

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II
Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний № _____

Кваліфікаційна робота
ПОРІВНЯННЯ ПІДРУЧНИКІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ 5-ГО КЛАСУ
ШКІЛ УКРАЇНИ ТА УГОРЩИНИ

КОРМОЧІ ДОМІНІКА КРИСТІАНІВНА

Студентка IV-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2024

Науковий керівник:

ПОЛЛОЇ ДЕЗИДЕР ФЕДОРОВИЧ

(старший викладач)

Завідувач кафедрою математики та інформатики:

Кучінка Каталін Йозефівна

(к. ф.-м. н, доцент)

Робота захищена на оцінку _____, «___» _____ 202_ року

Протокол № _____ / 202_

**Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

Кафедра математики та інформатики

**Кваліфікаційна робота
ПОРІВНЯННЯ ПІДРУЧНИКІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ 5-ГО КЛАСУ
ШКІЛ УКРАЇНИ ТА УГОРЩИНИ**

Рівень вищої освіти: бакалавр

Виконавець: студентка IV-го курсу

КОРМОЧІ ДОМІНІКА КРІСТІАНІВНА

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **ПОЛЛОЇ ДЕЗИДЕР ФЕДОРОВИЧ**

(старший викладач)

Рецензент: **МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА**

(кандидат фізико-математичних наук, доцент)

Зміст

Вступ	10
1. Огляд змісту	11
2. Мета порівняльного дослідження підручників	15
2.1. Мета дослідження	15
2.2. Функції підручника та складові якості	16
3. Натуральні числа. Дії з натуральними числами	17
3.1. Послідовність натуральних чисел	17
3.2. Запис натурального числа у десятковій системі числення	17
3.3. Відрізок. Довжина	18
3.4. Площина. Пряма.	19
3.5. Масштаб. Числова	20
3.6. Порівняння натуральних чисел	20
3.7. В угорських підручниках, окрім згаданих теоретичних частин, також розглядаються наступні	21
4. Додавання і віднімання	22
4.1. Додавання натуральних чисел	22
4.2. Віднімання натуральних чисел	22
4.3. Числові та буквені вирази.	23
4.4. Рівняння	23
4.5. Кут. Позначення	24
4.6. Види кутів. Вимірювання	24
4.7. Багатокутники. Конгруентні	25
4.8. Види трикутників	26
4.9. Прямокутник	28
4.10. В угорських підручниках, окрім згаданих теоретичних частин, також розглядаються наступні теми	28
5. Множення і ділення	31
5.1. Множення. Переместна властивість множення	31
5.2. Асоціативна і дистрибутивна властивості множення	31

5.3. Ділення	32
5.4. Ділення з остачею	32
5.5. Степінь числа	33
5.6. Площа. Площа прямокутника.....	33
5.7. Прямокутний паралелепіпед. Піраміда	33
5.8. Об'єм прямокутного	34
5.9. Комбінаторні задачі	35
5.10. В угорських підручниках, окрім згаданих теоретичних частин, також розглядаються наступні теми	35
6. Звичайні дроби	37
6.1. Поняття звичайного дробу	37
6.2. Звичайні та неправильні дроби. Порівняння дробів	37
6.3. Дробі і ділення натуральних чисел	38
6.4. Мішані дробі	38
6.5. В угорських підручниках, окрім згаданих теоретичних частин, також розглядаються наступні	39
7. Десяткові дробі	40
7.1. Поняття десяткового дробу.....	40
7.2. Порівняння десяткових дробів.....	41
7.3. Округлення чисел	41
7.4. Додавання і віднімання десяткових дробів	41
7.5. Множення десяткових	42
7.6. Ділення десяткових дробів	42
7.7. Середнє арифметичне. Середнє значення	43
7.8. Відсотки. Обчислення відсотка від числа	43
7.9. Обчислення числа або основи відсотка за значенням відсотка.....	43
7.10. В угорських підручниках, окрім згаданих теоретичних частин, також розглядаються наступні	44
8. Завдання «Мудра Сова» з українського підручника (А. Г. Мерзляк)	45
9. Завдання початкового та середнього рівня з угорського підручника (Е. Чахоці)	48
10. Порівняльне дослідження	54
Короткий зміст	57
Список літератури	59
Перелік ілюстрацій	60

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

Matematika és Informatika Tanszék

**AZ UKRAJNAI ÉS MAGYARORSZÁGI 5. OSZTÁLYOS MATEMATIKA TANKÖNYVEK
ÖSSZEHASONLÍTÁSA**

Szakdolgozat

Készítette: Karmacsi Dominika

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Pallay Dezső

(adjunktus)

Recenzens: Mészáros Livia

(fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens)

Tartalomjegyzék

Bevezetés	10
1. Tartalmi áttekintés	11
2. Az összehasonlító tankönyvi vizsgálatok célja	15
2.1. A tankönyvi vizsgálatok célja	15
2.2. A tankönyv funkciói és a minőség összetevői	16
3. Természetes számok. Műveletek természetes számokkal	17
3.1. A természetes számok sora	17
3.2. A természetes szám felírása a tízes számrendszerben	17
3.3. Szakasz. A szakasz hossza	18
3.4. A sík. Egyenes. Félegyenes	19
3.5. A skála. Számegyenes	20
3.6. A természetes számok összehasonlítása	20
3.7. A magyarországi tankönyvekben az előbb említett elméleti részekon kívül a következő témákat is tárgyalják.	21
4. A természetes számok összeadása és kivonása	22
4.1. A természetes számok összeadása.	22
4.2. A természetes számok kivonása	22
4.3. Szám- és betűkifejezések. Képletek	23
4.4. Egyenletek	23
4.5. Szög. Szögek jelölése	24
4.6. A szögek típusai. Szögmérés	24
4.7. Sokszögek. Egybevágó alakzatok	25
4.8. A háromszög fajtái	26
4.9. Téglalap	28
4.10. A magyarországi tankönyvek az eddig felsorolt elméleti részekon kívül a következő témaköröket is tárgyalják.	28
5. Természetes számok szorzása és osztása	31
5.1. Szorzás. A szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága	31
5.2. A szorzás csoportosítási és széttagolási tulajdonsága	31

5.3. Az osztás.....	32
5.4. Maradékos osztás	32
5.5. A szám hatványa	33
5.6. Terület. A téglalap területe	33
5.7. Derékszögű paralelepipedon (Téglatest). Gúla	33
5.8. A téglatest térfogata	34
5.9. Kombinatorikai feladatok	35
5.10. A magyarországi tankönyvben az előbb felsorolt elméleti részek mellett a következő témaköröket is tárgyalják	35
6. Közöséges törtek	37
6.1. A közöséges törtek értelmezése	37
6.2. Közöséges törtek és áltörtek. A törtek összehasonlítása.	37
6.3. Törtek és a természetes számok osztása.....	38
6.4. Vegyes törtek	38
6.5. A magyarországi tankönyvben ezeket az elméleti részeket az előbb felsoroltakon kívül a következőket is tárgyalják.	39
7. Tizedes törtek	40
7.1. A tizedes törtek fogalma	40
7.2. A tizedes törtek összehasonlítása.....	41
7.3. A számok kerekítése	41
7.4. A tizedes törtek összeadása és kivonása	41
7.5. A tizedes törtek szorzása	42
7.6. A tizedes törtek osztása	42
7.7. Számítási közép. A mennyiségek középértéke	43
7.8. Százalék. A szám százalékának meghatározása	43
7.9. A szám (vagy a százalékalap) meghatározása százalékértéke alapján	43
7.10. A magyarországi tankönyvben ezeket az elméleti részeket az előbb felsoroltakon kívül a következőket is tárgyalják.	44
8. Bölcs Bagoly feladványok az ukrainai (A. H. Merzljak) tankönyvből	45
9. Alap- és középszintű tudásnak megfelelő feladatok a magyarországi (Csahóczi E.) tankönyvből	48
10. Összehasonlító vizsgálat	54
Összefoglalás	57
Irodalomjegyzék	59
Ábrák jegyzéke	60

Bevezetés

Ebben a szakdolgozatban az Ukrajnában használt, 2018-ban megjelent, ukrán nyelvről magyar nyelvre lefordított 5. osztályos matematika tankönyvet elemzem, és hasonlítom össze a Magyarországon 2020-ban megjelent 5. osztályos matematika tankönyvvel.

A matematika tanítása alapvető szerepet játszik az iskolai alapkészségek kialakításában, a logikus gondolkodás fejlesztésében és a problémamegoldó képességek megalapozásában. Ennek megfelelően a tankönyvek, mint az oktatás elsődleges taneszközei, kulcsszerepet töltenek be a tanulók tudásának formálásában és a pedagógiai célok megvalósításában. Az egyes országokban használt tankönyvek nemcsak az adott nemzeti tanterv követelményeit tükrözik, hanem azt is, hogy milyen pedagógiai szemléletet részesítenek előnyben, hogyan közelítik meg a matematikai fogalmak bevezetését, milyen módszerekkel ösztönzik a tanulói aktivitást, és miképpen segítik elő a mélyebb megértést.

Jelen összehasonlító elemzés célja két különböző országban használt általános iskolai matematika tankönyv vizsgálata. Az egyik az ukrán A. H. Merzljak nevéhez fűződő tankönyv, amely a matematikai fogalmak szigorú, formális logikai rendbe szervezett fejezetekből áll. A másik a magyarországi Csahóczi E. szerkesztésében megjelent tankönyv, amely korszerű, tanulóközpontú szemlélettel, életközeli példákkal és motiváló tanulási környezettel támogatja a tanulók matematikai fejlődését.

Az összehasonlítás során vizsgáljuk, hogyan jelennek meg az egyes könyvekben a matematikai fogalmak, milyen mértékben támaszkodnak a tanulók hétköznapi tapasztalataira, hogyan épülnek fel a feladatok, milyen szintű gondolkodást igényelnek, és milyen módon történik a differenciálás. Emellett fontos szempont, hogy a tankönyvek mennyire támogatják a tanulók önálló tanulását, a kreatív gondolkodást, valamint azt is, hogy megjelennek-e és milyen formában a tantárgyközi kapcsolatok.

Külön figyelmet fordítok arra, hogyan illeszkedik a tananyag a tanulók életkori sajátosságaihoz, illetve milyen eszközökkel – például illusztrációk, játékos elemek – próbálják meg lekötni a gyerekek figyelmét. A „Bölcs bagoly” típusú kreatív feladványok, a differenciált nehézségű feladatok és az önellenőrzési lehetőségek szintén olyan elemek, amelyek pedagógiai szempontból kulcsfontosságúak lehetnek a tanulási folyamat támogatásában.

A vizsgálat célja tehát nem pusztán a két tankönyv tartalmi összevetése, hanem annak feltérképezése, az elméleti tudás gyakorlatban való alkalmazása, és hogy miként képesek motiválni a különböző képességű tanulókat a matematika iránti érdeklődés kialakításában és fenntartásában.

1. fejezet

Tartalmi áttekintés

Az Ukrajnában használt (A. H. Merzljak) 2018.-ban kiadott tankönyv két fejezetből áll össze, illetve ez a két fejezet öt darab paragrafusból, amik a következők:

I. fejezet. Természetes számok. Műveletek természetes számokkal.

1. §. Természetes számok
2. §. A természetes számok összeadása és kivonása
3. §. Természetes számok szorzása és osztása

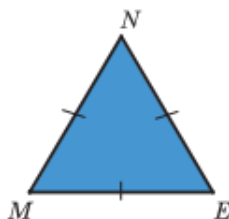
II. fejezet. Törtszámok és a velük való műveletek

4. §. Közöséges törtek
5. §. Tizedes törtek

A könyv nem tartalmaz külön paragrafust a mértani alakzatokról, csak a második és a harmadik paragrafus témái között említik őket. Ezekben a témákban megalapozódik a képletek használatának fontossága, és kivitelezése.

Példának okáért itt van néhány képlet a paragrafusokból, illetve az, ahogyan bevezeti őket:

Ha az egyenlő oldalú háromszög oldala a -val egyenlő, akkor a P kerülete a következő képlettel számítható ki: $P = 3 \cdot a$ [6].



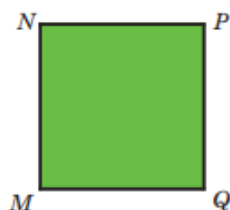
1.1. ábra. Egyenlő oldalú háromszög [6]

Ha a téglalap szomszédos oldalait a -val és b -vel jelöljük, akkor a P kerületét a már ismert képlettel számíthatjuk ki: $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ [6].



1.2. ábra. Téglalap [6]

Ha a négyzet oldalát a -val jelöljük, akkor annak P kerületét a következő képlettel számítjuk ki: $P = 4 \cdot a$ [6]



1.3. ábra. Négyzet [6]

Az ilyesfajta képletek találhatók meg következő két paragrafusban, segítve a diákokat a gyors, és logikus számításokban.

2. §. A természetes számok összeadása és kivonása

11. Szög. Szögek jelölése
12. A szögek típusai. Szögmérés
13. Sokszögek. Egybevágó alakzatok
14. Háromszög és fajtái
15. Téglalap

3. §. Természetes számok szorzása és osztása

21. Terület. A téglalap területe
22. Derékszögű paralelepipedon (Téglatest). Gúla
23. Téglatest térfogata

Megalapozza az alakzatok fogalmát, kerületének kiszámításához pedig képletek állnak segítségükre a diákoknak.

A tankönyv nem rendelkezik külön munkafüzettel, a feladatokat és az elméleti részt egyedül a tankönyv tartalmazza.

A tankönyvben lévő feladatok megoldásai megtalálhatóak online oldalakon is, a feladatok helyes megoldásának leellenőrzése végett. Viszont ezek nem minden esetben leellenőrzött források, így elvétve, de találhatóak bennük hibásan megoldott feladatok is [5].

A tankönyv összességében paragrafusonként a következőket vezeti be:

- Számok írása, olvasása (100 000-ig)
- Számjegyek helyi értéke

- Számok összehasonlítása
- Alapműveletek: összeadás, kivonás (fejből és írásban)
- Betű helyettesítése számértékkel
- Szorzás, osztás (fejből és írásban)
- Műveletek sorrendje zárójelek nélkül és zárójelekkel
- Törtek jelentése (egész osztva részekre)
- Egyszerű egyenletek
- Mértékegységek átváltása
- Síkidomok felismerése
- Kerület és terület fogalmak bevezetése, kiszámítása
- Átlag fogalma, kiszámítása egyszerű adatsorokból

A Magyarországon használt tankönyv (Csahóczy E.) 2020.-as kiadású tankönyv tartalmilag nincs fejezetekre, vagy paragrafusokra bontva, inkább témakörökben vannak elkülönítve az anyagok, amikben csak a témakörhöz kapcsolódó témák vannak, az Ukrajnában használt (A. H. Merzljak) tankönyvtől eltérően. Nem keverednek szétszórtan az egész számok témakörében például alakzatokról szóló témák.

Tartalmilag a következőkre van bontva a tankönyv:

1. Természetes számok
2. Alakzatok
3. Egész számok
4. Helymeghatározás
5. Mennyiségek
6. Törtek
7. Kerület, terület, felszín, térfogat
8. Tizedes törtek

Különbség a (A. H. Merzljak) könyvhöz képest az, hogy ez a könyv bővebb tananyagot nyújt, beleértve például a negatív számokat, illetve a derékszögű koordináta-rendszert.

A (Csahóczy E.) 2020.-as kiadású tankönyvhöz tartozik egy munkafüzet is, viszont ez nem azt jelenti, hogy a tankönyvben nem találhatóak a tananyaghoz illeszkedő gyakorlati feladatok. Viszont nyilván nem olyan mennyiségben, mint a munkafüzetben [8].

A munkafüzet tartalomjegyzéke, pontosan megegyezik a tankönyv tartalomjegyzékével. Viszont így több feladat is helyet kapott a gyakorlati tudás elsajátításához [8].

A munkafüzet feladataihoz online megtalálhatóak megoldásaik is. Ami segít a már készfeladatot leellenőrzésében, illetve a felmerülő gyakorlati lépések megválaszolására a tanulóknak, vagy akár a szülőknek is egyaránt [4].

Több feladat is nem csak egyéni megoldáshoz van igazítva, hanem helyet kaptak a csoport feladatok, amik 2-4 tagú csoportok kialakítását veszik igénybe. Ezzel gyakoroltatva a csoportmunka fontosságát, ami fejleszti bennük a kommunikációs, együttműködési készségeket is.

A Magyarországon használt tankönyv (Csahóczy E.) 2020.-as kiadású tankönyvben még nem ejtenek szót a képletekről, és azok gyakorlati bevezetéseiről, többnyire ez a különbség is felfedezhető az (A. H. Merzljak) tankönyv és a magyarországi (E. Csahóczy) tankönyvek között.

A könyv összességében paragrafusonként a következőket vezeti be, amik eltérnek az (A.H. Merzljak) 5. osztályos matematika tankönyvtől:

- Negatív számok értelmezése
- Negatív számok összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen
- Hosszúság, tömeg, űrtartalom, idő, pénz mértékegységei
- Koordináta-rendszer
- Pontok ábrázolása az első síknegyedben
- Koordináták leolvasása, egyszerű útvonalak követése
- Adatgyűjtés, táblázatok és diagramok értelmezése (oszlopdiagram, kördiagram)
- Számrendszerek történeti áttekintése (érdekességgént)

A tankönyvről egy folyóirtban a következőket olvashatjuk [2]:

Az 5. osztályosoknak készült két könyv arra fókuszál, hogy szórakoztatóvá tegye a matematika tanulását, és élményeken, tapasztalatokon keresztül vezesse be az új ismereteket.

Számos alsós ismeret és tananyag került át a felső tagozatra, jobban szétterítve a tananyagot, mint korábban. Például: az oszthatóság felkerült a hatodik osztályba, ahol a kerettanterv szerint növekszik a matematika alapóraszám. A kerettantervi változások miatt negyedikből ötödikbe került az osztás legfeljebb kétjegyű osztóval, mint pl. $1024:32$, és kimaradt a mechanikus osztás algoritmus a tetszőleges számmal, azaz a 21. században nem lesz követelmény, hogy a tízéves gyerekek papíron tudjanak irdatlan nagy számokat osztani.

2. fejezet

Az összehasonlító tankönyvi vizsgálatok célja

Az összehasonlításhoz a Kojanitz László által összeszedett és felsorolt főbb pontokat veszem alapul munkám során [3]. Ezen pontok alapján elemzem az Ukrajnában használt 2018-as kiadású (A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir.) 5. osztályos matematika tankönyvet, és hasonlítom hozzá a Magyarországon használt 2020-as kiadású (Csahóczi E., Csatári K., Kovács Cs., Széplaki Gy.) 5. osztályos tankönyvhöz.

2.1. A tankönyvi vizsgálatok célja

A következőkben Kojanitz László folyóiratát használom alapul munkámhoz[3].

Egy-egy összehasonlító vizsgálat a tankönyvszerzők és a pedagógusok munkájához is többféle módon nyújthat segítséget. Felhívhatja a figyelmet a tankönyvi jellemzőkre. Például a mondatok hosszúságára, szövegek strukturáltságára, illusztrációk változatosságára, feladatok típusaira stb. amelyek a leginkább befolyásolhatják a használhatóságot és a tanulás eredményességét.

E tankönyvi jellemzők adatszerű feltárása és összehasonlítása szembeállíthatja a készítőket azokkal az erényekkel és hibákkal, amelyek addig még nem tudatosultak számukra. Az ilyen módon felismert és dokumentált hiányosságok konkrét és könnyen értelmezhető szempontokat adhatnak az átdolgozáshoz és a további fejlesztőmunka minőségi kritériumainak meghatározásához. A pedagógusok számára ugyanezek az adatok és összehasonlítások a tankönyvek közötti választást is könnyebbé és megalapozottabbá tehetik.

Egy-egy konkrét vizsgálatnak mindig lehetnek általánosítható tanulságai, valamint a közvetlen gyakorlati munkát segítő eredményei is. Ezt a kettősséget érdemes a vizsgálatokat végzőknek is figyelembe venniük. Egyrészt tényyszerű és informatív adatokat kell szolgáltatni a vizsgálatba bevont tankönyvekről, másrészt általánosítható ismereteket nyújtani arról, hogy a különféle tankönyvi jellemzőknek milyen és mekkora szerepük van a tankönyvek hatásmechanizmusában.

2.2. A tankönyv funkciói és a minőség összetevői

Ahhoz, hogy az új tankönyvek a korábbiaknál jobb minőségűek legyenek, elemzések és kutatások segítségével pontosan fel kell tárni a jelenlegi tankönyvek használhatóságával kapcsolatos problémák konkrét okait. Az eredményes tankönyvfejlesztés érdekében a kiadóknak is érdemes kidolgozniuk egy belső értékelési rendszert, amely képes objektív visszajelzést adni a készülő vagy frissen kiadásra került tankönyvek minőségéről és gyakorlati beválásáról.

A nemzetközi kutatásoknak köszönhetően ma már rendelkezésre állnak a komplex tankönyvi értékelésekhez szükséges kutatási módszerek és értékelési technikák.

A vizsgálati és értékelési rendszer kialakításakor egyrészt figyelembe kell venni az összes olyan funkciót, amely a mai tanulási környezetben elvileg elvárható a tankönyvtől. Másrészt érdemes konkretizálni, hogy az egyes funkciók szempontjából a tankönyvi minőség mely összetevőit kell elsősorban vizsgálni.

Funkciók	A minőség összetevői
Motiváció	Illusztráltság
	Érdekesség
	Problémák bemutatása
	Gondolkodásösztönző egyéb megoldások
Ismeretátadás	Érthetőség
	Életszerűség
	Tudományos pontosság
Rendszerezés	Strukturáltság
Koordináció	A többi tankönyvvel való összehangoltság
Differenciálás	Szintezett tananyag
Tanulásirányítás	A tanórai és az otthoni tanulás folyamatát befolyásoló eszközök
Tanulási stratégiák tanítása	
Az önértékelés elősegítése	Az ismeretek alkalmazását gyakoroltató, illetve összefoglaló kérdések és feladatok
Értékekre nevelés	Érzelmi hatást keltő eszközök

2.1. ábra. Funkciók és a minőség összetevői [3]

3. fejezet

Természetes számok. Műveletek természetes számokkal

Ebben a fejezetben (A. H. Merzljak) 2018-as liadású 5. osztályos matematika tankönyvének I. fejezetét használom fel a munkámhoz [6].

3.1. A természetes számok sora

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... számjegyeket a dolgok megszámlálásához alkalmazzuk, és ezeket **természetes számoknak** hívjuk.

Nem minden általunk alkalmazott szám fog természetes lenni. Például a 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ nem természetes számok.

Valamennyi növekvő sorrendbe felírt természetes szám a természetes számok sorát képezi, vagy természetes számot ad. A sor első tagja az 1, második a 2, harmadik a 3, és így tovább.

3.2. A természetes szám felírása a tízes számrendszerben

Ahogy a házak téglából épülnek, a szavak pedig betűkből állnak, a természetes számokat speciális szimbólumokkal, úgynevezett számokkal írják.

A számok leírására 10 számjegyet használunk: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Az egy számjegyből írt természetes számot **egységszámjegy**-nek, a kétjegyű természetes számot **kétjegyű szám**-nek, a háromjegyű természetes számot **háromjegyű szám**-nek nevezzük, és így tovább.

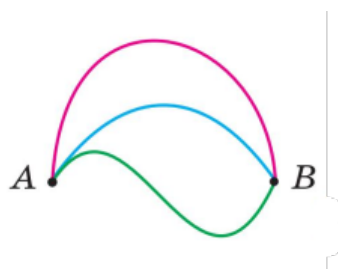
Többjegyű szám beolvasásakor a kategóriát háromjegyű, kétjegyű vagy egyjegyű számként kell olvasni, és hozzá kell adni a megfelelő kategória nevét (az egyjegyű szám kategórianevét nem említjük).

A milliárdok osztálya		A milliók osztálya			Az ezrek osztálya			Az egyesek osztálya			
1	7	0	2	5	5	4	3	6	0	7	
milliárdok	Tíz- milliárdok	Milliárdok	Száz- milliók	Tízmilliók	Milliók	Száz- ezresek	Tíz- ezresek	Ezresek	Száz- asok	Tíz- esek	Egyesek

3.1. ábra. Számjegyek [6]

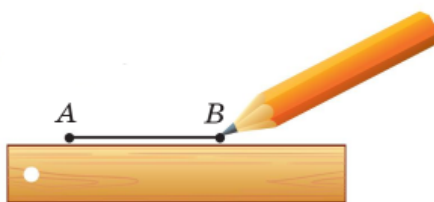
3.3. Szakasz. A szakasz hossza

Jelöljön meg két pontot a papíron: A és B . Ezeket a pontokat különböző vonalak köthetik össze.



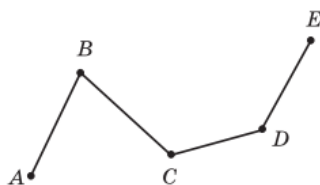
3.2. ábra. A és B pont összekötése [6]

Hogyan köthetjük össze az A és B pontot a legrövidebb egyenessel? Ezt a problémát vonalzóval tudjuk megoldani.



3.3. ábra. Szakasz [6]

Ha néhány szakaszt elhelyezünk a 3.4. ábrán látható módon, egy geometriai alakzatot kapunk, amelyet **törött vonalnak** nevezünk.



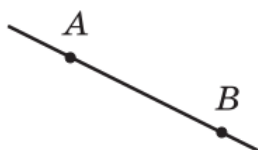
3.4. ábra. Töröttvonal [6]

3.4. A sík. Egyenes. Félegyenes

A füzetek mérete megakadályozza, hogy nagyon hosszú részeket rajzoljunk. Képzeljétek el, hogy a füzet lapot annyira megnövelnénk mint az asztal teteje vagy a tenispálya esetleg a foci pálya. Ilyen lap az egy sík részét jelenti. A sík végtelen, ezért nem lehet ábrázolni.

Az egyenesnek nincsen vége, ezért az végtelen. Jelöljünk a lapon két pontot: A -t és B -t. Rajtuk át húzunk egy egyenest. Ha ha még egy vonalat próbálnánk ezekbe a helyekbe húzni, ez nem menne.

Két ponton keresztül egyetlen egy egyenes húzható.



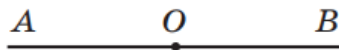
3.5. ábra. Két ponton keresztül csak egy egyenes húzható [6]

A latin ábécé írott kisbetűivel jelöljük az egyeneseket. A 3.6. ábrán az m és n egyenesek láthatók.



3.6. ábra. Egyenes jelölése [6]

Húzunk egy AB egyenest, és kijelölünk rajta egy O pontot (3.7. ábra). Ez a pont két részre osztja az egyenest. A két részt – az O pontot is beleszámítva – **félegyenesnek** nevezzük, az O pontot pedig a **félegyenes kezdőpontjának**. A félegyenesnek nincs végpontja, tehát a kezdőpontjától indulva a végtelenbe nyúlik.



3.7. ábra. Félegyenes [3]

3.5. A skála. Számegyenes

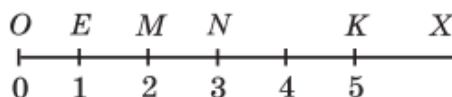
A lécen centiméterenként egy-egy vonalkát húzunk, az első alá a 0-t, a második alá az 1-et, a harmadik alá a 2-t, és így tovább írunk. Ezt a jelölést **skálának** nevezzük, amelynek **beosztása** 1, cm. Egy ilyen, skálával ellátott lécs már nagyon hasonlít egy vonalzóra. A legtöbb vonalzóon azonban a skála beosztása sokkal sűrűbb: általában 1, mm.



3.8. ábra. Skála[6]

Megrajzoljuk az OX félegyeneset, majd kijelölünk rajta egy tetszőleges E pontot. Az O pont alá a 0-t, az E pont alá az 1-es számot írjuk (2.10. ábra).

Ezután az OE távolságot lemérjük az E ponttól jobbra, és így megkapjuk az M pontot, amelyhez a 2-es szám tartozik. Ugyanezzel a módszerrel kijelöljük az N pontot is, amely a 3-as számnak felel meg. Így lépésről lépésre haladva sorban megkapjuk a 4, 5, 6, ... stb. számokat is. Gondolatban ez a folyamat tetszőlegesen sokáig folytatható.



3.9. ábra. OX félegyenes [6]

Az így kialakított, végtelen hosszúságú skálát **számegyenesnek** nevezzük. Az O pont a **számegyenes kezdőpontja**, az OE szakasz pedig az úgynevezett **egységnyi szakasz**, mivel ez adja meg a számok közötti távolságot a számegyenesen.

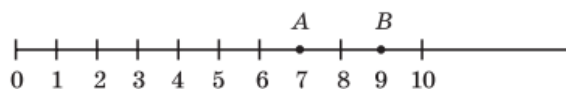
3.6. A természetes számok összehasonlítása

Két többjegyű szám közül az a nagyobb, amelyiknek több számjegye van.

Ha két szám ugyanannyi számjegyből áll, akkor azt tekintjük nagyobbának, amelyikben – balról jobbra haladva – az első eltérő számjegy nagyobb.

Például: $7256 > 7249$, és $582\,647 < 582\,879$.

Fontos megjegyezni, hogy a számegyenesen mindig az a pont van balra, amelynek kisebb a koordinátája. Például az $A, (7)$ pont balra helyezkedik el a $B, (9)$ ponttól, mert $7 < 9$ (3.10. ábra).



3.10. ábra. Számegyenes [6]

3.7. A magyarországi tankönyvekben az előbb említett elméleti részekon kívül a következő témákat is tárgyalják.

A magyarországi tankönyvben már a halmazokkal is foglalkoztatják az ötödikes tanulókat, amire nálunk csak a későbbiekben kerül sor.

A következőképp vezetik be a halmaz fogalmát:



3.11. ábra. Halmaz [1]

Sok különféle név helyett a matematika ilyen esetekben egységesen a halmaz szót használja. A csokor, a kórus, a ménés és az utolsó képen ábrázolt három tárgy is tekinthető egy-egy halmaznak. Az első halmazt 7 szál virág, a másodikat 81 énekes alkotja, a harmadik halmaz 4 paripából áll, az utolsónak pedig 3 különböző eleme van[1].

A **halmazokat** nagybetűvel jelöljük, a halmazokhoz tartozó **elemeket** pedig kapcsos zárójelbe tesszük[1].

A könyv első fejezetében a **műveletek sorrendjét** is taglalják, amire az ukrainai tankönyvben még nem térnek rá külön a készítőik.

Ha egy műveletsorban csak szorzás-osztás, illetve csak összeadás-kivonás szerepel, akkor a műveleteket balról jobbra haladva végezhetjük, vagy tetszés szerint felcserélhetjük, ha figyelembe vesszük, hogy a műveleti jel hozzátartozik a számhoz[1].

4. fejezet

A természetes számok összeadása és kivonása

4.1. A természetes számok összeadása.

Ebben a fejezetben (A. H. Merzljak) 2018-as kiadású 5. osztályos matematika tankönyvének I. fejezetét fogom felhasználni a munkámhoz [6].

Az összeadás felcserélhetőségi tulajdonsága: ha felcseréljük az összeadandókat, az összeg nem változik.

$$a + b = b + a$$

Az összeadás csoportosítási törvényét alkalmazzuk: két szám összegéhez úgy is hozzáadhatunk egy harmadik számot, hogy először a második és harmadik számot összeadjuk, majd az eredményt hozzáadjuk az első számhoz.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Az összeadás tulajdonságaiból következik, hogy több összeadandó összeadásakor azok sorrendjét tetszőlegesen felcserélhetjük és tetszőlegesen csoportosíthatjuk, így szabadon meghatározhatjuk az összeadás sorrendjét.

Ha pedig az összeadandók közül az egyik nulla, akkor az összeg megegyezik a másik összeadandóval:

$$a + 0 = a$$

$$0 + a = a$$

4.2. A természetes számok kivonása

Az $a \sim b = c$ egyenlőségben az a számot **kisebbítendőnek**, a b -t **kivonandónak**, a c -t, és az $a \sim b$ kifejezést **különbségnek** nevezzük.

Kivonáskor a 0 különleges tulajdonsággal rendelkezik: ha a kivonandó nulla, akkor a különbség megegyezik a kisebbítendővel:

$$a - 0 = a$$

A következő tulajdonság is igaz: ha a kisebbítendő és a kivonandó megegyezik, akkor a különbség nulla:

$$a - a = 0$$

4.3. Szám- és betűkifejezések. Képletek

Jelöljük a téglalap kerületét P betűvel. Ekkor a következő összefüggés érvényes:

$$P = 2a + 2b$$

A képletet tetszőleges téglalap kerületének meghatározására alkalmazhatjuk. Az ilyen típusú egyenlőséget **képletnek** nevezzük.

Például az a oldalú négyzet kerülete a következő képlettel számolható ki:

$$P = 4a$$

A következő egyenlőséget:

$$a = vt$$

ahol s a megtett út, v a mozgás sebessége, és t az az idő, amely szükséges az s út megtételéhez, ezt nevezzük **út képletének**.

4.4. Egyenletek

Az egyenlet gyökének azt a számot nevezzük, amelyet a változó helyére behelyettesítve az egyenlet igaz egyenlőséggé válik.

Ugyan úgy, a 3 a $2x + 2 = 8$ az egyenlet gyöke lesz, illetve a 4 nem lesz gyöke ennek az egyenletnek. Igaz, $2 \cdot 3 + 2 = 8$, és a $2 \cdot 4 + 2 \neq 8$ ($\neq$ jelet úgy olvassuk, hogy **ami nem egyenlő**).

Gyakran az egyenlet gyökét az egyenlet **megoldásának** is nevezzük.

Az egyenlet megoldása azt jelenti, hogy meghatározzuk az összes gyökét, vagy meggyőződünk arról, hogy nincs is gyöke.

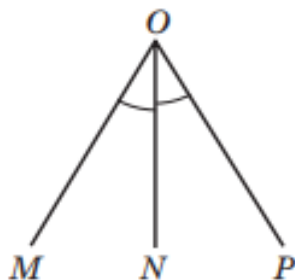
4.5. Szög. Szögek jelölése

Szögnek nevezzük azt az alakzatot, amelyet két, közös kezdőpontú félegyenes alkot.

Ezeket a félegyeneseket a szög **szárainak**, a közös kezdőpontot pedig a szög **csúcsának** nevezzük.

Két szöget akkor nevezünk egyenlőnek, ha egymásra helyezve teljesen fedik egymást.

A 4.1. ábrán az ON félegyenes az MOP szöget két egyenlő szögre osztja. Az ilyen félegyenes a szög **szögfelezőjének** nevezzük.

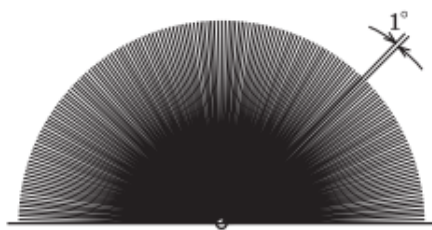


4.1. ábra. Szögfelező[6]

4.6. A szögek típusai. Szögmérés

Azt a szöget, amelynek szárai egyenest alkotnak, egyenesszögnek nevezzük.

Az egyenes szöget 180 egyenlő részre osztjuk (4.2. ábra). A két szomszédos félegyenes közötti szöget a szög egységének tekintjük. Ezt a mértéket **foknak** nevezzük, és így írjuk: 1° .



4.2. ábra. Szögmérő[6]

Megmérni a szöget annyit jelent, mint megszámolni, hogy hány egységnyi szögből áll. Ekkor az egyenesszög **mértéke** vagy **fokmértéke** 180° lesz.

Ha az ABC szög szárai között egy BD félegyeneset húzunk, akkor az ABC szög mértéke megegyezik az ABD és DBC szögek szögmértékeinek összegével. Tehát:

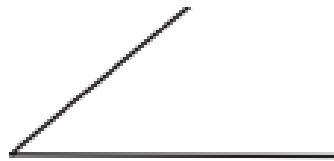
$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

Azt a szöget, melynek szögmértéke 90° , **derékszögnek** nevezzük (4.3. ábra).



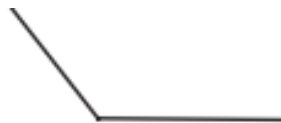
4.3. ábra. Derékszög[6]

Azt a szöget, amelynek fokmértéke kevesebb, mint 90° , **hegyesszögnek** nevezzük (4.4. ábra).



4.4. ábra. Hegyesszög[6]

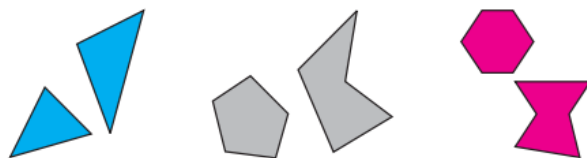
Azt a szöget, amelynek fokmértéke nagyobb, mint 90° , de kisebb, mint 180° , **tompaszögnek** nevezzük (4.5. ábra).



4.5. ábra. Tompaszög[6]

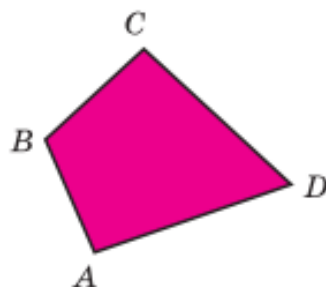
4.7. Sokszögek. Egybevágó alakzatok

Ezek az alakzatok mind **sokszögek** (4.6. ábra).



4.6. ábra. Sokszög[6]

Minden sokszögnek vannak csúcsai és oldalai. Így a 4.7. ábrán az A , B , C , D pontok alkotják a négyszög csúcsait, míg az AB , BC , CD , DA szakaszok a négyszög oldalai. Az A , B , C , D pontoknál lévő szögeket pedig a négyszög szögeinek nevezzük.



4.7. ábra. Négyszög[6]

Két sokszöget **egybevágónak** nevezünk, ha egymásra helyezve teljesen fedik egymást. A 4.8. ábrán két egyenlő hétszög látható.



4.8. ábra. Két egyenlő hétszög[6]

Két alakzatot akkor nevezünk **egybevágónak**, ha egymásra helyezve pontosan fedik egymást.

4.8. A háromszög fajtái

Az összes sokszög közül a háromszög rendelkezik a legkevesebb oldallal. A háromszögeket szögeik alapján is csoportosíthatjuk.

Ha egy háromszög mindhárom szöge hegyesszög, akkor azt **hegyesszögű háromszögnek** nevezzük.



4.9. ábra. Hegyesszögű háromszög[6]

Ha egy háromszögben az egyik szög derékszög, akkor az ilyen háromszöget **derékszögű háromszögnek** nevezzük.



4.10. ábra. Derékszögű háromszög[6]

Ha egy háromszögnek van egy tompaszöge, akkor azt **tompaszögű háromszögnek** nevezzük.

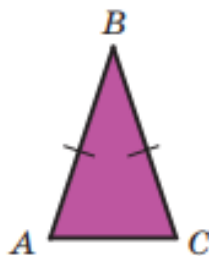


4.11. ábra. Tompaszögű háromszög[6]

A háromszögek nemcsak szögeik, hanem az egyenlő oldalaik száma szerint is csoportosíthatók.

Ha egy háromszögnek két oldala egyenlő hosszúságú, akkor azt **egyenlő szárú háromszögnek** nevezzük.

A 4.12. ábrán az ABC egyenlő szárú háromszög látható, ahol $AB = BC$.



4.12. ábra. Egyenlő szárú háromszög[6]

Ha egy háromszög mindhárom oldala egyenlő, akkor azt **egyenlő oldalú háromszögnek** nevezzük.

4.9. Téglalap

Ha egy négyszög minden szöge derékszög, akkor azt **téglalapnak** nevezzük.

A 4.13. ábrán az $ABCD$ négyszög látható. Az AB és BC oldalak a B csúcsban találkoznak, ezért ezeket az oldalakat az $ABCD$ téglalap **szomszédos oldalainak** nevezzük.



4.13. ábra. Téglalap[6]

A téglalap szemközti oldalai egyenlők.

Ha a téglalap szomszédos oldalait a és b betűvel jelöljük, akkor a kerületét P -vel jelölve a következő, már ismert képlettel számíthatjuk ki:

$$P = 2a + 2b$$

Ha a négyzet oldalát a betűvel jelöljük, akkor a kerületét P -vel jelölve a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$P = 4a$$

4.10. A magyarországi tankönyvek az eddig felsorolt elméleti részekén kívül a következő témaköröket is tárgyalják.

Szót ejtenek a konvex testek és a nem konvex testekről is a könyvben.

Konvex testnek nevezzük az olyan testet, amelyen a felület bármely pontja festékes lehet, ha végiggörgetjük egy festékes asztalon[1].



4.14. ábra. Konvex[1]

Nem konvex testek akárhogy érintkeznek egy festékes asztallal, nem lehetnek mindenütt festékesek[1].

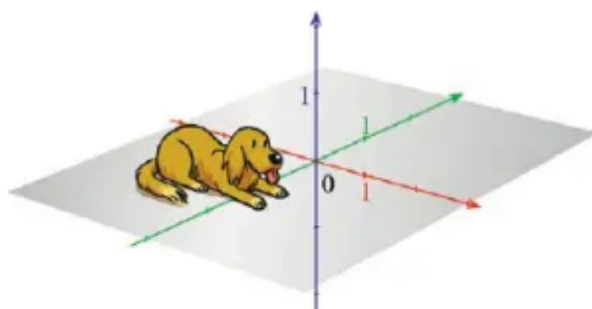


4.15. ábra. Konkáv[1]

A tér elemeinek megfigyelése téglatesten is egy olyan témakör, amit máshogyan és más szemszögből magyaráznak a magyarországi tankönyvben, illetve 5. osztályban még nem is tanítják a diákoknak Ukrajnában.

A térben – ahol élünk – egy alakzat helyét három, páronként egymásra merőleges számegyenes segítségével adhatjuk meg[1].

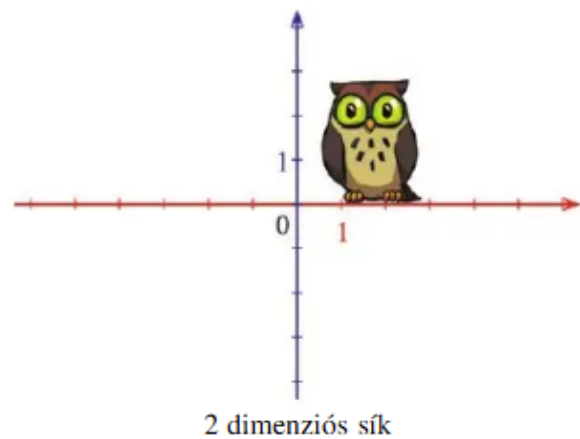
Ezt úgy fejezzük ki, hogy a tér **3 dimenziós**. (A *dimenzió* latin eredetű szó, jelentése: kiterjedés.)



4.16. ábra. 3 dimenziós tér[1]

A síkban lévő alakzatok helyét két egymásra merőleges számegyenes segítségével határozhatjuk meg.

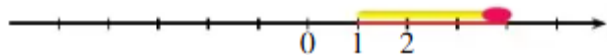
Ezt úgy fogalmazzuk, hogy a sík **2 dimenziós**.



4.17. ábra. 2 dimenziós tér[1]

Az egyenesen lévő pontok, szakaszok, félegyenesek helyét egyetlen számegyenes segítségével adhatjuk meg[1].

Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy az egyenes **1 dimenziós**.



4.18. ábra. 1 dimenziós egyenes[1]

A pontoknak nincs kiterjedésük semmilyen irányban, ezért a pont **0 dimenziós**.

5. fejezet

Természetes számok szorzása és osztása

5.1. Szorzás. A szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága

Ebben a fejezetben (A. H. Merzljak) 2018-as kiadású 5. osztályos matematika tankönyvének I. fejezetét fogom felhasználni a munkámhoz [7].

Az a és b szorzatát úgy értelmezzük, hogy az a számot b -szer összeadjuk.

Ha az egyik tényező 1-gyel egyenlő, akkor a szorzat megegyezik a másik tényezővel:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Ha az egyik tényező 0-val egyenlő, akkor a szorzat értéke 0.

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Ha a szorzat nulla, akkor legalább az egyik tényező értéke nulla.

A tényezők felcserélésével a **szorzat nem változik**. Ezt a tulajdonságot betűkifejezéssel így írhatjuk fel:

$$ab = ba$$

5.2. A szorzás csoportosítási és széttagolási tulajdonsága

Két szám szorzatát megszorozhatjuk egy harmadik számmal úgy is, hogy az első számot megszorozzuk a második és harmadik szám szorzatával:

$$(ab)c = a(bc)$$

A szorzás felcserélhetőségi és csoportosítási tulajdonságai miatt több szám szorzásánál a tényezőket felcserélhetjük, valamint a zárójelekkel meghatározhatjuk a műveletek sorrendjét.

Egy számot összeggel úgy is megszorozhatunk, hogy a számot megszorozzuk az összeadandók mindegyikével, majd az így kapott szorzatokat összeadjuk:

$$a(b + c) = ab + ac$$

A szorzás szétagolási törvénye a kivonásra is érvényes lesz:

$$a(b - c) = ab - ac$$

5.3. Az osztás

Nullával osztani nem lehet.

Ezzel együtt, mivel $a \cdot 0 = 0$, bármely természetes számra, azaz a -ra igaz a következő egyenlőség:

$$0 \div a = 0$$

Bármely természetes szám, a esetén a következő egyenlőségek igazak:

$$a \div a = 1$$

$$a \div 1 = a$$

5.4. Maradékos osztás

A $20 = 6 \cdot 3 + 2$ alakban a 3 a teljes hányados, a 2 pedig a maradék.

A maradék mindig kisebb az osztónál.

Osszuk el a 189-et 13-mal:

	1	8	9	1	3
	1	3		1	4
		5	9		
		5	2		
			7		

5.1. ábra. Maradékos osztás[6]

Az osztandó meghatározásához meg kell szorozni az osztót a nem teljes hányadossal, majd hozzáadni a maradékot:

$$a = bq + r$$

ahol az a az osztandó, b az osztó, q a nem teljes hányados, r pedig a maradék, továbbá $r < b$.

5.5. A szám hatványa

A matematikusok felfedezték, hogy az ismétlődő tényezők szorzata egyszerűbben is kifejezhető. Például:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4.$$

A 7^4 kifejezést **hatványnak** nevezzük, és így olvassuk: „hét a negyedik hatványon” vagy „hétnek a negyedik hatványa”. Ebben a kifejezésben a 7 a hatvány **alapja**, míg a 4 a hatvány **kitevője**.

A 7^4 kifejezés értékének kiszámítását a 7 **negyedik hatványának** nevezzük.

Ha egy számkifejezésben hatvány is szerepel, akkor azt hajtjuk végre elsőként, majd ezt követően a többi műveletet a megszokott sorrend szerint végezzük el.

5.6. Terület. A téglalap területe

1. Egyenlő alakzatok területei is egyenlők.
2. Az alakzat területe megegyezik az őt alkotó részalakzatok területeinek összegével.

Az 1 m oldalhosszúságú négyzet területét **négyzetméternek** nevezzük, és így jelöljük: $1, \text{m}^2$.

Az 1 cm oldalhosszúságú négyzet területét **négyzetcentiméternek** hívjuk, amit így írunk: $1, \text{cm}^2$.

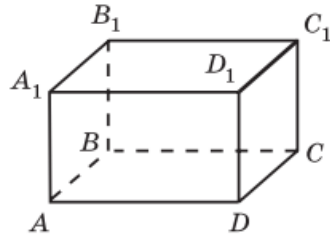
Egy alakzat területének megmérése azt jelenti, hogy megszámoljuk, hány területegység fér el benne.

A téglalap területe megegyezik két szomszédos oldalának szorzatával:

$$S = ab$$

5.7. Derékszögű paralelepipedon (Téglatest). Gúla

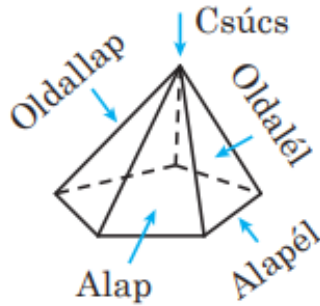
A lapok oldalait a **téglatest éleinek**, a lapok csúcsait pedig a **téglatest csúcsainak** nevezzük. Például az AB , BC , A_1B_1 szakaszok az $ABCD A_1B_1C_1D_1$ téglatest élei, míg a B , A_1 , C_1 pontok a téglatest csúcsai lesznek (5.2. ábra).



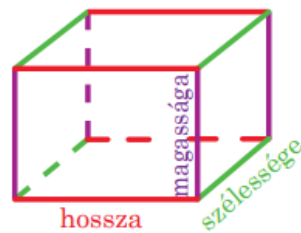
5.2. ábra. Téglatest[6]

A téglatest szemközti lapjai páronként egyenlő területűek. A 5.2. ábrán az $ABCD$ lapot a $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest alaplapjának nevezzük.

A téglatest felszínének az összes lap területének összegét nevezzük.



5.3. ábra. A gúla részei [6]



5.4. ábra. Paralelepipedon[6]

5.8. A téglatest térfogata

Íme egy kicsit átfogalmazott változat, miközben megőrzöm a lényegét és a jelöléseket:

Az egyenlő nagyságú testek térfogata is egyenlő.

Egy test térfogata megegyezik az őt alkotó résztestek térfogata összegével.

Az 1 mm élhosszúságú kocka térfogatát **köbmilliméternek** nevezzük. Így írjuk: 1 mm^3 .

Az 1 cm élhosszúságú kocka térfogatát **köbcentiméternek** nevezzük. Így írjuk: 1 cm^3 .

Egy alakzat térfogatának meghatározása azt jelenti, hogy megállapítjuk, hány darab egységkocka fér bele.

A téglatest térfogata megegyezik az egy csúcsból kiinduló élek hosszának szorzatával:

$$V = abc$$

Mivel a kocka minden éle egyenlő hosszúságú, ezért térfogatát az alábbi képlettel számíthatjuk ki:

$$V = a^3$$

A téglatest térfogata megegyezik alapterületének és magasságának szorzatával.

5.9. Kombinatorikai feladatok

Tegyük fel, hogy elfelejtették a barátotok telefonszámának utolsó számjegyét. Hány olyan különböző eset létezik, amit kipróbálva biztosan fel tudod hívni a barátodat?

Mivel a telefonszám utolsó számjegyeként bármelyik számjegy szerepelhet, ezért legrosszabb esetben 10 próbálkozásra lesz szükség, vagyis az összes lehetőséget végig kell próbálnunk.

A mindennapi életben gyakran találkozunk olyan problémákkal, amelyek megoldásához az összes lehetséges esetet meg kell vizsgálni, vagyis meg kell határozni az esetek számát, illetve az összes lehetséges kombinációt. Az ilyen típusú feladatokat **kombinatorikai feladatoknak** nevezzük.

5.10. A magyarországi tankönyvben az előbb felsorolt elméleti részek mellett a következő témaköröket is tárgyalják

A **helymeghatározás a derékszögű koordinátarendszerben** című tananyag nem található az ukrán 5. osztályos matematika (Merzljak) tankönyvben, viszont megtalálható a magyarországiban. Fejleszti a térbeli tájékozódás képességét a tanulóknak, a logikus gondolkodást, amik remekül megalapozzák, illetve hozzátesznek a későbbi tanulmányaikhoz is, nem csak a matematikában kamatoztatva.

A témát a következőképp vezetik be.

A postásnak pontosan tudnia kell a címzett lakhelyét, hogy a leveleket jó helyre kézbesítse[1].

Egy színház-, mozi- vagy hangversenyjegyen pontosan fel kell tüntetni, hogy hová ülhet le a jegy tulajdonosa[1].

A sík pontjainak helyét meghatározhatjuk, ha két egymásra merőleges számegetest a 0 pontjainál illesztünk össze[1].



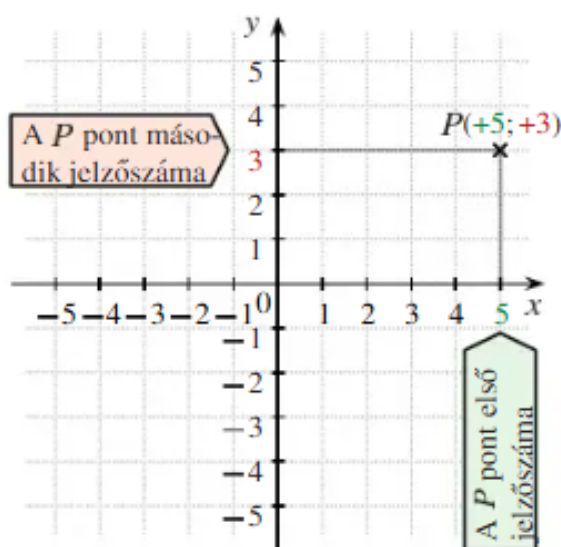
5.5. ábra. Jegy[1]

Két számegyenes neve: **x tengely**, **y tengely**[1].

A tengely közös pontja az **origó** vagy **kezdőpont**[1].

Ha egy pontból merőlegest húzunk az **x tengelyre**, akkor leolvashatjuk az első jelzőszámát, ha pedig az **y tengelyre** állítunk merőlegest, akkor a második jelzőszámát tudjuk leolvasni[1].

Minden pontnak két jelzőszáma van, sorrendjüket nem szabad fölcserélni. A jelzőszámokat **koordinátáknak** nevezzük[1].



5.6. ábra. Koordináta rendszer[1]

6. fejezet

Közönséges törtek

Ebben a fejezetben (A. H. Merzljak) 2018-as kiadású 5. osztályos matematika tankönyvének II. fejezetét fogom felhasználni a munkámhoz [7].

6.1. A közönséges törtek értelmezése

A természetes számokon és a nullán kívül léteznek más számok is, amelyeket **törtszámoknak** nevezünk.

Vizsgáljuk meg a következő példát.

Az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{17}{24}$ alakú felírásokat **közönséges törteknek** vagy egyszerűen **törteknek** nevezzük.

A törtvonal feletti számot a tört **számlálójának**, míg a törtvonal alatti számot a tört **nevezőjének** nevezzük.

A nevező azt mutatja meg, hogy az egész hány egyenlő részre oszlik, a számláló pedig azt, hogy ezekből hány részt veszünk.

6.2. Közönséges törtek és áltörtek. A törtek összehasonlítása.

Ha a tört számlálója megegyezik a nevezőjével, akkor a tört értéke pontosan egy: $\frac{m}{m} = 1$, ahol m tetszőleges természetes szám.

Azokat a törteket, amelyekben a számláló kisebb a nevezőnél, **valódi törteknek** nevezzük.

Ha viszont a számláló nagyobb vagy egyenlő a nevezőnél, akkor az ilyen törteket **áltörteknek** nevezzük.

A 6.1. ábrán látható téglalap $\frac{2}{7}$ -ed része van vonalkázva. A fennmaradó, nem satírozott rész a téglalap $\frac{5}{7}$ -ed része. Ez alapján megállapíthatjuk, hogy $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$.

Egy valódi tört mindig kisebb, mint 1, míg egy áltört vagy pontosan 1, vagy annál nagyobb.



6.1. ábra. A téglalap tört része[7]

Minden áltört nagyobb bármely valódi törtnél, és fordítva: minden valódi tört kisebb bármely áltörtnél.

Ha két törtnek ugyanaz a számlálója, akkor közülük az a nagyobb, amelyiknek kisebb a nevezője, és az a kisebb, amelyiknek nagyobb a nevezője.

6.3. Törtek és a természetes számok osztása

Ha a **3-at osztunk 4-gyel**, az végeredmény egy **törtszám**, $\frac{3}{4}$ lesz.

Vagyis $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

Ez a példa bemutatja, hogyan kapcsolódik egymáshoz a természetes számok osztása és a közösleges törtek.

A törtvonalat az osztás jelének is tekinthetjük, és az $\frac{a}{b}$ alakot olvashatjuk így is: a osztva b -vel.

Megjegyezzük, hogy két természetes szám osztásának eredménye lehet természetes szám vagy törtszám is.

6.4. Vegyes törtek

A $2\frac{5}{7}$ számot **vegyes számnak** nevezzük. A $2\frac{5}{7}$ vegyes számban a 2-t a vegyes szám **egész részének**, az $\frac{5}{7}$ törtet pedig a **törtrészének** nevezzük.

A vegyes szám törtrésze mindig **valódi tört**.

Ahhoz, hogy egy olyan áltörtet, amelynek számlálója nem osztható maradék nélkül a nevezőjével, **vegyes számmá** alakítsunk, el kell osztani a számlálót a nevezővel. A kapott nem teljes hányadost a vegyes szám **egész részének**, a maradékot pedig a törtrész **számlálójának** írjuk fel.

Bármely olyan áltört, amelynek számlálója nem osztható maradék nélkül a nevezőjével, **felírható vegyes számként**

Az összeadás tulajdonságai:

Felcserélhetőség: $a + b = b + a$.

Csoportosíthatóság: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

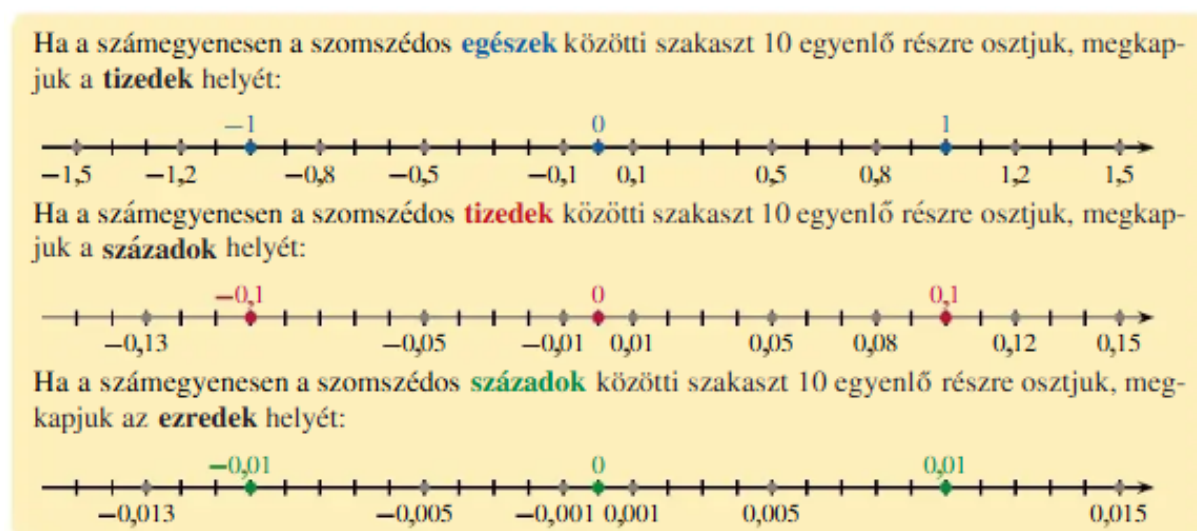
6.5. A magyarországi tankönyvben ezeket az elméleti részeket az előbb felsoroltakon kívül a következőket is tárgyalják.

A mindennapi életünkben használjuk a pozitív és a **negatív számokat** is. A lehető legtermészetesebb számunkra, hogy este a tévé időjárás-jelentésekor azt halljuk[1]:

- az éjszakai várható hőmérséklet -3°C ,
- nappalra a levegő hőmérséklete $+18^{\circ}\text{C}$ -ra emelkedik.

Nem is gondolnánk, hogy a negatív számok bevezetésére, és főleg azok használatára milyen későn kerül sor a matematikában. Európában a gazdasági életben a hiány jelölésére az itáliai matematikusok használták először a negatív számokat a 12. században. Ők sem tudták elfogadni igazán ezeket a számokat, és ezért különleges elnevezéseket adtak nekik: az olasz Girolamo Cardano (1501 – 1576) "fiktív" (latin szó: hamis, kitalált), a német Michael Stifel (1487 – 1567) "abszurd" (latin szó: képtelen, értelmetlen) számoknak nevezte őket. Stifel 0-nál kisebb számként jelölte a negatív számokat. Például a (-2) -t úgy írta, hogy $0 - 2[1]$.

Tizedes törtek ábrázolása a számegyenesen téma érdekesen van taglalva a magyarországi tankönyvben, illetve az ukrainaiban nem térnek ki rá különösebben a szerkesztők. A következőket tartalmazza[1]:



6.2. ábra. Tizedestörtek ábrázolása számegyenesen[1].

7. fejezet

Tizedes törtek

Ebben a fejezetben (A. H. Merzljak) 2018-as kiadású 5. osztályos matematika tankönyvének II. fejezetét fogom felhasználni a munkámhoz [7].

7.1. A tizedes törtek fogalma

Az olyan törtekre, amelyek nevezője 10, 100, 1000, 10,000 és így tovább, bevezették az **egyszintes felírási módot**.

Ebben a formában a törtet egy tizedesvesszővel elválasztott számként írjuk fel, például:

$$\frac{7}{10} = 0,7; \quad \frac{23}{100} = 0,23; \quad \frac{418}{1000} = 0,418; \quad \frac{9}{10000} = 0,0009.$$

Ebben az alakban felírt törteket **tizedes törteknek** nevezzük.

A tizedes tört törtrésze annyi számjegyből áll, amennyi nulla szerepel a közösleges tört nevezőjében.

Vagyis a tizedesvessző után először a **tizedek**, majd a **századok**, aztán az **ezredek**, és így tovább következnek.

Például a 23,70549 szám esetén:

- 7 – tizedek helyiértéke,
- 0 – századok helyiértéke,
- 5 – ezredek helyiértéke,
- 4 – tízezredek helyiértéke,
- 9 – százzezredek helyiértéke.

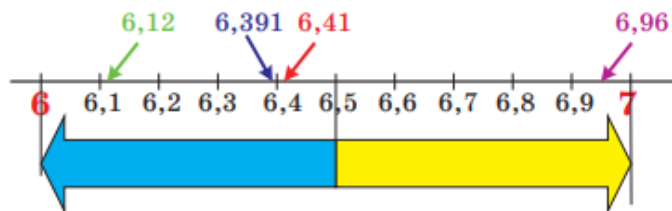
A 23,70549 törtet így olvassuk ki: **huszonhárom egész hetvenezer-ötszáznegyvenkilenc százezred**.

7.2. A tizedes törtek összehasonlítása

- Két tizedes tört közül az a nagyobb, **amelyiknek az egész része nagyobb**.
- A tizedes tört **végére tetszőleges számú nullát írhatunk**, az így kapott tört értéke megegyezik az eredeti törttel.
- A **nullára végződő tizedes tört értéke változatlan marad**, ha a végén álló nullákat elhagyjuk.
- Ha két tizedes tört **egész része megegyezik**, de a tizedesvessző utáni számjegyeik száma eltérő, akkor:
 1. A rövidebb törtreszt nullákkal egészítjük ki, hogy mindkettő ugyanolyan hosszú legyen.
 2. Ezután **helyi érték szerint** hasonlítjuk össze a számjegyeket.

7.3. A számok kerekítése

Miért éppen 7, és nem 6? Ezt úgy állapították meg, hogy megnézték, melyik természetes szám áll legközelebb a 6,96-hoz — ez pedig a 7 (7.1. ábra).



7.1. ábra. Számok kerekítése[7]

Ahhoz, hogy tizedes törteket kerekítsünk egyesekre, tizedekre, századokra vagy más helyi értékre, elhagyjuk a megtartott jegy utáni számjegyeket.

Ha az első elhagyott számjegy 0, 1, 2, 3 vagy 4, akkor az utolsó megtartott számjegy értéke nem változik.

Ha viszont az első elhagyott számjegy 5, 6, 7, 8 vagy 9, akkor az utolsó megtartott számjegy értékét egyel növeljük.

7.4. A tizedes törtek összeadása és kivonása

Két tizedes tört összegének meghatározásához:

1. Először kiegyenlítjük az összeadandók tizedesvessző utáni számjegyeinek számát;

2. Ezután az összeadandókat úgy írjuk egymás alá, hogy minden helyi érték (egyesek, tizedek, századok stb.) egymás alá kerüljön;
3. Az összeadást a természetes számokhoz hasonlóan végezzük el;
4. Figyelünk rá, hogy az összegben és az összeadandókban a tizedesvesszők pontosan egymás alá kerüljenek.

Két tizedes tört különbségének meghatározásához:

1. Először kiegyenlítjük a tizedesvessző utáni számjegyek számát;
2. Ezután a kivonandót úgy helyezzük a kisebbítendő alá, hogy minden helyi érték (egyesek, tizedek, századok stb.) egymás alá kerüljön;
3. A kivonást ugyanúgy végezzük, mint a természetes számok esetében;
4. Figyelünk arra, hogy a különbségben, a kisebbítendőben és a kivonandóban a tizedesvesszők pontosan egymás alá kerüljenek.

7.5. A tizedes törtek szorzása

Tizedes törtet 10-zel, 100-zal vagy 1000-rel úgy szorzunk, hogy a tizedesvesszőt 1, 2, illetve 3 helyiértékkal jobbra toljuk.

Tehát, ha a tizedesvesszőt a számban 1, 2, 3 vagy több helyiértékkal jobbra mozgatjuk, a szám értéke rendre 10-szeresére, 100-szorosára, 1000-szeresére és így tovább nő.

Ezzel szemben, ha a tizedesvesszőt ugyanennyivel balra toljuk, a szám értéke 10-szer, 100-szor, 1000-szor és így tovább csökken.

Két tizedes tört szorzásakor a következőképpen járunk el:

1. A tizedes törteket úgy szorozzuk, mint a természetes számokat;
2. A szorzásnál a tényezőkben nem vesszük figyelembe a tizedesvesszőt, majd a kapott eredményben jobbról annyi számjegyet választunk le tizedesvesszővel, amennyi tizedesjegy van összesen a két tényezőben.

7.6. A tizedes törtek osztása

A tizedes törtet 10-zel, 100-zal, 1000-rel és így tovább úgy osztjuk, hogy a tizedes törtben a tizedesvesszőt 1, 2, 3 és így tovább számjeggyel balra visszük.

Tizedes törtet tizedes törttel úgy osztunk, hogy:

1. Az osztandóban és az osztóban a tizedesvesszőt annyi számjeggyel jobbra toljuk, amennyi számjegy az osztó tizedes része után következik;
2. Ezután az osztást a természetes számok osztásának szabályai szerint végezzük el.

7.7. Számtani közép. A mennyiségek középértéke

Néhány szám összegét elosztjuk az összeadandók számával, és az így kapott értéket a számok **számtani közepének** nevezzük.

Nézzünk meg egy példát.

Ha egy gépkocsi 120 km-t tesz meg 1,5 óra alatt, akkor a megtett út és az eltelt idő hányadosaként kiszámíthatjuk a gépkocsi **átlagsebességét**.

$$\frac{120 \text{ km}}{1,5 \text{ óra}} = 80 \text{ km/óra}$$

Ez az átlagsebesség azt jelenti, hogy bár a gépkocsi megállhatott, vagy különböző sebességgel haladhatott, a teljes út során számított középértéke 80 km/óra volt.

7.8. Százalék. A szám százalékanak meghatározása

Egy szám vagy mennyiség századrészét egy külön névvel is jelöljük: ezt nevezzük **egy századnak**, vagy más néven **százaléknak**. A kifejezés a latin pro centum kifejezésből ered, amely szó szerint azt jelenti: „száz részre osztva”.

Bármilyen százaléérték átalakítható **tizedes tört** vagy **közönséges tört**, illetve **természetes szám** alakba. Ehhez a százalék jel előtt álló számot el kell osztani **100**-zal. Például:

$$23\% = 0,23; \quad 80\% = 0,80 = 0,8; \quad 300\% = 3.$$

7.9. A szám (vagy a százalékalap) meghatározása százaléértéke alapján

Az előzőekben láttuk, hogyan számíthatjuk ki a százaléértéket. Most nézzünk meg egy újabb példát a százalékszámítás alkalmazására.

Példa

Hogy ha a csokoládés fagylalt 14%-ban tartalmaz cukrot. Hány kilogramm ilyen fagylaltot csináltak meg, ha 49 kg cukrot használtak fel hozzá?

Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{49}{14} &= 3,5 \quad (\text{kg} - \text{a fagylalt tömegének } 1\%-a), \\ 3,5 \cdot 100 &= 350 \quad (\text{kg} - \text{ennyi fagylaltot készítettek}). \end{aligned}$$

Felelet: 350 kg

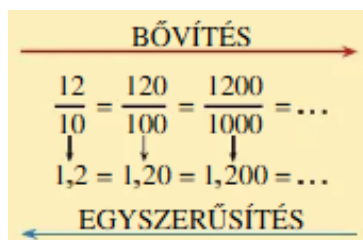
Az ilyen típusú feladatoknál a **százaléértékből** kiindulva számítjuk ki a megfelelő **százalékalapot**.

7.10. A magyarországi tankönyvben ezeket az elméleti részeket az előbb felsoroltakon kívül a következőket is tárgyalják.

A tizedes törtek egyszerűsítése, bővítése és összehasonlítása témaköröket taglalják az ukrán (Merzljak) tankönyvben is. Azonban így is érdemes róla szót ejteni.

A könyv a következő elméleti részeket tartalmazza:

A tizedes tört végére akárhány nullát írhatunk, vagy onnan akárhány nullát elhagyhatunk, a tört értéke nem változik[1].



7.2. ábra. Bővítés[1]

A mért adatok utolsó megadott számjegye a pontosságát jelzi[1].

- A két hátsó kerék távolsága 1,7 m. Ez **deciméter pontosságú** adat.
- A két hátsó kerék távolsága 1,74 m. Ez **centiméter pontosságú** adat.
- A két hátsó kerék távolsága 1,740 m. Ez **milliméter pontosságú** adat.

A tizedes törtek összehasonlításakor is segíthet a bővítés és az egyszerűsítés[1].

Például:

$$3,6 > 3,58 \quad \text{mert } 3,6 = 3,60 \Rightarrow 3,60 > 3,58$$

$$-0,60 < -0,070, \quad \text{mert } -0,070 = -0,07 \Rightarrow -0,60 < -0,07$$

8. fejezet

Bölcs Bagoly feladványok az ukrainai (A. H. Merzljak) tankönyvből

Ebben a fejezetben az ukrainai (A. H. Merzljak) 2018-ban kiadott tankönyvből vett feladatokat fogom felhasználni. [6]

Feladat

A hét törpe mindegyike különböző mennyiségű gombát szedett. Összesen 28-at. Hány gombát szedett mindegyik törpe, ha egyikük kosara sem volt üres?

Megoldás

Tegyük fel, hogy a negyedik törpe 4 gombát gyűjtött. Ezután az első törpe gyűjtött 1 gombát, a második 2 gombát, a harmadik 3 gombát, az ötödik 5 gombát, a hatodik 6 gombát, a hetedik 7 gombát. Összesen: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ (gomba)

Feladat

Az A és B városok között a távolság 30 km. Az A városból a B-be egy kerékpáros indult el 15 km/ó sebességgel. Ezzel egy időben a B városból az A felé egy madár indult el 30 km/ó sebességgel. Amikor találkoztak, a madár visszafordult. Amikor a B városba ért, megint a kerékpáros felé veszi az iránt, majd amikor találkoztak a madár ismét visszakanyarodik a B város felé. A madár ezt így folytatta, míg a kerékpáros a B városba nem ért. Hány kilométert repült a madár?

Megoldás

Mivel a madár sebessége kétszerese egy kerékpáros sebességének, a madár ugyanannyi idő alatt kétszer akkora távolságot tesz meg. A madár és a kerékpáros ugyanannyi ideig voltak úton. Tehát, ha a kerékpáros 30 km-t tett meg, akkor a madár 60 km-t repült.

Feladat

Nappal a csiga 3 m-t mászik felfelé, és éjszaka 2 m-t visszacsúszik. Hány nap alatt ér fel egy 20 m-es alagútból ez a csiga?

Megoldás

A csiga egy nap és egy éjszaka alatt $3\text{ m} - 2\text{ m} = 1\text{ m}$ -t halad. 17 nappal és 17 éjszaka múlva 17 métert fog haladni. A tizennyolcadik napon, a csiga fel ér a 20 m-es alagútból.

Feladat

Ismeretes, hogy egy zsinórdarab 4 percig ég végig, ha az egyik végét meggyújtjuk. Sajnos a zsinór nem egyenletes sebességgel ég.

1. Hogyan lehet egy ilyen zsinórdarabbal lemérni 2 percet?
2. Hogyan lehet két ilyen zsinórdarabbal lemérni 3 percet?

Megoldás

1. Ha egy zsinór mindkét végét egyszerre meggyújtjuk, akkor az egész zsinór 2 perc alatt ég el (mert a lángok két irányból haladnak egymás felé, és a teljes égési idő feleződik). Ezért így mérhetünk ki pontosan 2 percet.
2. Gyújtjuk meg az első zsinór mindkét végét, a második zsinór egyik végét egyszerre! Az első zsinór 2 perc alatt el fog égni. Amint az első zsinór teljesen leégett, azonnal gyújtjuk meg a második zsinór másik végét is. Ekkor a második zsinór már 2 perce égett, tehát még 2 percnyi anyag maradt belőle, amely viszont most már két oldalról égni kezd – így 1 perc alatt elég. Az összesen eltelt idő: $2 + 1 = 3$ perc.

Feladat

Micimackó, Malacka, Szamár és Nyuszi együtt 70 banánt ettek meg, mégpedig mindegyikük legalább egyet megevett. Micimackó ette meg a legtöbbet közülük, Nyuszi és Szamár együtt 45 banánt evett meg. Hány banánt evett meg Malacka?

Megoldás

Micimackó és Malacka együtt $70 - 45 = 25$ banánt ettek meg. Micimackó ette a legtöbb banánt, és a négy közül mindegyikük legalább egyet evett. Mivel Nyuszi és Já összeesen 45 banánt ettek meg, vagyis 22-t és 23-at, Micimackó 24-et evett, tehát Malacka csak 1-et.

Feladat

Hogyan oszthatunk el egyenlően 7 almát 12 barát között, ha az almákat legfeljebb 4 részre vághatjuk?

Megoldás

Egy barátnak jutó alma mennyisége: $\frac{7}{12}$

Az almákat legfeljebb 4 részre vághatjuk, tehát negyedekre. Azonban $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, így az almákat harmadokra és negyedekre kell vágni.

Tehát:

- 4 alma harmadokra vágva: $4 \cdot 3 = 12$ rész,
- 3 alma negyedekre vágva: $3 \cdot 4 = 12$ rész,
- Minden barát kap egy harmadot és egy negyedet: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ almát.

Feladat

László barátainak azt mesélte, hogy tegnapelőtt ő még csak tízéves volt, de jövőre már tizenhárom éves lesz. Hogyan lehetséges ez?

Megoldás

Ez úgy lehetséges, hogy László szökőévben, február 29-én született.

Feladat

Hét ceruza drágább, mint nyolc füzet. Mi lesz drágább: nyolc ceruza vagy kilenc füzet?

Megoldás

Tudjuk, hogy:

$$7 \text{ ceruza ára} > 8 \text{ füzet ára}$$

Ez azt jelenti, hogy egy ceruza ára kicsit több, mint egy füzet ára, mert 7 ceruza drágább, mint 8 füzet.

Mivel egy ceruza drágább, mint egy füzet, ezért nyolc ceruza ára nagyobb lesz, mint kilenc füzet ára.

Felelet: Nyolc ceruza lesz drágább, mint kilenc füzet.

9. fejezet

Alap- és középszintű tudásnak megfelelő feladatok a magyarországi (Csahóczy E.) tankönyvből

Feladat

A következő városok az M7-es autópálya mentén helyezkednek el: Pákozd, Érd, Zamárdi, Székesfehérvár, Polgárdi. Közülük melyik van az autópályán 45 km-t és 89 km-t jelző táblái között [1]?

Székesfehérvár	Zamárdi	Érd	Pákozd	Polgárdi
58 km és 59 km között	112 km és 113 km között	17 km és 18 km között	50 km és 51 km között	79 km és 80 km között

9.1. ábra. Feladat 8.1. [1]

Megoldás

Pákozd, Székesfehérvár és Polgárdi települések a feladatban adott szakaszon helyezkednek el. Ezeknek a 0 kilométerektől vett távolságra teljesül, hogy: $45 \text{ km} \leq \text{távolság} \leq 89 \text{ km}$ [1].

Feladat

Magyarországon a legkisebb pénzérme az 5 Ft-os. Kézpénben fizetni csak 0-ra vagy 5-re végződő számú Ft-ot lehet. Ezért fontos, hogy tudjunk 5-ösökre is kerekíteni[1]. Ha a valódi ár 8-ra, 9-re, 0-ra, 1-re vagy 2-re végződik, akkor a legközelebbi tízes lesz a fizetett ár. Ha a valódi ár 3-ra, 4-re, 5-re 6-ra vagy 7-re végződik, akkor a legközelebbi 5-r végződő szám lesz a fizetett ár. Mennyit fizetünk, ha az ár: 23 Ft, 419 Ft, 58 Ft, 999 Ft, 89 Ft, 4110 Ft, 9990 Ft, 811 Ft, 102 Ft, 567 Ft, 495 Ft[1]?

Megoldás



9.2. ábra. Feladat 8.2. [1]

A fizetendő összegek sorra: 25 Ft, 420 Ft, 60 Ft, 1000 Ft, 85 Ft, 4110 Ft, 9990 Ft, 810 Ft, 100 Ft, 565 Ft, 495 Ft lesznek[1].

Feladat

Hány játékautó áll Áron parkolójában[1]?



9.3. ábra. Feladat 8.3.[1]

Megoldás

Ha soronként adjuk össze őket, akkor: $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \cdot 13$ az eredmény[1].

Ha oszloponként számoljuk meg, akkor: $13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = 13 \cdot 8$ az autók száma[1].

Természetesen mindkét módon ugyanarra az eredményre jutunk[1].

Feladat

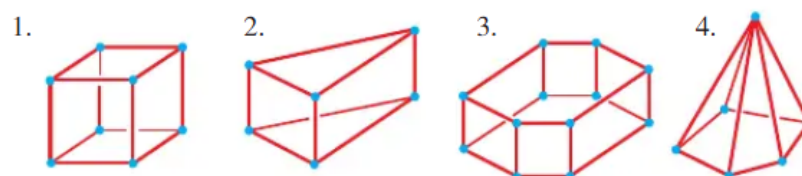
Meg tudjuk-e mondani, hogy hányszor fér bele az 5-be a 0? Például hogy 5 csokit hány gyerek között kell szétosztani egyenlően ahhoz, hogy minden gyerek 0-t kapjon[1]?

Megoldás

Nincs ilyen szám, mert ha lenne, akkor azt 0-val megszorozva 0-t kapnánk, nem 5-öt. Akármilyen sok gyereknek adunk 0 csokit, az sohasem fog 5 csokit kitenni együtt [1].

Feladat

Határozzuk meg, hány éle, lapja és csúcsa van az alábbi testeknek. Keressük az összefüggéseket az egyes testek éleinek, lapjainak, és csúcsainak száma között[1]!



9.4. ábra. Feladat 8.5. [1]

Megoldás

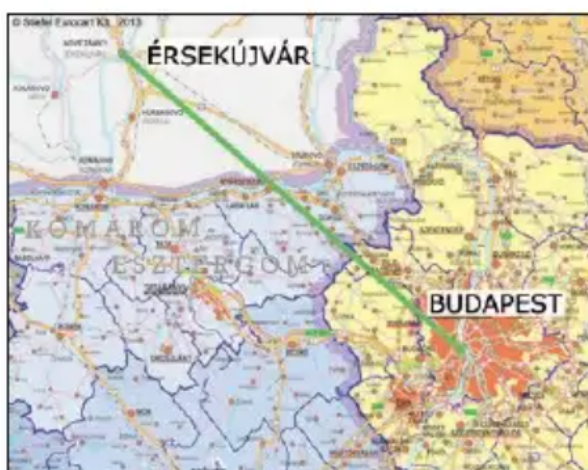
Észrevehetjük, hogy mind a négy testnél ha az élek számához 2-t adunk, a lapok és a csúcsok számának összegét kapjuk. Például a kocka esetében: $12 + 2 = 6 + 8$ [1].

	1.	2.	3.	4.
él	12	9	18	10
lap	6	5	8	6
csúcs	8	6	12	6

9.5. ábra. Feladat 8.5. (2)[1]

Feladat

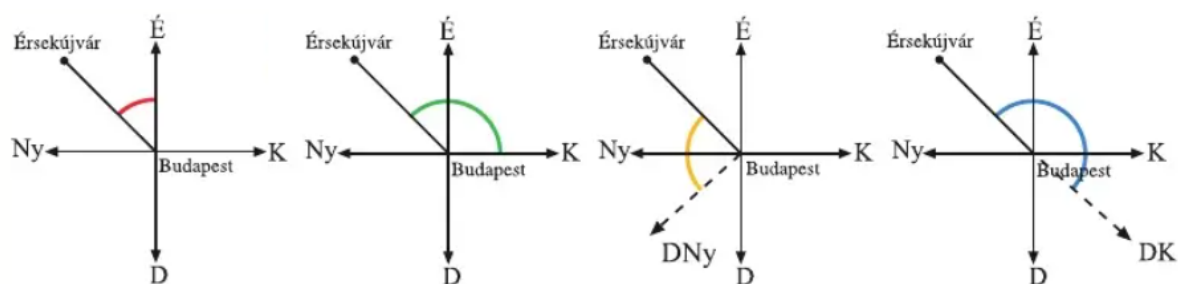
Budapestről közelítőleg északnyugati irányban indulunk útnak Érsekújvárra. Húzzuk meg azt az egyenest, amely Budapestet Érsekújvárral összeköti! Állapítsuk meg, hogy ennek az útiránynak, amelyet az ábrán egyenes szakasszal jelöltünk, a) az északi, b) a keleti, c) a délnyugati, d) a délkeleti iránnyal bezárt szöge körülbelül mekkora része a derékszögnek [1]!



9.6. ábra. Feladat 8.6. [1]

Megoldás

Az adott irány az égtájakkal minden esetben kétféle szöget zár be. Mi most csak az egyiket határozzuk meg[1].



A bezárt szög:

az **északi** iránnyal fél
derékszög,

a **keleti** iránnyal
másfél derékszög,

a **délnyugati** iránnyal
egy derékszög,

a **délkeleti** iránnyal
két derékszög.

9.7. ábra. Feladat 8.6.(2)[1]

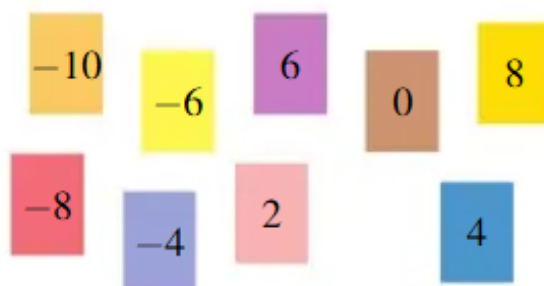
Feladat

A felírt számok közül melyek[1]:

1. a negatív számok;
2. a természetes számok halmazába tartozók;
3. a saját ellentettjükkal együtt felsoroltak?

A felírt számok közül melyik

4. a legkisebb?
5. a legnagyobb?



9.8. ábra. Feladat 8.7.[1]

Megoldás

1. a negatív számok: $-10, -6, -8, -4, -2$;

2. a természetes számok halmazába tartozók: 0, 2, 4, 6, 8;
3. a saját ellentettjükkal együtt felsoroltak: -6 és 6 , -8 és 8 , -4 és 4 , -2 és 2 ;
A felírt számok közül melyik
4. a legkisebb: -10 ;
5. a legnagyobb: 8 ;

Feladat

A műveletek eredményét szögpercben add meg[1]!

1. $1^\circ + 20'$
2. $2^\circ + 15'$
3. $5^\circ + 45'$
4. $3^\circ - 60'$
5. $4^\circ - 90'$
6. $2^\circ - 120'$

Megoldás

1. $1^\circ + 20' = 60' + 20' = 80'$
2. $2^\circ + 15' = 120' + 15' = 135'$
3. $5^\circ + 45' = 300' + 45' = 345'$
4. $3^\circ - 60' = 180' - 60' = 120'$
5. $4^\circ - 90' = 240' - 90' = 150'$
6. $2^\circ - 120' = 120' - 120' = 0'$

Feladat

A londoni olimpiák magyar versenyzőinek nagyszerű eredményeiről válogattunk. Add meg az olimpikonok eredményeit tizedes tört alakban[1]!

1. A 2012-es olimpián Pars Krisztián kalapácsvető a 80 egész 59 század méteres dobásával olimpiai bajnoka lett[1].
2. Az 1948-as olimpián Gyarmati Olga az 5 egész 70 század méteres ugrásával a távolugrás olimpiaibajnoka lett[1].

3. Az 1908-as olimpián Somodi István az 1 méter 88 század méteres ugrásával magasugrásban olimpiai ezüstérmes lett[1].

Megoldás

1. 80,59
2. 5,70
3. 1,88

10. fejezet

Összehasonlító vizsgálat

Az Ukrán tankönyvben (A. H. Merzljak) a fogalmak meghatározásakor a tankönyv a precíz matematikai megközelítést preferálja: részletes szöveges leírásokat, definíciókat és bizonyításra épülő gondolatmenetet használ. Ez a módszer elősegítheti a mélyebb elméleti megértését a tananyagoknak, különösen a tanulmányi versenyekre készülő, vagy emelt szintű érdeklődéssel rendelkező tanulók számára.

A magyarázatok kidolgozottak, viszont a benne található példák kevésbé kötődnek a tanulók mindennapi életéhez. A feladatok szintjeit sima, és befestett karikák jelölik nehézségi szintek alapján:

- „ ° ” alap- és középszintű tudásnak megfelelő feladatok;
- „ • ” jó tudásszintnek megfelelő, illetve a tantervi követelményeknek megfelelő feladatok;
- „ •• ” magas tudásszintnek megfelelő feladatok;
- „ * ” matematikai szakkörre és tanórán kívüli foglalkozásokra ajánlott feladatok jelölése.

A „**Bölcs bagoly**” feladványok kreativitást igényelnek a megoldás keresése közben, így ösztönözve a tanulókat, hogy egy feladatot több szempontból is megvizsgáljanak, amíg meg nem találják a helyes megközelítést, eközben fejlesztve kitartásukat, illetve logikus gondolkodásukat is egyaránt.

Egyes fogalmak bevezetése főként szöveges formában történik, ami a fiatalabb tanulók számára megnehezítheti az absztrakt matematikai tartalom megértését. Bár a rendszer jól strukturált és elősegíti a tanulók önálló tanulását is, a további tantárgyakkal kapcsolatban nem áll – például a technika, természetismeret vagy informatika. Ezek nem jelennek meg kifejezetten a fejezetben, így korlátozza a tanulók számára azt a lehetőséget, hogy az új ismereteket más tantárgyak keretében is értelmezhesék és hasznosítsák.

A magyarországi tankönyv (Csahóczi E.) pedagógiai szempontból megközelítve korszerűbb: a fogalmak bevezetése életszerű helyzetekhez kötött, mint például vásárlás vagy időmérés. Ez a konkrét példákra épülő kontextus elősegíti a fogalmak megértését és rögzülését. A tanulók érdeklődését illusztrációk, vizuális kiemelések és kérdésalapú megközelítések serkentik.

A tananyag világos, a tanulási folyamatot jól támogatják strukturált összefoglalók, önellenőrző kérdések és játékos elemek. Kiemelten fontos szerepet kap a gondolkodási képességek fejlesztése, amelyet gyakori problémamegoldó szituációk, logikai következtetések, illetve tanulási stratégiák: részletezés és becslés közvetítenek. A fejezet rendszeresen visszautal korábbi tananyagelemekre, ezzel is támogatva a hosszú távú tudásépítést.

A következő táblázatban, Kojanitz László által publikált pontok alapján készítem az összehasonlító elemzést:

Funkció	A minőség összetevői	Ukrajnai tankönyv (A. H. Merzljak)	Magyarországi tankönyv (Csahóczi E.)
Motiváció	Illusztráltság Érdekességek Problémák bemutatása	Viszonylag kevés illusztráció, formális szöveg	Játékos, színes illusztrációkkal, életszerű kérdésekkel
Ismeretátadás	Érthetőség, életszerűség, tudományos pontosság	Tudományos pontosság, néhány életszerű példa, kellően érthető	Érthető, hétköznapi példák, vizuális támogatás
Rendszerezés	Strukturáltság	Logikus sorrend, kevés vizuális tagolás	Vizuális részek, színkódolás, emlékeztetők
Koordináció	Más tankönyvekkel való összehangoltság	Utalás van más tantárgyakhoz (pl. én és Ukrajna)	Összhang NAT 2020 más tárgyaival (pl. történelem, természetismeret)

10.1. ábra. Összehasonlító elemzés (1)

Differenciálás	Szintezett tananyag	Csillaggal jelölt nehéz feladatok, és megtalálható a fokozatosság	Könnyített–alap–haladó szintek, ikonokkal jelölve
Tanulásirányítás	Tanórai és otthoni tanulást segítő eszközök	Feladatok főként tanórai használatra, viszont megtalálhatóak ismétlő feladatok is az otthoni gyakorlásra	Külön "Gondolkodj!", "Próbáld ki!" mezők otthoni tanuláshoz
Stratégiák tanítása	Tanulási stratégiák tanítása	Lépésenkénti modellek	Összegző rajzok, algoritmusok, lépésenkénti modellek
Önértékelés	Alkalmazás, összefoglaló kérdések	A fejezet végén találhatóak, ismétlő gyakorlatok. Alkalmazható önértékelésre	Önálló értékelés kérdőívekkel, feladatok végén szereplő visszacsatolás
Értékekre nevelés	Érzelmi hatást keltő eszközök	Felfedezhető néhány csoportos munkára építő feladat, egymás hibáiból tanulás	Előfordulnak történetek, együttműködést fejlesztő példák illetve csoportos munkát igénylő feladatok, amik fejlesztik a társas együttműködést

10.2. ábra. Összehasonlító elemzés (2)

Összefoglalás

Dolgozatomban két általános iskolai matematika tankönyv – az ukrán (A. H. Merzljak) és a magyarországi (Csahóczy E.) – hasonlítottam össze tartalmi, módszertani és pedagógiai szempontból. Az elemzés célja az volt, hogy feltárjam, milyen különbségek mutatkoznak a két könyv között a matematikai fogalomalkotás megközelítésében, a tanulók életkori sajátosságaihoz való alkalmazkodásban, valamint a tanulói gondolkodás fejlesztésének módjában.

Az ukrán tankönyv erőssége a logikusan felépített, formális fogalommagyarázat és a differenciált feladatrendszer, amely pontos jelölésekkel segíti a felhasználót a feladatok nehézségi fokának megértésében. Ugyanakkor a tananyag kevésbé kapcsolódik a tanulók mindennapi tapasztalataihoz, és a szöveges, elvont magyarázatok nehézséget okozhatnak a fiatalabb tanulók számára. A tantárgyközi kapcsolatok nem jelennek meg kifejezetten, így a tanulók számára nehezebb lehet a matematika gyakorlati alkalmazásának felismerése.

A magyarországi tankönyv ezzel szemben korszerűbb pedagógiai elveket követ: a fogalmakat életszerű helyzeteken keresztül mutatja be, vizuálisan gazdag eszköztárral dolgozik, és kérdésalapú tanulást alkalmaz, amely aktív részvételre ösztönzi a tanulókat. A gondolkodási képességek fejlesztése kiemelt szerepet kap, és a tananyag rendszeresen visszautal korábbi ismeretekre, így biztosítva a hosszú távú tudásépítést. A játékos feladatok, önellenőrző kérdések és problémamegoldó helyzetek változatos tanulási lehetőségeket kínálnak a különböző képességű diákok számára.

A magyar és az ukrán matematika tankönyv összehasonlítása alapján jól látható, hogy mindkét megközelítésnek megvannak az erősségei, de különböző pedagógiai célokat szolgálnak. Az ukrán tankönyv elsősorban a matematikai pontosságra, a logikus gondolkodás fejlesztésére és a formális fogalomalkotásra helyezi a hangsúlyt. Ezzel szemben a magyar tankönyv korszerűbb didaktikai eszközöket alkalmaz: életszerű példák, vizuális elemek segítségével és játékos, kérdésalapú tanulással vezeti be a fogalmakat. Ez segíti a tanulók érdeklődésének fenntartását, fejleszti önálló gondolkodásukat és alkalmazkodik a különböző képességszintekhez.

A konzekvencia tehát az, hogy a hatékony matematikaoktatáshoz szükség van a tudományos megalapozottság és a tanulóközpontú, élményszerű tanítási gyakorlat ötvözésére. A tananyag akkor lehet igazán eredményes, ha egyszerre pontos, jól strukturált, de ugyanakkor figyelembe veszi a gyerekek életkori sajátosságait, érdeklődését és tanulási stílusát is. A jövőbeli tankönyvfejlesztés során célszerű ezen elemeket ötvözni, hogy a matematika ne csupán

elméleti tudásként jelenjen meg, hanem érthető, érdekes és alkalmazható is legyen a tanulók számára.

Irodalomjegyzék

- [1] Csahóczy, E., Csatár, K., Kovács, Cs., Morvai, É., Széplaki, Gy., & Szeredi, É. (2021). *Matematika 5. tankönyv*. Oktatási Hivatal. ISBN: 978-615-6178-00-8
- [2] Indri, D. J. (2020). Elkészültek a módosított Nemzeti alaptantervnek megfelelő tankönyvek. Új Köznevelés. Oktatási Hivatal. <https://folyoiratok.oh.gov.hu/uj-koznevelés/elkeszultek-a-modositott-nemzeti-alaptantervnek-megfelelo-tankonyvek>
- [3] Kojanitz, L. (2003). *A szakiskolai fejlesztés időszzerű kérdései*. Új Pedagógiai Szemle, 53(9). Elérhető: <https://epa.oszk.hu/00000/00035/00074/2003-09-ta-Kojanitz-Szakiskolai.html>
- [4] Márta D. (2021). OHMAT05MB Matek5 MF MEGOLD Teljes [PDF]. Scribd. <https://de.scribd.com/document/526497245/OHMAT05MB-Matek5-Mf-MEGOLD-Teljes>
- [5] Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2018). ГДЗ Математика 5 клас: Відповіді та розв'язання до підручника [Онлайн ресурс]. Вшколе. <https://vshkole.com/5-klass/reshebniki/matematika/ag-merzlyak-vb-polonskij-ms-yakir-2018>
- [6] Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2018). *Математика. 5 клас: підручник для закладів загальної середньої освіти з навчанням угорською мовою* (пер. Д. Ф. Поллої). Львів: Світ. https://kmksz.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_I_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf
- [7] Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2018). *Математика. 5 клас: підручник для закладів загальної середньої освіти з навчанням угорською мовою* (пер. Д. Ф. Поллої). Львів: Світ. https://kmksz.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf
- [8] Szerviczki, K. (szerk.). (2021). Maximum 8. évfolyam. Matematika. I. kötet (1. kiad.). Oktatási Hivatal.

Ábrák jegyzéke

1.1. Egyenlő oldalú háromszög [6]	11
1.2. Téglalap [6]	12
1.3. Négyzet [6]	12
2.1. Funkciók és a minőség összetevői [3]	16
3.1. Számjegyek [6]	18
3.2. A és B pont összekötése [6]	18
3.3. Szakasz [6]	18
3.4. Töröttvonal [6]	19
3.5. Két ponton keresztül csak egy egyenes húzható [6]	19
3.6. Egyenes jelölése [6]	19
3.7. Félegyenes [3]	20
3.8. Skála[6]	20
3.9. OX félegyenes [6]	20
3.10. Számegyenes [6]	21
3.11. Halmaz [1]	21
4.1. Szögfelező[6]	24
4.2. Szögmérő[6]	24
4.3. Derékszög[6]	25
4.4. Hegyesszög[6]	25
4.5. Tompaszög[6]	25
4.6. Sokszög[6]	26
4.7. Négyszög[6]	26
4.8. Két egyenlő hétszög[6]	26
4.9. Hegyesszögű háromszög[6]	27
4.10. Derékszögű háromszög[6]	27
4.11. Tompaszögű háromszög[6]	27
4.12. Egyenlő szárú háromszög[6]	28
4.13. Téglalap[6]	28
4.14. Konvex[1]	29
4.15. Konkáv[1]	29

4.16. 3 dimenziós tér[1]	29
4.17. 2 dimenziós tér[1]	30
4.18. 1 dimenziós egyenes[1]	30
5.1. Maradékos osztás[6]	32
5.2. Téglatest[6]	34
5.3. A gúla részei [6]	34
5.4. Paralelepipedon[6]	34
5.5. Jegy[1]	36
5.6. Koordináta rendszer[1]	36
6.1. A téglalap tört része[7]	38
6.2. Tizedestörtek ábrázolása számegyenesen[1].	39
7.1. Számok kerekítése[7]	41
7.2. Bővítés[1]	44
9.1. Feladat 8.1. [1]	48
9.2. Feladat 8.2. [1]	49
9.3. Feladat 8.3.[1]	49
9.4. Feladat 8.5. [1]	50
9.5. Feladat 8.5. (2)[1]	50
9.6. Feladat 8.6. [1]	50
9.7. Feladat 8.6.(2)[1]	51
9.8. Feladat 8.7.[1]	51
10.1. Összehasonlító elemzés (1)	55
10.2. Összehasonlító elemzés (2)	56

Резюме

У даній дипломній роботі здійснено порівняльний аналіз двох підручників з математики для початкової школи – українського (автор А. Г. Мерзляк) та угорського (автор Csahóczy E.) – з точки зору змістового наповнення, методичних підходів і педагогічних принципів. Метою дослідження було виявити відмінності у підходах до формування математичних понять, адаптації до вікових особливостей учнів, а також у способах розвитку математичного мислення.

Серед переваг українського підручника слід відзначити логічну структуру викладу матеріалу, формалізоване пояснення понять, а також диференційовану систему завдань, яка завдяки чітким позначенням рівнів складності сприяє кращому орієнтуванню учнів. Водночас навчальний матеріал меншою мірою пов'язаний із повсякденним досвідом школярів, що, у поєднанні з абстрактними та текстуально насиченими поясненнями, може ускладнити сприйняття молодшими учнями. Міжпредметні зв'язки у підручнику практично не представлені, що знижує можливість учнів усвідомлювати практичне значення математичних знань.

Натомість угорський підручник ґрунтується на сучасніших педагогічних засадах: математичні поняття вводяться через життєві ситуації, активно використовуються візуальні засоби, а також застосовується навчання на основі запитань, що стимулює активну участь учнів у навчальному процесі. Особливу увагу приділено розвитку мислення, а навчальний зміст систематично спирається на раніше здобуті знання, сприяючи формуванню довготривалих компетентностей. Ігрові завдання, питання для самоперевірки та проблемні ситуації забезпечують різноманітні можливості для індивідуалізації навчання відповідно до здібностей учнів.

Порівняння українського та угорського підручників з математики демонструє, що обидва підходи мають свої сильні сторони, проте вони орієнтовані на різні педагогічні цілі. Український підручник зосереджується на точності викладення, розвитку логічного мислення і формальному розумінні понять, у той час як угорський використовує сучасні дидактичні інструменти: життєві приклади, візуальні елементи та ігрові, проблемно-орієнтовані методи навчання. Це сприяє підтриманню зацікавленості учнів, розвитку їх самостійного мислення та враховує різний рівень підготовки.

Таким чином, можна зробити висновок, що ефективне навчання математики потребує поєднання наукової обґрунтованості з учнецентрованими, інтерактивними методами викладання. Навчальний матеріал буде по-справжньому ефективним тоді, коли він

є водночас точним, чітко структурованим та адаптованим до вікових особливостей, інтересів і стилів навчання учнів. У процесі розробки майбутніх підручників доцільно інтегрувати ці елементи з метою формування такого математичного змісту, який буде не лише теоретичним знанням, а й зрозумілим, цікавим і практично значущим для школярів.

Nyilatkozat

Alulírott, Karmacsi Dominika, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Звіт подібності

метадані

Назва організації

Hungarian College of Higher Education Ferenc Rakoczi II Transcarpathian

Заголовок

Szakdolgozat Karmacsi

Науковий керівник / Експерт

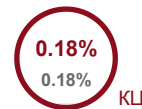
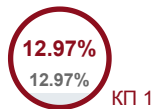
Автор Габрієлла Пап

підрозділ

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II

Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.



25

Довжина фрази для коефіцієнта подібності 2

9397

Кількість слів

75123

Кількість символів

Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати навмисний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

Заміна букв	Б	412
Інтервали	A→	0
Мікропробіли	␣	0
Білі знаки	Б	0
Парафрази (SmartMarks)	a	94

Подібності за списком джерел

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Колір тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

10 найдовших фраз

Колір тексту

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://ofi.oh.gov.hu/en/szakiskolai-tankonyvek-osszehasonlito-vizsgalata-i	238 2.53 %
2	https://folyoiratok.oh.gov.hu/uj-kozneveles/elkeszultek-a-modositott-nemzeti-alaptantervnek-megfelelo-tankonyvek	91 0.97 %
3	https://kmksz.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	32 0.34 %
4	https://kmksz.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	32 0.34 %

5	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	30 0.32 %
6	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	26 0.28 %
7	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	24 0.26 %
8	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	21 0.22 %
9	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	19 0.20 %
10	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	19 0.20 %
з домашньої бази даних (0.00 %)		
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
з програми обміну базами даних (0.00 %)		
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
з Інтернету (12.97 %)		
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ДЖЕРЕЛО URL	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://kmkszu.com.ua/wp-content/uploads/2018/09/Matematika_II_fejezet-2018.-Merzljak-A.-H..pdf	775 (71) 8.25 %
2	https://ofi.oh.gov.hu/en/szakiskolai-tankonyvek-osszehasonlito-vizsgalata-i	253 (3) 2.69 %
3	https://folyoiratok.oh.gov.hu/uj-koznevelis-elkeszultek-a-modositott-nemzeti-alaptantervnek-megfelelo-tankonyvek	91 (1) 0.97 %
4	https://studyx.ai/questions/4lrv20c/a-m-veletek-eredm-ny-t-sz-gpercben-add-meg-a-1-20-3-b-2-15-5-c-5-45-d-3-60-e-4-90-f-2-120	49 (6) 0.52 %
5	https://tananyag.mdoe.hu/mod/page/view.php?id=16137	16 (1) 0.17 %
6	https://studall.org/all-35268.html	12 (1) 0.13 %
7	https://tavoktatas.mnt.org.rs/sites/default/files/2020-10/T%C3%B6rtek%20%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.pdf	12 (1) 0.13 %
8	http://www.hitelintezetiszemle.hu/letoltes/hsz-2015-2.pdf	11 (1) 0.12 %

Список прийнятих фрагментів (немає прийнятих фрагментів)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗМІСТ	КІЛЬКІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-------	---------------------------------------