

**Міністерство освіти і науки України**

**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

**Кафедра математики та інформатики**

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

**Кваліфікаційна робота**  
**Симетричні многогранники**

**Шера Томаш Золтанович**

Студент II-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2023

Науковий керівник:

**Тилишак Олександр Анатоліович**

*(доктор фіз.-мат. наук, доцент)*

Завідувач кафедрою математики та інформатики :

**Кучінка Каталін Йожефівна**

*(к. ф.-м. н, доцент)*

Робота захищена на оцінку \_\_\_\_\_, «\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ року

Протокол № \_\_\_\_\_ / 202\_

**Міністерство освіти і науки України  
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

**Кафедра математики та інформатики**

**Кваліфікаційна робота  
Симетричні многогранники**

Рівень вищої освіти: магістр

Виконавець: студент II-го курсу

**Шера Томаш Золтанович**

освітня програма «Середня освіта (Математика)»  
спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Тилишак Олександр Анатоліович**  
(доктор фіз.-мат. наук, доцент)

Рецензент: **Тегза Антоніна Михайлівна**  
(кандидат фіз.-мат. наук, доцент.)

Берегове  
2024

---

# Зміст

---

Вступ	1
1. Означення платонових тіл	3
1.1. Означення та властивості Basic®	3
1.2. Два приклади платонівських твердих тіл	5
2. Формула Ейлера	9
2.1. Формула Ейлера	6
2.2. Стратегія доведення класифікації твердих тіл плато	6
3. Позначення граней платонівського твердого тіла	12
3.1. Означення деяких понять	12
3.2. Часткове маркування first	13
3.3. Перші два випадки	15
3.4. Друге часткове маркування	16
3.5. Інші випадки	18
4. Платонівська класифікація твердих тіл Евкліда	24
4.1. Допоміжні результати	24
4.2. Теорема Коші про жорсткість	29
4.3. Повна класифікація твердих речовин плато	31
5. П'ять платонівських тіл	32
5.1. Повний список усіх платонівських твердих тіл	32
5.2. Походження поняття платонівського твердого тіла	33
5.2.1. Опуклість плато твердих тіл	34
5.2.2. Кількість поверхонь, що містять одну вершину	34
5.3. Основні властивості платонівських твердих тіл	35
Бібліографія	40
Висновки	41
Список рисунків	42

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma  
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Matematika és Informatika Tanszék**

**SZIMMETRIKUS POLIÉDEREK**

Magiszteri dolgozat

**Készítette: Séra Tamás**

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

**Témavezető: Tiliscsák Olekszandr.**

*(Fizika-matematika tudományok doktora, docens)*

**Recenzens: Tegza Antonina Mihajlovna**

*(fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens.)*

---

## Rövid leírás

Ebben a szakdolgozatban a platóni szilárd testeket és azok osztályozását tanulmányozzuk. Szigorúan bizonyítjuk, hogy pontosan öt platóni szilárd test létezik, amelyeket a Schlafli-szimbólumuk egyedileg határoz meg. A bizonyítás három mér-földköve Eukleidész "Elemek" című alpművében szereplő alapvetés, Euler képlete, amely összekapcsolja az oldalak, élek és csúcsok számát, valamint Cauchy merevségi tétele. Ebben a dolgozatban egy sajátos megközelítés az, hogy egy egyedi síkgráfot társítunk a platóni testekhez, ugyanolyan Schlafli szimbólummal. A dolgozat az öt platóni szilárd test teljes felsorolásával és alapvető tulajdonságaival zárul, valamint explicit struktúrákat ad.

---

# Tartalomjegyzék

---

<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>1 A platóni szilárd testek meghatározása</b>	<b>3</b>
1.1 Alapvető meghatározások és tulajdonságok . . . . .	3
1.2 Két példa a platóni szilárd testekre . . . . .	5
<b>2 Euler képlete</b>	<b>6</b>
2.1 Euler-képlet . . . . .	6
2.2 Stratégia a platóni szilárd testek osztályozásának bizonyítására . . . . .	8
<b>3 A platóni szilárd test oldalainak címkézése</b>	<b>12</b>
3.1 Néhány fogalom megállapítása . . . . .	12
3.2 Az első részleges címkézés . . . . .	13
3.3 Az első két eset . . . . .	15
3.4 A második részleges címkézés . . . . .	16
3.5 A többi eset . . . . .	18
<b>4 Euklidész Platóniai szilárd testek osztályozása</b>	<b>24</b>
4.1 Segéderedmények . . . . .	24
4.2 Cauchy merevségi tétele . . . . .	29
4.3 A platóni szilárd testek teljes osztályozása . . . . .	31
<b>5 Az öt platóni szilárd test</b>	<b>32</b>
5.1 Az összes platóni szilárd test teljes listája . . . . .	32
5.2 A platóni szilárd testek fogalmának eredete . . . . .	33
5.2.1 A platóni szilárd testek konvexitása . . . . .	34
5.2.2 Az egy csúcsot tartalmazó felületek száma . . . . .	34
5.3 A platóni szilárd testek alapvető tulajdonságai . . . . .	35
<b>Bibliográfia</b>	<b>40</b>
<b>Összegzés</b>	<b>41</b>
<b>Ábrajegyzék</b>	<b>42</b>

---

# Bevezetés

---

A platóni szilárd testek tanulmányozása Euklidész idejében gyökerezik, több mint kétezer-háromszáz évvel ezelőtt, és még ennyi idő elteltével is lenyűgöző. Euklidész munkájától kezdve három mérőföldkő vezet a platóni szilárd testek teljes osztályozásához.

Euklidész *Elements* című művében összeállította elődeinek munkáját. Fő témái a geometria, az arányosság és a számelmélet. Eukleidész ezeket az ismert eredményeket logikusan rendezte el, hogy (igaz, nem mindig a modern matematika által megkövetelt szigorral) bemutassa, hogy azok szükségszerűen következnek öt egyszerű axiómából. Az ő nevéhez fűződik számos, korábban felfedezett tétel különösen zseniális bizonyítása. Az *Elemek* tizenhárom könyvből áll, és csak az utolsó, 13. könyvben vizsgálja a platóni szilárd testeket. Eukleidész művével olyan könyvet alkotott, amely hamarosan a geometria etalonjává vált, és amely még ma is szerepel egy tipikus iskolai geometria-tanfolyam tananyagában.

A második mérőföldkő a tizennyolcadik században volt, amikor Euler bemutatta a képletét, amely összekapcsolta a konvex poliéderek sokszögű oldalainak, éleinek és csúcsainak számát. A harmadik mérőföldkő, amely hozzájárult az öt platóni szilárd test teljes körű osztályozásához, Cauchy merevségi tétele, Cauchy első matematikai eredménye.

Ebben a dolgozatban a platóni testek teljes osztályozását kívánjuk megadni Euler képletének és Cauchy merevségi tételének segítségével. A platóni testek definíciójának megadásával kezdjük, néhány alapvető geometriai definícióval és hasznos tulajdonsággal együtt.

A második fejezetben bemutatjuk az Euler-formulát és megadjuk a bizonyítását. Felvázoljuk a platóni szilárd testek osztályozásának befejezéséhez szükséges különböző fontos lépéseket. Megadjuk továbbá a Ludwig Schläfli svájci matematikusról elnevezett Schläfli-szimbólum és a megfelelő Euler-hármas definícióit. A platóni szilárd testekkel való kapcsolatukat úgy mutatjuk be, hogy megmutatjuk, hogy ezekre pontosan öt Schläfli-szimbólum lehetséges.

A harmadik fejezetben megmutatjuk, hogy egy platonikus szilárd testhez egy lényegében egyedi síkgráfot társíthatunk, amelyet kizárólag a Schläfli-szimbólum jellemez. Ez egy olyan személyes megközelítés, amely az azonos Schläfli-szimbólummal rendelkező platóni szilárd testeket összekapcsolja a Cauchy merevségi tételében szereplő hipotézissel.

A negyedik fejezetben a Cauchy-féle merevségi tételt bizonyítjuk Steinitz egyik eredményének felhasználásával. Steinitz talált egy rést az eredeti bizonyításban, és száz évvel később tudta kijavítani azt. Cauchy merevségi tételét ezután a platóni testek osztályozásának befejezéséhez használjuk fel.

---

Az utolsó fejezetben felsoroltuk mind az öt platóni szilárd testet, és megállapítottuk néhány alapvető tulajdonságukat, például, hogy a platóni szilárd testek minden csúcsa egy gömbön fekszik. Továbbá mind az öt alakzat egy-egy konstrukcióját megadjuk.

Ez a szakdolgozat olyan egyetemi hallgatóknak szól, akik érdeklődnek a geometria szigorú módon történő felfedezése iránt. Szorosan követi a *Geometria* című könyvet: Hartshorne [4]*Euklidész és azon túl*, című könyvét. A további anyag az Aigner és Ziegler által írt [1]*Proofs from THE BOOK* és a Coxeter által írt [2]*Regular Polytopes* című klasszikus hivatkozásból származik. Coxeter könyve és különösen a [4] 8. fejezete ajánlott további olvasmányként. A történeti érdeklődésű olvasó értékelni fogja Euklidész *Elemek* című művét és annak fordítását Fitzpatrick [3]*Euklidész Elements of Geometry* című művében.



---

## A platóni szilárd testek meghatározása

---

E fejezet célja, hogy megadja a platóni szilárd testek formális definícióját, és néhány szemléltető példát adjon. Először is be kell mutatnunk néhány alapvető és általános definíciót a két- és háromdimenziós térben lévő alakzatokról.

### 1.1 Alapvető meghatározások és tulajdonságok

#### Definíció 1.1:

*A síkbeli szabályos sokszög egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű sokszög, azaz olyan sokszög, amelynek minden oldala azonos hosszúságú, és két oldala közötti szögek egyenlők.*

#### Definíció 1.2:

*Két ponthalmaz akkor kongruens, ha létezik az elfordításoknak, elforgatásoknak és tükrözéseknek olyan kombinációja, amely az egyik halmazt a másikra leképezi.*

A ponthalmazokat akkor nevezzük **egy méretezési tényezőig** kongruensnek, ha azok az első méretezés után is kongruensek, tehát nem veszik figyelembe a konkrét méretüket. Az első tétel egy általános állítás a szabályos sokszögekről és azok tulajdonságairól.

#### Tétel 1.1:

*A síkban bármely  $n \geq 3$  esetén létezik olyan  $n$  oldalú szabályos sokszög, amelynek egy adott szegmens az oldala. Bármely két szabályos  $n$  sokszög egy méretaránytényezőig kongruens. Egy szabályos  $n$ -poligon csúcsai egy körön fekszenek.*

#### Bizonyítás >

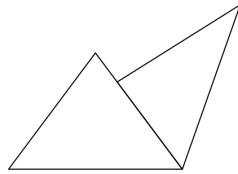
Létezés: Tekintsünk egy kört, és helyezzünk el  $n$  egyenletes távolságra lévő pontot a körön.

Kerület: Ezek a pontok a kör középpontjában  $a^{2\pi}$  szöget alkotják. A méretezési tényező beállításával az oldalhossz bármely megadott szegmenshez igazítható.

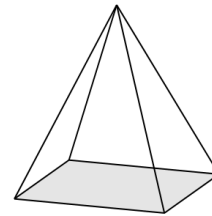
Kongruencia, egy körön fekvés: Vegyünk egy szabályos  $n$ -*poligont*, amelynek egyik oldala  $AB$ . Osszuk fel az  $A$ -ban találkozó két él és a  $B$ -ben találkozó két él közötti egyenlő szögeket, és hagyjuk, hogy a szögfelezői az  $O$  pontban metsződjenek. Ez biztosítja, hogy az  $O$  pont egyenlő távolságra van  $A$ -tól és  $B$ -től. Ha ezt a módszert megismételjük az összes többi csúcra, akkor egyértelművé válik, hogy az  $O$  pont mindegyiktől egyenlő távolságra van. Ennek eredményeképpen az összes ilyen csúcs egy  $O$  középpontú körön fekszik. Ezért bármely szabályos  $n$  *sokszög*, amelynek egy oldala közös, kongruens lesz. Így bármely két szabályos  $n$ -*poligon* egy méretarányos tényezőig kongruens.

**Definíció 1.3:**

A **poliéder** a háromdimenziós térben lévő szilárd alakzat síkbeli sokszögek által határolt felülete. Ha két sokszög egynél több pontban találkozik, akkor egy teljes élüknek közösnek kell lennie. Ezeket a síkbeli sokszögeket a poliéder **oldalainak**, élüket a poliéder **éleinek**, csúcsait pedig a poliéder **csúcsainak** nevezzük.



két felület összehangolása ami nem megengedett



egy általános poliéder

Így bármely  $P$  poliéderhez definiáljuk a következő három halmazt

$$F(P) := \{F_1, \dots, F_f\}, \text{ a } P \text{ oldalainak halmaza,}$$

$$E(P) := \{E_1, \dots, E_e\}, \text{ a } P \text{ élek halmaza,}$$

$$V(P) := \{V_1, \dots, V_v\}, \text{ a } P \text{ csúcsok halmaza,}$$

E halmazok kardinalitása a következőképpen definiált  $(f, e, v)$  hármas

$(f, e, v)$  :

$$f = |F(P)|, \text{ a } P \text{ oldalainaks záma,}$$

$$e = |E(P)|, \text{ a } P \text{ élek száma,}$$

$$v = |V(P)|, \text{ a } P \text{ csúcsok száma,}$$

**Definíció 1.4:**

Egy  $P$  poliéder **konvex**, ha a  $P$  két tetszőleges pontjára a köztük lévő egyenes szakasz teljes egészében a poliéder által határolt szilárd alakzatban van.

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy megadhatjuk a platói szilárd test definícióját.

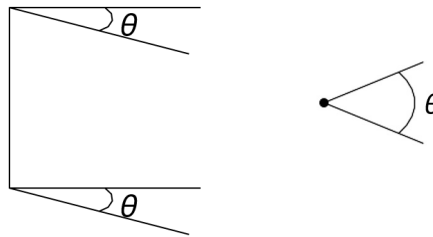
**Definíció 1.5:**

A **platóni test** olyan konvex poliéder, amelynek minden oldala egyenlő szabályos sokszög, és amelynek minden csúcán ugyanannyi oldal találkozik.

Ha a poliéder a konvexitás kivételével a platóni szilárd test minden tulajdonságának megfelel, akkor **szabályos poliédernek** nevezzük. A következő definíció bevezet egy további fogalmat a poliéderekre, amely különösen fontos a platonikus szilárd testek tulajdonságainak megállapításakor.

**Definíció 1.6:**

Egy poliéder két oldalának  $\theta$  **diéderes szöge** az a szög a két oldal között, amely egy élben találkozik

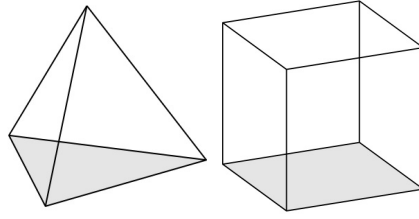


két felület  $\theta$  domborzati és síkbani dőlésszöge

## 1.2 Két példa a platóni szilárd testekre

A platóni szilárd test első példája a kocka, egy olyan alakzat, amelyet az olvasó valószínűleg már látott. A kocka hat egyenlő négyzetből áll, és minden csúc három négyzetet köt össze. A második példa a tetrahedron, egy háromszögletű piramis, amely négy szabályos háromszögből áll, és amelynek minden csúca három háromszöget köt össze.

A tetraéder dral szöge bármely két oldal esetén egyenlő. A kocka esetében a diéderes szög szintén azonos, és mivel bármely két, egy élen közös felület merőleges egymásra, a diéderes szög kilencven fok.



Tetraéder és kocka

## 2. Fejezet

---

# Euler képlete

---

Ebben a fejezetben bemutatjuk az Euler-formulát, és teljes bizonyítást adunk. Felvázoljuk a platóni testek osztályozásának bizonyításának fontos lépéseit.

### 2.1 Euler-képlet

Az Euler-képlet egy fontos, mégis egyszerű egyenlet, amely egy konvex poliéder oldalainak, élleinek és csúcsainak számát adja meg.

**Tétel 2.1:**

(Euler-képlet.) Legyen  $P$  egy konvex poliéder, amelynek az oldalainak, élleinek és csúcsainak száma  $f, e$  és  $v$ . Ekkor a következő egyenlet érvényes

$$f - e + v = 2$$

(3.1)

**Bizonyítás** > Legyen  $P$  egy konvex poliéder. A tételt három lépésben bizonyítjuk, szorosan követve Hartshorne [4] ben található bizonyítását.

**1. lépés.** Az első lépés  $P$  kivetítése a síkba. Mivel a poliéder konvex, lehetséges, hogy az egyik oldal középpontján átnézve az összes többi oldal átfedés nélkül látható. A poliédertől egy lépéssel hátrébb lépve láthatjuk annak az oldalnak az élét is, amelyen keresztül nézünk. Ezt a képet a síkba vetítve kapunk egy síkbeli alakzatot csúcsokkal és éllel. A vetítés nem őrzi meg a szögeket és a távolságokat, de az élek egyenesek maradnak, és nem metszik egymást az élek. A  $P$  oldalai megfelelnek az élek által a síkban korlátozott síkbeli sokszögeknek, kivéve az egyiket. Az oldal, amelyen keresztül az ember átnéz. Ez a konkrét felület megfelel a síknak a sík ábrán kívüli területének.

**2. lépés.** Következő lépésként két műveletet definiálunk a síkbeli ábrán:

1. él eltávolítása: *Az egyik él, amely elválaszt két felületet, vagy amely elválasztja az egyik felületet az ábrán kívüli területtől, és eltávolítjuk ezt az élt.* Ez eggyel csökkenti az él számát, de egyben eggyel csökkenti az arcok számát is, mivel a művelet egyesíti a két arcot, amelyeket az eltávolított él elválasztott egymástól. Így az  $f - e + v$  kifejezés értéke nem változik.
2. csúcsok eltávolítása: *Ha egy ponton az (i) eredményezi, hogy egy csúcshoz csak egy él kapcsolódik, akkor eltávolítjuk a csúcsot és az éleket is.* Ezáltal az él száma eggyel csökken, és ezúttal a csúcsok száma is eggyel csökken. Az eltávolított csúcspont pontosan egy síkbeli alakzat egyik felületén szerepelt, mivel a csúcs csak egy élhez kapcsolódott. Így az arcok száma nem változik. Így az  $f - e + v$  kifejezés értéke ismét változatlan marad.

**3. lépés.** Utolsó lépésként alkalmazzuk ezeket a műveleteket a sík ábrán. Az (i) műveletet addig ismételjük, amíg az már nem lehetséges. Ez azt jelenti, hogy a megmaradt ábrán nincsenek hurkok, és így legalább egy olyan csúcsnak kell lennie, amelyhez csak egy él kapcsolódik. Addig alkalmazzuk a (ii) műveletet, amíg a megmaradt ábrán csak csúcsok és él nem maradnak. Vegyük észre, hogy az eredeti ábra összefüggő, és az (i) vagy (ii) lépés végrehajtásával összefüggő marad, tehát csak egy csúcs maradt a síkban. És azt kapjuk, hogy:

$$f = 1, e = 0, v = 1$$

$$\implies f - e + v = 2$$

Mivel az  $f - e + v$  kifejezés értéke nem változik a műveletek többszöri alkalmazásával, az eredeti  $f - e + v$  kifejezés egyenlő 2-vel, így a bizonyítás befejeződött.

A platóni szilárd testek egyértelműen rendelkeznek ezzel a karakterisztikus hármassal  $(f, e, v)$ , amely kielégíti az Euler-formulát. Van azonban egy másik számpár is, amely a platóni szilárd testeket jellemzi. Ez a számpár közvetlenül a platóni testek definíciójából következik, és a következőképpen definiálható:

**Definíció 2.1:**

*Legyen  $P$  egy platóni szilárd test. Ekkor legyen  $n \in \mathbb{N}$  a  $P$  egy arcának csúcsainak száma, és  $c \in \mathbb{N}$  az olyan arcok száma, amelyek egy csúcsban találkoznak. Az  $(n, c)$  pár a **Schläfli** szimbólum egy speciális esete (lásd [2]).*

Ez a számpár jól definiálható, mivel a definíció szerint a platóni test minden oldala egyenlő szabályos  $n$ -poligon, és minden csúcson ugyanaz a  $c$  számú arcok találkoznak. Továbbá az egyes csúcsokban találkozó él számú is  $c$ , mivel bármely két szomszédos, egymással több pontban találkozó felületnek van egy közös éle.

## 2.2 Stratégia a platóni szilárd testek osztályozásának bizonyítására

Ebben a szakaszban négy lépésre bontva vázoljuk fel a bizonyítást, hogy pontosan öt platóni szilárd test létezik. Az első két lépést bizonyítjuk, míg a másik két lépést a következő fejezetekben egymástól függetlenül bizonyítjuk. A végső bizonyítást az 5. fejezetre halasztjuk. A fontos lépések vázlata a következő

1. Megmutatjuk, hogy a platonikus szilárdság definíciója korlátozza a lehetséges  $(n, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  párokat.
2. Bármely platóni szilárd test esetében összekötjük a két  $(n, c)$  számhalmazt, és  $(f, e, v)$  a két hasonlóan elrendezett poliéder definíciójának segítségével.
3. Bevezetjük a Cauchy-féle merevségi tételt.
4. Végül a Cauchy-féle merevségi tételt alkalmazzuk a platóni testek speciális esetére.

### Lemma 2.1:

*Egy platóni szilárd test esetében csak öt lehetséges  $(n, c)$  pár van, amelyek a következőkkel adódnak meg*

$$A := \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$$

*Bizonyítás* Legyen  $P$  egy konvex szabályos sokszög, amelyhez  $(n, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  és  $(f, e, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  hármas tartozik. Minden szabályos sokszögnek legalább három csúcsa van, és egy sokszög minden egyes csúcsához legalább három élt kell csatlakoztatni, hogy háromdimenziós alakzatot alkosson. Ezért a következő egyenlőtlenségek érvényesek:

$$n \geq 3 \text{ és } c \geq 3 \tag{3.2}$$

A következő lépés az, hogy közelebbről megvizsgáljuk a  $P$  poliéder éleinek megszámlálását: Minden él pontosan két élből jelenik meg a  $P$  sokszögben, és minden élhez  $n$  él tartozik. Továbbá minden él pontosan két csúcshoz kapcsolódik, és minden csúcs  $c$  éllel van összekötve. Így a következő két egyenlet érvényes:

$$fn = 2e = vc. \tag{3.3}$$

Tekintsük most az Euler-formulát, amely szerint  $f - e + v = 2$ , és helyettesítsük be  $f$  és  $v$ , hogy egy olyan egyenletet kapjunk, amely csak  $n$ -től,  $c$ -től és  $e$ -től függ:

$$2 = f - e + v = \frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{c} = \left( \frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{c} \right) e. \quad (3.4)$$

Mivel az  $e$  élek száma mindig pozitív, ebből következik, hogy a jobb oldali zárójelben lévő kifejezésnek is pozitívnek kell lennie. Ez a következő egyenlőtlenségekhez vezet:

$$\frac{2}{c} - 1 + \frac{2}{n} > 0 \iff \frac{1}{c} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{c} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad (3.5)$$

A (3.5) és  $n \geq 3$  alkalmazásából következik, hogy  $c < 6$ . Hasonlóképpen,  $c \geq 3$  alkalmazásával érvényes, hogy  $n < 6$ . A (3.2) feltételekkel együtt ez azt eredményezi, hogy

$$n \in \{3, 4, 5\}, c \in \{3, 4, 5\}$$

Ha a (3.5) egyenletbe beillesztjük az  $n$  összes lehetséges értékét, a következő öt  $(n, c)$  párt kapjuk.

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 : \frac{1}{c} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \implies c \in \{3, 4, 5\} \\ n = 4 : \frac{1}{c} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \implies c = 3 \\ n = 5 : \frac{1}{c} > \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \implies c = 3 \end{array} \right\} \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$$

Ezek a párok határozzák meg a platóni test öt lehetséges  $(n, c)$  párját, tehát A elemeit. Ezzel az első lemma bizonyítása lezárul.

**Lemma 2.2:**

*Bármely platonikus szilárd testre létezik egy leképezés az  $(n, c)$  párból a megfelelő  $(f, e, v)$  triplettre, amely a következő módon adódik*

$$e = \frac{2}{\left(\frac{2}{c} - 1 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$f = \frac{2e}{n}$$

$$v = \frac{2e}{c}$$

**Bizonyítás** Legyen  $P$  egy konvex szabályos poliéder. A 3.1. lemma bizonyításában szereplő egyenleteket használjuk, hogy találjunk egy explicit képletet  $e$ -re, amely csak  $n$ -től és  $c$ -től függ, majd ebből a képletből adódik egy explicit képlet  $f$ -re és  $v$ -re.

$$2 = f - e + v = \frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{c} = \left( \frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{c} \right) e \implies e = \frac{2}{\left( \frac{2}{c} - 1 + \frac{2}{n} \right)}. \quad (3.6)$$

$$fn = 2e = vc \implies f = \frac{2e}{n}, v = \frac{2e}{c} \quad (3.7)$$

Ezek a formulák jól definiáltak, mivel  $n, c \neq 0$  és  $\frac{2}{c} - 1 + \frac{2}{n} \neq 0$  az összes  $(n, c) \in A$ , ahol  $A$  a 3.1. lemma szerint az összes lehetséges  $(n, c)$  pár halmazát jelöli egy platóni szilárd test esetében. Annak igazolására, hogy  $f, e, v \in \mathbb{N}$ , minden  $(n, c) \in A$  értéket beillesztjük a képletekbe. Például  $(n, c) = (3, 3)$  esetén megkapjuk, hogy

$$e = \frac{2}{\left( \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} \right)} = \frac{2}{\left( \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} \right)} = 6$$

$$f = \frac{2e}{n} = \frac{12}{3} = 4$$

$$v = \frac{2e}{c} = \frac{12}{3} = 4$$

ami azt mutatja, hogy  $f, e, v \in \mathbb{N}(n, c) = (3, 3)$  esetén. A másik négy  $(n, c)$  párra vonatkozó ellenőrzés az olvasóra marad. Ezzel lezárul a Lemma 3.2.

A következő definícióra a fenti 2. lépés megoldásához van szükség, nevezetesen két azonos oldalszámú konvex poliéder közötti kapcsolat leírásához.

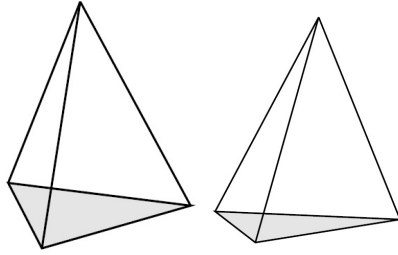
**Definíció 2.2:** *Legyen  $P, \bar{P}$  két poliéder. Ha egy bijekció*

$$\Phi : F(P) \rightarrow F(\bar{P})$$

*létezik, úgy, hogy minden  $F_k \in F(P)$  arc kongruens a  $\Phi F_k \in F(\bar{P})$  arccal, és úgy, hogy a  $\Phi$  a csúcsok és élek bijekciójává bővül, amely megőrzi az összes incidencia relációt, akkor  $P$ -t és  $\bar{P}$ -t **hasonlóan elrendezettnek** nevezzük.*

Ha két platóni test megfelel a fenti hipotézisnek, kivéve, hogy a felületük kongruens, akkor a kombinatorikusan ekvivalens kifejezést használjuk (pl. [1] 75. oldal). Mi a hasonlóan elrendezett kifejezéssel dolgozunk, mivel a dolgozat fő hivatkozási alapjául szolgáló [4] is ezt használja. A kombinatorikailag ekvivalens fogalma sokkal gyengébb, mint két poliéder kongruenciájának fogalma. Például két háromszög





3.1. ábra: Példa két kombinatorikailag ekvivalens poliéderre

alaprajzú és különböző magasságú piramis kombinatorikusan ekvivalens, de nem kongruens, ahogyan azt az alábbi 3.1. ábra szemlélteti.

A fenti 3. lépésben említett döntő fontosságú eredmény a Cauchy-féle merevségi tétel. Ezt az alábbi 5. fejezetben önállóan bizonyítjuk.

**Tétel 2.2: (Cauchy merevségi tétele (CRT).)**

*Legyen  $P, \bar{P}$  két kon- vex poliéder, amelyek kongruens oldalakból állnak. Tegyük fel, hogy  $P$  és  $\bar{P}$  hasonlóan elrendezettek. Akkor  $P$  és  $\bar{P}$  kongruensek.*

A CRT alkalmazásához, a fenti 4. lépésben leírtak szerint, szükség van egy utolsó lemmára, amely a CRT-ben szereplő feltevést egy platóni szilárd test  $(n, c)$  párjához kapcsolja.

**Lemma 2.3:**

*Ha két platóni testnek ugyanaz a  $(n, c)$  párja, akkor hasonlóan rendezettek.*

A lemma bizonyítását a következő fejezetre halasztjuk, ahol megadjuk a platóni testek oldalainak explicit jelölését, amelyet aztán a lemma bizonyítására fogunk felhasználni.

---

## A platóni szilárd test oldalainak címkézése

---

Ebben a fejezetben egy platóni szilárd test oldalainak lényegében egyedi jelölését állítjuk elő. Ezt az egyedi címkézést használjuk fel annak bizonyítására, hogy két azonos Schläfli-jelű platóni test hasonlóan elrendezett, ahogyan azt a 3.3. lemma kimondja.

### 3.1 Néhány fogalom megállapítása

Legyen  $P$  egy platóni test, amelynek Schläfli szimbóluma  $(n, c) \in A$ . Emlékezzünk vissza, hogy az  $n$  számot az egyes szabályos sokszögek, a platóni test oldalainak csúcsainak száma határozza meg, a  $c$  szám pedig azoknak az oldalaknak a száma, amelyek tartalmaznak egy  $V \in V(P)$  csúcsot. A 3.1. lemma alapján ez határozza meg a  $(f, e, v)$  hármasát, amely a  $F(P)$ ,  $E(P)$  és  $V(P)$  halmazok kardinálisait jelöli. A  $F(P)$  elemeit a háromdimenziós tér  $F_i \subseteq \mathbb{R}^3$  részhalmazaként definiálhatók a következő módon:  $E \in E(P)$  és  $V \in V(P)$ .

$$E_k = F_{i(k)} \cap F_{j(k)} \tag{4.1}$$

$$V_k = F_{j_1(k)} \cap \dots \cap F_{j_c(k)} \tag{4.2}$$

Megjegyezzük, hogy minden él a  $F(P)$  két egyedileg meghatározott, különböző  $F_{i(k)}$  és  $F_{j(k)}$  felület metszéspontja. Továbbá, minden csúcs a platóni test definíciója szerint  $c$  egyedileg meghatározott, különálló felület metszéspontja.

Minden platóni test esetében megmutatjuk, hogy az oldalak feliratozása úgy konstruálható, hogy az élek és csúcsok a (4.1) és (4.2) segítségével a feliratozás által meghatározottak legyenek. Pontosabban, minden egyes platóni testhez, amelyet a Schläfli szimbólum  $(n, c)$  és a megfelelő  $(f, e, v)$  hármas (Euler-hármas) jellemez, egy egyedi síkgráfot fogunk társítani, amely  $f$  arcot,  $e$  éleket és  $v$  csúcsokat tartalmaz, és amely megőrzi a platóni test összes incidenciaviszonyát.

Egy platóni test  $P$  ilyen címkézésének elkészítéséhez először válasszunk egy tetszőleges  $F_1$  lapot és egy tetszőleges  $V_1$  csúcsot  $F_1$ -en kezdőadatként. Bármely más kezdőadat, például  $F'_1$  és  $V'_1$   $F_1$ -en, ekvivalens izometriáig, mivel  $P$  összes lapja egybevágó, így létezik egy olyan egybevágóság, amely  $F_1$ -et  $F'_1$ -re és ezen felül  $V_1$ -et  $V'_1$ -re képezi le. A platóni test  $P$  konvexitása miatt azt is megkövetelhetjük, hogy ez

az egybevágóság  $F_1$  kifelé mutató normálvektorát  $F'_1$  kifelé mutató normálvektorára képezze le.

A következő szakaszokban a  $F(P)$  összes arcára adunk egy ilyen, lényegében egyedi jelölést. Ezt a címkézést fogjuk használni a 3.2. Lemma bizonyítására:

Adott két  $P$  és  $\bar{P}$  platóni test, amelyeknek ugyanaz a Schläfli szimbóluma  $(n, c)$ , feltételezzük, hogy a  $F(P)$  és a  $F(\bar{P})$  összes arcát ilyen címkézéssel jelölték. Ekkor definiálhatjuk a következő leképezést:

$$\begin{aligned} \Phi : F(P) &\rightarrow F(\bar{P}) \\ F_i &\rightarrow \bar{F}_i \end{aligned}$$

Mivel az arcok közötti incidenciaviszonyokat a címkézés határozza meg, a  $\Phi$  tartománya kiterjeszthető az arcok halmazából a platóni testek éléinek és csúcsainak halmazára. A (4.1) és (4.2) egyenletek alapján a  $\Phi$  kiterjesztésére a következő definíciót adjuk:

$$\begin{aligned} \phi(E_k) &= \phi(F_{i(k)} \cap F_{j(k)}) := \phi(F_{i(k)}) \cap \phi(F_{j(k)}) \\ \phi(V_k) &= \phi(F_{j_1(k)} \cap \cdots \cap F_{j_c(k)}) = \phi(F_{j_1(k)}) \cap \cdots \cap \phi(F_{j_c(k)}) \end{aligned}$$

A  $\Phi$  kibővített definíciójából és a  $F(P)$  lényegében egyedi labelingjéből következik, hogy az incidenciarelációk megmaradnak, és így a 3.7. Lemma bizonyítása befejeződött. A 3.7. lemma ismét részletesebben a következőképpen fogalmazható meg

**Tétel 3.1:**

*Legyen  $P$  és  $\bar{P}$  két platóni test, amelyeknek ugyanaz a Schläfli szimbóluma  $(n, c) \in A$ . Tegyük fel, hogy a  $F(P)$  és a  $F\bar{P}$  összes arcát ugyanazzal a címkézéssel jelöltük, ami ugyanahhoz a síkgráfhoz vezet. Ekkor a  $\Phi : F(P) \rightarrow F(\bar{P}), F_i \rightarrow \bar{F}_i$  leképezés kiterjeszthető  $P$  és  $\bar{P}$  éléinek, illetve csúcsainak halmazára, azaz  $P$  és  $\bar{P}$  hasonlóan elrendezett.*

### 3.2 Az első részleges címkézés

Adott egy Schläfli szimbólummal  $(n, c)$  rendelkező  $P$  platonikus test,  $F_1$  kezdőfelülettel és  $V_1$  kezdőcsúccsal az  $F_1$  -ben, meghatározzuk a következő, lényegében egyedi címkézését

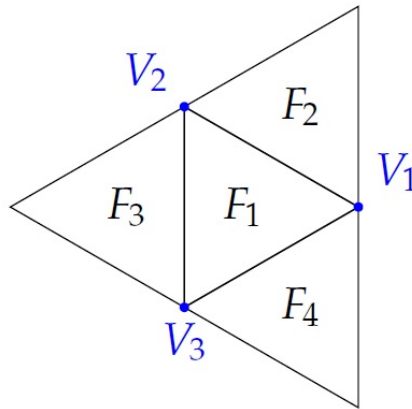
$P$  első  $n+1$  arcát. Az egyediség garantálása érdekében az  $F_1$  arc pozitív orientációját az  $F_1$   $P$ -ből kifelé mutató normálvektorával határozzuk meg. Ez lehetővé teszi, hogy az arcok következő részleges címkézését és az incidencia relációkat egyedivé tegyük.

1.  $V_1$  -től kezdve címkézzük fel az  $F_1$  minden olyan csúcsát, amely az  $F_1$  normális vektorához képest az óramutató járásával ellentétes sorrendben egy szabályos

$n$  poligont alkot, úgy, hogy  $(V_i, V_{i+1})$   $i = 1 \dots, n - 1$  és  $(V_n, V_1)$  az  $F_1$  élei legyenek.

2.  $k = 2 \dots, n$  jelöljük  $F_k$  -val azt a jelöletlen arcot, amely osztozik az éllel  $(V_{k-1}, V_k)$   $F_1$  arccal.
3. Végül jelölje  $F_{n+1}$  azt az arcot, amelynek a közös éle  $(V_n, V_1)$   $F_1$  arccal.

Ez a  $P$   $n + 1$  felületének címkézése. Vegyük észre, hogy az egymás után következő  $F_{k-1}$  és  $F_k$  nem feltétlenül osztoznak egy élen.



4.1. ábra: A Schläfli szimbólummal  $(3, c)$  jelzett platonikus szilárd test első részleges jelölésének illusztrációja

**Lemma 3.1:**

*Legyen  $P$  egy platonikus szilárd test, amelynek Schläfli szimbóluma  $(n, c)$ . Tegyük fel, hogy a  $F(P)$  első  $n + 1$  oldala a fenti részleges feliratozás szerint van felcímkézve. Ekkor a következő három állítás érvényes*

1.  $F_1 \cap F_i$  egy él  $i = 2 \dots, n + 1$  re.
2. Minden  $V_i$  csúchhoz három,  $V_i$  -t tartalmazó felületet jelöltünk  $i = 1, \dots, n$ .
3. Ha  $c = 3$ , akkor  $F_{n+1} \cap F_2$  és  $F_i \cap F_{i+1}$  élek az  $E(P)$ -ben  $i = 2, \dots, n$ .
4. Ha  $c \geq 4$ , akkor  $F_{n+1} \cap F_2$  és  $F_i \cap F_{i+1}$  nem tartalmaz  $E(P)$  éleket  $i = 2 \dots, n$ .

**Bizonyítás**

1. Az első  $n + 1$  felület első részleges címkézéséből következik, hogy  $F_1 \cap F_i$  egy él  $i = 2 \dots, n + 1$  re.
2. Mivel  $c \geq 3$  a platonikus testek esetében, legalább három olyan felület van, amely tartalmazza  $V_i, i = 2 \dots, n$ . A konstrukció szerint  $F_i$  él  $(V_{i-1}, V_i)$  és  $F_{i+1}$  él  $(V_i, V_{i+1})$ . Így  $F_1, F_i$  és  $F_{i+1}$  tartalmazzák  $V_i$  -t. Az  $F_1, F_2$  és  $F_n$  oldalak tartalmazzák  $V_n$  -t.

3. 3. Ahogy a (2.) bizonyításánál láttuk,  $F_1$ ,  $F_i$  és  $F_{i+1}$  tartalmazzák  $V_i$ -t. Ha feltételezzük, hogy bizonyos  $i$  esetén  $F_i \cap F_{i+1}$  nem él, akkor (1.) azt jelenti, hogy létezik még legalább egy él, amely tartalmazza  $V_i$ -t. Ez ellentmond  $c = 3$ -nak, és így  $F_i \cap F_{i+1}$  egy él  $E(P)$ -ben. Hasonló érvelés azt mutatja, hogy  $F_{n+1} \cap F_2$  egy él  $E(P)$ -ben.
4. 4. Ismét azt használjuk, hogy  $F_1$ ,  $F_i$  és  $F_{i+1}$  tartalmazza  $V_i$  az  $i = 2, \dots, n$ . Ha feltételezzük, hogy bizonyos  $i$  esetén  $F_i \cap F_{i+1}$  egy él, akkor (1.) azt jelenti, hogy csak ez a három oldal tartalmazza  $V_i$ -t. Ez ellentmond  $c > 3$ . Hasonló érvelés azt mutatja, hogy  $F_{n+1} \cap F_2$  nem él  $E(P)$ -ben.

A platóni testek első részleges feliratozását az öt lehetséges Schlafli-szimbólum mindegyikére alkalmazzuk. Egyes esetekben a címkézés teljes, míg más esetekben még több munkára van szükség ahhoz, hogy a címkézést az összes felületre kiterjesszük.

### 3.3 Az első két eset

#### *Schlaflí szimbólum* (3, 3)

A platonikus szilárdtest Schlafli szimbólummal (3, 3) való feliratozása a 4.2. szakaszban található első részleges feliratozással teljes. Ennek ellenőrzésére tekintsük az Euler-hármaszt  $(f, e, v) = (4, 6, 4)$ , amely a Schlafli szimbólumhoz  $(n, c) = (3, 3)$  tartozik. A konstrukció szerint a poliéder minden  $n + 1 = 4 = f$  oldala fel van címkézve. Mivel az első részleges címkézés egyedi, ezért ennek a platóni testnek a címkézése is egyedi, és ez az eset teljes.

A címkézés megfelelő síkgráfjának meghatározásához vizsgáljuk meg a csúcsok halmazát. A 4.1. lemma alapján a három csúcsot,  $V_1, V_2, V_3$  három arc tartalmazza, mégpedig,

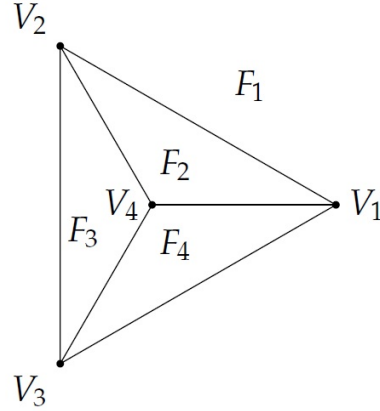
$$\begin{aligned} V_1 &= F_1 \cap F_2 \cap F_4, \\ V_2 &= F_1 \cap F_2 \cap F_3, \\ V_3 &= F_1 \cap F_3 \cap F_4. \end{aligned}$$

Van egy negyedik csúcs  $V_4 = F_2 \cap F_3 \cap F_4$ . Az így kapott síkgráf a következő  $f = 4$  felület,  $e = 6$  él és  $v = 4$  csúcs, amint azt a 4.2. ábra szemlélteti

#### *Schlaflí szimbólum* (4, 3)

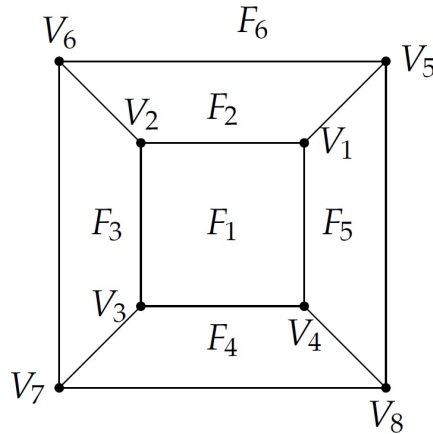
A (4, 3) Schlafli-jelű és a (6, 12, 8) Euler-hármaszt tartalmazó  $P$  platóni testnek hat oldala van. A 4.2. szakasz első részleges feliratozása  $n + 1 = 5 = f - 1$  arcot sorol fel. A címkézés egyedileg kiterjesztett, mivel nincs más választásunk, mint a  $P$  egyetlen jelöletlen arcát  $F_6$ -val jelölni. A hatodik arc címkéje egyedileg meghatározott, és az első öt arcot az első részleges címkézés jelöli, így a Schlafli (4, 3)szimbólummal rendelkező  $P$  platonikus test címkézése egyedi, és ez az eset teljes.

A Schlafli szimbólummal (4, 3) jelölt platóni test megfelelő gráfjának meghatározásához az élek halmazát tekintjük. A 4.2. lemma alapján négy él esik  $F_1$ -ra, négy él



4.2. ábra: Az egyedi címkézésből eredő síkgráf a Schläfli szimbólummal  $(3, 3)$  rendelkező platonikus szilárd test esetében.

$(F_k \cap F_{k+1})$   $k = 2, 3, 4$  és  $(F_5 \cap F_2)$  formájú. Továbbá négy él esik  $F_6$ -ra. Ez és az első  $n$  csúcs jelölése a megfelelő egyedi gráfot eredményezi, amelynek  $f = 6$  arca,  $e = 12$  éle és  $v = 8$  csúcsa van, amint az a 4.3. ábráról leolvasható.



4.3. ábra: Egy platonikus test egyedi síkgráfjának ábrázolása Schläfli szimbólummal  $(4, 3)$ .

### 3.4 A második részleges címkézés

A következő részleges feliratozás a  $P$  platonikus szilárd test oldalainak feliratozására vonatkozik azokra az esetekre, amikor az arcok száma  $c$  nagyobb, mint három. Jelölje  $W \subseteq V(P)$  a csúcsok azon halmazát, amelynek minden  $W$ -ben lévő csúcsa pontosan három, már felcímkézett arcból áll. A következő részleges címkézés során a fennmaradó, még fel nem címkézett,  $V_i \in W$  csúcsokat tartalmazó arcból akarjuk felcímkézni. A 4.2. Lemma alapján minden egyes  $V_i \in \{V_1, \dots, V_n\}$ , pontosan három olyan felcímkézett felület létezik, amely tartalmazza  $V_i$ -t, és így  $W = \{V_1, \dots, V_n\}$ . Ez azt jelenti, hogy a  $V_i$ -t tartalmazó címkézetlen felületek

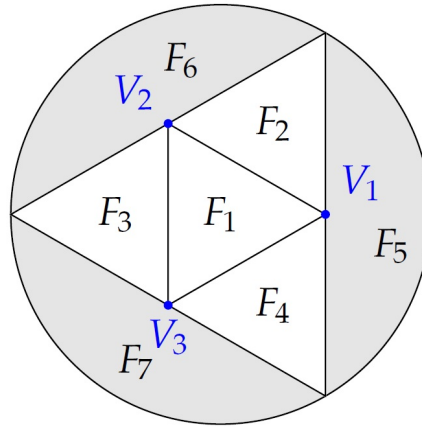
száma egyenlő  $(c - 3)$ . Így a  $W$  csúcsait tartalmazó címkézetlen arcok száma összesen legfeljebb  $n(c - 3)$ .

A második részleges címkézést a következőképpen alakítjuk ki: Az  $i = 1 \dots, n$ , a fennmaradó  $(c - 3)$  felcímkézetlen,  $V_i$ -t tartalmazó felületeket az óramutató járásával ellentétes sorrendben, az  $F_1$   $P$ -ből kifelé mutató normális vektorához képest az óramutató járásával ellentétes irányban címkézzük.

$c = 4$  *eset*. Az  $n$  újonnan felcímkézett  $F_{n+2} \dots, F_{2n+1}$ -nek meg kell felelnie a következő összefüggéseknek

$$V_1 = F_1 \cap F_2 \cap F_{n+1} \cap F_{n+2},$$

$$V_i = F_1 \cap F_i \cap F_{i+1} \cap F_{(n+1)+i}, \quad i = 2 \dots, n$$



4.4. ábra:  $c = 4$  *eset*

$c = 5$  *eset*. A  $2n$  újonnan felcímkézett  $F_{n+2} \dots, F_{3n+1}$ -nak meg kell felelnie a következő összefüggéseknek

$$V_1 = F_1 \cap F_2 \cap F_{n+1} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3},$$

$$V_i = F_1 \cap F_i \cap F_{i+1} \cap F_{(n+1)(2i-1)} \cap F_{(n+1)(2i)}, \quad i = 2 \dots, n$$

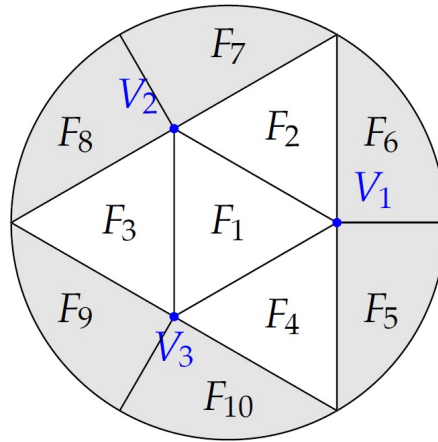
A következő lépésünk az, hogy esetről esetre megmutassuk, hogy ez a címkézési folyamat egyetlen arcot sem jelölt meg kétszer. Az első részleges címkézés azt eredményezi, hogy  $F_1 \dots, F_{n+1}$  különbözőek.

A 3. fejezetből ismert, hogy  $(n, 4) = (3, 4)$  és  $(n, 5) = (3, 5)$  az egyetlen lehetséges Schläfli szimbólum. E két esetre a második részleges címkézést a 4.4. és a 4.5. ábra szemlélteti.

$c = 4$  *eset*. Minden olyan felület, amely ugyanazt a csúcsot tartalmazza, különböző. Ellenkező esetben  $c < 4$  lenne, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy  $F_5 \notin \{F_1, F_2, F_4\}$ ,  $F_6 \notin \{F_1, F_2, F_3\}$  és  $F_7 \notin \{F_1, F_3, F_4\}$ . Továbbá  $F_5$  tartalmazza  $V_1$

-t, de  $F_3, F_6$  és  $F_7$  nem, és így  $F_5 \notin \{F_3, F_6, F_7\}$ .  $F_6$  tartalmazza  $V_2$ -t, de  $F_4, F_5$  és  $F_7$  nem, ezért érvényes, hogy  $F_6 \notin \{F_4, F_5, F_7\}$ .  $F_7$  tartalmazza  $V_3$ -t, de  $F_2, F_5$  és  $F_6$  nem tartalmazza, és ebből következik, hogy  $F_5 \notin \{F_2, F_5, F_6\}$ . Ez azt jelenti, hogy az összes  $F_1 \dots, F_7$  különbözőek.

$c = 5$  *eset*. Ismét érvényes, hogy minden olyan felület, amely ugyanazt a csúcsot tartalmazza, különböző. Ellenkező esetben  $c < 5$  lenne, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy  $F_5 \notin \{F_1, F_2, F_4, F_6\}$ . Továbbá  $F_5$  tartalmazza  $V_1$ , de  $F_3, F_7, F_8, F_9$  és  $F_{10}$  nem, és így  $F_5 \notin \{F_3, F_7, F_8, F_9, F_{10}\}$ . Hasonlóképpen megmutathatjuk, hogy minden arc  $F_6 \dots, F_{10}$  különbözik az összes többi arctól. Ez azt jelenti, hogy minden  $F_1 \dots, F_{10}$  különbözőek. A második címkézés konstruktálásával az összes  $F_1, F_2 \dots, F_{(n+1)+n(c-3)}$  egyedi, és az incidenciaviszonyokat a 4.4. és a 4.5. ábra egyedi síkgráfjai határozzák meg.



4.5. ábra:  $c = 5$  *eset*

### 3.5 A többi eset

Mielőtt a Schlafli szimbólumok következő esetével foglalkoznánk, a következő lemma következik, ahol egy  $P$  platonikus test  $f - 1$  felületét egyedi címkézéssel jelöltük, így  $P$  összes felületére egyedi címkézés adódik.

**Lemma 3.2:**

*Legyen  $P$  egy platonikus szilárd test, amelynek Schlafli szimbóluma  $(n, c)$ . Tegyük fel, hogy  $f - 1$  arcot már felcímkéztünk egy egyedi címkézéssel. Ekkor a  $F(P)$  összes  $f$  felületének címkézése egyedi*

**Bizonyítás** Az utolsó felcímkézetlen arc egyedileg meghatározott, és  $F_f$ -val jelölhető. Ez az utolsó lépés a  $P$  arcainak címkézése egyedi. Mivel a többi  $f - 1$  arc feliratozása is egyedi, az állítás következik.

**Schlaflí szimbólum** (3, 4)

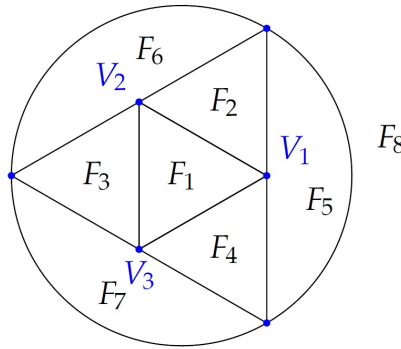
A Schlafli szimbólummal (3, 4) és Euler-hármassal (8, 12, 6) rendelkező  $P$  platonikus



test esetében az látjuk, hogy az első részleges feliratozásban  $n + 1 = 4 = \frac{1}{2}f$  arcot sorolunk fel

A 4.1. Lemma alapján következik, hogy minden  $V_1 \dots, V_n$ , három, ezeket a csúcsokat tartalmazó felület már fel van címkézve. Így alkalmazhatjuk a 4.4. szakaszban leírt második részleges címkézést. Ez további  $n$  arcot címkéz, és így összesen  $2n + 1 = 7 = f - 1$  arcot címkézünk. A 4.3. Lemma alapján az utolsó  $F_8$  felületet egyértelműen felcímkézhetjük, és a címkézés teljes.

A hozzátartozó síkgráfnak  $f = 8$  oldala,  $e = 12$  éle és  $v = 6$  csúcsa van. A csúcsok mindegyike egyedileg meghatározott az azt tartalmazó négy oldal által



4.6. ábra: A  $(3, 4)$  Schläfli szimbólummal rendelkező platonikus testhez tartozó egyedi síkgráf ábrázolása.

### Schläfli szimbólum $(5, 3)$

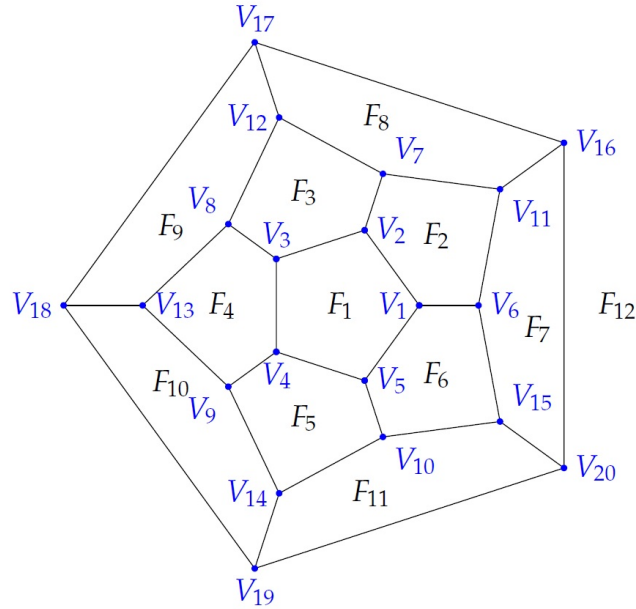
A  $(3, 4)$  esethez hasonlóan az első részleges címkézés pontosan a  $P$  platóni test oldalainak felét jelölte meg, amelynek Euler-hármasa  $(f, e, v) = (12, 30, 20)$ . A 4.1. lemma alapján következik, hogy minden olyan felület, amely  $V_1 \dots, V_n$  már felcímkéztük, mivel  $c = 3$ . És mivel  $c = 3$ , a második részleges címkézés nem alkalmazható, és egy másik konstrukcióra van szükség

Az első részleges címkézés meghatározza az  $F_1 \dots, F_6$  és a csúcsokat  $V_1 \dots, V_5$  a 4.7. ábrán látható módon. A 4.1. Lemma alapján minden  $F_2 \dots, F_6$  pontosan két csúcsot tartalmaz a  $V_1 \dots, V_5$ , míg további három csúcsot még nem jelöltünk meg. A következő lépés ezeknek a csúcsoknak a felcímkézése.

Jelöljük a két felcímkézett arcban található négy csúcsot,  $F_i$  és  $F_{i+1}$ ,  $i = 2 \dots, n, V_{n+i}$ -vel, és legyen  $V_{2n}$  az  $F_2$  és  $F_{n+1}$ -ben található csúcs. Jelöljük az egyetlen felcímkézett felületen található csúcsokat  $F_i$ ,  $i = 2 \dots, n + 1, V_{i+9}$ -el. A definíció szerint a  $V_6 \dots, V_{10}$  két felcímkézett felületen találhatóak, és mivel  $c = 3$  az összes  $V_i \in \{V_6 \dots, V_{10}\}$ , pontosan egy olyan címkézetlen felület van, amely tartalmazza  $V_i$ -t. Jelöljük ezt az egyedileg meghatározott felületet  $F_{i+1}$ ,  $i = 6 \dots, 10$ .

Az első felírás konstruálása alapján tudjuk, hogy az  $F_1 \dots, F_6$  különbözőek. Már csak azt kell megmutatni, hogy az  $F_7 \dots, F_{10}$  különállóak. Először is,  $i = 6 \dots, 10$ , az  $F_i$  felület tartalmazza a  $V_{i-1}$  csúcsot, de a másik négy felület nem. Másodszor, a  $V_i$ -t tartalmazó három felület,  $i = 6 \dots, 10$ , szintén különállóak kell lennie, mivel

különben  $c < 3$ . Ez azt jelenti, hogy az összes  $F_1 \dots, F_{11}$  különálló. Ezen a ponton  $11 = f - 1$  arcot jelöltünk meg egyértelműen  $P$ -ben. A 4.2. Lemma azt jelenti, hogy létezik az utolsó  $F_{12}$  arc egyedi jelölése, és ez az eset teljes. A 4.7. ábrán látható a platóni test megfelelő egyedi síkgráfja  $f = 12$  arccal,  $e = 30$  éllel és  $v = 20$  csúccsal.

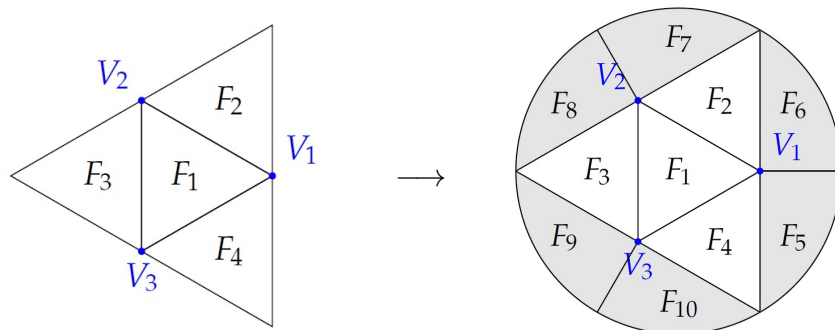


4.7. ábra: Egy platóni test egyedi síkgráfjának ábrázolása Schläfli szimbólummal  $(5, 3)$ .

**Schläfli szimbólummal  $(3, 5)$ .**

Ismét az első részleges címkézéssel kezdjük, amely egy  $P$  platonikus test  $n + 1$  felületét jelöli Schläfli szimbólummal  $(3, 5)$ . A 4.1. lemma alapján minden  $V_1, V_2, V_3$  csúcs három felcímkézett felületen található. Mivel  $n = 3sc = 5$ , ezért a következőkre következtethetünk

soroljuk fel a következő  $(c - 3)n = 6$  felületet a második részleges címkézéssel a 4.4. szakaszban részletesen leírtak szerint. Ennek eredményeként tíz  $F_1 \dots, F_{10}$  felíratot kaptak a 4.8. ábrán látható módon.



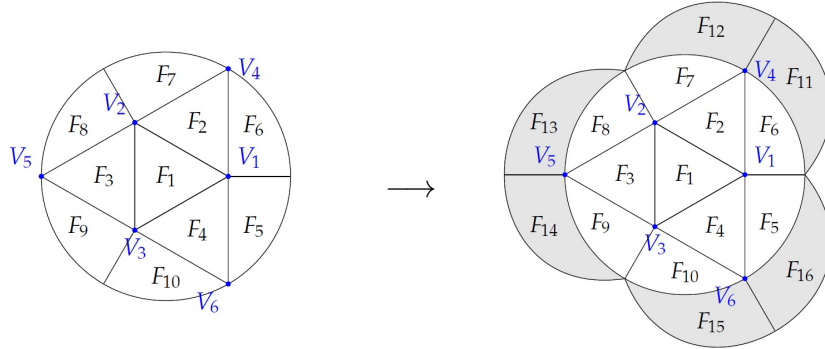
4.8. ábra:  $P$  felcímkézett oldalainak síkgráfja Schläfli szimbólummal  $(3, 5)$ : Az első részleges címkézés felcímkézett felületeiről a második részleges címkézés felcímkézett felületeihez.

Az első részleges címkézés konstrukciója szerint az  $F_2 \dots, F_{n+1}$  két felcímkézett csúcsot tartalmaz, és minden  $F_2 \dots, F_{n+1}$  háromszögének minden egyes pontja eddig a pontig nem volt felcímkézve. Ha feltételezzük, hogy ez minden  $n$  oldalnak ugyanaz a csúcsa, akkor Schläfli szimbólummal  $(3, 3)$  rendelkező platóni testet kapnánk, ami ellentmondás. Ha feltételezzük, hogy csak két csúcs van, akkor az egyes csúcsok  $c$  száma nem lenne minden csúcsra ugyanaz, ami ellentmondás a platóni szilárd test definíciójának. Így a fennmaradó három, az  $F_i$  egyik felületén található, feliratozatlan csúcsot  $V_{i+2}, i = 2 \dots, n + 1$ , ahogy a 4.9. ábrán látható.

Ezek az újonnan felcímkézett csúcsok  $V_4, V_5, V_6$  mindegyike három felcímkézett felületen található, és így a csúcsok megfelelnek a második részleges címkézés feltételezéseinek. A második részleges címkézés folyamatát a  $\{V_4, V_5, V_6\}$  csúcsok halmazán alkalmazva további hat  $F_{11} \dots, F_{16}$  kapunk. A következő lépés az, hogy megmutassuk, hogy az újonnan felcímkézett  $F_{11} \dots, F_{16}$  különböznek egymástól és a másik tíz,  $F_1 \dots, F_{10}$ .

Először is, a  $V_i$  csúcsot tartalmazó öt felület,  $i = 4, 5, 6$ , különböző, mert különben  $c < 5$ . Ebből következik, hogy  $F_{11}$  és  $F_{12}$  nem egyenlő az  $F_2, F_6, F_7$  felületekkel, valamint  $F_{11} \neq F_{12}$ . Ugyanez érvényes a  $V_5$  és  $V_6$  felületeket tartalmazó felületekre is:  $F_{13}, F_{14} \notin \{F_3, F_8, F_9\}, F_{13} \neq F_{14}$ , továbbá  $F_{15}$  és  $F_{16}$  nem szerepelnek az arcok halmazában.

$\{F_4, F_5, F_{10}\}$ , és  $F_{15}$  nem egyenlő  $F_{16}$  -al. Másodszor,  $F_{11}$  és  $F_{12}$  tartalmazzák  $V_4$  -t, de a  $\{F_1, F_3, F_4, F_5, F_8, F_9, F_{10}, F_{13} \dots, F_{16}\}$  nem tartalmazzák. Ezért  $F_{11}$  és  $F_{12}$  nem lehet ebben a halmazban. A fenti első érveléssel együtt az következik, hogy  $F_{11}, F_{12} \notin \{F_1 \dots, F_{10}, F_{13} \dots, F_{16}\}$ . Hasonlóképpen megmutathatjuk, hogy az  $F_{13}, F_{14}$  és az  $F_{15}, F_{16}$  arcpárok különböznek az összes többi felcímkézett arctól. Így tehát a tizenhat  $F_1 \dots, F_{16}$ .



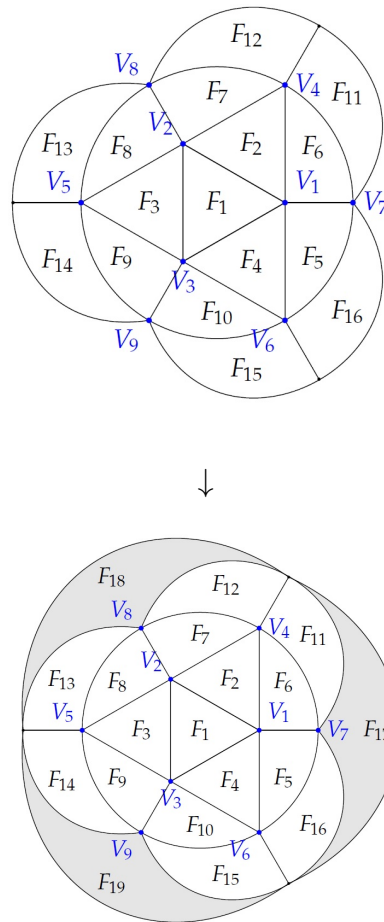
4.9. ábra: Három új csúcs feliratozása  $V_4, V_5, V_6$  és a második részleges címkézés újbóli alkalmazása

A következő lépés az összes olyan csúcs felcímkézése, amelyet négy felcímkézett felület tartalmaz. Amint azt a 4.9. ábra jobb oldali gráfja mutatja, három ilyen csúcs van. Az  $F_5, F_6, F_{11}$  és  $F_{16}$  feliratú felületek által tartalmazott csúcsot  $V_7$  -vel jelöljük. Az óramutató járásával ellentétes irányban haladva a következő, négy feliratozott felületek által tartalmazott csúcsot, nevezetesen az  $F_7, F_8, F_{12}$  és  $F_{13}$  felületek által tartalmazott csúcsot  $V_8$  -vel jelöljük. Az utolsó csúcsot, amelyet az  $F_9, F_{10}, F_{14}$  és

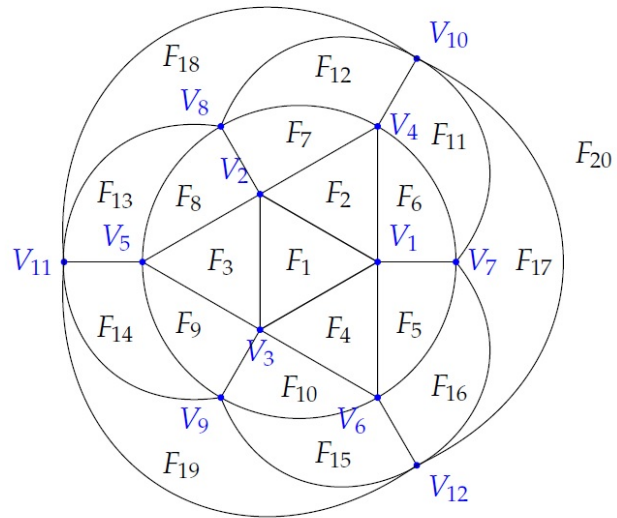
$F_{15}$  tartalmaz,  $V_9$  jelöli. A három újonnan címkézett csúcsot, a  $V_7, V_8, V_9$  csúcsokat a 4.10. ábra felső gráfja mutatja.

A konstrukció szerint minden újonnan címkézett csúcsnak pontosan egy címkézetlen arca van. Ezt a  $V_i$ -t tartalmazó arcot  $F_{i+10}$ -vel jelöljük,  $i = 7, 8, 9$ , amint azt a 4.10. ábra alsó gráfja mutatja.

Megmutatjuk, hogy  $F_{17} \notin \{F_1 \dots, F_{16}, F_{18}, F_{19}\}$ , hasonlóan érvelünk, mint az előző lépésben, azaz figyelembe vesszük a  $V_7$ -t tartalmazó négy másik felületet  $F_5, F_6, F_{11}, F_{16}$ , és a  $V_7$ -t nem tartalmazó tizennégy felületet. Hasonló érvelés vonatkozik az  $F_{18}$  és  $F_{19}$  felületekre is. Így megállapíthatjuk, hogy az összes  $19 = f - 1$  felület  $F_1 \dots, F_{19}$  különbözőek. A 4.2. Lemma alkalmazásával a fennmaradó  $F_{20}$  arcnak is van egyedi jelölése, és ez utóbbi eset teljes. Az így kapott síkgráf  $f = 20$  arccal,  $e = 30$  éllel és  $v = 12$  csúccsal rendelkezik.



4.10. ábra: Három csúcs feliratozása  $V_7, V_8, V_9$  és három felületet  $F_{17}, F_{18}, F_{19}$



4.11. ábra: Egy platonikus szilárd testhez tartozó egyedi síkgráf Schlafli szimbólumokkal (3, 5)

## Euklidész Platóniai szilárd testek osztályozása

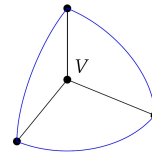
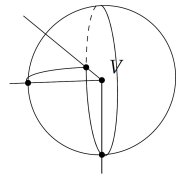
Ez a fejezet a legfrissebb törekvésekről számol be, amelyek arra irányultak, hogy Euklidész platóni szilárd testek osztályozásának szigorú bizonyítása végül a tizenkilencedik és huszadik században valósult meg. Kitér Steinitz és Cauchy fontos eredményeire

### 4.1 Segéderedmények

#### Definíció 4.1:

Legyen  $V$  egy adott  $P$  poliéder egy csúcsa. A  $F(P)$   $V$ -t tartalmazó oldalainak a csúcstalpon lévő kis gömbbel való metszése egy gömbölyű sokszöget eredményez, amelyet a  $V$  csúcson **csúcsgömbnek** nevezünk.

Figyeljük meg, hogy a csúcs alakzat belső szögei megegyeznek a kiindulási poliéder kétoldalú szögeivel.



- (a) Kis gömb, amelynek középpontja a  $V$  csúcsban van, és amely metszi a poliédronokat. (b) Az eredményül kapott gömbi sokszög a  $V$  csúcsban

Egy kocka csúcsfigurájának vizualizációja

**Lemma 4.1: (Steinitz.)**

Legyen  $p = V_1 \cdots V_n$  és  $q = W_1 \cdots W_n$  két poligon a síkban, ahol  $V_i$  és  $W_i$  a megfelelő poligonok csúcsait jelöli,  $i = 1 \dots, n$ . Tegyük fel, hogy mindkét sokszög minden oldala egyenlő, kivéve az utolsót, azaz

$$l(V_i V_{i+1}) = l(W_i W_{i+1}), i = 1 \dots, n - 1$$

ahol  $l(V_i V_{i+1})$  a  $p$ -ben a  $V_i$ -t és a  $V_{i+1}$ -t összekötő él hosszát jelöli, és analóg módon a  $q$ -ban lévő élek hosszát. Tegyük fel azt is, hogy az első sokszög szögei kisebbek vagy egyenlőek a második sokszög szögeivel, azaz,

$$\angle V_i \leq \angle W_i, i = 2 \dots, n - 1,$$

legalább egy szigorú egyenlőtlenséggel. A  $V$  csúcsban találkozó két él közötti szöget  $\angle V$ -vel jelöljük. Ekkor

$$l(V_n V_1) < l(W_n W_1).$$

**Bizonyítás** A lemma bizonyítása  $n$ -re való indukcióval történik. Legyen  $p$  és  $q$  két konvex sokszög, amelyeknek ugyanannyi  $n$  csúcsa van.

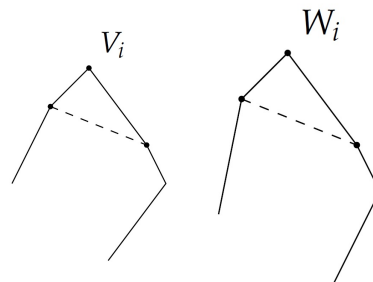
**I. eset:**  $n = 3$  Ez Euklidész első könyvének 24. tétele

Tegyük fel, hogy a két  $p$  és  $q$  háromszög két oldala egyenlő, de az egyik benne lévő szög nagyobb, mint a másik. Ebből következik, hogy a  $p$  alapja is nagyobb, mint a  $q$  alapja.

**II. eset:**  $n \geq 4; \exists i : \angle V_i = \angle W_i$

A két háromszög  $V_{i-1} V_i V_{i+1}$  és  $W_{i-1} W_i W_{i+1}$  kongruens. Mivel  $l(V_{i-1} V_i) = l(W_{i-1} W_i)$ , valamint  $l(V_i V_{i+1}) = l(W_i W_{i+1})$ , ebből következik, hogy

$$l(V_{i-1} V_{i+1}) = l(W_{i-1} W_{i+1}),$$



Két sokszög ábrázolása, ahol  $\angle V_i = \angle W_i$

Nézzük meg a sokszögeket a  $V_i$  és  $W_i$  csúcsok kihagyásával:

Ezek az új sokszögek  $n - 1$  éllel rendelkeznek, és megfelelnek a lemma feltételezéseinek, így alkalmazzuk az indukciós hipotézist, és az eredmény következik.

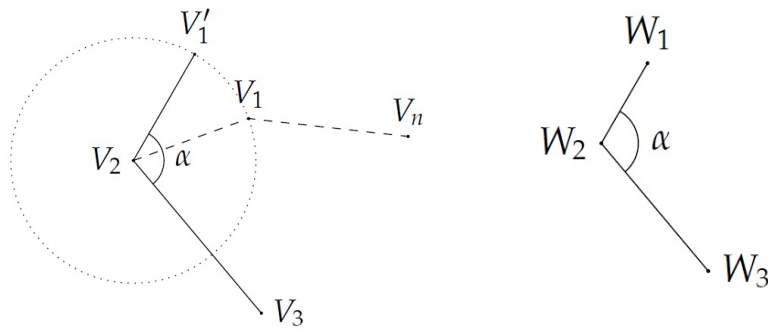
**III. eset:**  $n \geq 4; \forall i : \angle V_i < \angle W_i$

Ebben az esetben egy új  $V'_1$  pontot kell konstruálni úgy, hogy

$$l(V'_1V_2) = l(V_1V_2)$$

$$\angle V'_1V_2V_3 = \angle W_2$$

ahol  $\angle V'_1V_2V_3$  az új él  $V'_1V_2$  és  $V_2V_3$  közötti szög  $V_2$  helyen.



A  $V'_1$  konstrukció illusztrációja

Először is, hasonlítsuk össze a  $V_1 \cdots V_n$  poligont a  $V'_1V_2 \cdots V_n$  poligonnal. Érvényes, hogy

$$\angle V_3 = \angle V_3 \xrightarrow{\text{III Eset}} l(V_nV_1) < l(V_nV'_1)$$

Másodszor, összehasonlítjuk a  $V'_1V_2 \cdots V_n$  sokszöget a  $W_1 \cdots W_n$  sokszöggel. Érvényes, hogy

$$\angle V'_1V_2V_3 = \angle W_2 \xrightarrow{\text{III Eset}} l(V_nV_1) < l(V_nV'_1)$$

A *III. eset* csak akkor áll fenn, ha az új  $V'_1V_2 \cdots V_n$  sokszög konvex, mivel ellenkező esetben az előző esetek nem alkalmazhatók erre az új sokszögre. Ezért a következő utolsó esetet kell megvizsgáljunk.

**IV. eset:**  $V'_1V_2 \cdots V_n$  **nem konvex.**

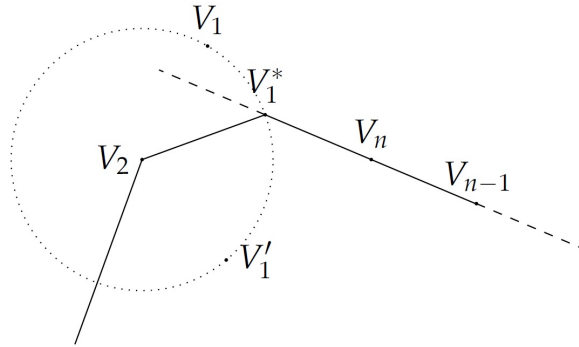
Választunk egy új  $V^*_1$  pontot, amely  $V_1$  és  $V'_1$  között helyezkedik el, úgy, hogy  $V^*_1V_n$  és  $V_{n-1}$  kollineárisak, és olyanok, hogy



$$l(V^*_1V_2) = l(V_1V_2)$$

Ilyen pont, létezik, mivel a  $V^*_1V_2 \cdots V_n$  sokszög nem konvex. Mivel ha  $V^*_1V_n$  és  $V_{n-1}$  kollineárisak, akkor érvényes, hogy

$$l(V^*_1V_n) = l(V^*_1V_{n-1}) - l(V_{n-1}V_n) \tag{5.1}$$



$V^*_1$  konstrukciójának illusztrációja, ahol  $V^*_1V_2 \cdots V_n$  nem konvex

Először is hasonlítsuk össze  $V_1V_2 \cdots V_n$  és  $V^*_1V_2 \cdots V_n$  értékét. Látjuk, hogy  $V^*_1$  megváltoztatja az értéket. Legfeljebb három szögből áll. Mivel  $n \geq 4$  minden sokszögben létezik egy olyan megfelelő csúcspár, ahol a szögek megegyeznek. Így a II. esetet ismét alkalmazhatjuk, és megkapjuk, hogy

$$l(V_nV_1) < l(V_nV^*_1) \tag{5.2}$$

Másodszor, összehasonlítjuk  $V^*_1V_2 \cdots V_{n-1}$  és  $W_1 \cdots W_{n-1}$  között, és az indukciós hipotézisből következik, hogy

$$l(V_{n-1}V^*_1) < l(W_{n-1}W_1) \tag{5.3}$$

Végre,

$$\begin{aligned}
 l(V_1V_n) &\stackrel{(5.2)}{<} l(V^*_1V_n) \\
 &\stackrel{(5.1)}{=} l(V^*_1V_{n-1}) - l(V_{n-1}V_n) \\
 &\stackrel{(5.3)}{<} l(W_1W_{n-1}) - l(W_{n-1}W_n) \\
 &\leq l(W_1W_n)
 \end{aligned}$$

Ahol az utolsó egyenlőtlenség a háromszögegyenlőtlenség.

A következő eredmény a gömbfelületen lévő sokszögekre vonatkozó Steinitz-eredmény analógiája. Mi csak a síkbeli sokszögekre fogjuk bizonyítani. A gömbi sokszögekre vonatkozó bizonyítás Euklidész I. könyvének első részéből származó eredményeket használ [3].

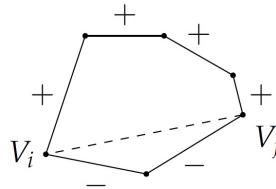
**Lemma 4.2:**

Legyen  $p, \bar{p}$  két konvex sokszög a síkban vagy a gömbön, amelyeknek az oldalai egyenlőek. Jelöljük a  $p$  minden egyes csúcsát a Követzőképpen

$$\begin{cases}
 +if \angle V < \angle \bar{V} \\
 -if \angle V > \angle \bar{V} \\
 = if \angle V = \angle \bar{V}
 \end{cases}$$

Ekkor vagy az összes csúcsot  $=$ -vel jelöljük, vagy mivel az összes csúcson átfutunk, figyelmen kívül hagyva az  $=$ -vel jelölteket, az előjelnek legalább négyszer kell megváltoznia.

Így van egy  $\Phi$  implicit egy-egy leképezés, amely a  $p$  minden egyes csúcsát a  $\bar{p}$  egy csúcsára képezi le. Bizonyítás Az előjelváltások számának párosnak kell lennie, mivel a csúcsok zárt köréről van szó. Feltételezzük, hogy pontosan két előjelváltás van. Kezdjük azzal, hogy a  $p$  sokszög  $V_iV_j$  átlóját úgy vesszük, hogy  $p$  két konvex sokszögre vágódik. Az egyik ilyen új kisebb sokszög csak a  $+$  csúcsokat tartalmazza, amelyet  $p+$  jelöl, a másik pedig csak a  $-$  csúcsokat tartalmazza, amelyet  $p^-$  jelöl.



Két kisebb konvex sokszögre vágott sokszög ábrázolása

A Steinitz-féle 5.1. lemma alkalmazása mind a  $p+$  és  $p^-$  esetén azt eredményezi, hogy:

$$\text{Lemma 5.2 } p+ \text{ esetén: } V_iV_j < W_iW_j$$

Lemma 5.2  $p^-$  esetén:  $V_i V_j > W_i W_j$

Ez ellentmondás.

Az 5.2. lemma által használt síkbeli csúcsok jelölési rendszere hasonló jelölési rendszert eredményez két poliéderre. A csúcsok jelölése helyett egy poliéder minden egyes élét a megfelelő élhez tartozó diéderes szögének és a másik poliéder diéderes szögének viszonya szerint jelöljük. Ez egy új, kötött összefüggő felületet eredményez, amelyet hálónak nevezünk:

**Definíció 4.2:**

*Jelöljük a  $P$  poliéder minden élét  $+$ ,  $-$  vagy  $=$  értékkel aszerint, hogy a diéderes szög kisebb, nagyobb vagy egyenlő a megfelelő diéderes szögnél.*

*Egy másik  $\bar{P}$  poliéder szögét Csak a  $+$  és  $-$  jelölt éleket és az ezekhez az élekhez tartozó csúcsokat vegyük figyelembe. Ezek együtt egy úgynevezett **háló**t alkotnak*

*A poliéder olyan oldalainak maximális egyesülését, amelyeket nem választanak el a háló élei, szintén **háló-oldalnak** nevezzük*

Vegyük észre, hogy a háló-felület már nem egy síkbeli sokszög, hanem egy összefüggő felület, amelyet háló-élek határolnak.

## 4.2 Cauchy merevségi tétele

Ebben a szakaszban a Cauchy-féle merevségi tételt fogjuk megfogalmazni és bizonyítani.

**Tétel 4.1: (Cauchy merevségi tétele.)**

Legyen  $P, \bar{P}$  két kongruens oldalakból álló konvex polihéder. Tegyük fel, hogy  $P$  és  $\bar{P}$  hasonlóan rendezettek egy  $\Phi$  bijekcióval. Ekkor  $P$  és  $\bar{P}$  kongruensek.

**Bizonyítás** Ez a bizonyítás három lépésből áll.

1. lépés: Élek és csúcsok jelölése.

Jelöljük a  $P$  minden élét  $+$ ,  $-$  vagy  $=$  aszerint, hogy a négyszögszöge kisebb, nagyobb vagy egyenlő a  $\bar{P}$  megfelelő négyszög-szögénél. A gömbi sokszög konvex, mivel egy konvex testből származik. Csúcspontjai az élekről örökölnek jelöléseket, amelyek a konstrukció szerint megfelelnek a sokszög szögének növekedésének vagy csökkenésének a második sokszög csúcsfigurájához képest (lásd [4]).

2. lépés: Steinitz alkalmazása. A gömbfelületre Steinitz-et alkalmazva (5.2. Lemma), levezethetjük, hogy lépésről lépésre végigmegyünk az adott csúcson metsző élek között, és vagy mindegyik élen  $=$  jelet találunk, vagy legalább négy előjelváltás van.

3. lépés: A jelváltozások teljes számának megszámlálása.

**1. eset:** Először is tegyük fel, hogy az összes diéderes szög változik, azaz minden él + vagy - értékkel van jelölve. Ismét az 5.2. lemma alapján érvényes, hogy

$$t := \sum_{\text{minden csucs}} \text{az élek előjelváltásainak száma} \geq 4v,$$

ahol  $v$  a csúcsok száma. A  $t$  másik egyenlőtlenségét úgy kapjuk meg, hogy megnézzük egyetlen arc előjelének változását. Egy háromszög alakú felületen legalább két szomszédos élnek azonos előjelűnek kell lennie. Ezért ez az arc legfeljebb két előjelváltozást adhat a három csúcsához. Ebből következik

hogy egy  $n$  oldalú arc legfeljebb  $n$  előjelváltáshoz járulhat hozzá, ha  $n$  páros, vagy  $n - 1$ , ha  $n$  páratlan. Ez a második egyenlőtlenséghez vezet

$$2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n \geq t,$$

ahol  $f_n$  az  $n$  oldalú oldalak számát jelöli. A két egyenlőtlenséget összevetve megkapjuk, hogy

$$2f_3 + \sum_{n \geq 4} f_n \geq 4v \stackrel{(3.1)}{=} 4(e - f + 2) \stackrel{(3.3)}{=} 2nf - 4f + 8 = (2n - 4) \sum f_n + 8$$

A második egyenlőséghez az Euler-képletet (3.1) használjuk. A harmadik egyenlőséghez a 3.1. lemma bizonyításából származó (3.3) egyenletre van szükségünk. Az is érvényes, hogy  $f = \sum f_n$ . Ebből következik, hogy

$$0 \geq \sum_{n \geq 4} (n - 4) f_n + 8$$

ami lehetetlen, mivel az összeg minden tagja nem negatív.

**2. eset:** Másodszor, tegyük fel, hogy létezik néhány = és néhány + és - jelzéssel. Ha nem lennének olyan élek, amelyeket + vagy -, a két poliéder kongruens, és a bizonyítás teljes. Ugyanazt az ötletet fogjuk alkalmazni, mint az 1. eset bizonyításánál, de csak a + és - jelölésű élekkel és a megfelelő csúcsokkal, tehát a poliéder hálójával (5.2. definíció). Az érvelés ugyanúgy működik, mint az 1. esetben, azzal a különbséggel, hogy az Euler-formulát nem tudjuk közvetlenül alkalmazni, mivel a háló nem feltétlenül poliéder. Ehelyett az Euler-képlet bizonyítását (3.1. tétel) alkalmazzuk a hálóra. Már nem feltételezhetjük, hogy a síkbeli alakzat, a háló síkba vetített vetülete összefüggő. Az összefüggő síkidom feltételezését csak a bizonyítás utolsó lépésében használjuk. Ezért egy háló esetében a két művelet alkalmazása után egynél több csúcs maradhat meg. (i) és (ii) a hálóra, mint az Euler-képlet bizonyításánál. Ez azt jelenti, hogy megkapjuk az egyenlőtlenséget

$$f - e + v \geq 2$$

Az 1. eset érvelése ezzel az egyenlőtlenséggel is működik, és így ellentmondást kapunk.

Az egyetlen lehetséges eset az, hogy a két polihéder összes diéderes szöge egyenlő. Ez azt jelenti, hogy a két poli- hedrát lépésről lépésre kongruens alakzatokká lehet építeni, amivel a bizonyítás befejeződik.

### 4.3 A platóni szilárd testek teljes osztályozása

**Tétel 4.2: (Euklidész osztályozása.)**

*A kongruenciáig (és egy skálafaktorig) pontosan öt platóni test létezik, amelyeket az öt lehetséges  $(n, c) \in A$  pár egyedileg határoz meg*

Bizonyítás A 3.1. lemma alapján egy platóni szilárd testnek csak öt lehetséges  $(n, c)$  párja van. A 3.1. lemma által meghatározott öt Schlafli-szimbólum egyikével rendelkező platóni szilárd test explicit konstrukcióját a 6. fejezetben adjuk meg. Tegyük fel, hogy létezik két olyan platóni test, amely esetleg nem kongruens az  $(n, c)$  párral. Akkor a 3.3. Lemma azt jelenti, hogy ez a két poliéder hasonlóan elrendezett. Végül a Cauchy-féle 3.2. merevségi tétellel arra következtetünk, hogy a két poliédernek kongruensnek kell lennie.

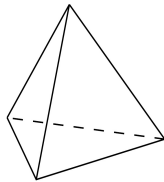
## Az öt platóni szilárd test

Az előző fejezetekben megadtuk a platóni test pontos definícióját, és bebizonyítottuk, hogy kongruenciáig pontosan öt platóni test létezik. Ebben a fejezetben ennek az öt platóni szilárd testnek a jellegzetes tulajdonságaival együtt explicit illusztrációkat adunk. Továbbá megállapítjuk a platóni szilárd testek néhány alapvető tulajdonságát.

### 5.1 Az összes platóni szilárd test teljes listája

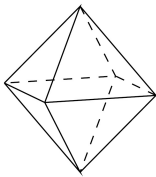
Ez a szakasz a platóni szilárd testek és jellemző paramétereik, mint például a Schläfli szimbólum  $(n, c)$  és az Euler-hármas  $(f, e, v)$  teljes táblázatának megadására összpontosít. Emlékezzünk arra, hogy  $f, e$  és  $v$  az oldalak, élek és csúcsok számát jelölik. Továbbá a Schläfli szimbólum  $(n, c)$  azt adja meg, hogy a megfelelő poliédernek  $n$  szabályos poligonja van, amelyek közül  $c$  találkozik minden egyes csúcsban.

Schläfli szimbólum $(n, c)$	Euler-hármas $(f, e, v)$	Diéder szög $\theta$
--------------------------------	-----------------------------	-------------------------



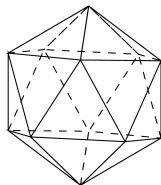
Tetraéder

$(3, 3)$	$(4, 6, 4)$	$70.52^\circ$
----------	-------------	---------------



Oktaéder

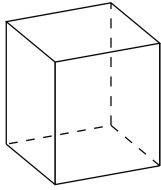
$(3, 4)$	$(8, 12, 6)$	$109.48^\circ$
----------	--------------	----------------



Ikozaéder

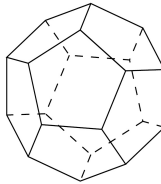
$(3, 5)$	$(20, 30, 12)$	$138.18^\circ$
----------	----------------	----------------

Schlaffi szimbólum ( $n, c$ )	Euler-hármas ( $f, e, v$ )	Diéder szög $\theta$
----------------------------------	-------------------------------	-------------------------



Kocka

(4, 3)	(6, 12, 8)	90.°
--------	------------	------



Dodekaéder

(5, 3)	(12, 30, 20)	116.56°
--------	--------------	---------

## 5.2 A platóni szilárd testek fogalmának eredete

Euklidész platóni szilárd testekkel kapcsolatos munkásságának némi történelmi háttérét ismertetjük. Eltérően e dolgozat megközelítésétől, ahol nem támaszkodtunk a platóni testek konkrét háromdimenziós modelljeire, Eukleidésznek más megközelítése volt.

Azzal kezdi, hogy gömbbe írt explicit háromdimenziós modelleket ad a tetraéderre, a kockára, az oktaéderre, az ikozaéderre és a dodekaéderre, azáltal, hogy az arcok száma és típusa alapján jellemzi őket. A sokszög egy olyan szilárd alakzat, amelyet egy pont és egy sokszög minden egyes csúcsának a pontot nem tartalmazó síkban történő összekapcsolásával alakítunk ki. Euklidész nem használja a

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{c}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

ahol  $n, c$  a Schlaffi szimbólum ismert számai.

tetraédert, ahogy mi is tettük, négy egyenlő oldalú háromszögből álló háromszögletű piramisként definiálva azt. Euklidész a kockát hat egyenlő négyzet által határolt szilárd alakzatként, az oktaédert és az ikozaédert 8 (illetve 20) egyenlő oldalú háromszög által határolt szilárd alakzatként, a dodekaédert pedig 12 szabályos ötszög által határolt alakzatként határozza meg. Eukleidész ezután az *Elemek* című művében, amelyet Fitzpatrick fordított [3], megállapítja: *Tehát azt mondom, hogy a fent említett öt alakzaton kívül nem lehet más olyan (szilárd) alakzatot konstruálni, amelyet egyenlő oldalú és egyenlő szögű (síkok) tartalmaznak, amelyek egyenlőek egymással.*

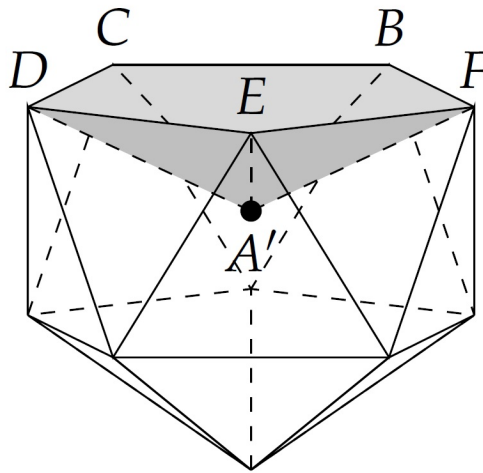
Euklidész a következőképpen érvel: Ha egyenlő oldalú háromszögeket használunk, akkor három, négy vagy öt darabot össze tudunk rakni egy csúcson, de hat három-

szög laposan fekszen. Ha négyzeteket használunk, akkor egy csúcson hármat össze tudunk rakni, de többet nem. Ha szabályos ötszögeket használunk, akkor megint hármat tudunk egy csúcsra tenni. Ha hatszögeket próbálunk használni, akkor három laposan fekszen, tehát erősebb okból nem használhatunk több oldalú szabályos sokszögeket. Ez az öt eset - mondja - megfelel a tetraédernek, az oktaédernek, az ikozaédernek, a kockának és a dodekaédernek, tehát nincs más.

Sajnos Euklidész következtetése néhány hiányzó hipotézis miatt nem helyes, és a korrigált eredmény bizonyítása sem teljes. A következő két alfejezetben részletesebben megvizsgáljuk a hiányzó hipotézisek jelentőségét.

### 5.2.1 A platóni szilárd testek konvexitása

Az öt platóni test egyediségének egyik fontos feltétele (a kongruenciáig), hogy konvexnek kell lenniük. E további követelmény nélkül olyan alakzat létezik, mint a *lyukasztott ikozaéder*. Tekintsük az ikozaéder egyik csúcsát,  $A$ -t, és legyen  $BCDEF$  az öt szomszédos csúcs által alkotott ötszög. Vegyük le az  $ABCDEF$  által alkotott ötszögű piramist, és helyettesítsük az  $A'BCDEF$  ötszögű piramissal, ahol  $A'$  az  $A$  pont tükörképe a  $BCDEF$  síkjában. Az  $A'$  pont ekkor az eredeti ikozaéder belsejében van, így az új alakzat máshol is olyan, mint egy ikozaéder, de  $A'$  nál konkáv. Ez egy 20 egyenlő egyenlő oldalú háromszög által határolt alakzat, de nem kongruens az ikozaéderrel vagy a fent felsorolt platóni testek bármelyikével.



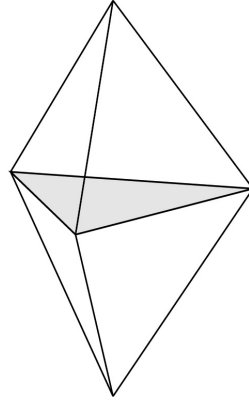
A lyukasztott ikozaéder illusztrációja

### 5.2.2 Az egy csúcsot tartalmazó felületek száma

A platóni testekre vonatkozó másik követelmény, hogy a Schläfli-jelben szereplő  $c$  számnak a platóni test minden csúcsán azonosnak kell lennie. Ellenkező esetben egy *háromszögletű dipiramis* egy másik platóni szilárd testnek tekinthető. Ha két



egyenlő tetraéderre gondolunk, amelyeket az egyik oldal mentén összeragasztunk, akkor egy konvex poliédert kapunk, amelynek oldalai 6 egyenlő oldalú háromszögek, ami nem szerepel a fenti öt platóni szilárd test felsorolásában. Az ellentmondás abból adódik, hogy a felső és az alsó csúcsban három, a ragasztott oldal mentén viszont négy, a csúcsok mindegyikénél találkozó oldalunk van.



Egy háromszög alakú dipiramis ábrázolása

### 5.3 A platóni szilárd testek alapvető tulajdonságai

Ebben a szakaszban a platóni szilárd testek geometriai természetére vonatkozó három tulajdonságot állapítunk meg.

#### Tétel 5.1:

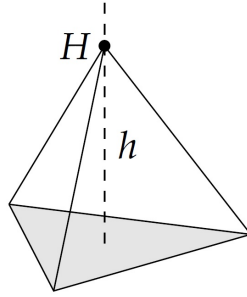
1. Minden platóni szilárd testben minden déderes szög egyenlő
2. A platóni test minden csúcsa egy gömbön fekszik
3. A platóni testek bármely két csúcspontja esetén az alakzatoknak van egy merev mozgása, amely az egyik csúcsot a másikhoz viszi.

**Bizonyítás** Ezeket a tulajdonságokat minden egyes platóni szilárd testre külön-külön bizonyítjuk, és egyidejűleg bemutatjuk a megfelelő konstrukciót.

#### Tetraéder

- **Építés:** Kezdjük egy egyenlő oldalú háromszöggel, amelynek oldalhossza egy. A háromszög középpontjából kiinduló és felfelé haladó, a háromszög síkjára merőleges egyenest a következővel jelöljük  $h$ . Ekkor létezik egy olyan  $H$  pont a  $h$ -n, hogy  $H$  távolsága egy a háromszög valamelyik csúcsától. A konstrukció szimmetriája miatt  $H$  távolsága a másik két csúcshoz képest is egy lesz.  $H$ -t összekötjük a háromszög csúcsaival, és megkapjuk az egy oldalhosszúságú tetraédert.

- **Egyenlő kétszögek:** Az ábra szimmetriája miatt minden diéder szögek egyen-



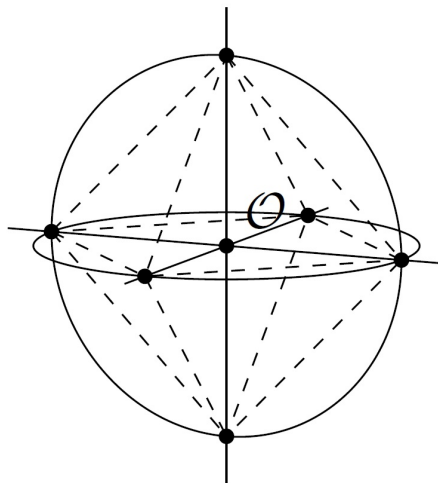
A tetraéder felépítésének illusztrációja

lőnek kell lennie.

- **Egy gömbbe írva lenni:** Az ábra szimmetriájából következik, hogy a tetraéder csúcsai mind egyenlő távolságra vannak az  $O$  középponttól, és így az  $O$  középpontú gömbön fekszenek.
- **A merev mozgás létezése:** Az egyik csúcson és az ellenkező oldal középpontján áthaladó tengely körüli forgatás bármelyik csúcsot egy másikra fogja leképezni.

### Oktaéder

- **Építés:** Az oktaéder csúcsai ezen egyenesek és a gömb hat metszéspontja, amelyek a gömb középpontján haladnak keresztül. Ha ezeket a pontokat összekötjük, akkor az oktaéder alakját kapjuk.



Az oktaéder felépítésének illusztrációja

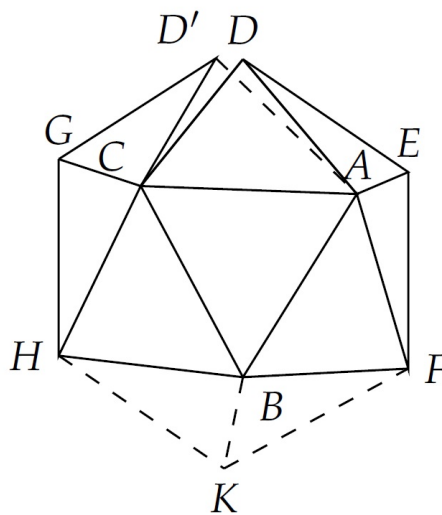
- **Egy gömbbe írva lenni:** Az a tény, hogy az oktaéder gömbbe van írva, közvetlenül a szerkezetéből következik.

- ***A merev mozgás létezése:*** A gömb három tengelye körüli ismételt forgatással bármely két szomszédos csúcs bármelyik másik kettőre leképezhető.

- ***Egyenlő diéder szögek:*** Két szomszédos csúcsot egy él köt össze, amely két oldal metszéspontja. Ez a két felület a 2.6. definíció szerint diéderes szöget zár be. Két szomszédos csúcsot bármelyik másik szomszédos párra leképezhetünk. Ez azt jelenti, hogy a diéderes szöget a merev mozgásnak meg kell őriznie. Ebből következik, hogy minden diéderes szögnek egyenlőnek kell lennie.

**Ikozaéder**

- ***Építés:***  $BCDEF$ -nek nevezett, síkban elhelyezkedő, egységnyi hosszúságú szabályos ötszöggel kezdünk. A 2.1. tétel szerint az ötszög egy körön fekszik. A tetraéder konstruálásához hasonlóan a  $BCDEF$  síkjára merőleges egyenest veszünk a kör középpontján keresztül, és az egyenesen találunk egy pontot, amelyet  $A$ -val jelölünk, és amelynek a távolsága egy  $B$  pontig. A konstrukció szimmetriája miatt  $A$  távolsága a  $BCDEF$  ötszög minden pontjától egy lesz. Ha  $A$ -t összekötjük ezekkel a pontokkal, akkor egy ötszögletű piramist kapunk, amelynek öt egyenlő oldalú háromszög a felső oldala. A szimmetria miatt bármely két szomszédos háromszög között a négyszögszögnek egyenlőnek kell lennie. Ezzel az első lépést befejeztük. Ezt a lépést megismételjük az ikozaéder első felének megépítéséhez. Készítünk egy másik ilyen kongruens ötszögű piramist egy szabályos  $B'A'D'GH$  pentagonnal és egy  $C'$  felső csúccsal. Az új piramisban a négyszögszögek ugyanazok, mint az első ötszögben. Ha tehát az  $A'B'C'$  háromszöget az  $ABC$  háromszögre ragasztjuk, akkor a  $D$  és  $D'$  pontok egybeesnek. Így egy nyolc egyenlő oldalú háromszögből álló domború alakzatot kapunk. Ezt még egyszer megismételjük, hogy tíz egyenlő oldalú háromszögből álló konvex alakzatot kapjunk, ahol minden négyszögszög egyenlő.



**Az ikozaéder első felének felépítésének illusztrációja**

Ahogy körbejárjuk a hat élt, amelyek az ábra külső határait alkotják, a két egymást

követő él közötti szög megegyezik egy szabályos ötszög belső szögével. Miután egy másik, tíz egyenlő oldalú háromszögből álló alakzatot készítettünk, összeragasztjuk a két kongruens alakzatot, és megkapjuk az ikozaédert, amelynek minden dihedrális szöge azonos. A két alakzat határai illeszkednek egymáshoz, mivel minden élszög és minden diéderes szög megegyezik.

- **Egyenlő dihedrális szögek:** A négyszögek mindegyike megegyezik az ikozaéder szerkesztésénél állítottakkal.

- **Egy gömbbe írva lenni:** Mivel minden négyszögszög egyenlő, az  $O$  metszéspont bármelyik két szomszédos felület esetében ugyanaz lesz. A konstrukció szerint a két szomszédos pont mind a négy pontja egyenlő távolságra van  $O$ -tól, így a test minden csúcsa egyenlő távolságra van  $O$ -tól. Ezért az ikozaéder egy gömbbe van beírva, amelynek középpontja  $O$ . A gömb középpontja  $O$ .

- **A merev mozgás létezése:** A leírt konstrukció szimmetrikus az  $ABC$  háromszög önmagára való elforgatásával. Mivel minden dihedrális szög azonos, a kiindulási háromszög tetszőlegesen megválasztható. Ebből következik, hogy egy forgatás alatt bármelyik csúcs leképezhető egy szomszédos csúcsra. Így a különböző elforgatások egymás utáni alkalmazása bármelyik csúcsot bármelyik másik csúcsra leképezi.

## Kocka

- **Építés:** Kezdjük egy egy sugarú gömbbel. Az oktaéder konstrukciójához hasonlóan három egymásra merőleges  $x, y, z$  egyenest veszünk, amelyek a gömb középpontján haladnak keresztül, ezt jelöljük  $O$ -val. Az  $x, y, z$  tengelyeknek hat metszéspontja van a gömbbel. Ezeket a pontokat jelöljük  $F1 \dots, F6$ . Vegyünk egy kettő oldalú négyzetet, és helyezzük a középpontját a hat metszéspont egyikére:  $F1 \dots, F6$  pontokba, úgy, hogy a négyzet a gömbre érintőlegesen feküdjön. Ez a négyzet a kocka hat oldalának egyike. Ha ezt a lépést minden egyes metszéspontra megismételjük, akkor a kocka felépítése befejeződik.

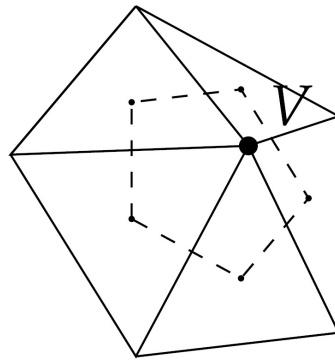
- **Egyenlő diéder szögek:** A kocka minden oldala merőleges az  $x, y, z$  tengelyek valamelyikére, és két közös élű oldal nem lehet merőleges ugyanarra a tengelyre. Így bármely két közös élű felület merőleges egymásra, mivel a tengelyek merőlegesek egymásra. Ebből következik, hogy minden diéderes szög egyenlő.

- **Egy gömbbe írva lenni:** Az oldal szimmetriájából az következik, hogy az egyik oldal minden csúcsa szintén egyenlő távolságra van  $O$ -tól, és a kocka szimmetriája miatt minden csúcsa egyenlő távolságra van  $O$ -tól. Így a kocka minden csúcsa egy olyan gömbön fekszik, amelynek középpontja  $O$ .

- **A merev mozgás létezése:** Az oktaéderhez hasonlóan minden csúcs bármelyik másikra leképezhető a konstrukcióban használt kis gömb három tengelye körüli forgatással

## Dodekaéder

• **Építés:** A dodekaéder megépítéséhez felhasználjuk az ikozaéder megépítésének ismeretét. Veszünk egy ikozaédert, és minden öt háromszögből, amelyek ugyanabban a  $V$  csúcsban találkoznak, a  $V$ -t tartalmazó háromszögek öt középpontjának összekapcsolásával egy szabályos síkbeli ötszöget készítünk, amely a dodekaéder első oldala. Ezt az ikozaéder mind a tizenkét csúcsával megtesszük. Az eredmény az eredeti ikozaéderbe beírt dodekaéder. A konstrukció szerint az ikozaéder és a dodekaéder egymás duálisai. Ha a dodekaéderre hasonló konstrukciót alkalmazunk, ismét egy (méretezett) ikozaédert kapunk.



### A dodekaéder első oldalának felépítésének illusztrációja

- **Egyenlő deheder szögek:** Az ikozaéder szimmetrikus, ezért a dodekaéder minden két oldala közötti kapcsolat azonos, és így minden diéderes szög egyenlő.
- **Egy gömbbe írva lenni:** Mivel a dodekaéder csúcsai ezeknek az oldalaknak a középpontjában vannak, ezek is egyenlő távolságra vannak az  $O$ -tól.
- **A merev mozgás létezése:** Az ikozaéder egy háromszögét egy szomszédos háromszögre küldjük a két ellentétes csúcson áthaladó tengely körüli forgatással. Ez azt jelenti, hogy a dodekaéder egy csúcsát egy szomszédos csúcsra képezzük le. Ezért egymást követő forgatások alkalmazásával bármelyik csúcsot bármelyik másikra küldhetjük.

---

## Bibliográfia

---

- [1] Martin Aigner és Günter M. Ziegler. Bizonyítékok a KÖNYVBől. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2018.
- [2] Harold Scott Macdonald Coxeter. Szabályos polytópok. New York: Dover, 1973.
- [3] Richard Fitzpatrick. Euklidész A geometria elemei. , 2007.
- [4] Robin Hartshorne. Geometria: Euklidész és azon túl. Springer New York, NY, 2000.
- [5] Daniel Zwillinger. CRC Standard matematikai táblázatok és képletek. CRC Press, Boca Raton, Florida, 32. kiadás, 2012.

---

## Összegzés

---

Az írás alaposan és részletesen vizsgálja a Platóni szilárd testek világát, bevezetve az olvasót ezek lenyűgöző geometriai formákba. A bevezetőben rávilágít az írás céljára és az általános fogalmakra, majd mélyebben bemutatja ezeket a testeket és azok tulajdonságait.

Az Euler-képlet és az osztályozási stratégiák bemutatásával az írás mélyrehatóan tanulmányozza a Platóni testek szerkezetét és rendszerezését. Kiemeli az osztályozási folyamat fontosságát és az Euler-képlet alkalmazásának módszereit a testek megértésében.

Az oldalak címkézésének folyamata és az Euklidész által kidolgozott osztályozási módszer részletes elemzése mellett az írás kiterjed az öt Platóni szilárd testre is. Ezáltal az olvasó betekintést nyer ezeknek a testeknek a geometriai jellemzőibe, valamint azok eredetébe és jelentőségébe. A részletes és alapos elemzés segíti az olvasót a Platóni szilárd testek világának mélyebb megértésében.

---

## Ábrajegyzék

---

1	két felület összehangolása ami nem megengedett . . . . .	4
2	egy általános poliéder . . . . .	4
3	két felület $\theta$ domborzati és síkbani dőlésszöge . . . . .	5
4	Tetraéder és kocka . . . . .	6
5	3.1. ábra: Példa két kombinatorikailag ekvivalens poliéderre . . . . .	11
6	4.1. ábra: A Schlafli szimbólummal $(3, c)$ jelzett platonikus szilárd test első részleges jelölésének illusztrációja . . . . .	14
7	4.2. ábra: Az egyedi címkézésből eredő síkgráf a Schlafli szimbólummal $(3, 3)$ rendelkező platonikus szilárd test esetében. . . . .	16
8	4.3. ábra: Egy platóni test egyedi síkgráfjának ábrázolása Schlafli szimbólummal $(4, 3)$ . . . . .	16
9	4.4. ábra: $c = 4$ <i>eset</i> . . . . .	17
10	4.5. ábra: $c = 5$ <i>eset</i> . . . . .	18
11	4.6. ábra: A $(3, 4)$ Schlafli szimbólummal rendelkező platonikus testhez tartozó egyedi síkgráf ábrázolása. . . . .	19
12	4.7. ábra: Egy platóni test egyedi síkgráfjának ábrázolása Schlafli szimbólummal $(5, 3)$ . . . . .	20
13	4.8. ábra: $P$ felcímkézett oldalainak síkgráfja Schlafli szimbólummal $(3, 5)$ : Az első részleges címkézés felcímkézett felületeiről a második részleges címkézés felcímkézett felületeihez. . . . .	20
14	4.9. ábra: Három új csúcs feliratozása $V_4, V_5, V_6$ és a második részleges címkézés újbóli alkalmazása . . . . .	21
15	4.10. ábra: Három csúcs feliratozása $V_7, V_8, V_9$ és három felületet $F_{17}, F_{18}, F_{19}$ . . . . .	22
16	4.11. ábra: Egy platonikus szilárd testhez tartozó egyedi síkgráf Schlafli szimbólumokkal $(3, 5)$ . . . . .	23
17	Egy kocka csúcsfigurájának vizualizációja . . . . .	24
18	Két sokszög ábrázolása, ahol $\angle Vi = \angle Wi$ . . . . .	25
19	A $V'_1$ konstrukció illusztrációja . . . . .	26
20	$V^*_1$ konstrukciójának illusztrációja, ahol $V'_1 V_2 \cdots V_n$ nem konvex . . . . .	27
21	Két kisebb konvex sokszögre vágott sokszög ábrázolása . . . . .	28
22	A lyukasztott ikozaéder illusztrációja . . . . .	34
23	Egy háromszög alakú dipiramis ábrázolása . . . . .	35
24	A tetraéder felépítésének illusztrációja . . . . .	36
25	<b>Az oktaéder felépítésének illusztrációja</b> . . . . .	36
26	<b>Az ikozaéder első felének felépítésének illusztrációja</b> . . . . .	37
27	<b>A dodekaéder első oldalának felépítésének illusztrációja</b> . . . . .	39



---

## Резюме

---

Ця дипломна робота докладно та детально досліджує світ Платонових тіл, вводячи читача у захоплюючі геометричні форми. У вступі розкривається мета дипломної роботи та загальні концепції, після чого більш детально представляються ці тіла та їх властивості.

З введенням формули Ейлера та стратегіями класифікації дипломна робота глибоко вивчає структуру та систематизацію Платонових тіл. Виділяється важливість процесу класифікації та методи застосування формули Ейлера для розуміння цих тіл.

Поряд із детальним аналізом процесу маркування граней та класифікаційного методу, розробленого Евклідом, дипломна робота охоплює також п'ять Платонових тіл. Таким чином, читач отримує уявлення про геометричні характеристики цих тіл, а також їх походження та значення. Детальний та ретельний аналіз сприяє зрозумінню читачем світу Платонових тіл на більш глибокому рівні.

## **Nyilatkozat**

Alulírott, Séra Tamás, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

# Звіт про перевірку схожості тексту Oxsico

Назва документа:

Diplomamunka\_Sera\_Tamas.pdf

Ким подано:

Пап Габрієлла

Дата перевірки:

2024-05-27 10:14:53

Дата звіту:

2024-05-28 19:55:18

Ким перевірено:

I + U + DB + P + DOI

Кількість сторінок:

50

Кількість слів:

9586

Схожість 0%

Збіг: 0 джерела

Вилучено: 0 джерела

Інтернет: 0 джерела

DOI: 0 джерела

База даних: 0 джерела

Перефразовування 0%

Кількість: 0 джерела

Перефразовано: 0 слова

Цитування 3%

Цитування: 11

Всього використано слів: 989

Включення 0%

Кількість: 0 включення

Всього використано слів: 0

Питання 0%

Замінені символи: 0

Інший сценарій: 1 слова