ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28”лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України

Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний №___________

Кваліфікаційна робота

Методика вивчення означень, властивостей та ознак геометричних фігур у шкільному курсі геометрії

ЛЕВДАР НІКА ЕРНЕСТІВНА

Студентка IV-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2023

Науковий керівник: **Петечук Юлія Василівна**

(к.ф-м.н.)

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йожефівна**

(к. ф.-м. н)

Робота захищена на оцінку _________, «___» ____________ 202_ року

Протокол № ______ / 202_

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28"лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці ІІ

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота

Методика вивчення означень, властивостей та ознак геометричних фігур у шкільному курсі геометрії

Рівень вищої освіти: бакалавр

Виконавець: студентка IV-го курсу

Левдар Ніка Ернестівна

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Петечук Юлія Василівна**

(к.ф-м.н.)

Рецензент: **Тилищак Олександр Андрійович**

(к.ф-м.н.)

Берегове
2024

Зміст

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою ЗУІ
Протокол №2 від „28"лютого 2024 р.
Ф-КДМ-3

Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszék

A mértani alakzatok definícióinak, tulajdonságainak és jellegzetességeinek tanítási módszertana az iskolai mértan tananyagban

Szakdolgozat
Képzési szint: alapképzés

Készítette: Lődár Niki

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Petecsuk Júlia

(fiz.-mat. tud. doktora)

Recenzens: Tilistyák Sándor

(fiz.-mat. tud. doktora)

Beregszász – 2024

Tartalomjegyzék

Вступ

Вивчення геометрії є важливим елементом математичної освіти. Геометрія сприяє розвитку логічного мислення, абстрактних уявлень і здатності аналізувати та вирішувати різні проблеми. Ключовим аспектом вивчення геометрії є розуміння означення, властивостей і характеристик геометричних фігур. Ця тема відіграє одну з найважливіших ролей у розвитку математичної компетентності учнів у шкільному курсі геометрії.

В сьогоднішньому навчальному середовищі багато уваги приділяють методикам навчання, які є спрямованими на якісне освоєння шкільного матеріалу учнями.

В сучасному освітньому середовищі велика увага приділяється методикам навчання, спрямованим на ефективне засвоєння матеріалу учнями. Методика вивчення означень, властивостей і ознак геометричних фігур є одним із ключових елементів успішного навчання геометрії. Він включає різноманітність підходів, прийомів і методів, спрямованих на зрозумілу, цікаву та системну подачу матеріалу, а також важливу активну участь учнів у навчальному процесі на заняттях.

Актуальність теми полягає в тому, що геометрія є важливим елементом шкільної програми математики, а вивчення значення, властивостей і ознак геометричних фігур визначає основні основи розвитку математичного мислення та логічних здібностей учнів. Ретельно структурований підхід до цього процесу є запорукою успішного засвоєння матеріалу та створення стійких знань.

Останні роки свідчать про значний розвиток методик навчання та використання інтерактивних засобів у процесі вивчення геометрії. Проте, існують певні виклики, наприклад неоднаковий рівень підготовки учнів, різноманітність методик та підходів до навчання, а також поява нових вимог до освіти. Останні роки показали значний прогрес у методиці навчання та використанні інтерактивних засобів у вивченні геометрії. Проте, існують певні виклики, наприклад нерівномірний рівень підготовки учнів, різноманітність методик та підходів до навчання, а також поява нових вимог до освіти.

Тому дослідження методики вивчення означень, властивостей та ознак геометричних фігур у шкільному курсі геометрії дозволить вдосконалити існуючі підходи до навчання, розробити нові методи та стратегії, сприяти збагаченню навчального процесу та підвищенню якості математичної освіти. Крім того, таке дослідження може відкрити шлях до розробки інноваційних підходів до навчання геометрії, що відповідатимуть сучасним вимогам до освіти та сприятимуть підвищенню ефективності навчального процесу.

В даній роботі проаналізуємо і вдосконалимо методики вивчення означень, властивостей та ознак геометричних фігур у шкільному курсі геометрії з метою підвищення якості математичної освіти та ефективності навчального процесу.

Для написання роботи потрібно:

1. Дослідити геометричні фігури у шкільному курсі геометрії;
2. Дослідити властивості та ознаки геометричних фігур;
3. Визначити особливості застосування геометричних фігур на практиці;
4. Дослідити геометричні фігури. Точки і прямі;
5. Дослідити відрізок. Вимірювання відрізків;
6. Дослідити кут. Вимірювання кутів;
7. Дослідити систематизацію і корекцію знань з теми «Найпростіші геометричні фігури та їх властивості».

Методи дослідження включають аналіз навчальних програм, вивчення методичної літератури, спостереження за процесом навчання та експериментальне тестування нових підходів до викладання геометрії.

Bevezetés

A geometria tanulmányozása fontos eleme a matematikai oktatásnak. A geometria hozzájárul a logikus gondolkodás, az absztrakt képzelőerő és a különféle problémák elemzésének és megoldásának képességének fejlesztéséhez. A geometria tanulmányozásának kulcsfontosságú aspektusa a geometriai alakzatok meghatá rozásainak, tulajdonságainak és jellemzőinek megértése. Ez a téma az egyik legfontosabb szerepet játszik a diákok matematikai kompetenciájának fejlődésében az iskolai
geometria tanfolyamon.

A mai oktatási környezetben nagy figyelmet fordítanak azokra a módszerekre, amelyek célja az iskolai anyag hatékony elsajátítása a diákok által. A geometriai alakzatok meghatározásainak,
tulajdonságainak és jellemzőinek tanulmányozásának módszertana az egyik kulcseleme a geometria sikeres tanulásának. Ez magában foglalja a különböző megközelítéseket, technikákat és módszereket, amelyek célja az anyag érthető, érdekes és rendszeres bemutatása, valamint a diákok aktív részvételének ösztönzése az órákon.

A téma aktualitása abban rejlik, hogy a geometria az iskolai matematika tantervének fontos eleme, és a geometriai alakzatok meghatározásainak, tulajdon ságainak és jellemzőinek tanulmányozása meghatározza a matematikai gondolkodás és a logikai képességek fejlődésének alapjait a diákok körében. Egy alaposan strukturált megközelítés ennek a folyamatnak a sikeres anyagelsajátításának és az alapos tudás megszerzésének záloga.

Az elmúlt évek jelentős fejlődést mutattak az oktatási módszertanban és az interaktív eszközök használatában a geometria tanulmányozása során. Azonban vannak bizonyos kihívások, például a diákok előkészítésének egyenlőtlen szintje, a különböző oktatási módszerek és megközelítések sokfélesége, valamint az oktatásra vonatkozó új követelmények megjelenése.

Ezért a geometriai alakzatok meghatározásainak, tulajdonságainak és jellemzőinek iskolai geometria tanfolyamon történő tanulmányozásának módszertanának kutatása lehetővé teszi a meglévő oktatási megközelítések tökéletesítését, új módszerek és stratégiák kidolgozását, a tanulási folyamat gazdagítását és a matematikai oktatás minőségének javítását. Ezenkívül ez a kutatás utat nyithat az innovatív oktatási megközelítések kidolgozásához a geometria tanításában, amelyek megfelelnek a
modern oktatási követelményeknek és hozzájárulnak a tanulási folyamat hatékonyságának növeléséhez.

Ebben a munkában elemezzük és tökéletesítjük a geometriai alakzatok meghatározásainak,
tulajdonságainak és jellemzőinek iskolai geometria tanfolyamon történő tanulmányozásának módszertanát, hogy javítsuk a matematikai oktatás minőségét

és a tanulási folyamat hatékonyságát.

A munka megírásához szükséges:

1. A geometriai alakzatok tanulmányozása az iskolai geometria tanfolyamon;
2. A geometriai alakzatok tulajdonságainak és jellemzőinek tanulmányozása;
3. A geometriai alakzatok gyakorlati alkalmazásának sajátosságainak meghatározása;
4. A geometriai alakzatok tanulmányozása. Pontok és egyenesek;
5. A szakasz és a szakaszok mérése; a szög és a szögek mérése tanulmányozása;
6. A "legegyszerűbb geometriai alakzatok és azok tulajdonságai"témakör ismereteinek rendszerezése és korrekciója.

A kutatási módszerek magukban foglalják a tantervek elemzését, a módszertani irodalom tanulmányozását, a tanulási folyamat megfigyelését és az új geometriaoktatási megközelítések kísérleti tesztelését.

Розділ 1

Теоретичні відомості про геометричні фігури у шкільному курсі геометрії.

1.1 Геометричні фігури у шкільному курсі геометрії.

У базовій середній школі геометрія вивчається системно, враховуючи специфіку кожного класу. Починаючи з п'ятого класу, цей предмет відноситься в курс математики, акцентуючи більше увагу на геометричні концепції. У 7-9 класах, геометрія може вивчатися окремо як предмет або в складі інтегрованого курсу.

Зміст навчального матеріалу у геометрії спирається на Державний стандарт базової середньої освіти та на затверджені навчальні програми.Модельні програми та програми з відповідним правилом Міністерства освіти і науки можуть мати відмінності в деталях, але вони спрямовані на вироблення учнями однакових ключових компетентностей.

Вибір певної навчальної програми передбачає аналіз їх спільних рис і особливостей відповідно до потреб та можливостей учнів. В основному вчитель обирає одну програму на весь курс навчання відповідно до вимог освітнього процесу.

Така система навчання забезпечує стабільність і одноманітність у вивченні учнями базової середньої школи геометрії та дозволяє вчителю ефективно організувати навчальний процес.

У базовій середній школі геометрія вивчається крок за кроком, розкриваючи перед учнями широкий спектр геометричних понять та властивостей фігур.

У п'ятому класі, основну увагу приділяють вивченню геометричних фігур і величин. Учні вивчають відрізок, пряму, промінь, а також різноманітні кути та їхні властивості. Починають знайомство з трикутниками, прямокутниками, квадратами, а також з об'ємом куба та прямокутного паралелепіпеда.

У шостому класі, досліджуються геометричні фігури і величини в більшій глибині. Вивчають круг та його характеристики, а також властивості циліндра, конуса, та кулі. Також ознайомлюються з поняттям перпендикулярності та паралельності прямих.

З сьомого по дев'ятий клас, вивчають планіметрію, але залежно від програми навчального закладу, це може бути частиною курсу математики або окремою дисципліною. Наприклад, в сьомому класі учні вивчають елементарні геометричні фігури, взаємне розміщення прямих на площині, а також різноманітні побудови з використанням кола і круга.

Восьмий клас більш детально вивчає чотирикутники, подібність трикутників, а також многокутники та їхні властивості. Для дев'ятого класу вже додатково передбачається вивчення координат і векторів на площині, розв'язування трикутників, а також геометричні перетворення площини.

Програма навчання геометрії включає окремі теми стереометрії, які допомагають учням краще розуміти просторові об'єкти та їхні властивості. Це може підготувати учнів до подальшого вивчення математики на професійно-технічному рівні.

Геометричні фігури в шкільному курсі геометрії відіграють ключову роль, відображаючи різноманіття форм та властивостей, які вивчають учні протягом навчання. Ось деякі з найпоширеніших геометричних фігур, які зустрічаються у шкільному курсі геометрії[4].

Найпоширеніші геометричні фігури, які зустрічаються у шкільному курсі геометрії[10].

№	Назва	Опис
1	Прямокутник	Фігура з чотирма прямими кутами та протилежними сторонами, які паралельні та рівні.
2	Квадрат	Особливий випадок прямокутника, у якого всі сторони рівні.
3	Трикутник	Фігура з трьома сторонами та трьома кутами.
4	Коло	Сукупність всіх точок, розташованих на відстані, що однакова від центру.
5	Куля	Тризначна фігура, утворена всіма точками, розташованими на відстані, що однакова від центру.
6	Циліндр	Тіло з двома паралельними круглими основами, обмежене поверхнею.
7	Конус	Тіло з однією круглою основою та точкою, яка не лежить у площині основи.
8	Піраміда	Фігура з однією основою та бічними гранями, які спрямовані до одного вершини.

У шкільному курсі геометрії найважливішими геометричними фігурами є прямокутник, квадрат, трикутник, коло, куля, циліндр, конус і піраміда. Ці фігури мають різні властивості та характеристики. Їхнє вивчення допомагає учням розвивати розумові здібності та абстрактне мислення. Важливо вивчати кожну з цих фігур, оскільки це є складовою для правильного розв'язання геометричних задач.

Ці геометричні фігури вивчаються з різних точок зору, включаючи їхні властивості, формули для обчислення периметрів та площ, а також методи побудови. Вивчення цих фігур допомагає у розв'язуванні задач.

1.2 Властивості та ознаки геометричних фігур

- Прямокутник - це геометрична фігура, яка має чотири прямі кути та протилежні сторони паралельні та рівні одна одній, тобто це паралелограм у якого всі кути є прямими[11]. Ось деякі важливі властивості та ознаки прямокутника, які потрібно освоїти на уроках геометрії.[10].

1. Прямі кути: У прямокутнику всі кути є прямими, тобто вони мають $90°$.

2. Протилежні сторони: Протилежні сторони прямокутника паралельні одна одній та рівні у довжині.

3. Рівність діагоналей: Діагоналі прямокутника мають однакову довжину, і вони ділять його на два рівних прямокутних трикутники.

4. Сума кутів: Сума всіх внутрішніх кутів прямокутника завжди дорівнює $360°$.

5. Довжина та ширина: Прямокутник характеризується довжиною і шириною. Довжина - це більша з двох протилежних сторін, а ширина - менша.

6. Периметр: Периметр прямокутника обчислюється як сума всіх його сторін. Для прямокутника формула периметру має вигляд $P = 2(a + b)$, де a- довжина, b - ширина.

7. Площа: Площа прямокутника обчислюється як добуток його довжини і ширини. Формула для обчислення площі прямокутника має вигляд $S = a \cdot b$[10].

Ці властивості і ознаки прямокутника допомагають в розв'язанні різноманітних задач і використовуються в реальних життєвих ситуаціях, де потрібно працювати з прямокутними формами і об'єктами.

- Квадрат - це особливий випадок прямокутника, у якого всі сторони рівні. Ось деякі важливі властивості та ознаки квадрата[10].

1. Рівні сторони. У квадрата всі чотири сторони рівні одна одній. Це означає, що усі внутрішні кути квадрата також є прямими.

2. Рівність діагоналей. Діагоналі квадрата мають однакову довжину. Кожна діагональ ділить квадрат на два рівних прямокутних трикутники.

3. Прямі кути. У квадрата всі кути є прямими, тобто вони мають по $90°$.

4. Рівність півпериметрів. Квадрат має рівні півпериметри, тобто сума довжин будь-якої пари протилежних сторін квадрата однакова.

5. Рівність площі і периметру. У квадрата площа області, яку він займає, дорівнює квадрату його сторони. Також периметр квадрата (сума всіх його сторін) дорівнює чотирикратному значенню будь-якої сторони.

6. Діагоналі квадрата. Діагоналі квадрата є взаємно перпендикулярними і ділять його на чотири рівні прямокутних трикутники[10].

- Трикутник - це геометрична фігура з трьома сторонами та трьома кутами. Ось деякі важливі властивості та ознаки трикутника[10].

1. Сума кутів. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника завжди дорівнює 180°. Це властивість, яка залишається сталою для будь-якого трикутника, незалежно від його розміру або форми.

2. Властивість бічних сторін. Сума будь-яких двох сторін трикутника завжди більша за довжину третьої сторони. Це нерівність відома як нерівність трикутника.

3. Трикутникові нерівності. У кожному трикутнику сума довжин будь-яких двох сторін завжди більша за довжину третьої сторони. Це стосується кожної пари сторін.

4. Правильність. Трикутник називається правильним, якщо всі його кути та всі його сторони рівні. Півпериметр. Півпериметр трикутника - це половина суми довжин його сторін. Він використовується для обчислення радіусу вписаного кола трикутника.

5. Співвідношення сторін. У деяких спеціальних трикутників, таких як прямокутники трикутники, співвідношення між їх сторонами мають визначені властивості, наприклад, взаємозв'язок між катетами та гіпотенузою.

6. Висота та медіана. Висота трикутника - це перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до протилежної сторони. Медіана - це лінія, яка з'єднує вершину трикутника з серединою протилежної сторони.

7. Площа. Площа трикутника може бути обчислена за допомогою формули Герона або використовуючи висоту та довжину основи[10].

Властивості та ознаки трикутника є фундаментальними для розв'язання задач у геометрії та застосуванні їх в різних областях науки та технології.

- Коло — це геометричне місце точок площини, відстань від яких до заданої точки, що називається центром кола, є сталою величиною і дорівнює радіусу кола. Коло є найпростішою замкненою фігурою[9].

Ось властивості та ознаки кола:

1. Центр і радіус. Коло визначається центром і радіусом. Центр - це точка всередині кола, а радіус - це відстань від центру до будь-якої точки кола. Всі точки на колі розташовані на однаковій відстані від центру.

2. Діаметр. Діаметр кола - це відрізок, який проходить через центр кола і має кінці на колі. Діаметр дорівнює двом радіусам.

3. Довжина кола. Довжина кола обчислюється за формулою $L = 2\Pi r$, де r - радіус.

4. Площа кола. Площа кола обчислюється за формулою $S = 2\Pi r$, де r - радіус. Це єдиний параметр, який потрібно знати для визначення площі кола.

5. Теорема про кільце. Якщо два кола мають спільний центр, то площа кільця, утвореного зовнішнім колом і внутрішнім колом, дорівнює різниці площ цих колів.

6. Колінеарність радіуса і дотичної. Радіус, проведений до точки дотику дотичної до кола, є перпендикуляром до дотичної.

7. Колінеарність центру, середини дуги і радіуса: Центр кола, середина будь-якої дуги і радіус, проведений до початку та кінця дуги, є колінеарними.

8. Властивість дотичної. Дотична до кола в точці дотику є перпендикуляром до радіуса, проведеного до центру кола[9].

- Куля- це тіло, утворене обертанням круга навколо свого діаметру[12].

Тепер розглянемо властивості та ознаки кулі:

1. Центр і радіус. Куля визначається центром і радіусом. Центр - це точка в середині кулі, а радіус - це відстань від центру до будь-якої точки на поверхні кулі.

2. Діаметр. Діаметр кулі - це відрізок, який проходить через центр кулі і має кінці на поверхні кулі. Діаметр дорівнює двом радіусам.

3. Об'єм. Об'єм кулі обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\Pi r^3$, де r - радіус кулі.

4. Площа поверхні: Площа поверхні кулі обчислюється за формулою $S = 4\Pi r^2$, де r - радіус кулі.

5. Теорема про кулю. Усяка точка на поверхні кулі знаходиться на однаковій відстані від центру кулі.

6. Перетин куль. Перетин двох куль може бути порожнім, точковим (якщо вони мають спільну точку) або круговим (якщо вони перетинаються, утворюючи коло).

7. Куля як обмеження. Куля є найбільшим обмеженим об'ємом, який може бути обмежений за допомогою певної поверхні.

8. Пов'язані геометричні фігури. Куля ізотропна, тобто всі напрямки є однаковими, і вона має максимальний об'єм серед усіх фігур з однаковими поверхнями[12].

Властивості та ознаки кулі є важливими для розуміння геометрії простору, фізики, а також вони застосовуються у багатьох галузях науки та інженерії, включаючи архітектуру, медицину та астрономію.

- Циліндр

Тепер розглянемо властивості та ознаки циліндра[7]:

1. Форма. Циліндр має форму тіла, яке складається з двох паралельних круглих основ і циліндричної бічної поверхні.

2. Основи. Дві круглі основи циліндра розташовані паралельно одна одній.

3. Висота. Висота циліндра - це відстань між його двома основами, яка перпендикулярна до площини цих основ.

4. Діаметр. Діаметр кожної з основ циліндра - це відрізок, який проходить через центр основи і має кінці на колі цієї основи.

5. Радіус. Радіус кожної з основ циліндра - це відстань від центра основи до її краю.

6. Об'єм. Об'єм циліндра можна обчислити за формулою $V = \Pi r^2 h$, де r - радіус основи, h - висота циліндра.

7. Площа поверхні. Площа поверхні циліндра складається з площі двох основ і площі бічної поверхні. Площа бічної поверхні обчислюється за формулою Sбіч$= 2\Pi rh$, де r - радіус основи, h - висота циліндра.

8. Перетин з площиною. Перетин циліндра з площиною може бути кругом, якщо площина паралельна до обох основ, або еліпсом, якщо площина не паралельна до основ[7].

Приклади застосування. Циліндри зустрічаються у різних контекстах, таких як великі зберігальні ємності (бочки), трубопроводи, стовпи тощо.

- Конус- геометричне тіло, отримане шляхом об'єднання всіх променів, що виходять з однієї точки — вершини конуса, і таких що проходять через довільну плоску криву.

Властивості та ознаки конуса[12]:

1. Форма. Конус має форму тіла, яке складається з однієї круглої основи та бічної поверхні, яка збільшується від центра основи до вершини.

2. Основа. Основа конуса - це кругла площина, яка обмежує нижню частину конуса.

3. Вершина. Вершина конуса - це точка, з якої виходять всі генератриси (лінії, що сполучають вершину з точками на колі основи).

4. Висота. Висота конуса - це відстань від вершини до площини основи, яка перпендикулярна до цієї площини.

5. Діаметр. Діаметр основи конуса - це відрізок, який проходить через центр основи та має кінці на колі цієї основи.

6. Радіус. Радіус основи конуса - це відстань від центра основи до її краю. Об'єм. Об'єм конуса можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{3}\Pi r^2 h$, де r - радіус основи, h - висота конуса.

7. Площа поверхні: Площа поверхні конуса складається з площі основи та площі бічної поверхні. Площа бічної поверхні обчислюється за формулою Sбіч$= \Pi rl$, де r - радіус основи, l - довжина (відстань від вершини до точки на краї кола основи).

8. Перетин з площиною. Перетин конуса з площиною може бути колом, якщо площина паралельна до основи, або еліпсом, якщо площина не паралельна до основи.

- Піраміда - це геометричне тіло, у якого основа є полігоном, а бічні сторони збігаються у вершині.

Властивості та ознаки піраміди[7]:

1. Основа. Основа піраміди - це полігон, який обмежує нижню частину піраміди.
2. Вершина.Вершина піраміди - це точка, з якої виходять всі бічні ребра.
3. Висота. Висота піраміди - це відстань від вершини до площини основи, яка перпендикулярна до цієї площини.
4. Бічні ребра. Бічні ребра піраміди - це ребра, які сполучають вершину з кожним кутом основи.
5. Бічні грані. Бічні грані піраміди - це трикутники, які утворюються між вершиною та кожним кутом основи.
6. Об'єм. Об'єм піраміди можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$, де Sосн - площа основи, h - висота піраміди.
7. Площа поверхні. Площа поверхні піраміди складається з площі основи та площі бічних граней. Площу бічної поверхні можна обчислити як суму площі всіх бокових трикутників[7].

Приклади застосування. Піраміди використовуються у будівництві, наприклад, пірамідальні дахи; у геометрічних моделях, у геодезії для визначення висоти підйому, у графіці та дизайні для створення архітектурних форм тощо.

1.3 Особливості застосування геометричних фігур на практиці.

Навчання геометрії, особливо в контексті прикладної спрямованості, вимагає учителям зосередитися на розвитку учнівських навичок у розв'язуванні практичних задач. Ці завдання, що випливають з реальних ситуацій і вимагають використання математичних методів, часто стають викликом для учнів. Для їх вирішення потрібні не лише математичні знання, але й вміння застосовувати їх у практичних ситуаціях [6].

Основою навчання геометрії є три основні етапи:

1. кодування інформації;
2. формулювання та розв'язання математичних задач;
3. декодування результатів, та вміння застосовувати їх в подальшому у конкретних ситуаціях.

Тобто, по-перше учні повинні засвоїти вміння уявляти реальні ситуації в математичних термінах. Після кодування проблеми учні повинні сформулювати відповідну задачу та застосовувати відповідні методи і алгоритми для її вирішення. Наприклад, обчислення, аналіз даних або побудова моделей. Останній етап полягає в інтерпретуванні отриманих матиматичних результатів та використати для вирішення реальної проблеми.

Важливо на уроках геометрії, щоб учні самостійно розкривали математичні факти, тому потрібно логічно упорядковувати навчальний матеріал, надавати можливість використовувати отримані знання на практиці.

Такий підхід дозволяє учням краще зрозуміти важливість математики в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності. Крім того, це допомагає зрозуміти, що математичний факт може мати багато застосувань у різних ситуаціях, а також те, що різні практичні проблеми можна звести до математичної моделі. Такий підхід до навчання математики не тільки розширює уявлення учнів про предмет, а й сприяє кращому засвоєнню матеріалу та підвищує мотивацію до вивчення предмету[6].

Геометричні задачі в шкільному курсі математики не лише становлять важливу складову, але й є моделями для розв'язання практичних завдань.В основі методики навчання лежить взаємозалежність геометричних і практичних задач. Розв'язування геометричних задач має бути пов'язане з відповідними практичними завданнями, що сприяє формуванню комплексу математичних і практичних умінь. Перехід від геометричних задач до практичних і навпаки вважається важливим елементом навчального процесу. Такий подвійний підхід дозволяє учням не лише застосовувати геометричні знання на практиці, а й розуміти зв'язок між абстрактною математикою та реальним життям.

Приклад пояснення елементарних фігур та застосування на практиці

Елементарні фігури в геометрії	**Елементарні фігури в житті**
Точки і прямі	
Точки А, В, Д. Пряма а або АВ. Властивість прямої Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну. Властивість розміщення точок на прямій З трьох будь-яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.	Точки: кілочки, віхи, споруди, будівлі, рослини, міста, зображені на карті, розмірами яких можна знехтувати тощо. Прямі: магістралі, канали, вулиці, залізничні колії, шириною яких можна знехтувати тощо. Властивість прямої Через будь-які два об'єкти можна провісити пряму, і тільки одну. Властивість розміщення об'єктів на прямій З трьох будь-яких об'єктів, що розміщені на прямій, один і тільки один лежить між двома іншими.

Рис. 1.1: Точки і прямі в повсякденному житті

Відрізки	
Відрізок AB. Властивості вимірювання відрізків Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою. Способи діяльності 1. Щоб встановити, чи лежить точка C між точками A і B, перевірте правильність рівності AB = AC + CB. 2. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: AB = AC + CB, або AC = AB + BC, або BC = BA + AC.	Відрізки: довжини, висоти предметів, відстані між об'єктами на поверхні землі (населеними пунктами, спорудами, тощо). Властивості вимірювання відрізків Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-яким об'єктом. Способи діяльності 1. Щоб встановити, чи лежить об'єкт C між об'єктами A і B, перевірте правильність рівності AB = AC + CB. 2. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три об'єкти A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: AB = AC + CB, або AC = AB + BC, або BC = BA + AC.

Рис. 1.2: Відрізки у повсякденному житті

Пропонуються простіші вправи на використання властивостей елементарних фігур на практиці. Наприклад[2]:

- ослідіть предмети навколишнього середовища, які можна розглядати як точки, прямі лінії, відрізки або кути.
- Розгляньте методику проведення прямої за допомогою відмічених гілок або кілків.
- Розв'яжіть завдання з визначенням точки перетину двох прямих, заданих за допомогою кілочків. Розгляньте два можливих випадки розміщення точок.
- Проаналізуйте твердження про властивість прямої і визначте, чи є воно правильним:

А.Через будь-які два об'єкти можна провести нескінченну кількість прямих.
Б. Через будь-які два об'єкти можна провести лише одну пряму.
В. Якщо відомі три об'єкти, завжди можна провести через них лише одну пряму.

Підхід, що передбачає розв'язання спочатку геометричних задач, а потім їх використання для розв'язання задач практичного змісту, відображає важливу взаємозв'язаність між математикою та реальним життям. Ось кілька пар таких задач, де перша задача є геометричною, а друга – практичною[12].

1. (Геометрія) Питання про відстані між точками на прямій лінії. (Практика) Визначення відстаней між школами, розташованими на одній лінії.
2. (Геометрія) Властивості діаметра і перпендикулярної хорди кола. (Практика) Визначення центру металевої деталі, використовуючи геометричні принципи.
3. (Геометрія) Використання властивостей прямокутного трикутника для знаходження катетів. (Практика) Застосування знань про прямокутні трикутники для вимірювання реальних відстаней та розмірів.

Такий підхід до вирішення геометричних і практичних завдань дозволяє учням не лише розвивати геометричні навички, а й застосовувати їх у практичних ситуаціях, що збагачує їхнє розуміння матеріалу та підготовлює до розв'язання реальних проблем.

Перехід від геометричної задачі до способу використання та від нього до практичної задачі є важливою стратегією в навчанні, оскільки сприяє глибшому розумінню матеріалу та його застосуванню на практиці. Наприклад, розглянемо тему "Прямокутник":

(Г). Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні і дві протилежні сторони рівні й паралельні, то такий чотирикутник - прямокутник.

(СВ). Учні вивчають способи діяльності для встановлення прямокутника та паралелограма, використовуючи ознаки та означення.

(П). Учень перевіряє правильність рамки прямокутної форми, порівнюючи рівність її діагоналей. Чи цього достатньо для перевірки правильності конструкції?

Цей підхід допомагає учням засвоювати не лише математичні концепції, але й вміння застосовувати їх у різних практичних ситуаціях, розвиваючи їх критичне мислення та аналітичні навички.

Розглянемо практичні ситуації, для розв'язання яких найчастіше використовується геометрична модель теми "Коло і круг. Геометричне місце точок"[2].

1. Визначення центра предметів, що мають форму круга: Наприклад, виготовлення столу із круглою стільницею, де необхідно знайти центр для встановлення ніжки.

2. Обчислення довжини кола і площі предметів, що мають форму круга за їх радіусом і діаметром.

3. Знаходження висоти, глибини, відстані: Наприклад, визначення глибини криниці за її діаметром.

4. Облаштування предметів на місцевості (клумб, ділянок землі, ковзанок тощо), що мають форму круга: Наприклад, розміщення квіткової клумби на газоні.

5. Знаходження місця для об'єкта (автобусної зупинки, залізничної станції, криниці, мосту, бази відпочинку тощо), де йдеться про рівність певних відстаней: Наприклад, визначення місця для облаштування автобусної зупинки на вулиці з урахуванням рівності відстаней до популяційних центрів[2].

Отже, практичні ситуації, які зустрічаються у повсякденному житті, можуть бути успішно розв'язані шляхом застосування геометричних моделей та відповідних методів розв'язування. Використовуючи такі завдання учень буде розуміти важливість геометрії у повсякденному житті.

Розділ 2

Завдання з геометричними фігурами та використання їхніх властивостей на уроках геометрії

2.1 Найпростіші геометричні фігури в шкільному курсі геометрії.

- Точка і пряма

Основне завдання теми "Точки і прямі"це створити уявлення учнів про предмет вивчення геометрії, спираючись на отримані знання в попередніх класах. Узагальнити знання учнів щодо видів геометричних фігур і виділити з них найпростіші та найважливіші. Узагальнивши практичні знання і вміння учнів, сформулювати властивості приналежності точок і прямих та властивості взаємного розміщення точок на прямій.

Завдання 1 *Накресліть пряму і позначте кілька точок.*

Розв'язок.

Пряма складається з точок. У геометрії пряма ідеально рівна і нескінченна в обидва боки. Точки позначають великим латинськими буквами A,B,C,. . . , а прямі малими – a, в, c,. . . .

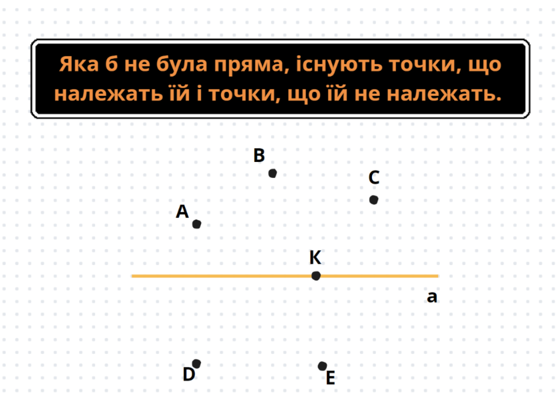

Рис. 2.1:

Додаткові запитання

Яка з цих точок лежить на прямій а?(точка К)

В цьому випадку кажуть, що пряма проходить через точку К і символічно записують $K \in a$ і читається « точка К належить прямій а » . Які з цих точок не належать прямій а?(A,B,C,D,E) В цьому випадку записують $A \notin a$, $B \in a$, $C \notin a$, $D \notin a$, $E \notin a$.

Отже, існують точки, що належать прямій а, і точки, що їй не належать. Це стосується не тільки даної прямої а, але й будь-якої іншої прямої. За допомогою цього завдання ми сформулювали першу властивість розміщення точок на прямій.

Завдання 2 *Позначте точку A і проведіть через цю точку пряму. Чи можна провести ще одну пряму через точку A? Проведіть її.*

Розв'язок

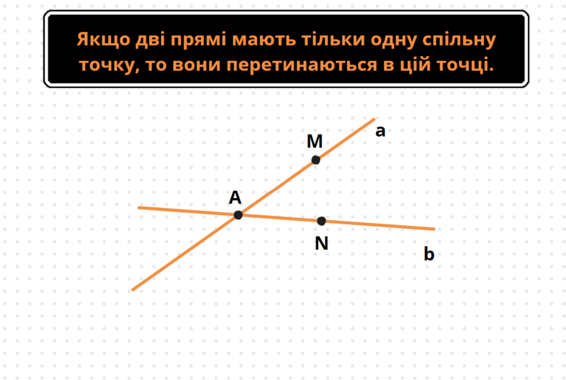

Рис. 2.2:

Додаткові запитання

Скільки прямих можна провести через точку А?(безліч).Позначте проведені прямі буквами а і в. На прямій а позначте точку М, а на прямій в - точку N . Якій прямій належать точки А і М? А точки А і N? В цьому випадку кажуть що пряма а проходить через точки А і М, і позначають її АМ , а пряма в – через точки А і N, і позначають AN. Оскільки точка А є спільною для обох прямих , то кажуть, що ці прямі перетинаються в точці А. Отже, якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, то вони перетинаються у цій точці

Завдання 3 *Позначте дві точки A і B і проведіть через них пряму.*

Розв'язання

Зрозуміло, що таку пряму можна провести завжди і ця пряма єдина, тобто має місце друга властивість розміщення точок на прямій.

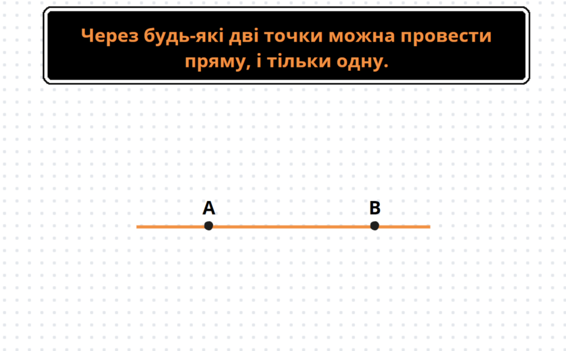

Рис. 2.3:

Завдання 4 *Позначте три точки M, N, P таким чином, як показано на малюнку. Чи можна через ці точки провести пряму?*

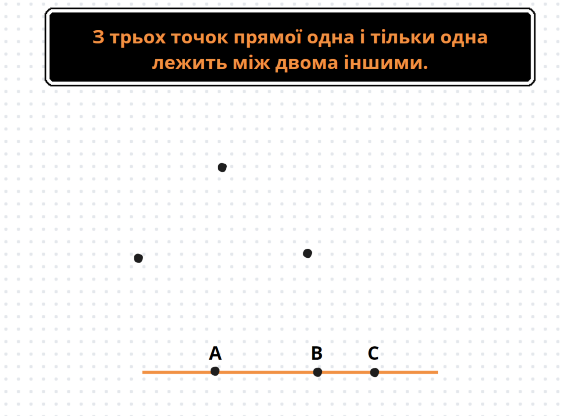

Рис. 2.4:

Розв'язання

Не можна провести через ці три точки пряму.В цьому випадку кажуть, що точки не лежать на одній прямій. На малюнку нижче показано правильно. В цьому випадку кажуть, що точки лежать на одній прямій, причому точка B – між точками A і C. Зрозуміло, якщо три точки лежать на прямій, то одна і тільки одна лежить між двома іншими. Таким чином ,ми сформулювали третю властивість розміщення точок на прямій

Завдання 5 *Накресліть пряму a і позначте на ній точку A. На скільки частин розділяє пряму ця точка?*

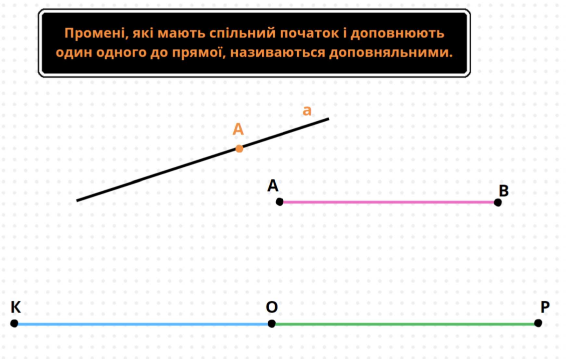

Рис. 2.5:

Розв'язання

Точка розділяє пряму на дві частини. Кожну з цих частин разом з точкою А називають променем, що виходить з точки А. Точку А називають початком променя. Якщо говорять «промінь АВ», то мають на увазі промінь з початком у точці А. Розглянемо промені ОК і ОР. З якої точки виходять обидва промені? Яку фігуру утворюють ці промені (пряму). В цьому випадку кажуть , що промені доповнюють один одного до прямої , а тому називаються доповняльними.

Завдання 6 *A, B, C - точки, які лежать на одній прямій. Відомо, що* $AB = 4,3см$, $AC = 7,5см$, $BC = 3,2см$. *Чи може точка A лежати між точками B і C? Якщо ні, то яка з точок буде лежати між двома іншими?*

Розв'язання

Оскільки A, B, C точки лежать на одній прямій, то вони утворюють відрізок. За умовою знаємо довжини відрізків AB, BC і AC. Так як $AB + BC = AC$, то отримаємо, що B лежить між точками A і C.

Завдання 7 *Чи можуть точки A, B і C лежати на одній прямій, якщо* $AB = 1,8м$, $AC = 1,3м$, $BC = 3м$*?[8]*

Не можуть оскільки $AB + BC > AC$. Усні завдання.
1)Розгляньте рисунок і дайте відповіді на запитання.

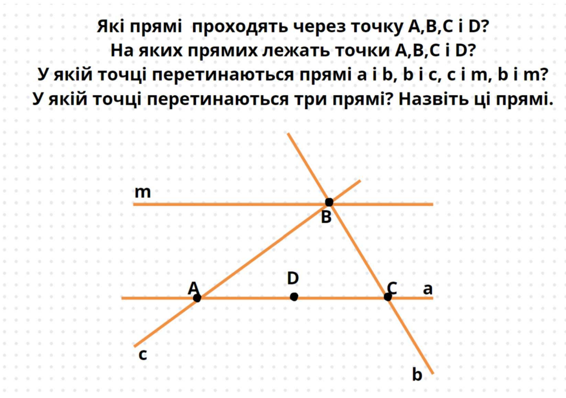

Рис. 2.6:

- Відрізок. Вимірювання відрізків.

Метою уроків по темі "Відрізок"є домогтися засвоєння учнями змісту понять "відрізок "внутрішня точка відрізка "кінці відрізка "перетин відрізків "довжина відрізка"та змісту властивості вимірювання відрізків.Виробити в учнів навички розпізнавання відрізків на готовому рисунку та вміння створювати рисунки на основі описаних ситуацій. Учні повинні навчитися пояснювати особливості розміщення точок, використовуючи вивчені поняття. Відповідно до умови задачі, вони мають записувати властивості вимірювання відрізків та використовувати ці записи для розв'язування задач.

Завдання 8 *Запиши назви всіх відрізків, які зображено на малюнку[5].*

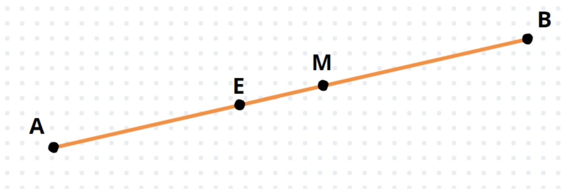

Рис. 2.7:

Відповідь: AE, EM, MB, AM, AB, EB.

Завдання 9 *Точка F лежить на відрізку AB. Якою буде довжина відрізка[5]:*

1. AB, якщо $AF = 10$см, $FB = 3$см;
2. AF, якщо $AB = 9$см, $FB = 7$см.

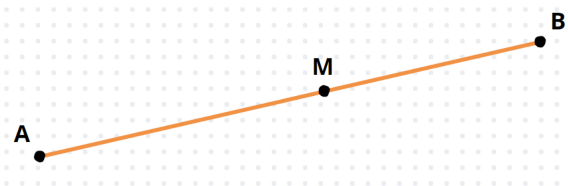

Рис. 2.8:

Відповідь: 1)13; 2)2.

Завдання 10 *На малюнку $PL = 56$, PE у 4 рази коротший від PL. Знайти довжину відрізка EL[5].*

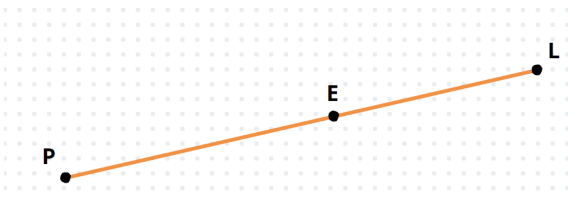

Рис. 2.9:

Завдання 11 *Точку M позначено на відрізку AB. За даними таблиці знайдіть невідомі величини.*

AM	10см	4см	
MB	12см		14см
AB		15см	30см

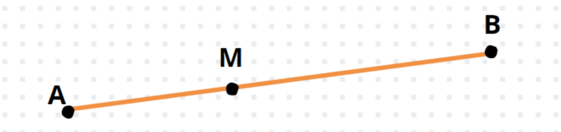

Рис. 2.10:

Розв’язання

1. $AB = 22$см.
2. $MB = 11$см.
3. $AM = 16$см.

Завдання 12 *Знайти довжину x за даними на малюнках[15].*

Рис. 2.11:

Розв’язок

1. $BC + CD = BD$

   $x + x = 10$

   $2x = 10$

   $x = 5$

   $BC = 5$см

   $CD = 5$см

2. $MA + AB + BC + CN = MN$

   $x + x + 5 + x = 14$

   $3x + 5 = 14$

   $3x = 9$

$x = 3$

$MA = 3$см

$AB = 3$см

$CN = 3$см

2.2 Чотирикутники в шкільному курсі геометрії.

Геометричні фігури в загальних школах, як і більшість інших тем вивчають поступово. Тобто з першого по четвертий клас вчитель ознайомлює учнів з геометричними фігурами такими як: трикутник, чотирикутник серед них тільки прямокутник, квадрат , а також з многокутником. У п'ятому по шостий клас вводиться поняття прямокутного паралелепіпеда, куба та піраміди. У сьомому класі широко вивчаються найпростіші геометричні фігури- точка та пряма, відрізок, промінь, кут та їхні властивості. У восьмому класі вже вивчають площі всіх геометричних фігур та розв'язують завдання з їх використанням.

Для початку потрібно з учнями повторити вже відому їм фігуру- трикутник. Нагадати які бувають види трикутників, їхні властивості та формули площ. По-перше введемо поняття чотирикутника, намалюємо та позначимо його елементи.

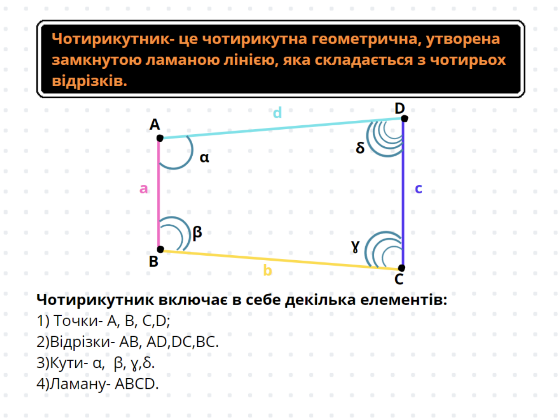

Рис. 2.12:

Основні означення, які потрібно ввести на уроках геометрії:

Означення 1 *Точки A, B, C, D в чотирикутнику позначають його вершини. Відрізки AB, AD, DC, BC називають сторонами чотирикутника або ж його гранями[17].*

Вершини чотирикутника завжди позначають великими латинськими літерами, послідовністю вершине позначають чотирикутник[17.

Сторони чотирикутника позначаються малими латинськими буквами. Або сторони чотирикутника можна позначити у вигляді відрізків. $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$. Кути позначають малими грецькими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Також $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle BCD, \delta = \angle ADC$[17].

Означення 2 *Діагональ чотирикутника- це відрізок,що з'єднує протилежні вершини чотирикутника[17].*

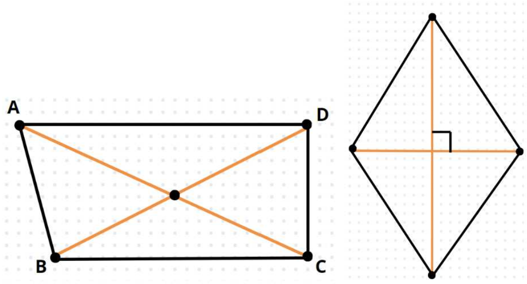

Рис. 2.13:

У кожного чотирикутника є дві діагоналі. На малюнку відрізки AC і BD є діагоналями чотирикутника $ABCD$. Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються під прямим кутом, то цей чотирикутник називають ортодіагональним[17.

Означення 3 *Бісектриса чотирикутника- це промінь, що розділяє кут вершини на два рівних кута[17].*

$\alpha = \beta$

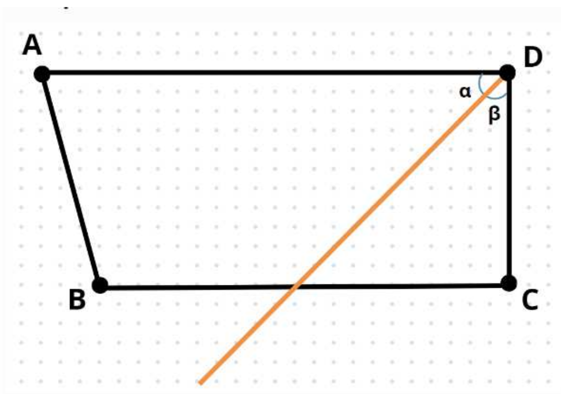

Рис. 2.14:

Означення 4 *Середня лінія чотирикутника - це відрізок, що з'єднує протилежні сторони через їхні середини[17].*

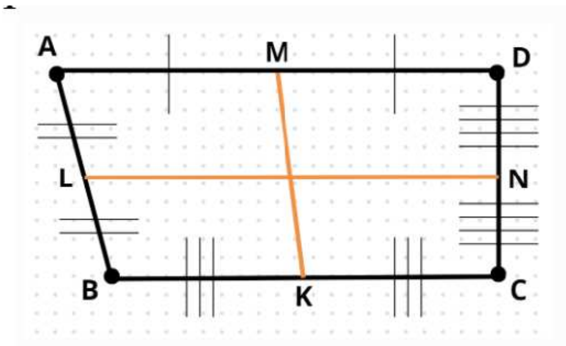

Рис. 2.15:

$AM = MD$
$DN = NC$
$BK = KC$
$AL = LB$
Опуклі та неопуклі чотирикутники

Означення 5 *Опуклий чотирикутник- це чотирикутник, у якого всі його кути опуклі(тобто від* $0°$ *до* $180°$*, не включаючи ці значення)[17].*

Сума всіх кутів опуклого чотирикутника завжди дорівнює $360°$*.*

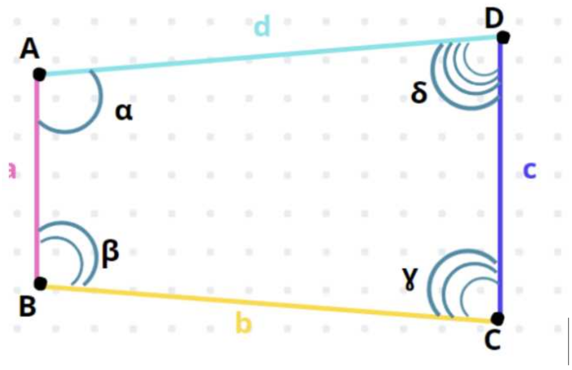

Рис. 2.16:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta = (0° - 180°)$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Означення 6 *Неопуклий чотирикутник- це чотирикутник, у якого один кут увігнутий (від* $0°$ *до* $180°$*, не включаючи ці значення)[17].*

Сума всіх кутів неопуклого чотирикутника завжди дорівнює $360\circ$*.*

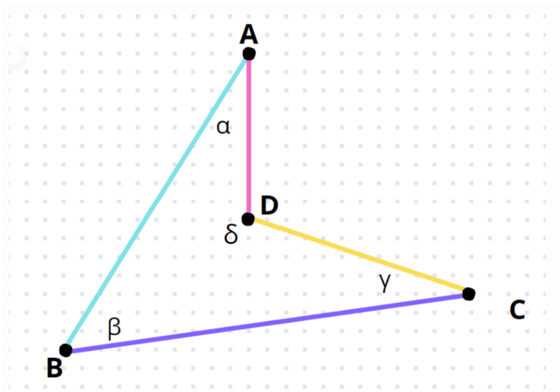

Рис. 2.17:

$\delta = (180° - 360°)$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
Види чотирикутників та їхні властивості

- Паралелограм- це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, тобто лежать на паралельних прямих[17].

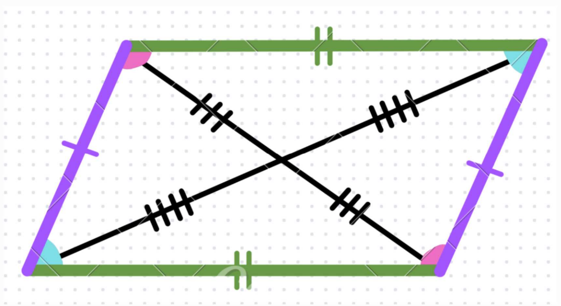

Рис. 2.18:

Властивості:
-протилежні сторони рівні;
-протилежні кути рівні;
-діагоналі точкою перетину діляться навпіл[17]. Ознаки паралелограма:

1. Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то це буде паралелограм.
2. Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то це буде паралелограм.
3. Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то це буде паралелограм[17].

- Прямокутник- це паралелограм, у якого всі кути прямі[17].

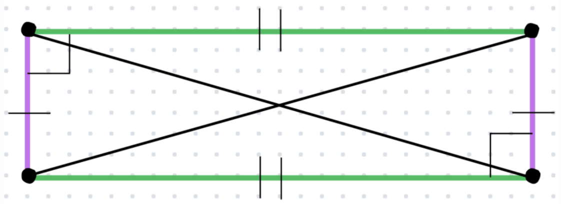

Рис. 2.19:

Властивість: Діагоналі прямокутника рівні[17].

- Ромб- це паралелограм, у якого всі сторони рівні[17].

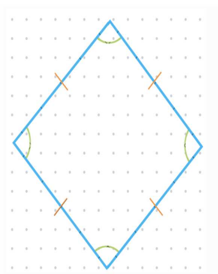

Рис. 2.20:

Властивість: діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути навпіл[17].
Ознака: Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник ромб[17].

- Квадрат- це прямокутник, у якого всі сторони рівні[17].

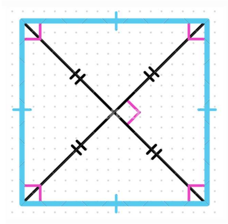

Рис. 2.21:

Властивості:
-всі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні;
-всі кути квадрата прямі;
-діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні, ділять кути квадрата навпіл і діляться точкою перетину навпіл[17].

- Трапеція- це чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні[17].

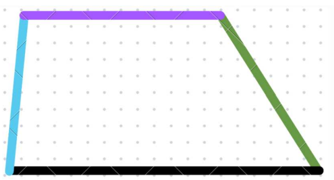

Рис. 2.22:

Прямокутна трапеція- це трапеція, у якій одна із бічних сторін буде перпендикулярною до основ[17].

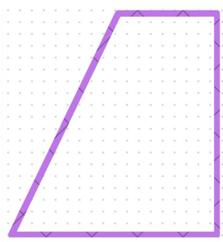

Рис. 2.23:

Рівнобічна трапеція- це трапеція, у якої бічні сторони рівні[17].

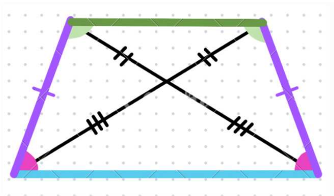

Рис. 2.24:

Властивість: у рівнобічній трапеції кути при основі будуть рівними[17].

Ознака: якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція є рівнобічною[17].

Задачі

- Паралелограм

Завдання 13 *Дано паралелограм $ABCD$, через точку перетину діагоналей проведено пряму. Ця пряма на сторонах $BCiAD$ відтинає відрізки $BM = 2$см, $AF = 2,8$см. Знайти сторони BC і AD[13].*

Розв'язок

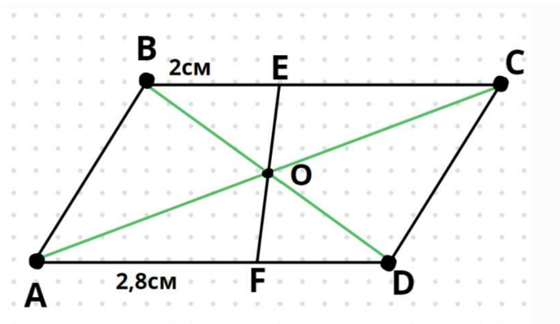

Рис. 2.25:

Оскільки т.О поділяє діагональ AC на дві рівні частини, то $AO = OC$. $\angle AOF = \angle ECO$(як вертикальні)

$\angle FAO = \angle ECO$ Тоді отримаємо, що $\triangle AOF = \triangle ECO$(за стороною і за двома кутами.

Це означає:

$AF = EC = 2,8$(см)

$BC = BE = EC = 2 + 2,8 = 4,8$(см)

$BC = AD = 4,8$(см)

Відповідь: 4,8см.

Завдання 14 *Знайти кути паралелограма, якщо один з них більший від іншого на $50°$[14].*

Розв'язок

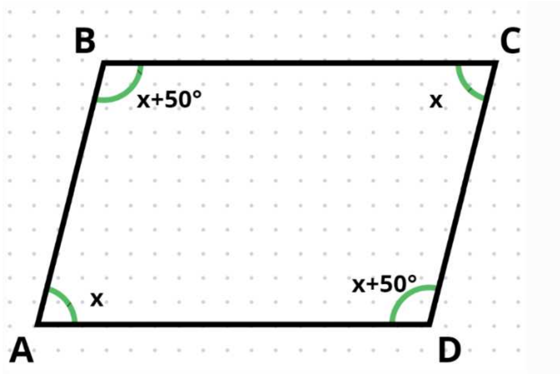

Рис. 2.26:

Нехай один з кутів дорівнює x, тоді інший на 50° більший, тобто $(x + 50°)$. Сума кутів паралелограма дорівнює 360°. Тоді отримуємо:

$x + x + x + 50°$+x+50°=360°

$4x = 360° - 100°$

$4x = 260°$

$x = 65°$

$\angle A = \angle C = 65°$

$\angle B = \angle D = 50° + 65° = 115°$

Відповідь: $65°, 115°$.

Завдання 15 *У паралелограмі $ABCD$ дві сторони відносяться, як $3 : 4$, периметр $ABCD$ дорівнює 2,8м. Знайти сторони паралелограма $ABCD$[14].*

Розв'язок

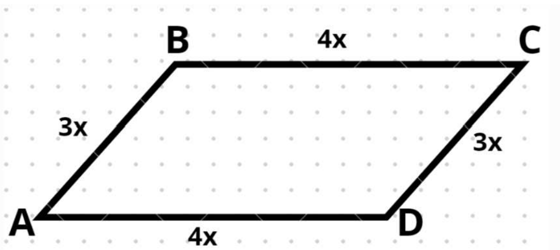

Рис. 2.27:

$AB : BC = 3 : 4$

Нехай $AB = 3x$, $BC = 4x$.

$P_{ABCD} = AB + DC + BC + AD$

$DC = AB = 3x$

$AD = BC = 4x$

$2,8 = 3x + 3x + 4x + 4x$

$2,8 = 14x$

$x = 0,2$

$AB = DC = 20,2 = 0,6$(м)

$BC = AD = 40,2 = 0,8$(м)

Завдання 16 *Дано паралелограм $ABCD$, проведено бісектрису кута A, бісектриса перетинає сторону BC у точці M. Чому дорівнюють відрізки BM і MC, якщо $AB = 9$см, $AD = 15$см?[14]*

Розв'язок

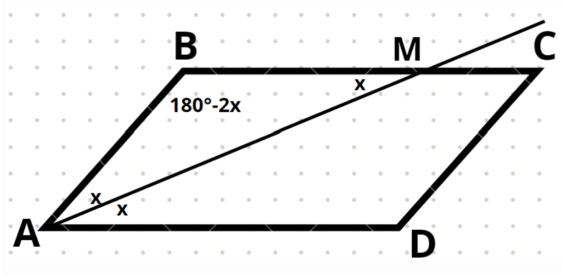

Рис. 2.28:

За допомогою кутів доведемо, що $\triangle ABM$ рівнобедрений.

Оскільки AM бісектриса, то позначимо Кут $\angle BAM = \angle MAD = x$. Тоді $\angle A = \angle C = 2x$.

Сума кутів паралелограма дорівнює 360°:

$\angle B = \angle D = \frac{360° - 4x}{2} = 180° - 2x$.

$\angle BMA = 180° - (x + 180° - 2x) = x$.

$\angle BMA = \angle BAM = x$.

Отже, $\triangle ABM$ рівнобедрений.

Отже, $\triangle ABM$ рівнобедрений.

$BM = AB = 9$(см).

$EC = 15 - 9 = 6$(см).

Відповідь: 9см, 6см.

Завдання 17 *Побудуйте паралелограм за двома сторонами і діагоналлю[14] .*

Розв'язок

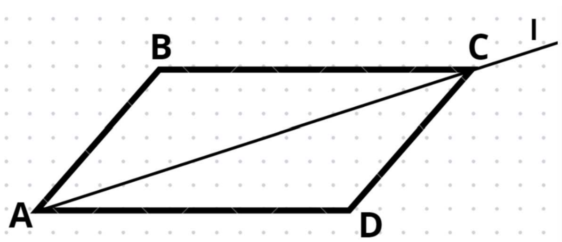

Рис. 2.29:

Припустимо, що паралелограм $ABCD$ побудовано. Трикутник ABC можна побудувати за трьома сторонами a, b, d($AB = a, AC = b, BC = d$). Так ми отримаємо вершини A, B, C шуканого паралелограма. Вершину D ми отримаємо, якщо добудуємо сторони $CD = a$, $AD = b$ трикутника ACD до сторони $AC = d$.

Побудова

1. Проведемо пряму l.

2. На прямій l позначимо відрізок AC.

3. В одній півплощині побудуємо 2 півкола з центрами в точках Aі C з радіусами $AB = a$, $BC = b$.

4. Точкою перетину даних півкіл буде точка B.

5. В другій півплощині побудуємо 2 півкола, A і C - центри цих півкіл. $AD = b$ і $CD = a$ радіуси.

6. Точка D це буде точка перетину цих півкіл.

Доведення

$ABCD$ буде паралелограм, тому що при побудові його протилежні сторони рівні, тобто $AB = CD$, $BC = AD$.

- Прямокутник

Завдання 18 *Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону пополам. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 10см[14].*

Розв'язок

Рис. 2.30:

AM — бісектриса $\angle A$, тому $\angle BAM = \angle MAD$.
$\angle MAD = \angle AMB$ (внутрішні різносторонні кути).
Отже, $\angle BAM = \angle AMB$, тому отримуємо, що $\triangle ABM$ — рівнобедрений.
Тому $BM = AB = 10$ (см).
$BC = 2 \cdot BM = 2 \cdot 10 = 20$ (см).
$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2 \cdot (10 + 20) = 60$(см) Відповідь: 60см.

Завдання 19 *З однієї точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра на 6см і 10см. Знайдіть їх довжини[13].*

Розв'язок

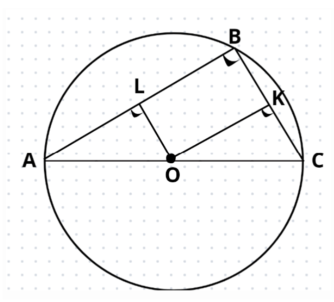

Рис. 2.31:

Оскільки, $\angle BLO = \angle BKO = 90°$, то $LBKO$ буде прямокутником. Отже, $LB = OK = 10$ см і $BK = LO = 6$ см.

Оскільки $\angle ABC$ — вписаний, то $\smile AC = 90° \cdot 2 = 180°$ (AC — діаметр), і $AO = OC$.

Знаємо, що $LBKO$ — прямокутник, то $\angle LOK = 90°$, тоді $\angle LOA + \angle KOC = 90°$. З цього випливає, що $\angle LAO + 90° - \angle KOL = 90°$, тоді $\angle LAO = \angle KOC$.

$\angle KCO + 90° - \angle AOL = 90°$, тоді $\angle KCO = \angle AOM$.

Тоді $\triangle OLA = \triangle CKO$ за стороною і двома кутами.

Отже, $KC = LO = 6$ см, $AL = KO = 10$ см. Отримаємо, що $AB = 2 \cdot 10 = 20$ см,

$BC = 6 \cdot 2 = 12$ см.

Відповідь: 20см, 12см.

Завдання 20 *Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Також відомо, що $\angle COD = 60°$, $CD = 8$ см. Знайдіть довжину діагоналі[3].*

Розв'язок

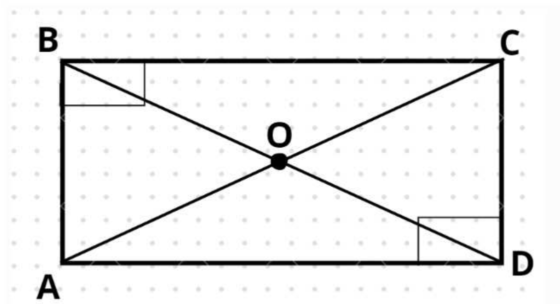

Рис. 2.32:

$OD = OC$, тому $\triangle$ COD буде рівнобедрений. Розглянемо цей трикутник.

$\angle C = \angle D = \frac{(180° - 6°)}{2} = 60°$. Отримуємо, що $\triangle$ COD рівносторонній.

AC = 2$\cdot$ OC = $2 \cdot 8 = 16$(см)

Відповідь: 16см.

Завдання 21 *Дано прямокутник $ABCD$, AC і BD є діагоналями цього прямокутника. $\angle ABD > \angle COD$ на $30°$. Знайдіть $\angle ABD$[13].*

Розв'язок

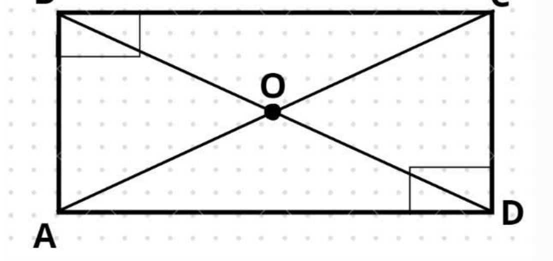

Рис. 2.33:

$AO = OB$, оскільки $AC = BD$, тоді $\triangle ABO$- рівнобедрений, AB-основа.
$\angle ABO = \angle BAO$(кути при основі)
$\angle AOB = \angle COB$(як вертикальні)
Нехай $\angle ABO$ = x, тоді $\angle AOB$ = x - 30°, $\angle BAO$ = x.
Сума кутів трикутника дорівнює 180°. Отже,

$$x + x + (x - 30°) = 180°.$$

3x=$180° + 30°$
3x=210°
x=70°
$\angle ABD = 70°$.
Відповідь:70°.

Завдання 22 *У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник $MKNC$, прямокутник та трикутник мають спільний прямий кут C. Знайти довжину катета, знаючи що периметр прямокутника 12см[14].*

Розв'язок

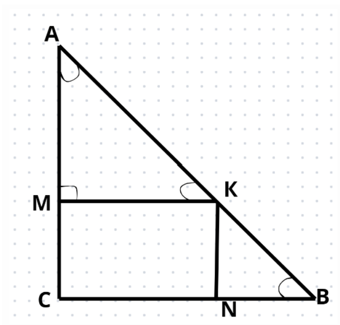

Рис. 2.34:

Якщо трикутник ABC рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = \angle B = 45°$. Маємо що прямокутник CMKN прямокутник вписаний в трикутник ABC, $\angle C$ спільний, тоді:

$NC \perp AC$, $KM \perp AC$ тому $\angle AKM = \angle B$ як відповідні, $\angle AK = \angle B = 45°$. Отже $\triangle AMK$-рівнобедрений і $AM = MK$.

Тому $AC = AM + MC = MK + MC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$(см)

Відповідь: 6см.

- Ромб

Завдання 23 *Дано ромб $ABCD$, кути, утворені діагоналями та однією із сторін ромба, відносяться, як* $4 : 5$. *Знайдіть кути ромба $ABCD$[14].*

Розв'язок

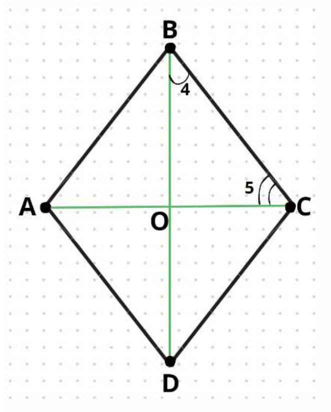

Рис. 2.35:

З властивості діагоналей ромба знаємо, що $AC \perp BD$. Отже, трикутник BOC буде прямокутним.

Так як $\angle OBC : \angle BCO = 4 : 5$, то можемо позначити $\angle OBC$ =4x, $\angle BCO$ =5x.

4x+5x=90°

9x=90°

x=10°

$\angle OBC = 4 \cdot 10° = 40°$

$\angle BCO = 5 \cdot 10° = 50°$

$\angle B = 2 \cdot \angle OBC = 2 \cdot 40° = 80°$

$\angle B = 2 \cdot \angle BCO = 2 \cdot 50° = 100°$

Відповідь: $80°, 100°$.

Завдання 24 *Знайти кути ромба, якщо одна із його діагоналей дорівнює стороні.$AC = AB$ за умовою. Тоді маємо, що трикутник ABC рівносторонній[14].*

Розв'язок

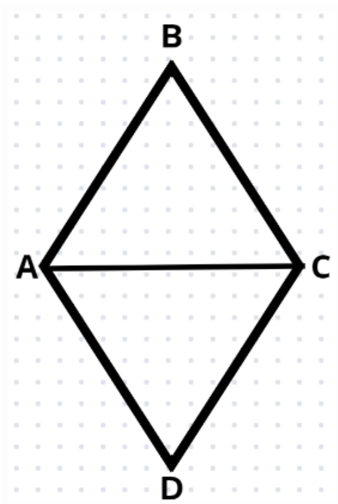

Рис. 2.36:

З трикутника ABC отримуємо, що $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 60°$.

$\angle B = \angle D = 60°$
$\angle C = 2 \cdot \angle BCO = 2 \cdot 60° = 120°$
$\angle A = \angle C = 120°$
Відповідь: $60°, 120°$.

Завдання 25 *Знайдіть кути ромба. Якщо периметр дорівнює 40 см, а висота ромба дорівнює 5 см[14].*

Розв'язок

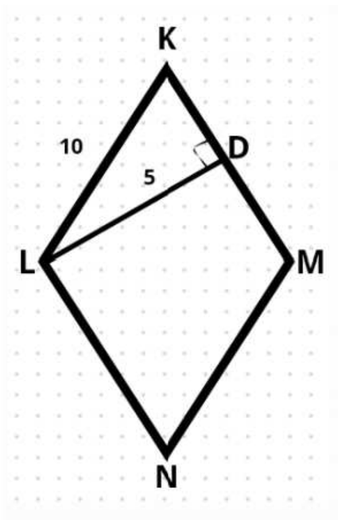

Рис. 2.37:

LK=KM=MN=LN=$\frac{40}{4}$=10(см)
$\sin\angle K = \frac{LD}{LK} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
$\angle K = 30°$
$\angle K = \angle N = 30°$
$\angle N = \angle M = 180°$, отже $\angle M = 180° - 30° = 150°$
Відповідь: $30°, 150°$.

Завдання 26 *Дано ромб $ABCD$. Його висота у два рази менша за сторону. Знайти кути та висоту ромба, знаючи, що його периметр дорівнює 32см.*

Розв'язок

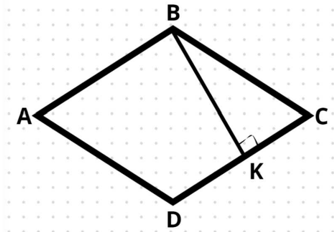

Рис. 2.38:

Нехай $BK = x$, тоді $BC = 2x$. Оскільки $BK = 12BC$, тоді $\angle BCK = 30°$
$\angle A = \angle C = 30°$
$\angle B + \angle C = 180°$
$\angle B = 180° - 30° = 150°$
$AB = BC = CD = AD = \frac{34}{4} = 8$(см)
$BC = 8$см, тоді $BK = 12 \cdot 8 = 4$(см)
Відповідь:Сторона 8 см, висота 4см.

Завдання 27 *У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B на сторони AD і CD проведено висоти BE і BF відповідно. Кут EBF дорівнює 30°. Висота BE дорівнює 6см, знайти периметр ромба.*

Розв'язок

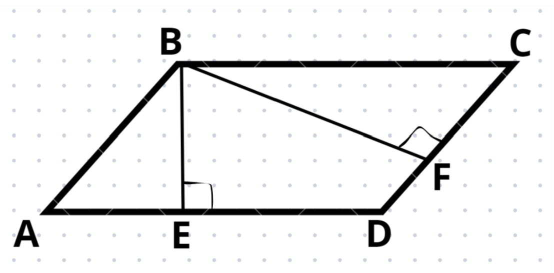

Рис. 2.39:

$\angle EDF = 180° - 30° = 150°$
$\angle B = \angle D = 150°$
$\angle A = \angle C = 180° - 150° = 30°$
AB=2BE(BE катет, що лежить напроти кута 30°)
AB=$2 \cdot 6$=12(см)
$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 12 = 48$(см)
Відповідь: 48см.

- Трапеція

Завдання 28 *У трапеції $ABCD$ її менша основа дорівнює бічній стороні, а одна діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайти кути трапеції[14].*

Розв'язок

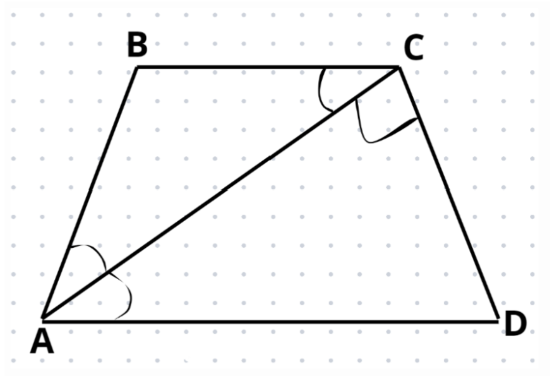

Рис. 2.40:

$AB = BC = CD \ \angle ACD = 90°$
$\angle BAC = \angle BCA$($\triangle$ ABC рівнобедрений)
$\angle CAD = \angle BCA$ як внутр.різносторонні
$\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD$=x+x=2x
$\angle CDA = \angle BAD = 2x$(ABCD-рівнобедрена)
З $\triangle ACD$ ($\angle C = 90°$)
$\angle CAD + \angle CDA = x + 2x = 3x = 90°$
$3x = 90°$
$x = 30°$
$\angle A = 2x = 2 \cdot 30° = 60°$
$\angle A = \angle D = 60°$
$\angle D + \angle DCB = 180°$ як внутрішні односторонні
$\angle DCB = 180° - \angle D = 180° - 60° = 120°$
$\angle C = \angle ABC = 120°$
Відповідь: $60°, 120°$.

Завдання 29 *У трапеції $ABCD$ діагональ ділить її середню лінію на відрізки, які відносяться як $11 : 21$. Знайдіть більшу основу трапеції, знаючи, що різниця цих відрізків дорівнює 20см[16].*

Розв'язок

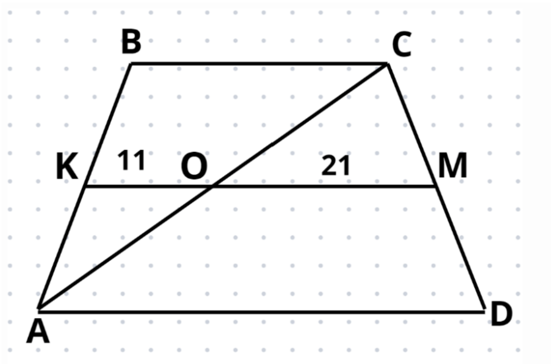

Рис. 2.41:

Нехай $KO = 11x$, $OM = 21x$.
$21x - 11x = 20$
$10x = 20$
$x = 2$
$KO = 11 \cdot 2 = 22$(см)
$OM = 21 \cdot 2 = 42$(см)
$KM = 22 + 42 = 64$(см)
Якщо KM середня лінія трапеції $ABCD$, то OM буде середньою лінією $\triangle ACD$.
$AD = 2OM = 2 \cdot 42 = 84$(см)
Відповідь: 84см.

Завдання 30 *В трапеції з периметром 72 см та кутами при більшій основі по $60°$, діагональ розділяє середню лінію на дві частини, з різницею в 8 см між ними. Знайти довжину більшої основи трапеції[16].*

Розв'язок

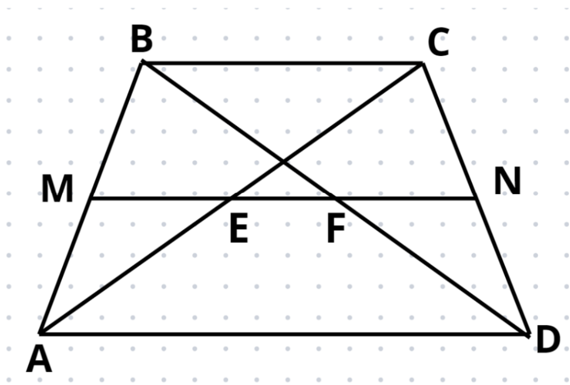

Рис. 2.42:

Оскільки кути при більшій основі $60°$, то трапеція рівнобічна.

MF-FN=8см

Оскільки △ ABK=△CLD, то ME=FN

$AK = LD = \frac{AD-BC}{2}$

В трикутниках ABC і DBC відрізки ME і FN будуть середніми лініями відповідно.

$ME = FN = \frac{BC}{2}$

$EF = MN - (ME + FN) = \frac{AD+BC}{2} - BC = \frac{AD-BC}{2}$, тоді $AK = LD = EF = 8$(см)

Розглянемо трикутник ABK($\angle K = 90°$)

$\angle ABK = 90° - \angle BAK = 90° - 60° = 30°$, тоді $AB = 2AK = 2 \cdot 8 = 16$ (см)

$P = 2AB + 2BC + 2AK$

$BC = \frac{P-2(AB+AK)}{2}$

$KL = BC = \frac{72-2(16+8)}{2} = 12$(см)

$AD = KL + 2 \cdot AK = 12 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28$(см)

Відповідь: 28см.

Завдання 31 *У трапеції $ABCD$, менша основа ВС має довжину 4 см. Через вершину В проведена пряма, паралельна бічній стороні. Периметр трикутника, утвореного цією прямою, становить 12 см. Знайти периметр трапеції[16].*

Розв'язок

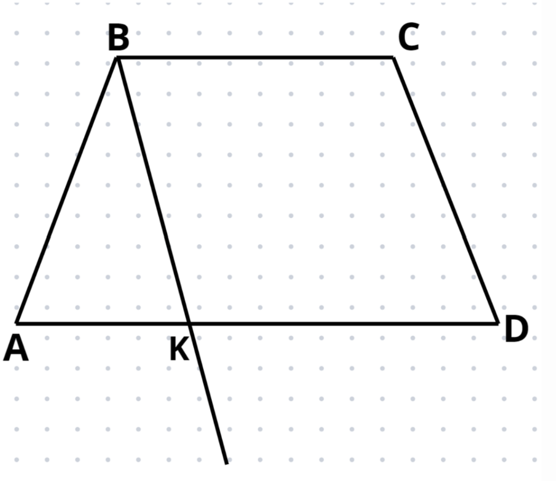

Рис. 2.43:

$BC \parallel KD, BK \parallel CD$, отже $KBCD$ паралелограм.
$KD = BC = 4$(см)
$CD = BK = BA$, отже $\triangle ABK$ рівнобедрений
$P_{\triangle}$ ABK=12(см)
$P_{\triangle}$ ABK $= AB + BK + AK = 12$(см)
$AB + CD + AK = 12$(см)
P_{ACD}=AB+BC+CD+AD
$AD = AK + KD$
P_{ACD}=12+4+4=20(см)
Відповідь: 20см.

Завдання 32 *У прямокутній трапеції гострий кут складає 45 градусів, менша бічна сторона має довжину 8 см, а середня лінія - 28 см. Знайдіть довжину верхньої основи[16].*

Розв'язок

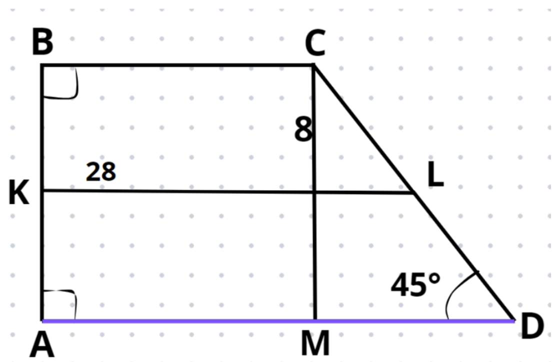

Рис. 2.44:

$\frac{BC+AD}{2} = KL$
$MD = CM \cdot \operatorname{ctg} D$

$MD = 8 \cdot 1$=8(см)
Нехай $BC = x$, тоді $AD = 8 + x$.
$\frac{x+8+x}{2} = 28$
$2x + 8 = 56$
$2x = 48$
$x = \frac{48}{2} = 24$
$BC = 24c$.
Відповідь:24см.

2.3 Метод добудови геометричних фігур.

Метод "Додаткової добудови" є важливим та корисним прийомом при розв'язуванні геометричних задач. Такі побудови мають мету розширити та уточнити дану задачу, за допомогою добудови даної фігури. Прикладом можуть бути лінії, кути, точки або деякі інші елементи, які допомагають нам у більш швидкому розв'язанні задачі.

У шкільному курсі геометрії дуже багато задач пов'язані з медіаною. Часто для розв'язку цих задач використовують "подвоєння" або ж "подовження" медіани, що призводить до легкого розв'язання завдання.

Задача 1 *Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точки L і K є серединами основ трапеції. Знайти площу трапеції, знаючи, що діагоналі AC і BD відповідно дорівнюють $\sqrt{10}$ см і 2 см, відрізок має довжину 1см[8].*

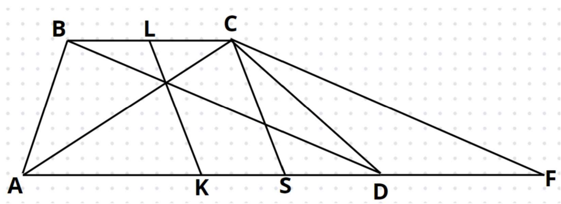

Рис. 2.45:

Розвязання

Для початку продовжимо сторону AD, позначимо точку F так щоб $DF = BC$. Отримаємо, що $DBCF$ паралелограм. Отже, $CF = BD = 2$см. Проведемо відрізок $CS \parallel LK$, тоді т.S - буде серединою AF. Також площа $\triangle ACF$ і площа $ABCD$ будуть рівними.

Отже, щоб розв'язати задачу потрібно знайти площу трикутника ACF.

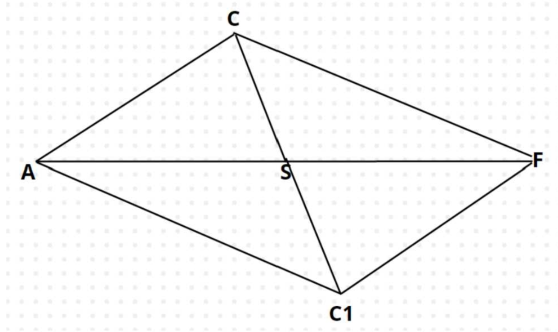

Рис. 2.46:

На даному рисунку подвоїли медіану CS. Знаємо, що $AS = SF$ і $CS = SC_1$, тому $ACFC_1$- паралелограм.

З теореми про сторони і діагоналі паралелограма, отримуємо:

$AF^2 + CC_1^2 = 2(AC^2 + CF^2)$

$AF^2 + 1 = 2((\sqrt{10})^2 + 2^2)$

$AF^2 = 2(10 + 4) - 1 = 38 - 1 = 27$

$AF = 3\sqrt{3}$(см)

$S_{\triangle ASF} = \frac{1}{2}CS \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{\triangle ACF} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Метод “Допоміжної площі фігур” використовують рідше при розв’язанні геометричних задач.

Задача 2 *У прямокутному трикутнику $ABC(\angle C = 90°)$ проведено висоту CK. В трикутники ACK і CKB, які утворила висота вписано два кола відповідно. Радіус вписаного кола у $\triangle ACK$ дорівнює r_1, а радіус вписаного кола в CKB дорівнює r_2. Знайти радіус вписаного кола в $\triangle ACB$[8].*

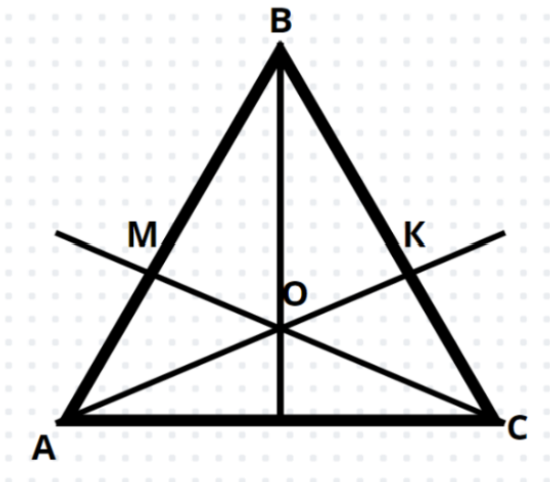

Рис. 2.47:

Розвязання

Позначимо площі трикутників: $S_{\triangle ACK} = S_1$, $S_{\triangle KCB} = S_2$, $S_{\triangle ABC} = S_3$. Зрозуміло, що $\triangle ACK \sim \triangle ABC$, і $\triangle CKB \sim \triangle ABC$. За теоремою знаємо, що площі у подібних трикутників відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних розмірів, в нашому випадку це будуть відомі радіуси. Тобто $\frac{S_1}{S_3} = \frac{r_1^2}{r_3^2}$, $\frac{S_2}{S_3} = \frac{r_2^2}{r_3^2}$, де r_3- радіус кола вписаного в трикутник ABC.

Звідси отримуємо:

$\frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{r_1^2+r_2^2}{r_3^2}$

$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$

$\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

Ще одним типом задач на добудову є “Метод допоміжного кола”. Такі задачі теж трапляються рідко.

Задача 3 *Дано трикутник ABC у якого $\angle B = 60°$, AK і CM є бісектрисами трикутника, що перетинаються в точці O. Потрібно довести, що $OM = OK$[8].*

Доведення

$\angle MOK = \angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA) = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 180° - \frac{1}{2}(180° - 60°) = 120°$

Отже, $\angle MBK + \angle MOK = 180°$, тобто навколо чотирикутника OC_1BA_1 можна описати коло. O- точка перетину бісектрис, то $\angle MBO = \angle OBK$. Таким чином $\smile MO = \smile OK$, а рівні дуги з’єднують рівні хорди, тобто $OK = OM$.

Висновок

У шкільному курсі геометрії вивчається багато різних геометричних фігур, починаючи від простих, таких як прямі, круги, трикутники та квадрати, і до більш складних, наприклад, конуси, циліндри та сфери. Кожна фігура має унікальні властивості та ознаки, які дозволяють її ідентифікувати та вивчати її властивості.

Вивчення цих фігур і їх властивостей є важливою частиною математичної освіти, оскільки це розвиває логічне мислення учнів і навички розв'язування різноманітних геометричних задач. Розуміння геометричних фігур також має практичне застосування у різних галузях, від архітектури до інженерії, де вони використовуються для розрахунків, проектування та моделювання. Необхідність збільшення питомої ваги прикладного компонента в навчальному матеріалі підручника геометрії базується на потребі вироблення учнями не лише геометричних умінь, а й навичок застосування знань у реальних життєвих ситуаціях. При цьому важливо враховувати три основні складові методики: організацію уроків, логічне упорядкування навчального матеріалу та застосування математичних фактів на практиці.

Другий і третій компоненти методики варто розглядати як взаємно обернену діяльність, що дозволяє учням краще усвідомити співвідношення між теорією та практикою. Наприклад, пропонуючи пари геометричних та практичних задач, учням надається можливість переносити здобуті знання на конкретні ситуації життя.

Такі спеціальні прийоми навчання, як інтерпретація елементарних фігур на практиці, використання ознак рівності допоміжних трикутників та орієнтація на практичні ситуації, стимулюють розвиток учнівських навичок застосування геометричних знань у реальному житті.

Розробка уроків з геометрії, що охоплюють різноманітні теми, такі як геометричні фігури, відрізки, кути та систематизація знань, може допомогти учням збагатити свої знання та розвинути вміння розв'язувати геометричні задачі. Використання презентацій як додаткового матеріалу дозволяє візуалізувати знання та надає можливість учням краще зрозуміти матеріал.

На уроках про геометричні фігури та точки, важливо акцентувати увагу на їх властивостях та основних характеристиках. Уроки про відрізки та вимірювання відрізків можуть допомогти учням розвинути навички роботи з лінійними величинами та зрозуміти, як вимірювати відстані між точками. Вивчення кутів та їх вимірювання також є важливою складовою геометричного курсу, яка допомагає учням розуміти концепції кутів та їх властивості.

Összefoglalás

Az iskolai geometria tanfolyam számos különféle geometriai alakzatot tanulmányoz, kezdve az egyszerűektől, mint a vonalak, körök, háromszögek és négyzetek, egészen az összetettebbekig, például a kúpok, hengerek és gömbök. Minden alakzatnak megvannak a maga egyedi tulajdonságai és jellemzői, amelyek lehetővé teszik az azonosításukat és tulajdonságaik tanulmányozását.

Ezen alakzatok és tulajdonságaik tanulmányozása fontos része a matematikai oktatásnak, mivel fejleszti a diákok logikai gondolkodását és a különféle geometriai feladatok megoldásának képességeit. A geometriai alakzatok megértésének gyakorlati alkalmazása is van különböző területeken, az építészettől kezdve a mérnöki tudományokig, ahol számításokhoz, tervezéshez és modellezéshez használják őket.

A geometria tankönyv oktatási anyagában az alkalmazott komponens arányának növelése azon az igényen alapul, hogy a diákok ne csak geometriai képességeket, hanem az ismeretek gyakorlati helyzetekben való alkalmazásának képességeit is elsajátítsák. Ebben fontos figyelembe venni a módszertan három fő összetevőjét: az órák szervezését, az oktatási anyag logikus elrendezését és a matematikai tények gyakorlati alkalmazását.

A módszertan második és harmadik összetevőjét egymásnak ellentétes tevékenységként érdemes tekinteni, amely lehetővé teszi a diákok számára, hogy jobban megértsék az elmélet és a gyakorlat közötti kapcsolatot. Például, ha geometriai és gyakorlati feladatpárokat kínálnak, a diákoknak lehetőségük nyílik arra, hogy megszerzett
ismereteiket konkrét élethelyzetekre alkalmazzák.

Az olyan speciális oktatási módszerek, mint az elemi alakzatok gyakorlati értelmezése, a segédháromszögek egyenlőségének jeleinek használata és a gyakorlati helyzetekre való összpontosítás, ösztönzik a diákok geometriai ismeretek alkalmazásának készségeinek fejlesztését a valós életben.

A geometriaórák kidolgozása, amely különféle témákat ölel fel, mint például geometriai alakzatok, szakaszok, szögek és az ismeretek rendszerezése, segíthet a diákoknak gazdagítani tudásukat és fejleszteni a geometriai feladatok megoldásának képességeit. A prezentációk használata kiegészítő anyagként lehetővé teszi a tudás vizualizálását és segíti a diákokat az anyag jobb megértésében.

A geometriai alakzatokról és pontokról szóló órákon fontos hangsúlyozni azok tulajdonságait és alapvető jellemzőit. A szakaszokról és azok méréséről szóló órák segíthetnek a diákoknak fejleszteni a lineáris méretekkel való munkavégzés készségeit és megérteni, hogyan kell mérni a pontok közötti távolságokat. A szögek és azok mérésének tanulmányozása szintén a geometriai tanfolyam fontos része, amely segít a diákoknak megérteni a szögek fogalmát és tulajdonságaikat.

Джерела

1. Апостолова Г. В., “Геометрія 11 клас”.
2. Бевз Г.П., “ Геометрія 10 клас”.
3. Єршова А., “Геометрія 8 клас”.
4. Ігнатенко М.Я., “Методологічні та методичні основи активізації навчально пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики”.
5. Істер О., “Математика 5 клас”.
6. Колягін Ю.М., “Задачі у навчанні математики. Математичні задачі як засіб навчання і розвитку учнів. Частина 1”.
7. Колягін Ю.М., “Задачі у навчанні математики. Математичні задачі як засіб навчання і розвитку учнів. Частина 2”.
8. Лов’янова І. В., “Вибрані Методи і прийоми розв’язування геометричних задач”.
9. Мерзляк Г., В.Б.Полонський, М.С.Якір, ”Геометрія 7 клас”.
10. Мерзляк Г., В.Б.Полонський, М.С.Якір, ”Геометрія 8 клас”.
11. Мерзляк Г., В.Б.Полонський, М.С.Якір, ”Геометрія 9 клас”.
12. Мерзляк Г., В.Б.Полонський, М.С.Якір, ”Геометрія 11 клас”.
13. Нелін Є.П., “Геометрія 10 клас”.
14. Погорєлов А.В., “Геометрія 7-9 клас”.
15. Тарасенкова Н.А., “Математика 5 клас”.
16. $https://naurok.com.ua/urok-z-geometri-rozv-yazuvannya-zadach-z-temi-trapeciya-149403.html$
17. $https://playcoolmath.com/uk/math-lessons/math-for-kids/basic-geometric-shapes/quadrangles$

Перелік ілюстрацій

Nyilatkozat

Alulírott, Lődár Niki, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Звіт про перевірку схожості тексту Oxsico

Назва документа:

Szakdolgozat_Lodar_Niki.pdf

Ким подано:	Дата перевірки:	Дата звіту:
Пап Габріелла	**2024-05-27 10:14:54**	**2024-05-27 11:19:21**
Ким перевірено:	Кількість сторінок:	Кількість слів:
I + U + DB + P + DOI	**51**	**11219**

Схожість 6%	Збіг: **24 джерела**	Вилучено: **0 джерела**
Інтернет: **16 джерела**	DOI: **0 джерела**	База даних: **0 джерела**
Перефразовування 2%	Кількість: **8 джерела**	Перефразовано: **182 слова**
Цитування 0%	Цитування: **0**	Всього використано слів: **0**
Включення 0%	Кількість: **0 включення**	Всього використано слів: **0**
Питання 16%	Замінені символи: **0**	Інший сценарій: **1775 слова**