mf\\_1f%C3%A9l%C3%A9v.pdf](https://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/9-%C3%A9vfolyam/1_Di%C3%A1k%20munkaf%C3%BCzetek%20%C3%A9s%20eszk%C3%B6z%C3%B6k/H-AMAT0901_di%C3%A1k-mf_1f%C3%A9l%C3%A9v.pdf)
- [4] Czondi János, Kassay Ildikó, Szabó Bertalan, *Fogalmak, definíciók, tételek középiskolásoknak és főiskolásoknak*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. Budapest, Első kiadás, 1997.
- [5] Gerőcs László, Dr. Vancsó Ödön, *MATEMATIKA* Akadémia Kiadó Zrt, 2012.
- [6] Juhász István, Orosz Gyula *Matematika 9.*, Oktatási hivatal, 2020, URL: [https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT09TB\\_\\_teljes.pdf](https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT09TB__teljes.pdf)
- [7] Juhász István, Orosz Gyula *Matematika 11.* Oktatási hivatal, 2022, URL: [https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT11TB\\_\\_teljes.pdf](https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT11TB__teljes.pdf)
- [8] Juhász István, Orosz Gyula, *Matematika 12.* Oktatási hivatal 2023, URL: [https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT12TB\\_\\_teljes.pdf](https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/OH-MAT12TB__teljes.pdf)
- [9] Kovács Béla, *Matematika I*, Kovács Béla, 2011, URL: [https://dtk.tankonyvtar.hu/bitstream/handle/123456789/8629/GEMAN6206B\\_04.pdf?sequence=4&isAllowed=y](https://dtk.tankonyvtar.hu/bitstream/handle/123456789/8629/GEMAN6206B_04.pdf?sequence=4&isAllowed=y)
- [10] Orosz Gyula, *Függvények 7-8. évfolyam* Budapest, 2024.május 26, URL: [https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol\\_fuggveny\\_i.pdf](https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_fuggveny_i.pdf)

- [11] Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona Helén, *Matematika 9. második kötet*, Oktatási hivatal, 2020, URL: [https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/0H-MAT09TA\\_II\\_\\_teljes.pdf](https://www.tankonyvkatalogus.hu/storage/pdf/0H-MAT09TA_II__teljes.pdf)
- [12] Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. *Алгебра. 7–9 класи для закладів загальної середньої освіти*, Міністерство освіти і науки України, 2022, URL: [https://osvita.ua/doc/files/news/901/90156/Algebra\\_7-9\\_klas\\_Merzlyak\\_30\\_08\\_2023.pdf](https://osvita.ua/doc/files/news/901/90156/Algebra_7-9_klas_Merzlyak_30_08_2023.pdf)



# Ábrák jegyzéke

1.1. Az A halmaz hozzárendelése a B halmazhoz	7
1.2. Pontok felvétele Derékszögű-koordinátarendszerben	9
1.3. Függvény megrajzoláson	9
1.4. A $2x+1$ függvény zérushelye	10
1.5. A $f(x) = x^2$ páros függvény	10
1.6. az $f(x) = x^3$ páratlan függvény	11
2.1. Konstans függvény grafikonja	12
2.2. Ha $a > 0$ , akkor szigorúan növekvő a függvény	13
2.3. Ha $a < 0$ , akkor szigorúan csökkenő a függvény	13
2.4. Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja	14
2.5. Az $y =  x $ függvény grafikonja	15
2.6. Páros $n$ esetén a függvény grafikonja	16
2.7. Páratlan $n$ esetén a függvény grafikonja	16
2.8. Ha $a > 1$ , akkor szigorúan növekvő az exponenciális függvény	17
2.9. Ha $0 < a < 1$ , akkor szigorúan csökkenő az exponenciális függvény	17
2.10. Ha $a > 1$ , akkor szigorúan monoton növekvő a logaritmus függvény	18
2.11. Ha $0 < a < 1$ , akkor szigorúan monoton csökkenő a logaritmus függvény	18
2.12. Az $y = \frac{1}{x}$ függvény grafikonja	19
3.1. Az $y = \sqrt{x + a_0}$ függvény grafikonja	20
3.2. Az $y = \sqrt{a_1 \cdot x}$ függvény grafikonja	21
3.3. Az $y = x^2 + b_0$ grafikonja	21
3.4. Az $y = b_1 \cdot x^2$ grafikonja	22
4.1. Diagram a diákok függvényekkel kapcsolatos megértéséről	23
4.2. Diagram az oktatók szerint a legnagyobb kihívásokról	24
4.3. Diagram a függvények oktatásában a legnagyobb hatékonyságú eszközökről	24
4.4. Diagram a diák-diák és tanár-diák együttműködés és kommunikáció hatékonyságáról	25
4.5. A diákok érdeklődése és motivációja a függvények iránt	25
4.6. Diagram a diákok képessége a függvények alkalmazására	26
4.7. Diagram a diákok önfegyelme és kitartásáról	26
4.8. Diagram a különböző osztályokban a függvények oktatása nehézségi szintjeiről	27
5.1. Az online tananyag főoldala	30
5.2. Az egyik elméleti anyagról szóló prezentáció képe	30
5.3. Egy LearningApps gyakorló játék képe	31
5.4. Egy témakörhöz tartozó teszt feladatsor képe	31

5.5. Függvények alapjai tananyaghoz tartozó gyakorló feladatsor 2. feladatának megoldása	34
5.6. Függvények alapjai tananyaghoz tartozó feladatsor 3. feladatának megoldása	34
5.7. Függvények alapjai tananyaghoz tartozó feladatsor 3. feladatának ábrája	36
5.8. Feladathoz tartozó ábra	37
5.9. Feladathoz tartozó ábra	37
5.10. Feladathoz tartozó ábra	37
5.11. Feladathoz tartozó ábra	43
5.12. Feladathoz tartozó ábra	44
5.13. Feladathoz tartozó ábra	44
5.14. Feladathoz tartozó ábra	45
5.15. Feladathoz tartozó ábra	45
5.16. Feladathoz tartozó ábra	47
5.17. A szemléltetéshez felhasznált GeoGebra interaktív ablak képe	48
5.18. Feladathoz tartozó ábra	51
5.19. Feladathoz tartozó ábra	52
5.20. Feladathoz tartozó ábra	53
6.1. Az oldal elérése QR-kódon keresztül	54
6.2. QR-код для доступа до сторінки	62

## Mellékletek

# Függvények oktatása

A kérdőív tartalmaz kérdéseket arról, hogy mennyire találják nehéznek a függvények tanítását, és milyen területeken tapasztalnak nehézségeket.

### 1. Neme?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

Férfi

Nő

### 2. Milyen végzettséggel rendelkezik?

*Válassza ki az összeset, amely érvényes.*

Matematika Bsc

Matematika Msc

Egyéb

### 3. Mennyi ideig dolgozott az oktatás területén?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

Kevesebb, mint 1 év

1-5 év

6-10 év

11-15 év

Több mint 15 év

### 4. Mely évfolyamokon tanít vagy tanított matematikát?

*Válassza ki az összeset, amely érvényes.*

Felső tagozat (5-8. osztály)

Középiskola (9-12. osztály)

Egyetem vagy főiskola

5. Milyen mértékben érezte, hogy a diákjai megértették a függvények fogalmát és alkalmazását az oktatás során?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

- Teljes mértékben
- Inkább igen, néhány diák kivételével
- Vegyes, néhány diák értette, másoknak nehézségeik voltak
- Nem, a diákok többsége küzdött a függvényekkel kapcsolatos fogalmakkal és feladatokkal

6. Melyek voltak a legnagyobb kihívások a függvények oktatása során?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

- A diákok előzetes tudásának hiánya
- Az fogalmak megértésének nehézsége
- Az egyéni tanulási igények kezelése

7. Milyen oktatási módszereknek vagy eszközöknek tapasztalta a legnagyobb hatékonyságát a függvények oktatásában?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

- Interaktív táblák és technológiai eszközök
- Gyakorlati példák és alkalmazások valós életből
- Csoportmunka vagy együttműködő tevékenységek

8. Hogyan értékelné az osztályon belüli diák-diák és tanár-diák együttműködést és kommunikációt a függvények oktatása során?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

- Nagyon hatékony volt, a diákok könnyen együttműködtek és kommunikáltak
- Inkább hatékony volt, de néhány csoportban problémák adódtak
- Vegyes, voltak hatékony csoportok és voltak, ahol nehézségek merültek fel
- Nem volt hatékony, a diákok többsége nehezen kommunikált vagy együttműködött

9. Hogyan értékelné az általános diákérdeklődést és motivációt a függvények témakörével kapcsolatban?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

- Magas volt, a diákok érdeklődtek és motiváltak voltak a témával kapcsolatban
- Közepes szintű volt, voltak érdeklődő diákok, de voltak, akik kevésbé motiváltak voltak
- Alacsony volt, a diákok túlnyomó része nem mutatott nagy érdeklődést vagy motivációt

10. Milyen mértékben tudták a diákok alkalmazni a függvényeket a valós életbeli problémák megoldásában az oktatás során?

*Soronként csak egy oválist jelöljön be.*

- Nagyon hatékonyan
- Hatékonyan, de voltak hiányosságok
- Nem voltak képesek hatékonyan alkalmazni a függvényeket
- Nem tanítottuk a függvények alkalmazását a valós életben

## Резюме

Метою дипломної роботи було розробити онлайн навчальний матеріал, який охоплює навчальний матеріал з функцій для середньої школи, враховуючи потреби вчителів та учнів. Навчальний матеріал містить детальний розгляд основних понять елементарних функцій та трансформацій функцій, а також інтерактивні елементи та візуалізації, щоб полегшити учням розуміння складніших математичних понять. Під час розробки я використовував платформу SITE123, яка дозволила створити прозорий та зручний вебсайт. Документи Google Slides містять детальні пояснення та приклади, тоді як ігри LearningApps інтерактивно допомагають у практиці навчального матеріалу. Графіки GeoGebra візуально ілюструють різні властивості та трансформації функцій, таким чином підтримуючи глибше розуміння учнями. В рамках дослідження я також підготував онлайн-опитування, яке вивчало труднощі в навчанні функцій з точки зору вчителів. Результати висвітлили практичні виклики та допомогли у спрямуванні розробки навчального матеріалу. Загалом, дипломна робота створила всебічний та інтерактивний онлайн-навчальний матеріал. Сподіваюсь, що результати стимулюватимуть подальший розвиток онлайн-освітніх інструментів та допоможуть подолати виклики у викладанні математики.

Сторінка доступна за наступним QR-кодом.



6.2. Рисунок. QR-код для доступу до сторінки

## **Nyilatkozat**

Alulírott, Géczi János, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

# Звіт про перевірку схожості тексту Oxsico

Назва документа:

Szakdolgozat\_Geczi\_Janos.pdf

Ким подано:

Пап Габрієлла

Дата перевірки:

2024-05-28 19:54:45

Дата звіту:

2024-05-28 20:23:35

Ким перевірено:

I + U + DB + P + DOI

Кількість сторінок:

56

Кількість слів:

15541

<b>Схожість 0%</b>	Збіг: <b>4 джерела</b>	Вилучено: <b>0 джерела</b>
Інтернет: <b>4 джерела</b>	DOI: <b>0 джерела</b>	База даних: <b>0 джерела</b>
<b>Перефразовування 0%</b>	Кількість: <b>0 джерела</b>	Перефразовано: <b>0 слова</b>
<b>Цитування 0%</b>	Цитування: <b>0</b>	Всього використано слів: <b>0</b>
<b>Включення 0%</b>	Кількість: <b>0 включення</b>	Всього використано слів: <b>0</b>
<b>Питання 0%</b>	Замінені символи: <b>0</b>	Інший сценарій: <b>58 слова</b>