

**Міністерство освіти і науки України**  
**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**  
**Кафедра математики та інформатики**

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

**Кваліфікаційна робота**  
**Методика викладання функцій в середній школі**

**Сані Еріка Олександрівна**

Студентка IV-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2024

Науковий керівник:

**Пап Габрієлла Габорівна**

*магістр, ст. викладач*

Завідувач кафедрою математики та інформатики:

**Кучінка Каталін Йожефівна**

*к. ф.-м. н, доцент*

Робота захищена на оцінку \_\_\_\_\_, «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ року

Протокол № \_\_\_\_\_ / 202\_

**Міністерство освіти і науки України  
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

**Кафедра математики та інформатики**

**Кваліфікаційна робота  
Методика викладання функцій в середній школі**

Рівень вищої освіти: бакалавр

Виконавець: Студентка IV-го курсу

**Сані Еріка Олександрівна**  
освітня програма «Середня освіта (Математика)»  
спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Пап Габрієлла Габорівна**  
*магістр, ст. викладач*

Рецензент: **Кучінка Каталін Йозефівна**  
*к. ф.-м. н, доцент*

Берегове  
2025

## ЗМІСТ

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Передмова</b> .....                                                         | 6  |
| <b>1. Теоретичні засади</b> .....                                              | 7  |
| 1.1. Визначення математичних понять .....                                      | 7  |
| 1.2. Ментальні образи понять та взаємозв'язок з формальними визначеннями ..... | 8  |
| 1.3. Формування поняття функції на дидактичних засадах .....                   | 9  |
| 1.3.1. Історичний розвиток поняття функції .....                               | 9  |
| 1.3.2. Дидактичні аспекти формування поняття функції .....                     | 11 |
| <b>2. Уявлення учнів 9 класу про поняття функції (передтест)</b> .....         | 13 |
| 2.1. Умови проведення дослідження .....                                        | 13 |
| 2.2. Завдання та результати дослідження .....                                  | 14 |
| <b>3. Експериментальне формування поняття функції в 9 класі</b> .....          | 24 |
| 3.1. Умови та методика проведення навчального експерименту .....               | 24 |
| 3.2. Опис занять .....                                                         | 25 |
| 3.2.1. Перша частина заняття: дослідження різних зв'язків .....                | 25 |
| 3.2.2. Друга частина: дослідження зв'язку типу «пара чисел - пара чисел».....  | 34 |
| 3.2.3. Третя частина: дослідження різних графіків .....                        | 36 |
| 3.2.4. Четверта частина: аналіз реальних життєвих процесів .....               | 38 |
| <b>4. Аналіз ефективності навчального експерименту (післятест)</b> .....       | 43 |
| <b>Висновки</b> .....                                                          | 52 |
| <b>Список літератури</b> .....                                                 | 54 |
| <b>Перелік рисунків</b> .....                                                  | 56 |

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma  
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Matematika és Informatika Tanszék**

**FÜGGVÉNYEK TÉMAKÖR OKTATÁSA A KÖZÉPISKOLÁBAN**

**Szakdolgozat**

**Készítette: Szanyi Erika**

IV. évfolyamos matematika

szakos hallgató

**Témavezető: Papp Gabriella**

*adjunktus*

**Recenzens: Kucsinka Katalin**

*docens, fizika és matematika*

*tudományok kandidátusa*

# Tartalomjegyzék

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Bevezetés</b>                                                                                           | <b>6</b>  |
| <b>1. Elméleti háttér</b>                                                                                  | <b>7</b>  |
| 1.1. A matematikai fogalmak definiálása . . . . .                                                          | 7         |
| 1.2. A fogalmak mentális képe, a fogalomképzet és a fogalom defini-<br>ciója közötti kapcsolatok . . . . . | 8         |
| 1.3. A függvény fogalmának kialakítása didaktikai alapokon . . . .                                         | 9         |
| 1.3.1. A függvény fogalmának történeti fejlődése . . . . .                                                 | 9         |
| 1.3.2. A függvényfogalom alakításának didaktikai aspektusai                                                | 11        |
| <b>2. Általános iskola 9. osztályos tanulóinak fogalomképzetei a<br/>    függvényről (előteszt)</b>        | <b>13</b> |
| 2.1. A felmérés körülményei . . . . .                                                                      | 13        |
| 2.2. A felmérés feladatainak és eredményeinek bemutatása . . . . .                                         | 14        |
| <b>3. A függvényfogalom alakítását célzó tanítási kísérlet 9. osz-<br/>    tályban</b>                     | <b>24</b> |
| 3.1. A tanítási kísérlet körülményei és módszerei . . . . .                                                | 24        |
| 3.2. A foglalkozás leírása . . . . .                                                                       | 25        |
| 3.2.1. A foglalkozás 1. része: különböző kapcsolatok vizsgálata                                            | 25        |
| 3.2.2. A foglalkozás 2. része: "számpár - számpár" típusú<br>kapcsolat vizsgálata . . . . .                | 34        |
| 3.2.3. A foglalkozás 3. része: különböző grafikonok vizsgálata                                             | 36        |
| 3.2.4. A foglalkozás 4. része: valós életből vett folyamatok . .                                           | 38        |
| <b>4. A tanítási kísérlet hatékonyságának vizsgálata (utóteszt)</b>                                        | <b>43</b> |
| <b>Összegzés</b>                                                                                           | <b>52</b> |
| <b>Irodalomjegyzék</b>                                                                                     | <b>54</b> |
| <b>Ábrák jegyzéke</b>                                                                                      | <b>55</b> |

# Bevezetés

A függvény a matematika, különösen a matematikai analízis egyik kulcsfontosságú fogalma. A függvények ismerete, megértése és alkalmazása nemcsak a matematikában, hanem más tudományágakban, úgy mint a természettudományokban, közgazdaságtanban és műszaki tudományokban is kiemelt fontosságú.

Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által jóváhagyott matematika tantervek kiemelt figyelmet fordítanak ennek a fogalomnak a részletes ismertetésére. A középiskolai matematikatanulás során különösen fontos szerepet kapnak az elemi függvények bemutatása, jellemzése, valamint a függvénytranszformációk tanítása.

Mindezek mellett az iskolai matematikatanulás egyik fő célja, hogy a tanulóknak egy ideális fogalomképzet alakuljon ki a függvényről, illetve a fogalom reprezentációs módjait is megfelelően tudják alkalmazni a különböző matematikai problémák megoldása során.

Jelen dolgozat egy, a fent említett fogalomnak az alakítását megcélzó tanítási kísérletet mutat be. A dolgozat 4 fejezetből áll.

Az 1. fejezetben áttekintem a tanítási kísérletet megalapozó, a függvényfogalom-képzet alakításához kapcsolódó szakirodalmakat.

A 2. fejezetben belül egy kárpátaljai líceum 9. osztályos tanulói között elvégzett felmérésről (előteszt) és annak eredményeiről számolok be, mely az adott korosztálynak a függvényről kialakult képzetet tárja fel.

A 3. fejezetben ugyanebben 9. osztályos tanulói csoportban megvalósult 2 órás tanítási kísérletet és annak tapasztalatait mutatom be, mely a függvényfogalom alakítását célozta meg.

A 4. fejezetben a tanítási kísérlet hatékonyságát vizsgáló felmérés (utóteszt) eredményeit elemzem.

# 1. fejezet

## Elméleti háttér

### 1.1. A matematikai fogalmak definiálása

Bármilyen fogalom esetében a nyelv az, amellyel érvelni tudunk arról, hogy valami példája vagy ellenpéldája egy-egy fogalomnak. Ennek ellenére csak és kizárólag a nyelvre támaszkodni abban, hogy szavakkal definiálunk egy fogalmat nem célravezető [1]. Ennek okát Vinner [8] abban magyarázza, hogy ha csak szavakkal definiálunk egy fogalmat, az hosszú távon feledésbe merül. Tehát minden fogalomnak az alakítási folyamatában konkrét helye van, azt támasztja alá Skemp ([1], 42.old.) két alapelve is:

*"1. Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismeretknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.*

*2. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal."*

Skemp [1] írásában arra is külön kitér, hogy kiemelt figyelmet kell fordítani a definícióban szereplő elemek jelentését, illetve jelentőségét, továbbá azt, hogy azok milyen kapcsolatban állnak a hétköznapi használatban lévő szavakkal. Ezért nagyon fontos, hogy a matematikai definíciókat, így a függvény definícióját is úgy kell bevezetni, hogy a tanulóknak sok tapasztalati példát mutattunk a definícióban szereplő fogalmakról. Minél nagyobb, tapasztalat útján szerzett, a definícióban szereplő fogalmi tárháza van a diákoknak, annál nagyobb az esély arra, hogy a diákokban a megfelelő fogalomképzet alakul ki.

Vollrath (1984) szerint egy tanuló akkor sajátította el egy fogalmat, ha a következő ellenőrizhető képességekkel rendelkezik (idézi Ambrus [9], 66. old.):

- A fogalom egy definícióját képes megadni.
- El tudja dönteni, hogy egy adott objektum egy bizonyos fogalomhoz tartozik-e (fogalomazonosítás).
- Tud példákat felsorolni (konstruálni) az adott fogalomra (fogalomrealizálás).
- Ismeri a fogalom tulajdonságait.
- Képes a fogalmat és annak tulajdonságait adott szituációk leírására, illetve az adott problémák megoldására felhasználni.
- El tudja helyezni az adott fogalmat fogalmak hierarchikus rendszerébe.

A dolgozat 3. fejezetében bemutatásra kerülő kísérleti tanítással a fent említett lépcsőfokok tanulói elérését céloztuk meg. Ehhez alapot Dienes Zoltán gondolata szolgáltatott, miszerint ha valakinek nehéz a matek, annak oka az, hogy nem tudja a fogalmat valamilyen tárgyhoz, tevékenységhez kötni [10].

Az olyan tevékenységek, melyek elvégzésével azok személyes élménnyé válnak, az epizodikus emlékezetben tárolódnak [11]. Az epizodikus emlékezetben tároltak hosszútávú emlékeztetést biztosítanak. Ezért is fontos, hogy a gyerekek sok olyan tevékenységet végezzenek a fogalmak tanulása során, melyek az epizodikus emlékeztetést célozzák és itt raktározódnak el. Ezzel együtt a helyes fogalomképzet kialakulása is megcélozható.

## 1.2. A fogalmak mentális képe, a fogalomképzet és a fogalom definíciója közötti kapcsolatok

A fogalmak mentális képe, a fogalomképzet és a fogalom definíciója szoros kapcsolatban állnak egymással, de különböző szinteken jelennek meg.

A *fogalom mentális képe* fogalomnak az a belső, egyéni reprezentációja, amely a tudatunkban kialakul, amikor a fogalomra gondolunk (speciális függvény grafikonja; az  $y = f(x)$  formula mint kép, stb.). Ez a képzet gyakran személyes tapasztalatok és érzékelések alapján formálódik, és vizuális, érzelmi vagy egyéb jellemzőkben is megnyilvánulhat [12].

A *fogalomképzet* a fogalomhoz társított gondolati tartalom, amelyet a nyelv és a tapasztalatok alakítanak. Ez minden olyan mentális kép halmaza, melyekre az egyén elméjében asszociál a fogalom neve hallatán az őket

jellemző tulajdonságokkal együtt [7], [8]. Tehát a fogalomképzet alatt értjük a fogalom nevéhez rendelt teljes kognitív struktúrát, amely magában foglalja a vizuális reprezentációkat (mint például képek, diagramok, grafikonok), mentális képeket (belső kapcsolatok), konkrét tapasztalatokat, példákat, élményeket, jellemzőket és eljárásokat. Például valaki a függvény szó hallatán gondolhat az  $y = x^2$  kifejezésre vagy arra, hogy minden függvény leírható képlettel [13].

A *fogalom definíciója* az a pontos, formális leírás, amely meghatározza a fogalom lényeges jellemzőit és határait. A definíció célja, hogy egyértelműen és mindenki számára érthetően leírja, mit értünk adott fogalom alatt, eltávolítva a szubjektív értelmezéseket [8]. Kiemelten fontos, hogy a fogalom ne csak és kizárólag a definíció megadásával legyen bevezetve, mert nagy eséllyel így idővel feledésbe merül. Fontos aspektus a fogalom kialakítási folyamatában a fogalomra adott példák és ellenpéldák megléte.

A fent tárgyalt három elem között tehát az a kapcsolat, hogy a fogalom definíciója adja meg a fogalom formális meghatározását, amely segít kialakítani a fogalom képzetét és egyben irányítja annak mentális képét. A mentális kép viszont személyenként változó lehet, mivel az egyéni tapasztalatok és érzékelés alapján formálódik.

## 1.3. A függvény fogalmának kialakítása didaktikai alapokon

### 1.3.1. A függvény fogalmának történeti fejlődése

A matematikai függvény fogalma az évszázadok során fokozatosan fejlődött, és a modern matematikában alapvető szerepet játszik. A függvények történeti fejlődését több fontos mérföldkő és matematikai felfedezés jellemzi, melyek nagy jelentőséggel bírtak annak iskolait környezetben történő alakítási folyamatában.

A modern függvényfogalom kiindulópontja az algebra és a geometria elválasztásában található. Az René Descartes és Pierre de Fermat munkássága alapvető volt a geometria és az algebra kapcsolatának megteremtésében, amit az analitikus geometria fejlődése követett. Descartes a koordináta-rendszer bevezetésével lehetővé tette az algebrai kifejezések és geometriai alakzatok közötti kapcsolat ábrázolását, ezzel előkészítve a függvények vizsgálatát [14], [16]. A fent említett két tudós teremtette meg a változó mennyiségek matematikáját.

Isaac Newton és Gottfried Wilhelm Leibniz munkássága, amely az analízis és a differenciál- és integrálszámítás kifejlődését eredményezte, döntő

fontosságú volt a függvények történetében. Az ő munkáikban a függvények a változókat összekapcsoló szabályos törvényszerűségekként jelentek meg [14], [16].

A 18. században a függvények fogalma fokozatosan egyre formálisabbá vált. Leonhard Euler és Joseph-Louis Lagrange munkájában már találkozunk a modern függvényfogalom első elemeivel. Euler vezette be a  $f(x)$  szimbólumot, amely lehetővé tette a függvények algebrai kifejezését, és ezzel a matematikai függvények szélesebb körű alkalmazását.

Euler munkái az analízis és a differenciálszámítás területén lehetővé tették, hogy a függvények egyértelműen meghatározott szabályos kapcsolatok legyenek, amelyek két változó között léteznek [5].

Ez a definíció tehát megkövetelte a függvény képlettel történő előállíthatóságát, ami később a Fourier-sorok felfedezésével már szűknek bizonyult. Fourier munkássága nagyban hozzájárult a függvénydefiníció változásában. Ő a függvény algebrai úton (képlettel) történő reprezentációját egyenrangúvá emelte annak geometriai reprezentációjával (görbe) [16].

Dirichlet 1837-ben megadta a függvény egy újabb definícióját: *"Ha az  $y$  változó úgy kapcsolódott az  $x$  változóhoz, hogy  $x$  valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli  $y$ -nak egy értékét, akkor az  $y$  a független  $x$  változó függvényének nevezzük."* ([15], 46. old., [14] 700. old.)

A modern függvénydefiníciót Vinner és Dreyfus [7] tanulmányukban Dirichlet-Bourbaki definíciónak hívja, mely domináns jelleggel bír a matematikában a függvényfogalom tanításánál: *"A függvény két halmaz közötti olyan megfeleltetés, mely az egyik halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel a másik halmazból."* (357. old.)

A függvényfogalom fent tárgyalt történeti fejlődése alapján megállapítható, hogy a változó mennyiségek közötti kapcsolatokat általánosították, és a definíciók már nem csupán a kapcsolatok formulák szerinti leírására összpontosítanak.

A matematikai tanulmányok minden területén központi szerephez jutnak függvények. Az iskolai matematikaoktatásban a kialakítását a történeti fejlődésre alapozzuk, tehát elsősorban a szabályokkal meghatározható függvények kerülnek előtérbe. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy olyan függvényekkel foglalkozunk, melyek megadhatók képlettel. (De természetesen nem minden függvényt adhatunk meg képlettel, például "minden emberhez hozzárendeljük az édesanyját" függvényt nem tudunk képlettel leírni.). A képlet azt mutatja meg, hogy az értelmezési tartománybeli  $x$  elemhez ("bemenő adat") a függvény mely elemet rendel az értékkészletből ("kimenő adat"). Ilyenkor azt is meg kell mondani, hogy melyik halmaz az értelmezési tartomány [10].

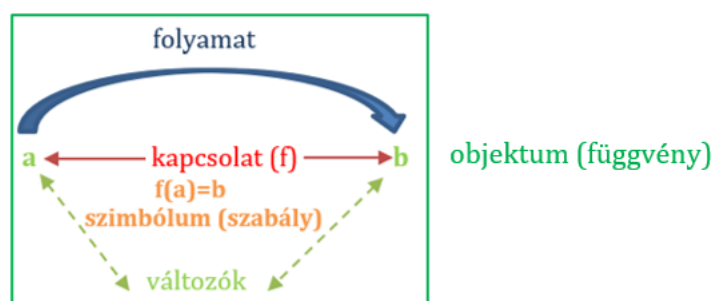
Mindezek mellett a helyes fogalomképzethez elengedhetetlen, hogy olyan függvénykapcsolatokkal is találkozzanak a tanulók, melyek nem adhatók meg

egyértelműen képlettel (algebrai formulával). Ennek okát a következő fejezetben tárgyaljuk a függvény fogalmának didaktikai aspektusainak ismertetésével.

### 1.3.2. A függvényfogalom alakításának didaktikai aspektusai

A függvényfogalom tanításának didaktikai aspektusai kulcsfontosságúak a matematikai gondolkodás fejlesztésében, hiszen a függvények alapvető szerepet játszanak a matematika oktatásában, és központi szerepet töltenek be az iskolai tananyagban. A függvények tanítása során figyelembe kell venni a fogalom fokozatos építkezését, valamint a tanulók megértésének elősegítését, hogy azok képesek legyenek a fogalmat különböző kontextusokban alkalmazni.

Sierpinska szerint a függvényfogalom alakításánál a kulcsszerepet a változó mennyiségek és azok közötti kapcsolatok kapják [15]. Ő külön kiemeli, hogy a függvényfogalom megértésének fontos feltétele az, hogy a tanulók ismerjék a (1) változók, (2) kapcsolatok vagy folyamatok, (3) szabályok, minták, törvények "világát". Ezek a függvényfogalom alkotórészei is egyben (1.1. ábra).



1.1. ábra. A függvényfogalom alkotórészei

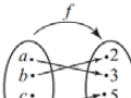
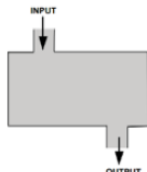
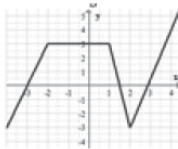
Tehát célszerű a függvény iskolai alakítása során a függvényt egyszerű kapcsolatokként bemutatni, például úgy, hogy minden  $x$  "bemeneti értékhez" (input változó) egyetlen  $y$  "kimeneti értéket" (output változó) rendelünk [3].

Nagyon fontos az alakítási folyamatban annak elérése, hogy a tanulók érzékeljék a változást és felismerjék az együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolatot. A változás "milyenségét" pedig a mennyiségek közötti kapcsolatot leíró szabály tudja meghatározni [4].

Az alkotórészek megismerését elérhetjük a fogalom különböző "forrásainak" (függvénygép (lásd lentebb az 1.2. ábrát), valós életből vett folyamat) fogalomalkotási folyamatban történő bevonásával [4]. Egy valós életből vett folyamat például az eltelt idő függvényében megtett út.

A különböző reprezentációs formáinak (grafikon, értéktáblázat, verbális forma, képlet, stb.) megismerését is be kell építenünk a fogalomalkotási folyamatba, mivel a fogalom megértésének fontos jellemzője a többféle reprezentációja alkalmazásának képessége, és a szükséges jellemzők átemelése egyik reprezentációs módból a másikba [6].

A függvényfogalom egyik nagyon fontos jellemzője az, hogy többféle módon tudjuk reprezentálni (1.2. ábra).

| nyíldiagram                                                                        | függvénybox<br>(függvénygép)                                                       | számpárok<br>halmaza   | grafikon                                                                            | érték-<br>táblázat                                                                                                                   | képlet |   |   |   |    |   |   |   |             |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---|---|---|----|---|---|---|-------------|
|  |  | $f = \{(1,2), (2,3)\}$ |  | <table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table> | x      | y | 1 | 2 | -1 | 0 | 3 | 4 | $f(x) = 2x$ |
| x                                                                                  | y                                                                                  |                        |                                                                                     |                                                                                                                                      |        |   |   |   |    |   |   |   |             |
| 1                                                                                  | 2                                                                                  |                        |                                                                                     |                                                                                                                                      |        |   |   |   |    |   |   |   |             |
| -1                                                                                 | 0                                                                                  |                        |                                                                                     |                                                                                                                                      |        |   |   |   |    |   |   |   |             |
| 3                                                                                  | 4                                                                                  |                        |                                                                                     |                                                                                                                                      |        |   |   |   |    |   |   |   |             |

1.2. ábra. A függvény különböző reprezentációs módjai [4]

A fent említett alkotórészek megismerését követően érdemes a diákok számára olyan példákat hozni, amelyek a mindennapi életben előfordulnak (pl. egy boltban a vásárolt termékek számától függő ár), hogy a fogalom könnyebben érthetővé váljon és megtapasztalják annak valós életben az alkalmazási lehetőségeit.

A 3. fejezetben bemutatásra kerülő tanítási kísérlet megtervezésekor figyelembe vettük a függvényfogalomnak fentebb tárgyalt didaktikai aspektusait, szem előtt tartva Dienes Zoltán szavait: "Ha azonban elegendően gazdag tapasztalati anyagot nyújtunk a gyerekeknek, akkor a függvény fogalmát éppoly hatásosan el tudják sajátítani, mint a változó vagy a szám fogalmát." [17].

A tanítási kísérlethez olyan óratervet dolgoztunk ki, amelynek alapját a 2. fejezetben ismertetett előteszt eredményei képezték.

## 2. fejezet

# Általános iskola 9. osztályos tanulóinak fogalomképzetei a függvényről (előteszt)

A fejezetben arra a kérdésre keressük a választ, hogy *milyen függvényfogalomképzettel rendelkezik egy 9. osztályos tanulói csoport az általános iskola 9. évfolyamának végén.*

A kérdés megválaszolásához a [4] értekezésben található tesztet és annak értékelési szempontjait használtuk. A vizsgált tanulói csoport eredményeit összehasonlítjuk a [4] értekezésben vizsgált tanulói csoport eredményeivel. Mivel itt egy 2016-os, 8. osztályos felmérés eredményeit ismerteti a szerző, így jelen fejezetben azt is meg tudjuk vizsgálni, hogy 2025-ben milyen különbségek vagy hasonlóságok vannak a tanulók függvényről kialakult fogalomképzeteiben a 2016-ban vizsgált 8. osztályos tanulói csoportokéval.

### 2.1. A felmérés körülményei

Az előtesztet 2025 márciusában töltötték ki egy kárpátaljai magyar tannyelvű iskola 9. osztályos tanulói. A függvény definíciójának megadására még 7. osztályban került sor. Ezt követően a tanulók megismerkedtek a különböző specifikus függvényekkel, úgy mint a lineáris függvények, a négyzetgyök függvény és a másodfokú függvény. A felmérés megírása előtt az utóbbi függvények vizsgálata is megtörtént a matematika kerettantervnek megfelelően.

A felmérésben 17 tanuló vett részt. Az előteszt 6 feladatból állt [4]. A feladatok megoldására 40 perc állt a tanulók rendelkezésére. Első körben egy külön feladatlapon kapták meg az 1. feladatot. Ezután a kapott válaszokat a tanár összeszedte, majd kiosztásra került a 2-6. feladatokat tartalmazó

feladatlap.

A feladatokra adott válaszokat egyazon szempontok alapján elemeztük, ahogyan az [4] értekezésben is történt, azaz:

(1.) a feladatokra adott helyes és helytelen válaszok száma alapján; a válaszok értékelésénél figyelembe vettük a melléklet tartozó érvelést is;

(2.) az egyes feladatokra adott válaszok alapján a fogalomdefiníció és a képzet közötti kapcsolatot vettük figyelembe.

## 2.2. A felmérés feladatainak és eredményeinek bemutatása

### 1. feladat

a) Mit nevezünk függvénynek? b) Adj rá egy példát!

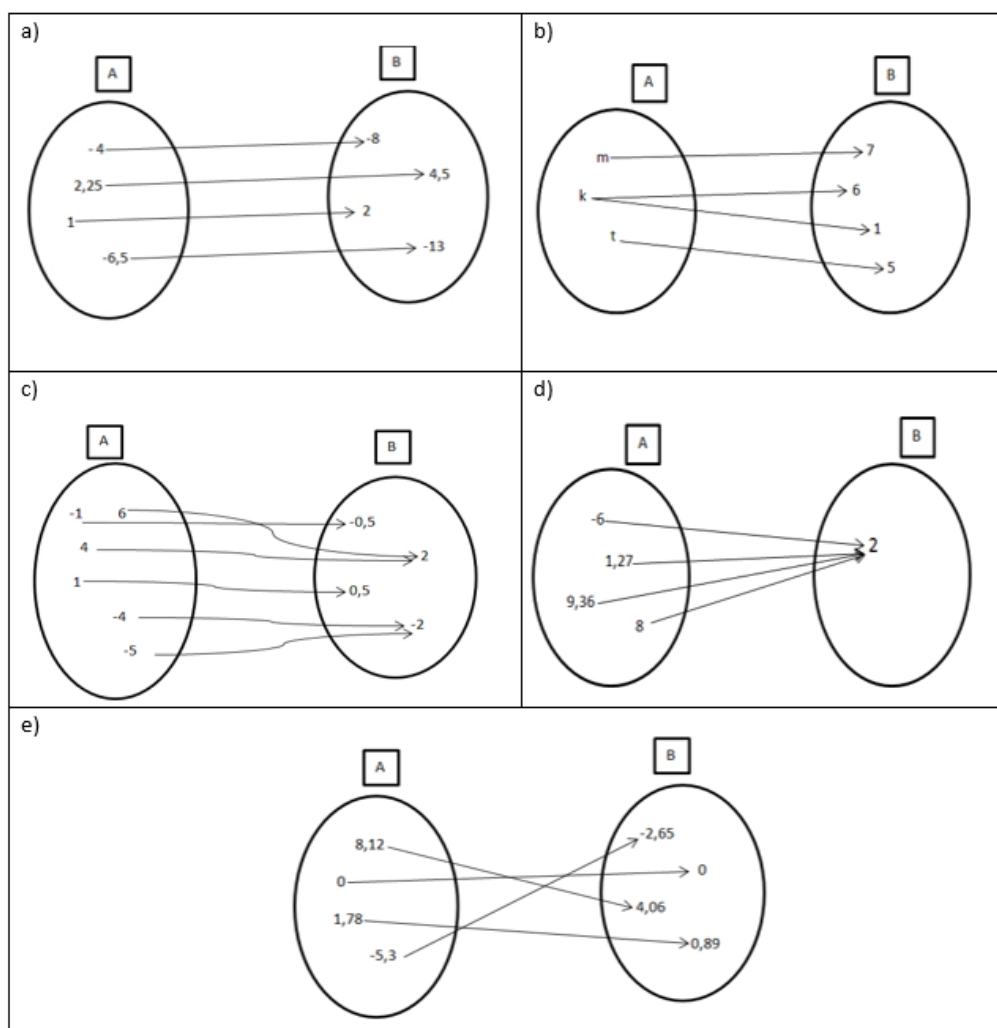
A 17 tanulóból 10-en adtak helyes választ, melyből 7 a tankönyvben is szereplő függvénydefiníció volt. Ebből arra tudunk következtetni, hogy egy jól betanult definíciót adtak a válaszként a kérdésre ("A függvény olyan matematikai kapcsolat két halmaz között, amely mindegyik bemeneti értékhez egy kimeneti értéket kapcsol"). Hasonló eredmény született a 2016-os felmérés során is. Ekkor is tankönyvi definíciót reprezentáltak helyes válaszként a tanulók. 4 tanuló helytelen választ adott ("Két egymástól függő értéket függvénynek nevezünk"), 4-en pedig semmilyen választ nem adtak a feltett kérdésre.

A feladat b) részére 10 tanuló választ helyesen. Itt a többség valamilyen lineáris függvényt vagy másodfokú függvény képletét adta meg (például: " $y = x^2$ ", " $y = 2x + 3$ "), de voltak olyan tanulók is, akik egy függvénygrafikont rajzoltak. 5-en semmilyen választ nem adtak, 2 tanuló pedig helytelen választ adott (például csak egy koordináta-rendszert rajzolt.). A 2016-os felmérés során is hasonló válaszok érkeztek. Ekkor is a már megismert specifikus függvényt, a lineáris függvényt adták példának a tanulók.

### 2. feladat

A 2. feladat a tanulók függvényfogalmáról kialakult képzetének vizsgálatára összpontosít. A válaszok elemzése előtt fontos megemlíteni, hogy a vizsgált kárpátaljai tanulók a függvény nyíldiagramos ábrázolásával – a tanáruk elmondása alapján – csupán egy-két tankönyvi feladat révén találkoztak, és ez a típusú kapcsolati ábrázolás nem képezte részét a fogalom kialakításának folyamatának.

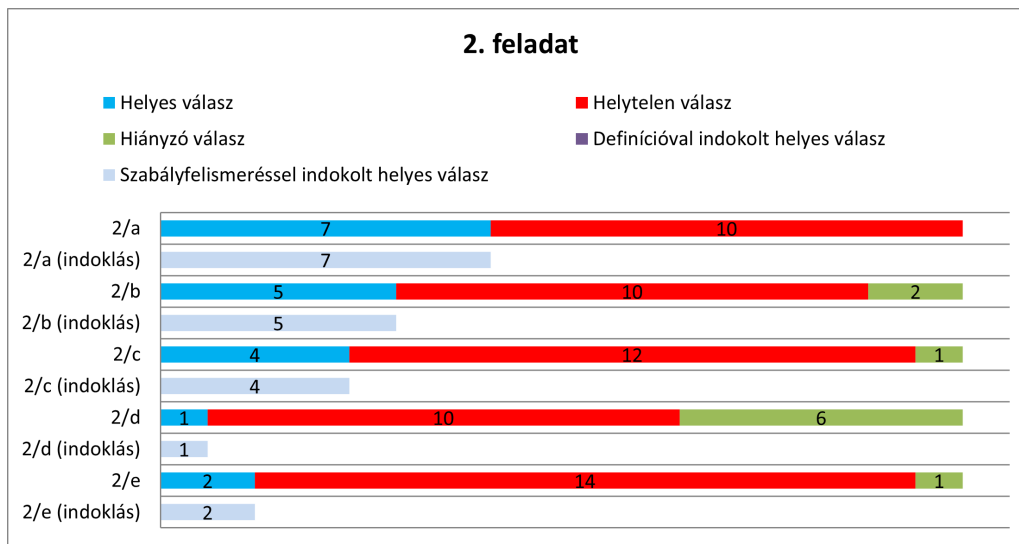
Az alábbi ábrák az  $A$  és a  $B$  halmaz elemei közötti kapcsolatot szemléltetik.  $A$  nyilak azt jelzik, hogy az  $A$  halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk a  $B$  halmazból. Melyik hozzárendelés függvény az alábbiak közül? Válaszodat indokold!



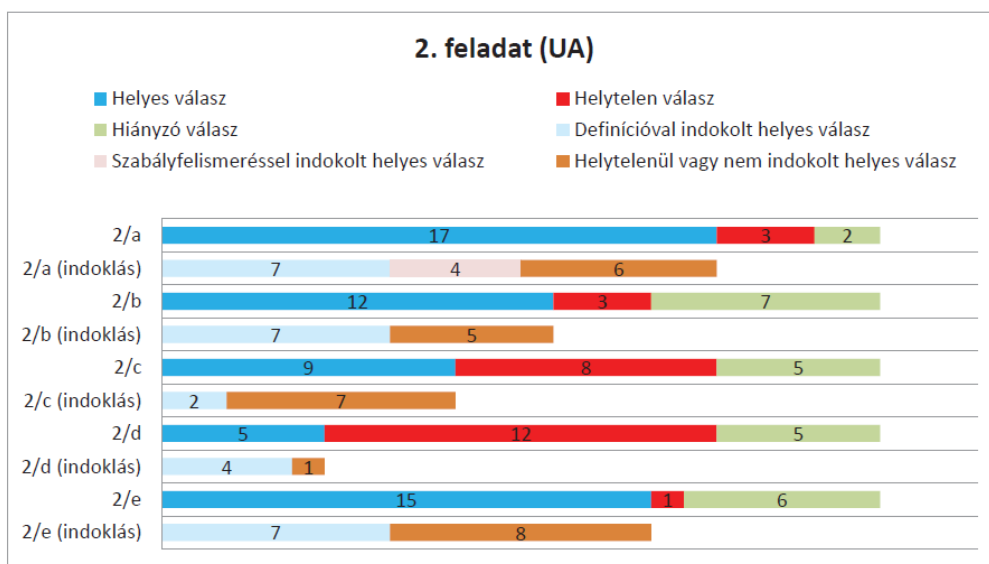
2.1. ábra. A 2. feladat kérdései [4]

A feladat megoldottsági mutatóit a vizsgált tanulói csoportban a 2.2. ábra szemlélteti. A 2.3. ábra pedig a 2016-os felmérés eredményeit mutatja.

A 2.2 ábra jól mutatja, hogy a feladat mindegyik kérdésére csak igen kis számban adtak a tanulók helyes választ. Megfigyelhető, hogy mindegyik esetben valamilyen szabályt kerestek a két halmaz egymáshoz rendelt elemei között ahhoz, hogy el tudják dönteni az adott kapcsolatról, hogy függvény



2.2. ábra. A 2. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor



2.3. ábra. A 2. feladat megoldottsága a 2016-os felméréskor [4]

vagy sem. Tehát a tanulók képzetében a függvény egy olyan fogalom, minden esetben leírható valamilyen szabállyal.

Azt is fontos megemlíteni, hogy míg az 1. feladat kérdésére 10 tanuló adott tankönyvi definíciót, ebben a feladatban egyik esetben sem használták fel azt. Tehát már itt is látszik, hogy a tanulók fogalomképzete nincs kapcsolatban annak definíciójával.

Több tanulónál is érzékelhető volt, hogy a helyes függvénydefiníció ellenére nem értették meg a hozzárendelés irányának jelentőségét, azaz a bemeneti és kimeneti adatok közötti kapcsolatot a függvényfogalom esetében. Például, a 2/c kérdés esetében olyan válasz is érkezett, miszerint *"nem függvény, mert több nyíl mutat egy számhoz"*. Ugyanerre a kérdésre egy másik válasz: *"Nem függvény, mert az elemhez több érték is tartozik"*.

Azok a tanulók, akik szabályfelismeréssel indokolták a helyes válaszukat, valamilyen szabályt próbáltak keresni az egymáshoz rendelt elemek között, például a 2/a kérdésre a következő válasz érkezett: *"Minden A értékhez szabályosan kapcsolódik egy B érték,  $2A=B$ "*.

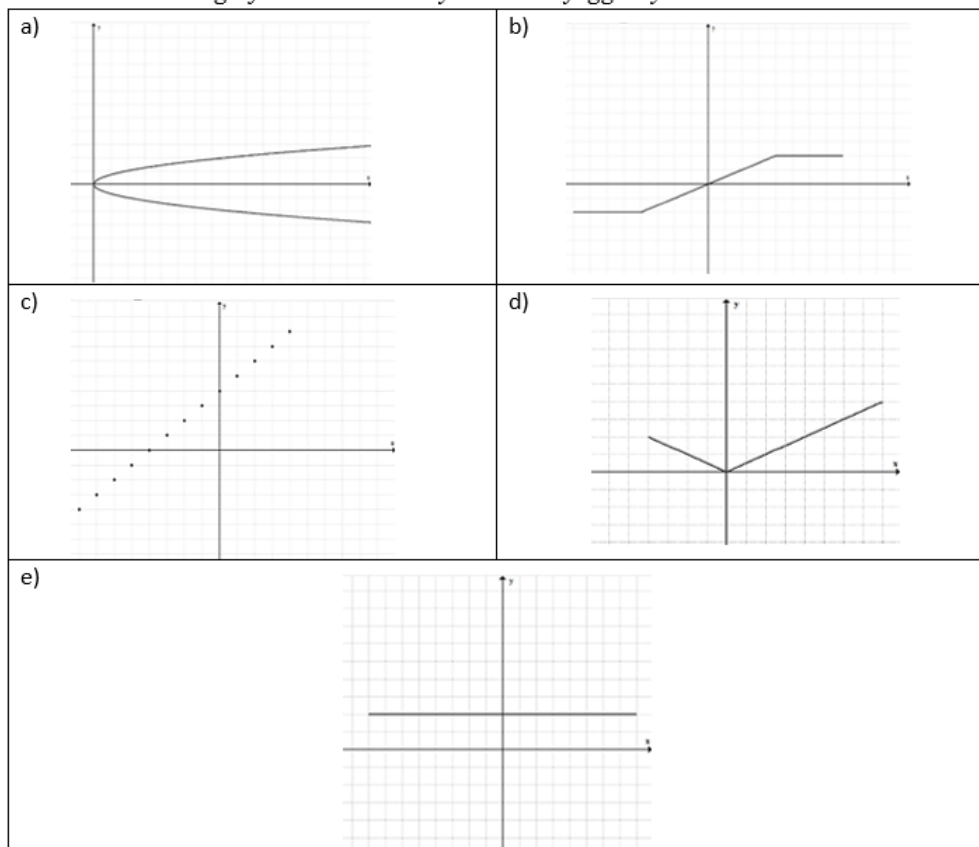
Mindezeket az eredményeket összehasonlítva a 2016-os eredményekkel, jól látható, hogy az ott vizsgált tanulók sokkal nagyobb számban használták az indoklásukhoz a függvény definícióját, illetve a szabályfelismerés csak ott jelent meg, ahol valóban volt valamilyen szabályszerűség a két halmaz egymáshoz rendelt elemei közötti kapcsolatban.

Tehát összességében elmondható, hogy a 2016-os felméréshez képest 2025-ben a tanulók függvényről kialakult fogalomképzete "rosszabb képet mutat" a 2016-os felmérésben résztvevő 8. osztályos tanulókéhoz képest. A, hogy 2025-ben 9. osztályos tanulók vettek részt a felmérésben, míg 2016-ban 8. osztályos tanulók azt a hipotézist vetik fel, hogy a tanulók 8. osztályban kialakult fogalomképzete a függvényről a további specifikus függvények bevezetése során valamilyen "ponton" megtörik. (Nyilván ennek igazolása további vizsgálatokat igényel.)

### 3. feladat

Ebben a feladatban két halmaz elemei közötti kapcsolatokat grafikonnal ábrázoltuk. A tanulóknak el kellett dönteni, hogy ábrázolható függvénykapcsolatot (2.4. ábra).

*Az ábrákon látható grafikonok közül melyik ábrázol függvényt? Válaszodat indokold!*



2.4. ábra. A 3. feladat kérdései [4]

A 2.5. ábra mutatja a 2025-ös felmérés eredményeit, míg a 2.6. ábra a 2016-ban elvégzett felmérés során tapasztaltakat.

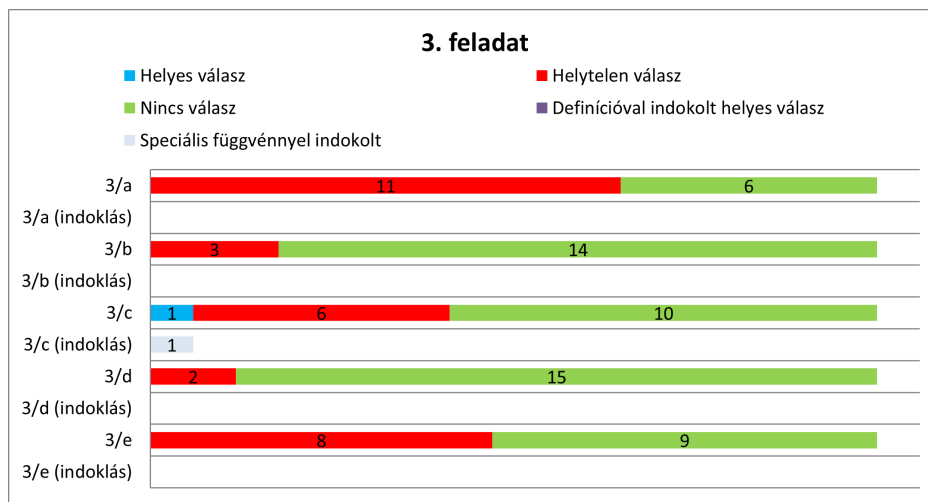
Mint ahogyan a két diagramm is mutatja, annak ellenére, hogy a feladatban bemutatott grafikonok közül több grafikonnal is találkoztak a tanulók a specifikus függvények tanulásakor (lineáris függvény, abszolút érték függvény, a lineáris  $y = ax + b$  függvény esete, amikor  $a = 0$ ), nagyon sok tanuló adott helytelen választ vagy egyáltalán nem adott választ a kérdésekre. A helytelen válaszok abból adódtak, hogy próbáltak hasonlóságot találni a fent említett függvényekkel. Például a 3/a kérdés esetében tipikusan a parabolára asszociálva függvénygrafikonnak tekintették az adottat.

Összehasonlítva a 2016-os eredményekkel, a 3/c kérdés esetében itt is tipikusan jelentkezett az a hiba, hogy azért nem tekintették függvénynek, mert nem voltak összekötve a pontok.

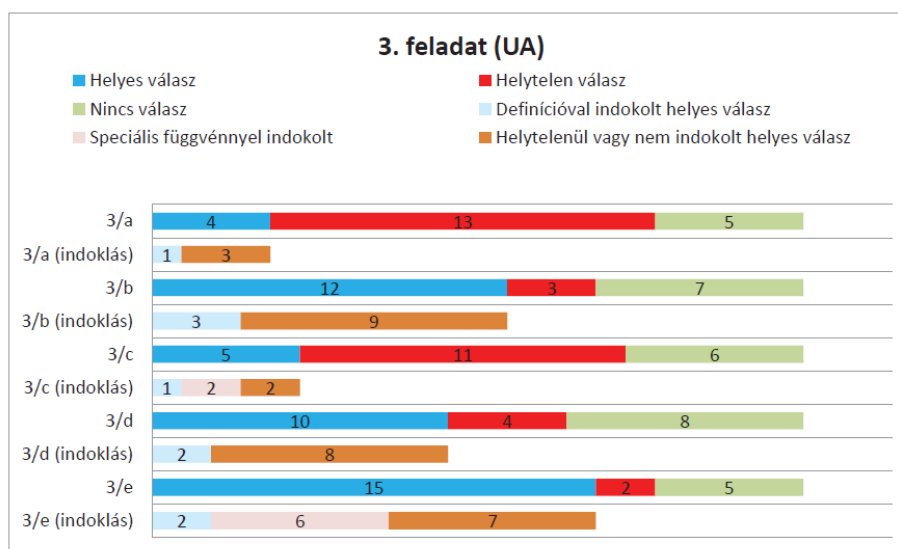
Tehát összességében elmondható, hogy a vizsgált tanulók, bár többször találkoztak a specifikus függvények tanulmányozása során a függvény grafi-

konjának fogalmával, mégis ez a reprezentációs módja a függvénynek megmaradt a tanult függvénytípusokhoz kapcsolódva, és nem úgy tekintenek rá, mint két számhalmaz elemei közötti kapcsolat egyik reprezentációs módjára.

Összehasonlítva a 2.5. és 2.6. ábrákon az eredményeket, jól látható, hogy a 2016-os felmérésben résztvevő tanulók sikeresebben oldották meg ezt a feladatot.



2.5. ábra. A 3. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor



2.6. ábra. A 3. feladat megoldottsága a 2016-os felméréskor [4]

#### 4. feladat

A 4. feladatban (2.7. ábra) két számhalmaz elemei közötti kapcsolatot táblázattal reprezentáltuk. A tanulóknak el kellett dönteniük, hogy ez a kapcsolat függvénykapcsolat-e.

- 4.) a) Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az  $X$  halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk az  $Y$  halmazból. Lehet-e ez a hozzárendelés függvény? Válaszodat indokold!

|     |      |   |     |   |    |    |
|-----|------|---|-----|---|----|----|
| $x$ | -1   | 4 | 1   | 6 | -4 | -5 |
| $y$ | -0,5 | 2 | 0,5 | 2 | -2 | -2 |

Igen, lehet, mert.....

Nem lehet, mert .....

- c) Ha az **a)** kérdésre a válaszod **IGEN** volt, azaz úgy gondoltod, hogy a megadott táblázat lehet egy függvény értéktáblázata, akkor módosítsd a táblázatot (értékpárok lehúzásával, javításával, táblázat kiegészítésével) úgy, hogy az így kapott hozzárendelés már **NE LEGYEN** függvény!

|     |      |   |     |   |    |    |  |  |
|-----|------|---|-----|---|----|----|--|--|
| $x$ | -1   | 4 | 1   | 6 | -4 | -5 |  |  |
| $y$ | -0,5 | 2 | 0,5 | 2 | -2 | -2 |  |  |

Ha az **a)** kérdésre a válaszod **NEM** volt, azaz úgy gondoltod, hogy a megadott táblázat nem lehet egy függvény értéktáblázata, akkor módosítsd a táblázatot (értékpárok lehúzásával, javításával, táblázat kiegészítésével) úgy, hogy az így kapott hozzárendelés már függvény lesz!

2.7. ábra. A 4. feladat kérdései [4]

A feladat megoldottságát mutatja a 2.8. ábra.

|           | Helyes válasz         |                                |                 | Helytelen válasz | Nincs válasz |
|-----------|-----------------------|--------------------------------|-----------------|------------------|--------------|
|           | Definícióval indokolt | Szabály-felismeréssel indokolt | Helytelen indok |                  |              |
| 17 tanuló | 0                     | 0                              | 3               | 2                | 12           |

2.8. ábra. A 4. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor

Jól látható, hogy helyes válasz érkezett ugyan, de az indoklás helytelen volt. Itt a tipikus hiba az volt, hogy a tanulmányaikból megismert értéktáblázathoz kötve úgy gondolták, hogy mivel adott egy értéktáblázat, akkor

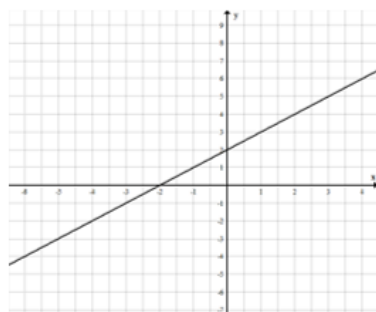
ábrázolhatóak az elemek grafikonon, ezért az biztosan függvény lesz ( *"Igen, lehet, mert ha felvennénk ezeket a pontokat a grafikonon, akkor kijönne a függvény"* ).

Összehasonlítva ezeket az eredményeket a 2016-os felmérés eredményeivel, hasonló eredményeket láthatunk [4]. Ekkor a vizsgált 22 tanulóból mindössze 1 tanuló adott helyes választ, definícióval indokolva. A többség helytelen választ vagy semmilyen választ nem adott. A helytelen indokok pedig ugyanazok voltak, mint jelen felmérésben is: érvelésük alapja az volt, hogy a pontok segítségével grafikon szerkeszthető (például: "Igen, lehet, mert megrajzolva szabályos grafikont alkotnak", "Igen, lehet, mert a pontok megadják a függvényt" [4]).

Mindezek alapján elmondható, hogy a jelen felmérésben vizsgált tanulók képzetében a hozzárendelési szabállyal leírható függvények élnek, illetve a táblázatról az jut eszükbe, hogy ennek a segítségével függvénygrafikon szerkeszthető. A függvény különböző reprezentációs módja egymástól elkülönülve épültek be az emlékezetükbe.

## 5. feladat

*A következő ábrán egy függvény grafikonja látható!*



a) Készítsd el a függvény értéktáblázatát!

b) Add meg ezt a függvényt:

I) szavakkal;

II) képlettel.

2.9. ábra. Az 5. feladat kérdései [4]

A feladat célja az volt, hogy felmérje, hogy képesek-e a vizsgált tanulók egyik reprezentációs módról, nevezetesen grafikus reprezentációról táblázat, verbális, majd szimbolikus reprezentációs módra áttérni.

A feladat megoldottságát a 2.10. ábra mutatja.

A vizsgált 17 tanulóból mindössze 7 tanuló tudott helyesen áttérni a grafikusán ábrázolt függvény táblázatos reprezentációjára, annak ellenére, hogy ez az "átjárás" nem lehetett idegen a számukra, hisz grafikon készítése függvény értéktáblázata alapján és fordítva szervezését képezi az elemi függvények tanulási folyamatának.

|                 | Helyes válasz:      |            |           | Helytelen válasz:   |            |           | Hiányzó válasz |            |           |
|-----------------|---------------------|------------|-----------|---------------------|------------|-----------|----------------|------------|-----------|
|                 | A függvény megadása |            |           | A függvény megadása |            |           |                |            |           |
|                 | Táblázattal         | Verbálisan | Képlettel | Táblázattal         | Verbálisan | Képlettel | Táblázattal    | Verbálisan | Képlettel |
| 17<br>tanulóból | 7                   | 1          | 1         | 7                   | 0          | 0         | 3              | 16         | 16        |

2.10. ábra. Az 5. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor

Jól látható, hogy az elemek közötti kapcsolat szavakkal és képlettel történő megadása is nehézséget jelentett szinte mindenkinek. A feladat ezen kérdései hasonló problémákat vetett fel a 2016-os felmérés során is [4]. A vizsgált tanulók nagy része itt sem tudta szavakkal és/vagy képlettel leírni a kapcsolatot.

Mindezekből arra tudunk következtetni, hogy a felmérésben résztvevő tanulók gyakrabban találkoztak az iskolai munka során a függvény képlettel történő megadásával, majd ez alapján készítenek értéktáblázatot, amelynek segítségével pedig grafikont. A fordított "lépések" megtétele már nehézséget jelent.

## 6. feladat

40 °C-os vizet hűtünk. Percenként 5 °C-kal csökken a víz hőmérséklete.

a) Készíts táblázatot az eltelt idő és a víz hőmérséklete közötti kapcsolatáról!

b) A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a víz hőmérsékletváltozását!

c) Fogalmazd meg szavakkal hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!

d) Fogalmazd meg matematika nyelvén (írd le képlettel), hogyan függ a víz hőmérséklete az eltelt időtől!

e) Hány °C-os lesz a víz 10 perc múlva?

f) Hány perc múlva lesz a víz hőmérséklete 0 °C?

2.11. ábra. A 6. feladat kérdései [4]

A feladat egy valós életből vett probléma megoldására irányult függvény-tani ismeretek segítségével. A feladat egyes kérdéseire érkezett helyes válaszok számát mutatja a 2.12. ábra.

A számadatokból arra tudunk következtetni, hogy volt, aki a feladatot megértette ugyan (lásd a 6/e és 6/f kérdésekre adott válaszok számát), de nem tudta beazonosítani az összetartozó mennyiségeket (idő-hőmérséklet) és azokat táblázatba foglalni, majd grafikonon ábrázolni.

|                      | <b>6/a</b> | <b>6/b</b> | <b>6/c</b> | <b>6/d</b> | <b>6/e</b> | <b>6/f</b> |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>17 tanuló</b> ból | 4          | 4          | 4          | 1          | 6          | 7          |

2.12. ábra. A 6. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor

A 2016-os felmérés eredményeihez visszacsatolva azt tudjuk mondani, hogy jelen felméréskor is megjelent az a probléma, hogy egy növekvő lineáris függvény grafikonját adták meg a tanulók az eltelt idő-hőmérséklet függvény grafikonjaként. Ebből arra következtethetünk, hogy a kapott grafikont nem "ágyazták be" a feladat szövegébe, elmaradt az ellenőrzés, valamint a kapott grafikon és az adott szituáció összekapcsolása vizuálisan.

Az előteszt eredményei alapján arra tudunk következtetni, hogy a felmérésben résztvevő tanulóknál a függvényről kialakult kép nincs kölcsönös kapcsolatban annak definíciójával. Egy "szűk" függvényfogalom él a képzetükben, azaz egy olyan fogalommal azonosítják a függvényt, amely mindenképpen leírható valamilyen szabállyal. A függvényfogalom különböző reprezentációs módjai pedig egymástól izoláltan épültek be a képzetükbe, így a függvényfogalom mélyebb megértése is elmaradt.

A 3. fejezetben egy olyan tanítási kísérletet és annak tapasztalatait mutatjuk be, mellyel a fent említett hiányosságokat próbáltuk "pótolni", és egy ideálisabb fogalomképzet kialakítását megcélozni.

## 3. fejezet

# A függvényfogalom alakítását célzó tanítási kísérlet 9. osztályban

### 3.1. A tanítási kísérlet körülményei és módszerei

A tanítási kísérletben egy kárpátaljai magyar tannyelvű líceum 9. osztályos tanulói csoportja vett részt. Ez az osztály heti 4 órában tanulja a matematikát az ukrainai matematika kerettanterv alapján <sup>1</sup> (heti 2 óra algebra és heti 2 óra mértan). Az előre megtervezett foglalkozásra 2x45 perces tanóra keretében került sor 2025 márciusának elején. A két tanóra egymás után volt a tanulók órarendjének megfelelően. A foglalkozáson részt vett tanulói csoportban már 7. osztályban bevezetésre került a függvény fogalma (ekkor találkoztak először a függvény definíciójával), ezt követően megismerkedtek a lineáris függvénnyel, majd 8. és 9. osztályban is foglalkoztak a függvény fogalmával, illetve a négyzetgyök és a másodfokú függvényekkel.

A foglalkozások során a tanulók egyénileg és csoportmunkában is dolgoztak. Ez utóbbit azért tartottuk fontosnak, hogy a tanulók együtt is megtudják beszélni a megoldásaikat, tudjanak megfelelő érvelésekkel kiállni a saját megoldásuk mellett és közösen megtalálni a megfelelő megoldást az adott problémára. A foglalkozásról fényképek készültek, továbbá feljegyzések rögtön az órák után, és a tanulók munkáját is összegyűjtöttük.

A továbbiakban bemutatjuk a foglalkozások menetét, melynek összeállítása során a [2] tanulmányban közölt foglalkozást vettük alapul, illetve gon-

---

<sup>1</sup><https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv>, letöltés: 2025.04.01.

doltuk tovább. A foglalkozást jelen dolgozat szerzője vezette, a csoport matematika tanára pedig megfigyelőként vett részt rajta, illetve feljegyzéseket tett.

## 3.2. A foglalkozás leírása

### 3.2.1. A foglalkozás 1. része: különböző kapcsolatok vizsgálata

A foglalkozás elején a tanár rávezető kérdéssel igyekezett megtudni, hogy mire emlékeznek a tanulók a függvényről és annak különböző megadási módjairól. A következő kérdést intézte a tanulók felé: *"Van két halmazunk. Az egyik halmaz elemei és a másik halmaz elemei között kapcsolat van. Hogyan tudjuk ezeket a kapcsolatokat megadni, szemléltetni?"*. A tanulók egészen addig nem tudtak választ adnia kérdésre, míg a tanár nem mutatott egy konkrét példát. A táblára felrajzolt egy táblázatot, jelezve, hogy ebben a táblázatban két számhalmaz elemei közötti kapcsolatot szemléltettünk.

Tanár: *"Nézzük a táblán lévő táblázatot. az egymás alatt lévő elemek összetartoznak. A felső sorban lévő minden számhoz hozzárendeltünk egy másik számot, ezek vannak a táblázat alsó sorában. Hogyan tudjuk másképpen is megadni ezen számok közötti kapcsolatot?"*

Ekkor érkezett egy tanulótól a következő gondolat:

Tanuló: *"Ezt tudjuk grafikonon is bemutatni, mint a függvényeknél."*

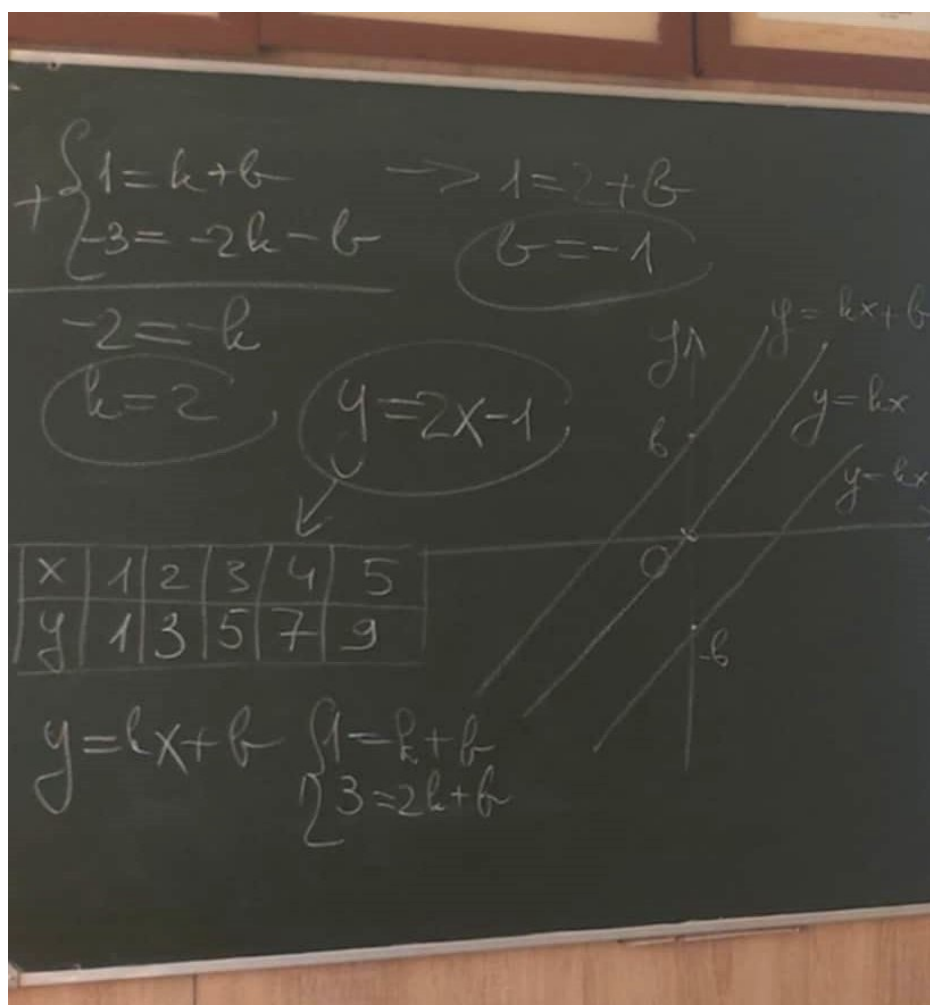
Tehát a táblázatot kapcsolatba hozta a függvény fogalmával. Ebből arra tudunk következtetni, hogy a függvény grafikonjának megrajzolása során használt értéktáblázattal hozta összefüggésbe a tanár által megadott táblázatot.

Ezután kisebb rávezetéssel, de megérkezett a válasz a képlettel történő megadásra is.

A tanár a már ismert lineáris függvényt segítségével igyekezett rávezetni a tanulókat, hogy az adott összetartozó elemek közötti kapcsolatot hogyan tudjuk megadni képlettel, feltételezve, hogy ez a kapcsolat lineáris az adott elemek között. Felírta a táblára a lineáris függvény általános alakját ( $y = ax + b$ ), majd a már megadott táblázatot felhasználva magyarázta az  $a$  és a  $b$  paraméterek értékének keresését ahhoz, hogy az összetartozó elemek közötti kapcsolatot meg tudjuk adni a fenti képlettel (lásd a 3.1. ábrát).

Ugyanezen példa keretében arra is kitért, hogy mit jelentenek a fenti képletben az  $a$  és  $b$  paraméterek a grafikon ábrázolásának szempontjából.

Ezzel kisebb kitekintést tett a korábban tanult függvénytranszformációkra is.



3.1. ábra. Bevezető példa

Viszont meg kell jegyeznünk, hogy a nyíldiagrammal történő reprezentálás ismeretlen volt a tanulók körében. Ezt azzal tudjuk magyarázni, hogy míg a magyarországi tankönyvek és tantervek a függvényfogalom előkészítésére és bevezetésére gyakran alkalmazzák a fogalomnak ezt a megadási módját, addig a tanulók által használt tankönyvekben szinte csak egy-két példa erejéig találkozhatunk vele és nem képezi szerves részét a függvényfogalom alakítási folyamatának.

Tanár a fenti példa keretében tisztázta a tanulókkal azt, hogy milyen módon tudjuk megadni két halmaz elemei közötti kapcsolatot (szövegesen, táblázattal, képlettel, grafikonnal, nyíldiagrammal). Ezt követően a függvény definícióját is megfogalmazták közösen: *"A függvény két halmaz közötti olyan megfeleltetés, mely az egyik halmaz minden eleméhez egy és csakis egy elemet*

*rendel a másik halmazból*". Ezt követően a táblára felírt példával tisztázták, hogy az  $x$  a független változó,  $y$  pedig a függő.

Különböző módon reprezentált kapcsolatokat kaptak a tanulók. A feladatlapokat előre elkészítettük és a 4 különböző kapcsolat közül megkapták a tanulók valamelyiket.

| A feladatkártya "neve" | A kapcsolat                                                                                                     | A kapcsolat reprezentációja      |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Füzetek                | A vásárolt füzetek számához hozzárendeltük a fizetett összeget                                                  | Táblázat                         |
| Hónapok                | Az ABC betűihez hozzárendeltük az adott betűvel kezdődő hónapjait az évnek                                      | Szöveges utasítással (szavakkal) |
| Gyertya                | Meggyújtottunk egy 14 cm magas gyertyát. A gyertya magassága és az eltelt idő közötti kapcsolatot szemléltettük | Grafikon                         |
| Számok                 | $f(x) = 2x - 3$ , ha $0 < x \leq 5$ és $f(x) = 3$ , ha $x \geq 5$                                               | Képlettel                        |

3.1. táblázat. A feladatkártyák összefoglalója

A feladat célja az volt, hogy a tanulók meg tudják nevezni azt, hogy milyen halmazok elemei között reprezentáltunk kapcsolatot, illetve át tudjanak térni egy lehetséges másik módra. A tanulók kb 7 percig önállóan dolgoztak, természetesen a tanár figyelemmel kísérte a munkájukat, ha valaki nem tudott hozzákezdeni a feladathoz, akkor kisebb magyarázatot adott egyénileg a tanulónak. Az idő letelte után az azonos kártyával dolgozó tanulók összeültek és csoportmunkában folytatták tovább a munkát. 4 csoport alakult ki, mindegyikben 4 fő volt. A csoportmunka célja az volt, hogy a tanulók beszéljék meg egymás munkáját, ki hogyan dolgozott, hasonlóan gondolkodtak-e és ha hibát vélnek felfedezni társuk munkájában, akkor javítsák azt.

A csoportmunka során érzékelhető volt, hogy a tanulóknak idegen volt ez a munkaforma. Elmondásuk szerint nem igazán szoktak így dolgozni az órákon. Viszont ennek a munkaformának számos előnye ismeretes a tanulási folyamat szempontjából. Előnye, hogy pozitív hangulatot teremt, mert így a tanulók érzik a közösséghez tartozást, továbbá motivációs hatással van a tanulásra. A jó csoportlétkör támogatja a közös beszélgetést a feladatokról, segít megtanulni, hogyan vitázzunk tisztelettel, hogyan dolgozzunk együtt, és hogyan oldjunk meg problémákat közösen <sup>2</sup>.

<sup>2</sup><https://press.mater.uni-mate.hu/131/1/105-121.pdf>, letöltés: 2025.04.01.

Tanári biztatással a csoportok elkezdtek megbeszélni saját feladatukat, azt, hogy ki, hogyan oldotta meg. A tanulók nagy része egyáltalán nem kezdett hozzá a feladat megoldásához, így mindegyik csoportban tanári rávezetés vált szükségessé.

Egyik csoport sem nevezte meg azokat a halmazokat, amelyek között az egyes feladatokban kapcsolatot teremtettünk. A feladatnak ezt a kérdését kihagyták.

A továbbiakban áttekintjük az egyes feladatkártyák esetében a csoportmunka során "véglegesített" megoldásokat.

### 1. "Füzetek" feladatkártya:

**"Füzetek"**

|                             |    |     |     |     |     |
|-----------------------------|----|-----|-----|-----|-----|
| Vásárolt füzetek száma (db) | 2  | 5   | 8   | 10  | 12  |
| Fizetett összeg (hr)        | 40 | 100 | 160 | 200 | 240 |

A feladatban táblázattal adtuk meg különböző halmazok elemei közötti kapcsolatot.

a) Melyek ezek a halmazok?

A=

B=

b) Szemléltesd a kapcsolatot egy másik lehetséges módon! (szöveges utasítással, grafikonnal, képlettel vagy nyíldiagrammal)

*Szöveges: Egy darab füzet 20 hr-ba kerül. 2, 5, 8, 10, 12 db vásárolt füzethez hozzárendeljük az értük fizetett összeget.*

*Képlet:  $f(x) = 20 \cdot x$*

*ahol  $x \in \{2, 5, 8, 10, 12\}$  a fizetett szám és  $f(x)$  a fizetett összeg*

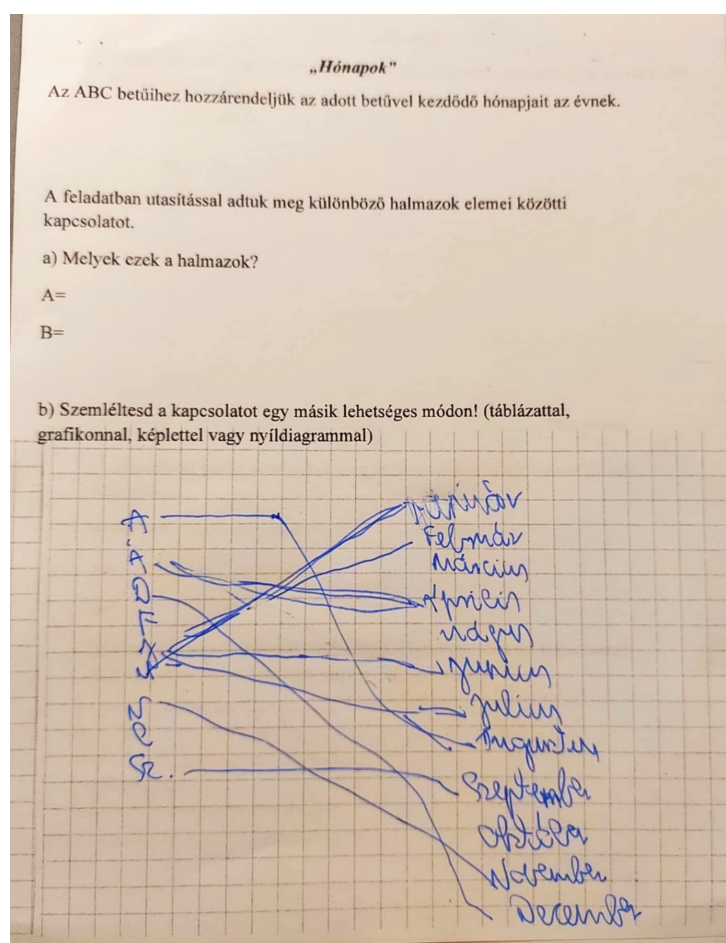
3.2. ábra. "Füzetek" feladatkártya kitöltése

Ez a feladat jól szemlélteti, hogy a szituáció hétköznapi volta nagy segítséget jelentett a kapcsolat szavakkal történő megadásában. Az, hogy a képlettel történő megadás is megjelent a tanulói válaszban nagy valószínűséggel az óra eleji példa hatása. Megjegyezzük, hogy az elem halmazhoz

tartozásának megfelelő jelölése, általánosságban a halmazokkal kapcsolatos fogalmak további korrekciót igényelnek ebben a tanulói csoportban.

A csoportmunkát követően a tanár kivetítette az osztálynak ezt a feladatkártyát és elmagyarázta, hogyan lehetett volna még megadni ezt a kapcsolatot és mely halmazok közötti kapcsolatot tartalmazta a feladat. Külön felhívta a figyelmet arra is, hogy miért nem lehet ebben az esetben a grafikonon lévő pontokat összekötni.

## 2. "Hónapok" feladatkártya:

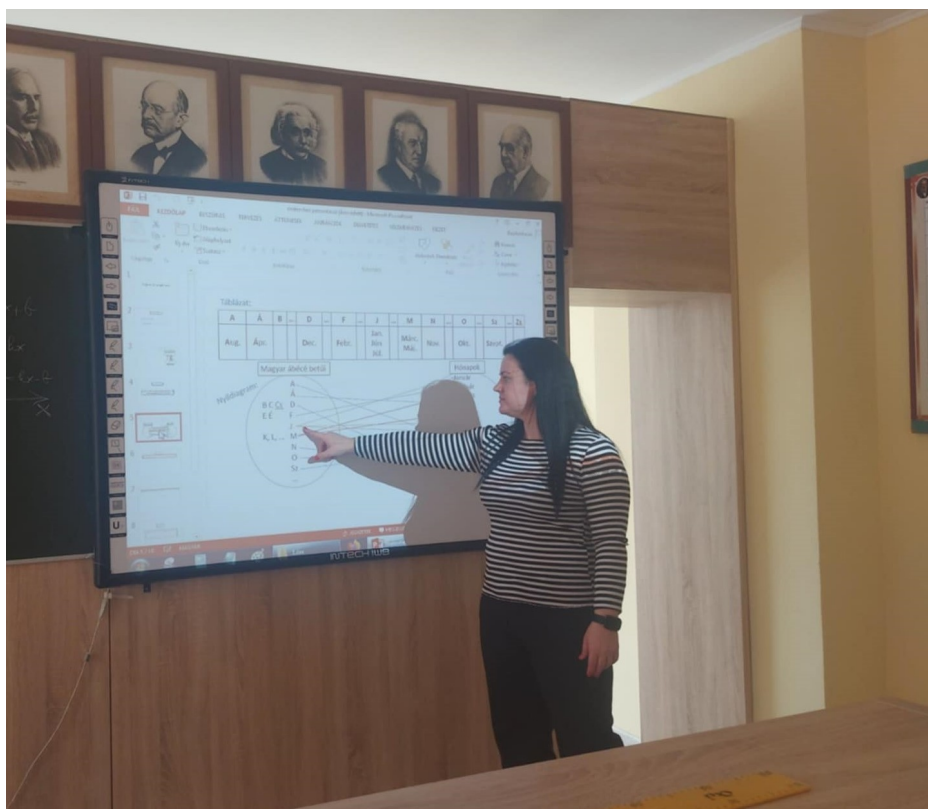


3.3. ábra. "Hónapok" feladatkártya kitöltése

Ebben a feladatban is szükség volt tanári rávezetésre a csoport munkájában, melynek hatására a 3.3. ábrán látható módon, azaz nyíldiagrammal szemléltették a kapcsolatot. Fontos kiemelni, hogy a bevezető példa hatására

már jól érzékelték, hogy ebben az esetben ez a megadási mód a "legkézenfekvőbb".

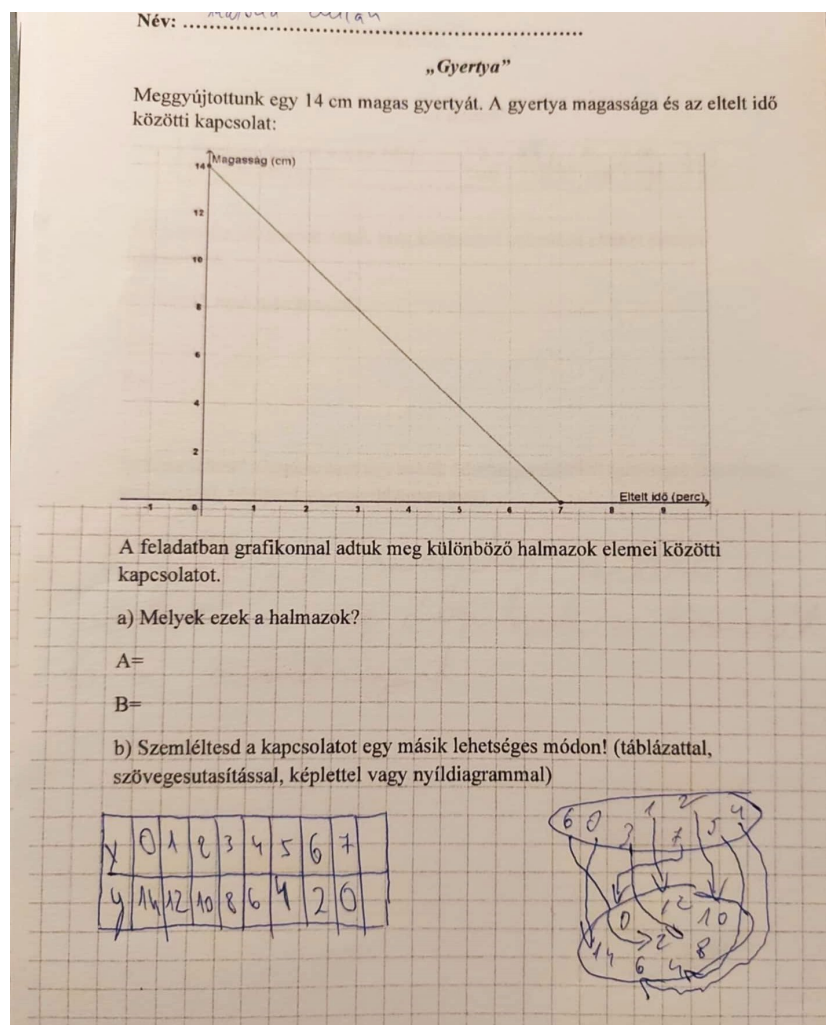
Hasonlóan az előző feladathoz, itt is bemutatásra került a másik lehetséges megadási mód is (táblázat) (3.4. ábra), kiemelve azt, hogy itt miért nem lehet képlettel és grafikonnal megadni a kapcsolatot.



3.4. ábra. "Hónapok" feladatkártya tanári magyarázata

### 3. "Gyertya" feladatkártya:

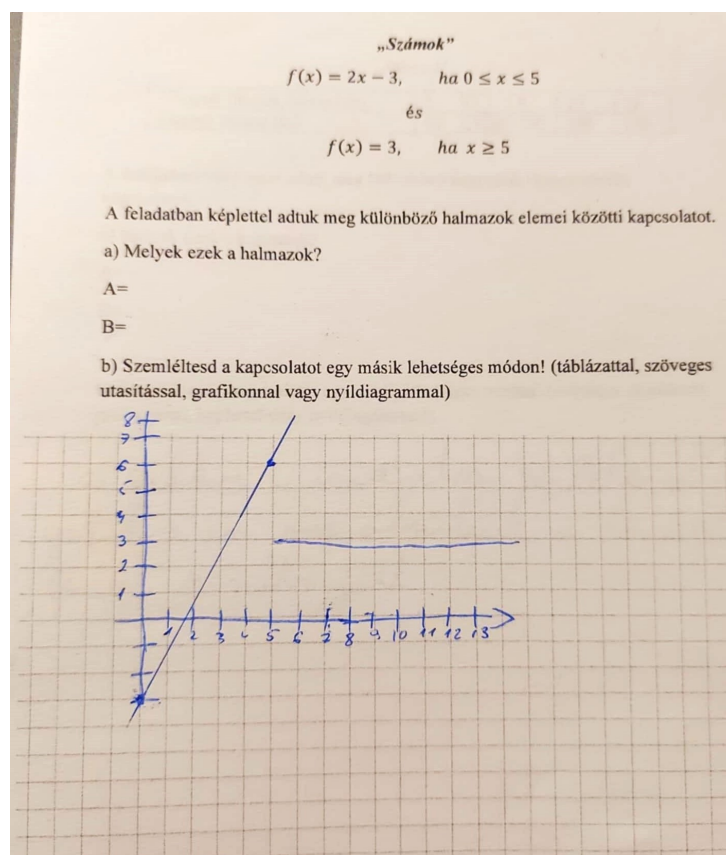
Az adott feladattal dolgozó csoportban a 3.5. ábrán látható megoldás született. A tanulók a grafikonhoz értéktáblázatot készítettek a már megszokott módon, illetve a nyíldiagrammos megadási mód is újra megjelent, annak ellenére, hogy jelen példában azok nem adják meg egyértelműen a kapcsolatot. Ennek ok az, hogy az eltelt idő is a valós számok egy részhalmazából való, illetve a magasság is, az összes valós számot pedig felsorolni nem tudjuk. A tanár erre külön kitért, miután prezentálta a feladat megoldását.



3.5. ábra. "Gyertya" feladatkártya kitöltése

#### 4. "Számok" feladatkártya:

A tanulóknak ezen feladat (3.6. ábra) értelmezése nehéznek bizonyult, itt is kellett a tanári rávezetés. A tanulók elmondása szerint a lineáris függvények tárgyalása során ily módon megadott függvénnyel nem találkoztak. Ezért ez mindenképpen tanári magyarázatra szorult. Mindenképpen szeretünk volna foglalkozni ezen típusú kapcsolattal is, mivel a valós életből vett problémák modellezése során is találkozhatunk hasonló formában megadott függvénnyel (lásd lentebb a foglalkozás további részében).



3.6. ábra. "Számok" feladatkártya kitöltése

A tanár kivetített ezt a feladatot, majd magyarázat kíséretében értelmezte a képletben szereplő szimbólumokat, külön kitért arra is, hogy ez esetben miért nem lehet megadni a kapcsolatot táblázattal és nyíldiagrammal.

Miután mindegyik feladatkártya megbeszélése megtörtént, az csoport azt a feladatot kapták, hogy döntsék el, a náluk lévő kapcsolat függvénykapcsolat-e. Ekkor a tanár újra feltette a kérdést, hogy mit nevezünk függvénynek abból a célból, hogy felelevenítsék az óra elején elhangzottat. Ez segítséget jelentett a tanulóknak a döntéshozatalban.

Míg a tanulók dolgoztak a tanár két részre osztotta a táblát "Függvény" és "Nem függvény" feliratokkal (3.7. ábra). Ezt követően mindegyik csoport az általuk helyesnek vélt felirat alá ragasztották ki a náluk lévő feladatkártyát. A helyes válaszok arra engednek következtetni, hogy a definíció újbóli megismétlése hozzájárult a helyes döntéshozatalhoz. Tehát megértették a definícióban szereplő szavakat és be tudták azt építeni a saját feladatukba. Mindegyik csoport a megfelelő helyre ragasztotta a kártyáját.



3.7. ábra. Példa és ellenpélda a függvény fogalmára

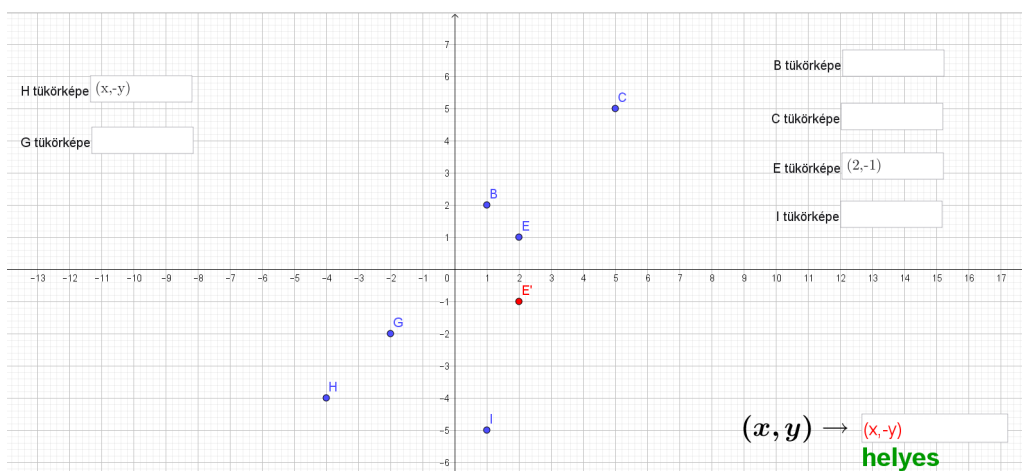
A foglalkozás további részében a "Füzetek" és a "Gyertya" feladatkártyák tekintetében megbeszélésre került, hogy mi a függvény értelmezési tartománya és mi az értékkészlete.

### 3.2.2. A foglalkozás 2. része: "számpár - számpár" típusú kapcsolat vizsgálata

Annak érdekében, hogy ne csak a "szám-szám" típusú hozzárendeléseket társsák a függvény fogalmához, a Geogebra szoftver segítségével munkalapot készítettünk, melyen pontokat ábrázoltunk. A munkalap interaktívvá tettük. A tanulóknak az volt a feladatuk, hogy keressék meg az ábrázolt pontok tükörképeit az  $x$ -tengelyhez viszonyítva.

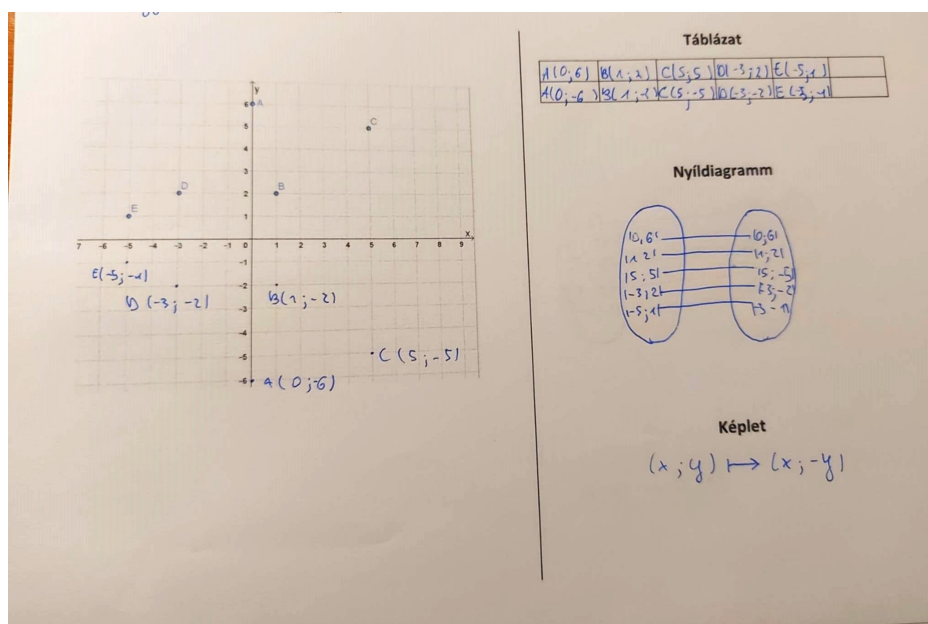
Amennyiben a tanuló helyes választ adott, úgy a koordináta-rendszerben megjelent a tükörkép, helytelen válasz esetén viszont nem (3.8. ábra).

Miután mindegyik pontnak megtalálták a tükörképét, a tanulók feladatlapot kaptak, rajta a fenti pontok. A feladatuk az volt, hogy az összetartozó



3.8. ábra. Munkalap tengelyes tükrözésre a Geogebra szoftverben

számpárokat rendezték táblázatba és ábrázolják nyíldiagrammal is, illetve képlettel. Az óra előző részében elhangzottak alapján ezt a feladatot sikerebben oldották meg. Az általánosítás is csak minimális segítséget igényelt a tanár részéről (3.9. ábra).



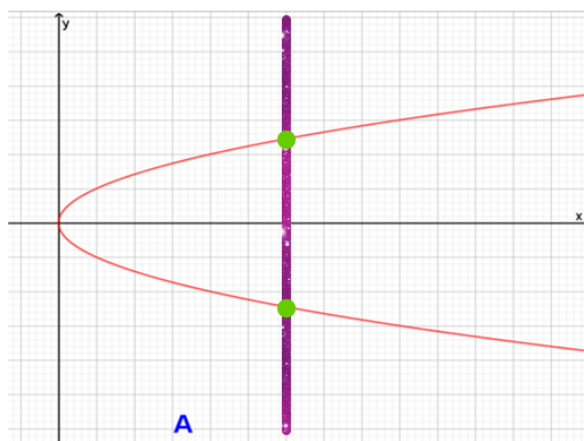
3.9. ábra. A tengelyes tükrözés feladatlap kitöltése

A tanár külön felhívta a figyelmet arra, hogy ebben a példában is függvénnel dolgoztak, de az egymáshoz rendelt elemek már számpárok voltak.

Tehát a geometriai transzformációk is függvények.

### 3.2.3. A foglalkozás 3. része: különböző grafikonok vizsgálata

A foglalkozás további részében a tanulók különböző, a valós számok egy-egy részhalmazának számpárjait a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoló grafikonokat kaptak, melyekről el kellett dönteniük, hogy függvénygrafikonok-e. Mielőtt a tanulók elkezdtek a feladatlap kitöltését, a tanár egy példán, az ún. "vertikális vonal tesztel (vertical line test)<sup>3</sup>" magyarázta nekik, hogyan lehet eldönteni a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt  $(x, y)$  ponthalmazról, hogy egy függvény reprezentál-e. Hangsúlyozta: *"Ha olyan függőleges vonalat tudunk rajzolni, amely egynél többször metszi a grafikont, akkor a grafikon nem definiál függvényt, mivel egy függvénynek minden bemeneti értékhez csak egy kimeneti értéke van"* (3.10. ábra).



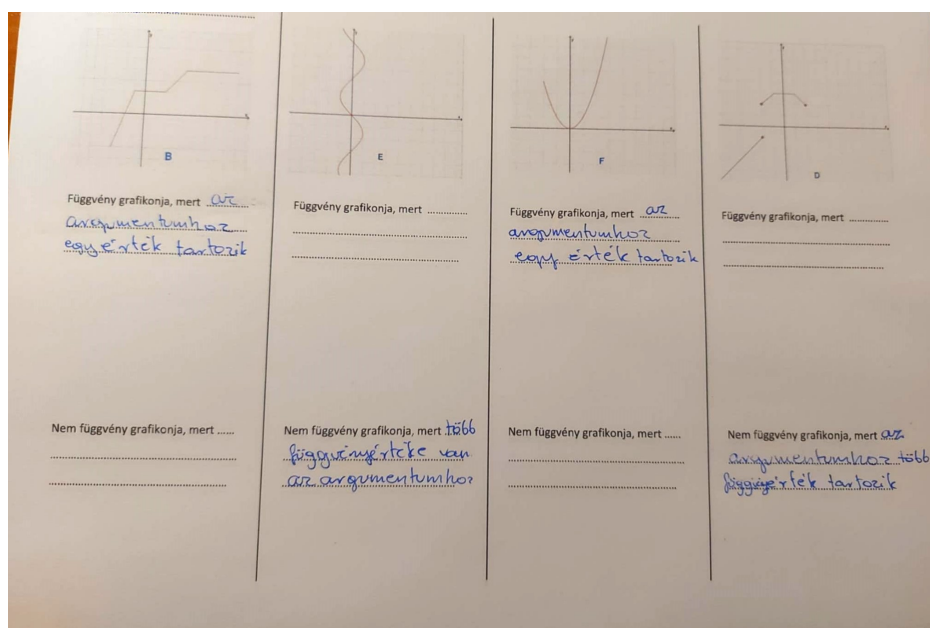
3.10. ábra. Példa a "vertikális vonal teszt" alkalmazására

Ezt követően a tanulók megkapták a feladatlapot és 6 percet kaptak annak kitöltésére. A korábbi tanári magyarázattal ennek a feladatnak a megoldása a többségnek már nem jelentett nehézséget. 2-3 tanuló kivételével mindenki helyesen töltötte ki a feladatlapot (3.11. ábra).

Annak érdekében, hogy azok a tanulók is megértsék a feladatot, akinek kisebb nehézségei voltak a megoldással, osztálytermi megbeszélés keretében a táblára kiragasztott "Függvény" és "Nem függvény" csoportok alá a megfelelő

<sup>3</sup><https://www.cuemath.com/algebra/vertical-line-test/>.  
2025.04.03.

Utolsó letöltés:



3.11. ábra. Feladatlap a különböző grafikonok vizsgálatára

grafikont minden tanuló kiragasztotta és elmondta érvelését a döntése mellett (3.12. ábra).



3.12. ábra. Osztálytermi megbeszélés a különböző grafikonok vizsgálatára

### 3.2.4. A foglalkozás 4. része: valós életből vett folyamatok

Mint ahogy a valós életből vett folyamatok nagyban hozzájárulnak a függvényfogalom alakításához (lásd az 1.3.2. alfejezetet), ezért a foglalkozás záró részében olyan feladatokat prezentáltunk a tanulóknak, melyben a függvényfogalom minden alkotórészevel találkozhattak, illetve meggyőződhetek arról, hogy a függvény fogalmával a mindennapi élet különböző területein is találkozhatunk.

A tanulókat 4 fős csoportokra osztottuk. A feladat megoldását csoportmunka keretében vártuk tőlük.

**1. feladat:** <sup>4</sup> Józsi telefonon beszélt a barátjával az 5 perces iskolai szünetben. A beszélgetésük időtartamát egész percekben mérik, és 1 perc 1,5 hrivnyába került. Mennyibe kerülhetett Józsi telefonbeszélgetése, ha a kapcsolási díj 2 hrivnya volt?

1) A feladatban szereplő összetartozó mennyiségeket (elempárokat) szemléltesd táblázattal!

2) Fogalmazd meg: a) szavakkal, b) matematika nyelvén (írd le képlettel), mennyit fizet Józsi a telefonbeszélgetésért, ha  $x$  percet beszélt?

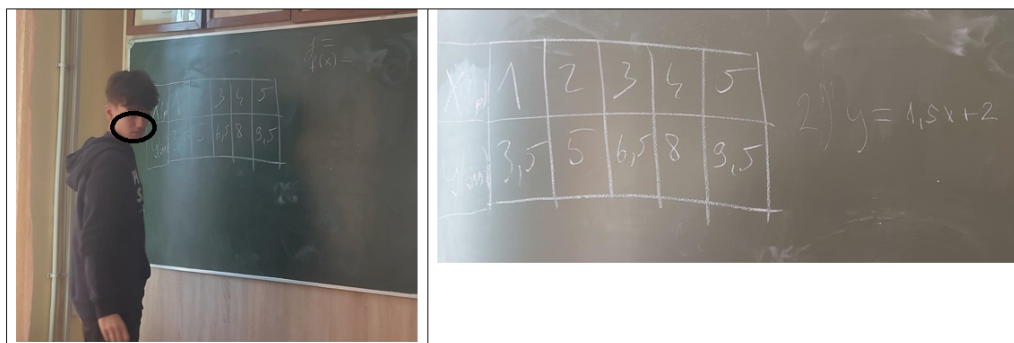
3) Szemléltesd a mennyiségek közötti kapcsolatot grafikonnal!

A csoportok elkezdtek dolgozni, majd több kérdés is felmerült a megoldással kapcsolatban, így a tanár osztálytermi megbeszéléssel, kisebb magyarázatot adott a feladathoz: felhívta a figyelmet a feladatban szereplő adatokra, arra, hogy mik lehetnek az elempárok. Ezt követően a az elempárok táblázattal történő ábrázolását már sikeresen megadták az egyes csoportok (megjegyezzük, hogy ekkor már jobban kommunikáltak egymással a csoporttagok, mint a foglalkozás legelején). Viszont a táblázat egyes sorainak a "fejlécét" ( $x(\text{perc})$ ,  $y(\text{fizetett összeg})$ ) kihagyták.

A szavakkal és képlettel történő megadáshoz ismét szükség volt a tanári rávezetésre. A táblánál, közös munka keretében lépésről-lépésre vezette a tanár a diákokat a képlet megalkotására, azaz a feladat modellezésére (3.13. ábra). Először a táblázattal való reprezentáció került fel a táblára, majd a percek számát  $x$  változóval, a fizetett összeget pedig  $y$  változóval jelölték. A tanár külön felhívta a figyelmet arra, hogy a mivel a percek változnak, ezért a percek számát jelölhetjük  $x$ -el, és ennek függvényében változik a fizetett összeg is, tehát ezt az összeget jelölhetjük  $y$ -nal, azaz a fizetett összeg a percek számának a függvénye. Ezután kezdeték megérteni a tanulók, hogyan lehet megadni általánosan azt, hogy mennyit fizetünk bizonyos percek után, és jutottak el a képlettel történő reprezentálásra (3.13. ábra). A szavakkal

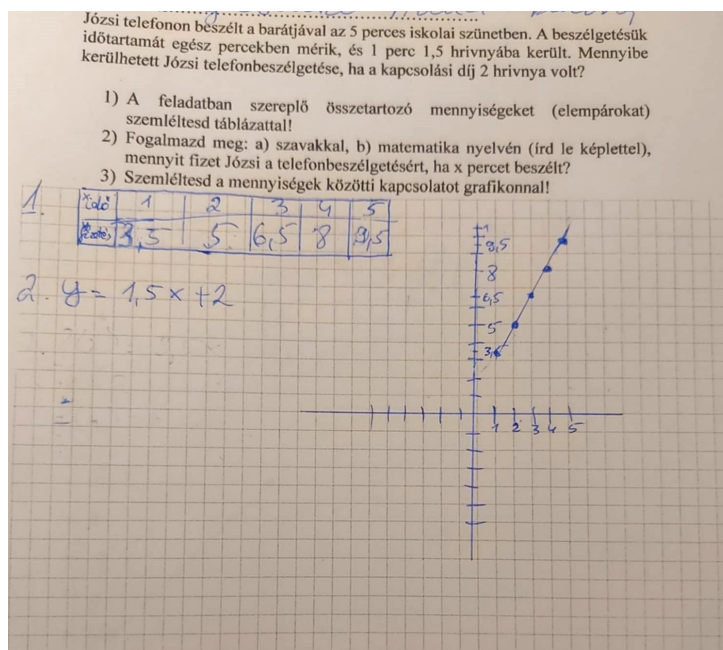
<sup>4</sup> A feladat a [4] disszertációban található feladat továbbgondolása.

való megadás még ezután sem ment zökkenőmentesen. A verbális kifejezés ennek a tanulói csoportnak is nehézséget jelentett csakúgy, mint a [4] disszertációban vizsgált tanulói csoportoknak.



3.13. ábra. Osztálytermi megbeszélés az 1. feladatra

A grafikonnal történő reprezentálást önálló munka keretében végezték a tanulók. Ekkor sokaknál az jelentett problémát, hogy az elempárok helyes feltüntetése után a derékszögű koordináta-rendszerben a pontokat összeköttették (3.14. ábra).



3.14. ábra. Az 1. feladat egy tanulói feladatlapja

Tehát továbbra is a grafikonon a pontok folytonos vonallal történő prezentálása élt a képzetükben annak ellenére, hogy a foglalkozás elején kapott feladatkártyáknál már találkoztak olyan esettel, amikor ez nem vezet az összetartozó mennyiségek helyes grafikonnal való ábrázoláshoz. Tehát elmondható, hogy ennek a megértéséhez több foglalkozásra lenne szükség, illetve többször kellene, hogy a tanórákon ehhez hasonló esetekkel találkozzanak a tanulók.

Ezt követően arra kértük az egyes csapatokat, hogy próbálják meg úgy átfogalmazni a feladat szövegét, hogy az összetartozó mennyiség közötti kapcsolatot leíró függvény grafikonja áthaladjon az  $(1; 1, 5)$  ponton, párhuzamosan az adott grafikonnal. Ezzel a függvénytranszformációk témakör valós életből vett problémán keresztüli megértését céloztuk meg.

A csapatok 2-3 percig egyedül dolgoztak, majd a tanár megnézte a csapatok munkáját. A bizonytalan válaszadás látszott a csoportok munkájából, ezért a tanár kisebb magyarázatot, rávezetést adott nekik:

Tanár: *"Lássuk ezt a pontot a grafikonon és tekintsük a jelenlegi függvény képletét. Olyan grafikont keresünk, ami áthalad ezen a ponton, és párhuzamos a jelenlegi grafikonnal. Akkor a jelenlegi függvény képletében mit kell változtatni?"*

Ezt követően az egyik tanulótól jött a válasz:

Tanuló: *"Akkor nem kell hozzáadni a 2-öt. Vagyis most nincs kapcsolási díj."*

A tanulók megértették, hogy az  $f(x) \rightarrow f(x) + a$  függvénytranszformáció valósult meg egy valós problémában, ezzel pedig példát láttak arra, hogyan lehet a transzformációkat a gyakorlatban is alkalmazni, továbbá kicsit érintettük a feladatalkotási képesség fejlesztését is.

A következő feladat szintén egy valós életből vett probléma modellezése volt a függvénytani ismeretekkel, amikor a függvény értelmezési tartományát részhalmazokra osztjuk és mindegyik részhalmazon más-más hozzárendelési szabály érvényesül.

**2. feladat:** *Egy fotószaküzlet egy 10x15-ös fotót 2 hrivnyáért hív elő. Ha egy vásárló legalább 10 képet hívat elő, akkor 10 hrivnya kedvezményt kap. Írjuk fel azt a függvényt, amely megadja, hogy különböző darabszámú fénykép előhívása esetén mennyit kell a vásárlónak fizetni! Szemléltessük ennek a függvénynek a grafikonját!*

Hasonlóan ez előző feladathoz, a csoportok néhány percig önállóan dolgoztak. Hagytunk nekik időt arra, hogy átbeszéljék és értelmezzék a feladatot.

A csapatok számításai arra engedett következtetni, hogy a feladat szövegét értelmezni tudták. Viszont látható volt az, hogy az általánosítás, azaz

a függvény megadása képlettel, a megfelelő változók bevezetése nehézséget jelent, ezért a munkát osztálytermi megbeszélésben folytattuk. Az egyik csapat felírta a táblára a számításait, azaz, hogy ha 1 darab fényképet hív elő, akkor 2 hrivnyát fizet, ha 2-öt, akkor 4-et és így tovább, majd eljutottak oda, hogy ha 10 képet kér, akkor már  $2 \cdot 10 - 10 = 10$  hrivnyát kell fizetni. Ekkor arra kértük a táblánál lévő tanulót, hogy adja meg táblázattal az összetartozó mennyiségeket, azaz a képek számát és a hozzájuk tartozó összeget. Itt bekapcsolódtak a helyükön lévő tanulók is. Először csak 10 darab képpel számoltak. Ekkor a tanár felhívta a figyelmet arra a "legalább" szó fontosságára. Tehát arra, hogy ha 10-et vagy attól többet hív elő a vásárló, akkor kedvezményt kap, vagyis 10-től több képet is hívathat elő. Azért, hogy ennek a momentumnak a lényegét megértsék, először két táblázatot készítettek: az egyikben 1-től 9 darab képig nézték meg a fizetett, a másikban pedig 10 és attól több darabszám esetére.

Ezt követően a tanár próbálta rávezetni az osztályt a problémát leíró függvény képlettel történő leírására:

Tanár: *Adjunk egy betűt a képek darabszámára. Mondjuk  $x$ . Ugyanígy a fizetett összegre, mondjuk legyen az  $y$ . Ha 1 kép 2 hrivnyába kerül, akkor  $x$  kép mennyibe fog kerülni?*

Tanuló: " $2x$ ".

Tanár: *"A feladat szerint a kedvezmény csak akkor jár, ha 10 vagy attól több képet vásárol. Tehát a fizetett összeg, azaz  $y$  csak akkor egyenlő  $2x$ -el, ha ...?"*

Ekkor jött a válasz a tanulóktól, hogy ha az  $x$  kevesebb, mint 10.

Tanár: *"Mi van akkor, ha a képek száma 10 vagy attól több? Azaz, ha  $x \geq 10$ ? Akkor  $y = \dots$ ?"*

A tanulók használva a feladat szövegét mondták, hogy ki kell vonni 10-et az összegből. A tanár ekkor újra megkérdezte, hogy mivel az összeg 10 képig  $2x$ , akkor mivel egyenlő  $y$ . A tanulóktól jött a válasz, hogy  $y = 2x - 10$ . A tanár kivetítette a feladatot leíró függvényképletet (3.15. ábra).

Ezt követően kérte a tanár a tanulókat, hogy mindkét esetre felírt képletre készítsék el a grafikon. Több esetben újra megjelent az, hogy a táblázatban feltüntetett számpárokat miután ábrázolták a koordináta-rendszerben, összekötötték. A tanár újra hangsúlyozta, hogy miért nem lehet összekötni (nincs olyan, hogy 1,5 kép, tehát csak egész számok vannak az  $x$  és az  $y$  tengelyeken is). A helyes függvénygrafikon kivetítése is megtörtént.

**Feladat:**

Egy fotószaküzlet egy 10x15-ös fotót **2 hrivnyáért** hív elő. Ha egy vásárló **legalább 10 képet** hívát elő, akkor **10 hrivnya kedvezményt** kap. Írjuk fel azt a függvényt, amely megadja, hogy különböző darabszámú fénykép előhívása esetén mennyit kell a vásárlónak fizetni!  
Szemléltessük ennek a függvénynek a grafikonját!

**Megoldás:**

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 < x < 10, \\ 2x - 10, & \text{ha } x \geq 10 \end{cases}$$

ahol  $x$  – a fotók darabszáma,  $y$  – a fizetett összeg

3.15. ábra. A 2. feladat megoldása

Összegezve ennek a feladatnak a megoldását, úgy véljük, hogy az ilyen típusú függvénykapcsolatokkal való munkára több időt kell szánni ahhoz, a tanulók értelmezni tudják azt.

A következő fejezetben annak járunk utána, hogy a fentebb bemutatott foglalkozások mennyire voltak hatásosak a tanulói függvényfogalomképzet alakításában.

## 4. fejezet

# A tanítási kísérlet hatékonyságának vizsgálata (utóteszt)

Az előző fejezetben bemutatott foglalkozások után két héttel a vizsgált tanulói csoport a foglalkozások hatékonyságát vizsgáló ún. utótesztet töltött ki, mellyel a következő kérdésre kerestük a választ: *hozzájárult-e a tanítási kísérlet a vizsgált tanulói csoport függvényfogalom-képzetének alakításához?*

A feladatlap kitöltésére 45 perc állt a tanulók rendelkezésére és 13 tanuló töltötte ki. A feladatok összeállításánál figyelembe vettük az előtesztben és a foglalkozásokon szereplő feladatokat, illetve azt, hogy az azokra kapott válaszok elemzésével a Vollrath (1984) által lefektetett fogalomelsajátítási szempontokat (lásd jelen dolgozat 7. old.) is meg tudjuk vizsgálni.

### 1. feladat

a) *Mit nevezünk függvénynek?* b) Adj rá egy példát! Adj rá egy ellenpéldát!

Ellentétben ugyanezen kérdésre az előtesztben adott válaszokkal, a tesztet kitöltő 13 tanuló már nem a tankönyvi definíciót adta meg, a válaszaikból kitűnt a saját szavakkal, a képzetükben élő függvényfogalommal való definiálás. Kiseb fogalmazásbeli problémáktól eltekintve helyes definíciót 5 tanuló adott: *Függvénynek nevezzük az a szabályt, amely minden egyes bemeneti értékhez (általában  $x$ ) hozzá rendel egy kimeneti értéket (általában  $y$  vagy  $f(x)$ ).* A többi 8 tanuló definíciójában is megjelentek az ún. "függvénycsírák: "Az  $x$  és  $y$  változók közötti függőséget függvénynek nevezzük."

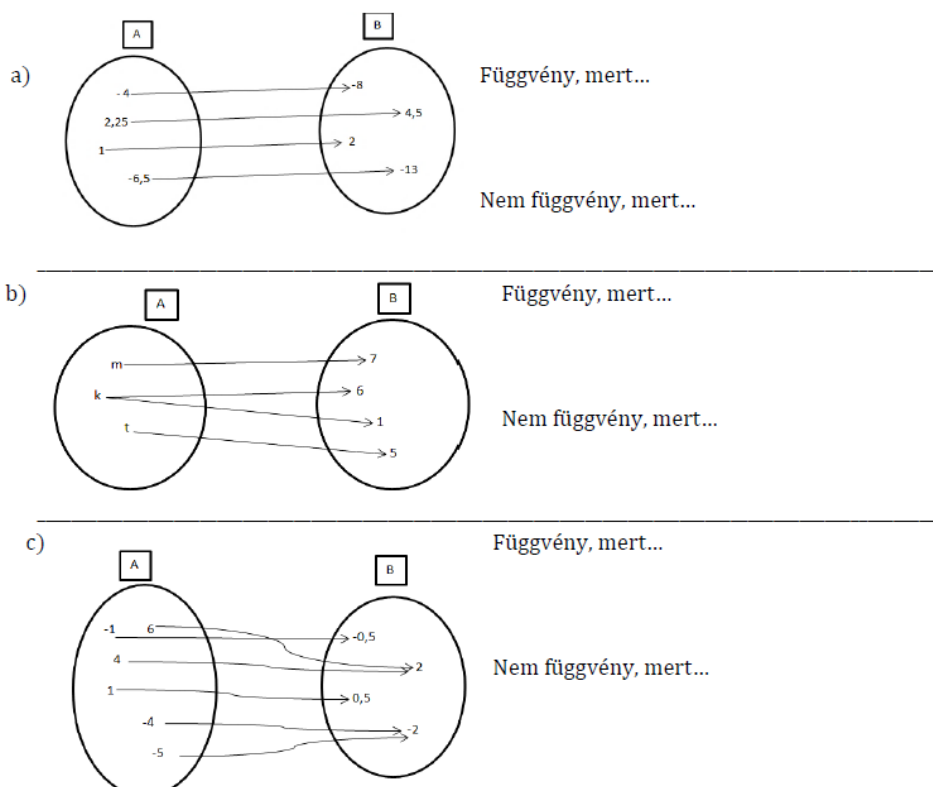
Példák tekintetében 5 tanuló valamilyen konkrét lineáris függvény képzetét vagy magát a lineáris függvény általános alakját adta meg. 1 tanuló

táblázattal reprezentált egy függvényt, 2 tanuló pedig egy specifikus függvény nevét (lineáris függvény) vagy grafikonjának nevét (parabola) írta le.

Ellenpéldát viszont egyetlen tanuló sem adott. Valószínűleg a függvényfogalom bevezetésekor és azt követő alakítási folyamatban erre nem helyeződött hangsúly, és a megvalósult 2 foglalkozás kevésnek bizonyult ezen hiányosság pótlására.

## 2. feladat

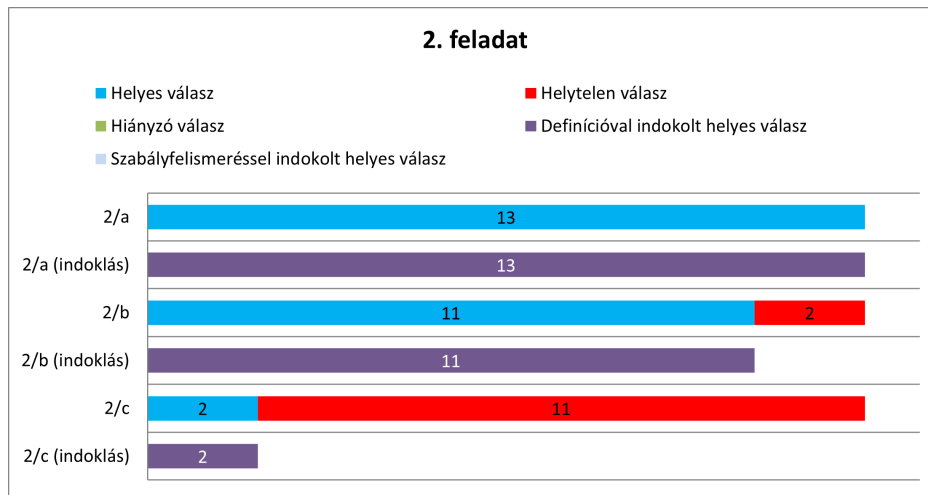
2.) Az alábbi ábrák az  $A$  és a  $B$  halmaz elemei közötti kapcsolatot szemléltetik. A nyilak azt jelzik, hogy az  $A$  halmaz elemeihez milyen elemeket rendeltünk a  $B$  halmazból. Melyik hozzárendelés függvény az alábbiak közül? Válaszodat indokold!



4.1. ábra. A 2. feladat kérdései az utótesztben

A feladatban szereplő hozzárendelések ugyanazok, mint az előteszt 2. feladatában lévők. A feladat megoldottságát a 4.2. ábra szemlélteti.

Ahogy a 4.2. ábra is mutatja, jóval több helyes válasz érkezett az a) és a b) kérdésekre, mint az előtesztben. Az indoklások már a definíción alapultak, már nem a szabálykeresésen volt a hangsúly, hanem a tanulók a függvényfogalom-képzetükre hagyatkoztak: *"Függvény, mert minden A-beli*

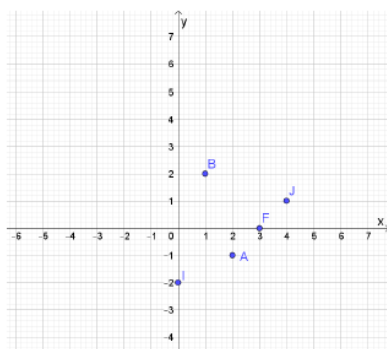


4.2. ábra. A 2. feladat megoldottsága az utótesztben

*elemhez pontosan egy B-beli elem van rendelve". Problémát a feladat c) kérdése jelentette. Itt ahelytelen válaszok abból eredtek, hogy a tanulóknál a hozzárendelés irányával vannak még gondjaik. Azért nem tekintették függvénynek az adott hozzárendelést, mert "1 y-hoz több x tartozik". Tehát nem vették figyelembe azt, hogy esetünkben mi az alaphalmaz és mi a képhalmaz.*

### 3. feladat

3.) Tükrözd az ábrán látható pontokat az y-tengelyre!



a) Rendezd táblázatba az összetartozó számpárokat (pontokat)

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

b) Adjuk meg képlettel is ezt a hozzárendelést!

$$(x, y) \rightarrow ( \quad , \quad )$$

4.3. ábra. A 3. feladat kérdései az utótesztben

A feladat hasonló a foglalkozáson tárgyalt feladathoz. Geometriai transzformáció elvégzésével kellett felismerni az összetartozó számpárokat és általánosítani ezt a tengelyes tükrözést. A feladat megoldottságát mutatja a 4.4. ábra.

| <b>3. feladat</b><br><b>(Geometriai</b><br><b>transzformáció)</b> |           | <b>Helyes</b><br><b>válasz</b> | <b>Helytelen</b><br><b>válasz</b> | <b>Nincs</b><br><b>válasz</b> |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|--------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| <b>13 tanuló</b> <b>ból</b>                                       | <b>a)</b> | 10                             | 3                                 | 0                             |
|                                                                   | <b>b)</b> | 12                             | 1                                 | 0                             |

4.4. ábra. A 3. feladat megoldottsága az utótesztben

Ahogy a 4.4. ábra is mutatja, ennek a feladatnak a megoldottsága kiemelkedő. A foglalkozás hatására, ahol a dinamikus Geogebra szoftver segítségével kapcsoltuk össze a függvény fogalmát a tengelyes tükrözés fogalmával, az utótesztben jól láthatóan ez nagyban hozzájárult ahhoz, hogy a tanulók felismerjék az összetartozó számpárokat, illetve az általánosítás (a függvény képlettel történő megadása) is sikeresnek mondható. Ez arra enged következtetni, hogy célszerű a függvény fogalmát a bevezetését követően is beépíteni azokba a témakörökbe, ahol ez a fogalom impliciten is megjelenik, és nem csak és kizárólag ott foglalkozni ezzel a fogalommal, ahol a feladat expliciten elvárja.

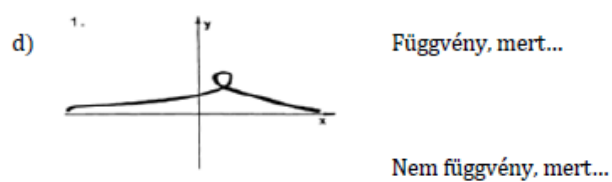
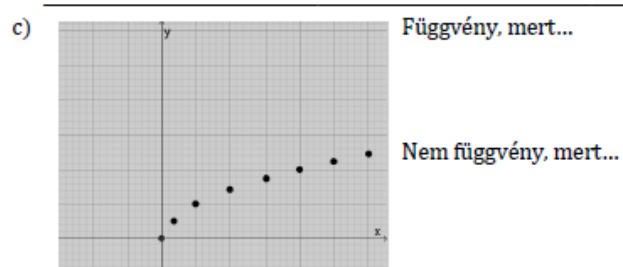
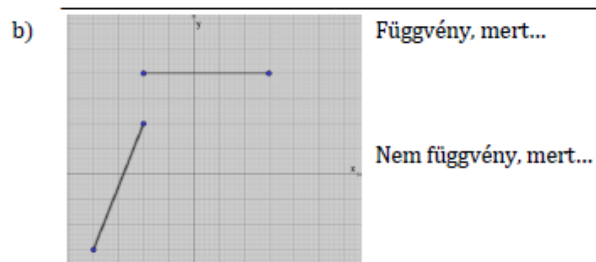
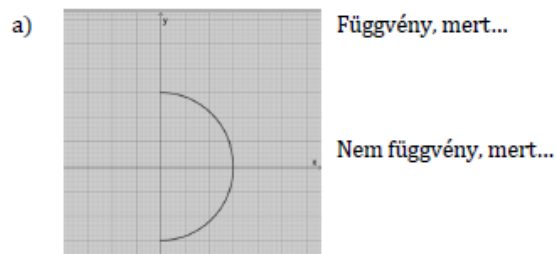
A függvényfogalomnak ezen úton történő alakítása hozzájárul nemcsak egy "ideális" függvényfogalom-képzet alakításához, hanem kapcsolatot alakít a geometria és az algebra között. Azaz a függvény fogalmát nemcsak a számhoz számot rendelő hozzárendelésekre korlátozzák.

A síkbeli pontok geometriai transzformációi – vagyis ponthoz pontot rendelő függvények – és azok vizuális megjelenítései elősegíthetik a tanulók intuitív megértését, hozzájárulhatnak a tévképzetek elkerüléséhez, valamint támogatják a változók és függvények mélyebb megismerését [2].

#### 4. feladat

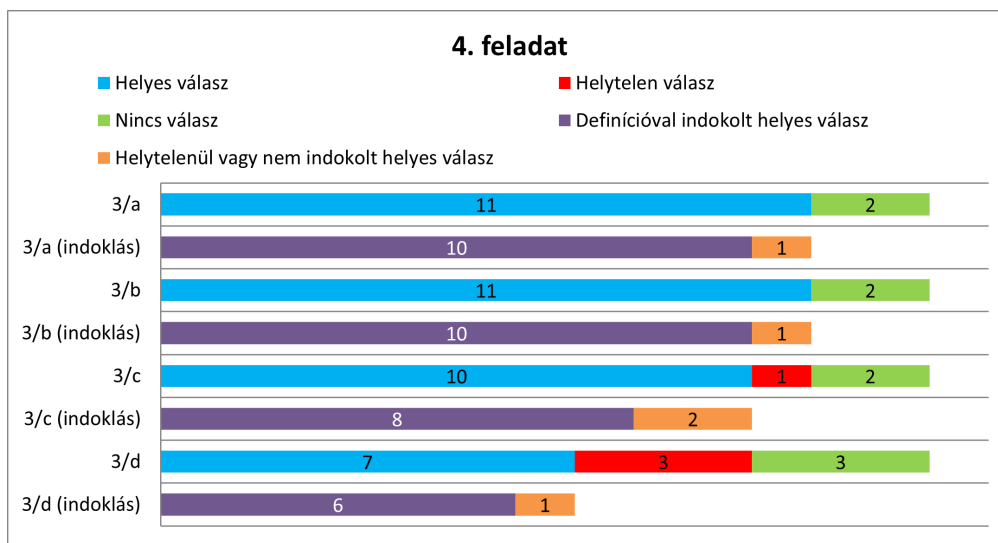
A feladatban el kellett dönteni, hogy melyik grafikon ábrázolhat függvényt. Hasonló feladattal a foglalkozásokon is találkoztak a tanulók. A feladat *d)* kérdése a [7] tanulmányból való.

4.) Az ábrákon látható grafikonok közül melyik ábrázol függvényt, ha az x-tengelyen és az y-tengelyen is valós számok vannak? Válaszodat indokold!



4.5. ábra. A 4. feladat kérdései az utótesztben

A feladat megoldottságát a 4.6. ábra szemlélteti.



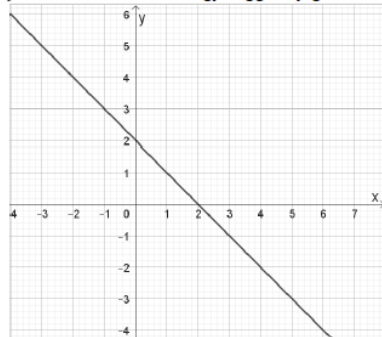
4.6. ábra. A 4. feladat megoldottsága az utótesztben

Ahogy az ábra is mutatja, ennek a feladatnak a megoldottsága is jóval sikeresebbnek mondható, mint a hasonló feladatnak az előtesztben (lásd a 2. fejezetet). A tesztet kitöltő 13 hallgató magas arányban adott helyes választ ez egyes kérdésekre, ahol csakúgy, mint a 2. feladat esetében, itt is a definícióval történő indoklás jelent meg magas számban. Ezek közül gyakori volt a következőhöz hasonló: *"Nem függvény, mert egy  $x$  értékhez több  $y$  érték tartozik"*. A helytelenül indokolt helyes válasz kategóriában olyan válaszok voltak, melyek a foglalkozáson elhangzott vertikális egyenes teszt "csíráit" hordozták: *"Nem függvény, mivel az  $y$  tengelyhez több pont tartozik"*. A Helytelen válasz kategóriában olyan válaszok voltak, melyek csakúgy, mint a 2. feladat esetében, a hozzárendelés irányának téves értelmezése miatt lettek helytelenek.

## 5. feladat

Konkrétan ilyen feladatot a foglalkozáson ugyan nem vizsgáltak a tanulók, viszont a foglalkozás bevezető feladatában, illetve az egyes feladatkártyák megoldása során igen.

5.) A következő ábrán egy függvény grafikonja látható!



a) Készítsd el a függvény értéktáblázatát!

|          |  |  |  |  |  |  |
|----------|--|--|--|--|--|--|
| <b>x</b> |  |  |  |  |  |  |
| <b>y</b> |  |  |  |  |  |  |

b) Add meg ezt a függvényt:

I) szavakkal:

II) képlettel:

4.7. ábra. Az 5. feladat kérdései az utótesztben

A feladat megoldottságát a 4.8. ábrán láthatjuk.

|                         | Helyes válasz:      |            |           | Helytelen válasz:   |            |           | Hiányzó válasz |            |           |
|-------------------------|---------------------|------------|-----------|---------------------|------------|-----------|----------------|------------|-----------|
|                         | A függvény megadása |            |           | A függvény megadása |            |           |                |            |           |
|                         | Táblázattal         | Verbálisan | Képlettel | Táblázattal         | Verbálisan | Képlettel | Táblázattal    | Verbálisan | Képlettel |
| <b>13<br/>tanulóból</b> | 10                  | 0          | 0         | 1                   | 10         | 10        | 2              | 3          | 3         |

4.8. ábra. Az 5. feladat megoldottsága az utótesztben

Az összetartozó elempárok táblázatba rendezése sikeresebbnek bizonyult, mint az előtesztben. Ennek ellenére a függvény leírása szavakkal még mindig nehézséget okozott. Itt egyszerűen azt a választ adták a tanulók, hogy az adott függvény lineáris függvény.

Annak ellenére, hogy a foglalkozáson bemutatott bevezető feladatban részletesen volt szó arról, hogyan lehet a táblázat alapján felírni a lineáris függvény képletét, a 4.8. ábra jól mutatja, hogy ennek megértése az utótesztben nem mutatkozott meg. A helytelen választ adó tanulók a lineáris függvény általános képletét írták le ( $y = kx + b$ ). Ez alapján elmondhatjuk, hogy a vizsgált tanulói csoportban a függvény fogalmához tartozó "változók" világában való "jártasság" alakítása jóval több foglalkozást igényelne.

## 6. feladat

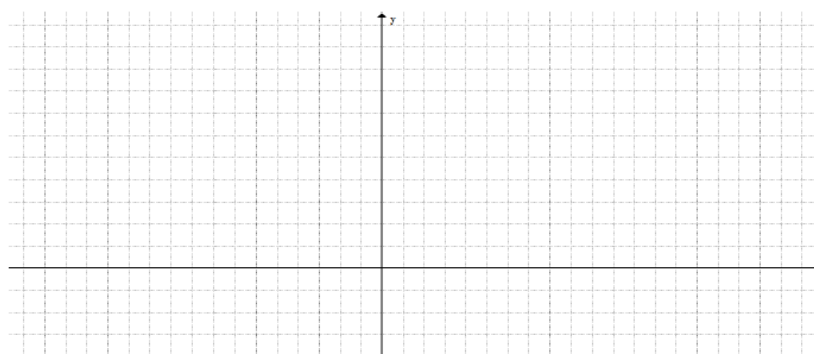
A feladat hasonló a foglalkozás utolsó részében vizsgált valós életből vett problémához. Jelen esetben az értelmezési tartomány egyes részhalmazain különböző hozzárendelési szabály érvényesül.

6.) Zsuzsi kinézett magának az interneten egy papír-írószer boltot, ahol az egyik típusú füzet 20 hrvnyába került. A bolt erre a termékre a következő akciót hirdette meg: online rendelés esetén, ha minimum 6 darabot rendel a vásárló ebből a termékből, akkor elengedik a 40 hrvnyás szállítási költséget.

a) Készíts táblázatot a megvásárolt füzet száma (db) és a fizetett összeg (hr) közötti kapcsolatról!

|                         |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------------------|--|--|--|--|--|--|--|
| vásárolt<br>füzet(db)   |  |  |  |  |  |  |  |
| Fizetett összeg<br>(hr) |  |  |  |  |  |  |  |

b) A táblázat segítségével szemléltesd grafikonon a különböző darabszámú füzet vásárlása esetén mennyit kell a vásárlónak fizetni!



c) Fogalmazd meg matematika nyelvén (írd le képlettel), hogyan függ a fizetett összeg a megvásárolt füzetek számától!

4.9. ábra. A 6. feladat kérdései az utótesztben

A feladat megoldottságát a 4.10. ábra mutatja.

|                      | 6/a | 6/b | 6/c |
|----------------------|-----|-----|-----|
| <b>13 tanuló</b> ból | 12  | 7   | 1   |

4.10. ábra. A 6.feladat megoldottsága az utótesztben

Jól látható, hogy az összetartozó elempárok felismerése nem jelentett nehézséget, tehát a feladat értelmezésével nem voltak gondjaik a tanulóknak. A grafikonnal történő megadás esetében viszont már vagy kihagyták a tanulók ezt a kérdést, vagy a problémát az okozta, hogy összekötötték a táblázat alapján feltüntetett pontokat. Tehát náluk, még mindig a függvény grafikonja egy folytonos vonalat jelent, és a grafikon szerkesztésénél eltekintenek attól, hogy az helyesen ábrázolja az adott problémát.

Még nagyobb nehézséget jelent számukra a képlettel történő megadása, azaz az általánosítása a problémának. A feladatnak erre a kérdésére a többség

válasza a fizetett összeg kiszámításának algoritmusa volt konkrét darabszámú füzet setében.

Kiemelendő, hogy míg a táblázatban nem, addig a grafikonon már többen eltekintettek attól az esettől, ha a vásárolt füzetek száma kevesebb, mint 6.

Úgy véljük, hogy a valós életből vett problémákra is nagyobb hangsúlyt kellene fektetni a függvényfogalom alakítása folyamatában, mivel ezzel is a tanulóknak biztosíthatjuk ezen fogalomnak az alkalmazási területeinek megismerését, és így nagyobb motivációt adhatunk e fogalom tanulásához.

# Összegzés

A szakdolgozat a függvényfogalom tanításának és megértésének didaktikai aspektusait vizsgálja az általános iskola 9. osztályos tanulók körében. A dolgozat célja, hogy bemutassa, milyen fogalomképzetekkel rendelkezik az említett tanulói csoport a függvényről, valamint egy tanítási kísérlet segítségével próbálja elősegíteni az ideális függvényfogalom-képzetet, azaz a fogalom definíciója kölcsönös kapcsolatban áll a róla kialakult képzetrel.

A dolgozat 1. fejezetében részletesen tárgyaltuk a matematikai fogalmak tanulásának pszichológiai és didaktikai aspektusait, különös figyelemmel a fogalomdefiníció, a mentális kép és a fogalomképzet kapcsolatára. Bemutattuk a függvény fogalmának történeti fejlődését, melynek mai napig hatása van a fogalomnak az iskolai gyakorlatban alkalmazott alakítási folyamataira. Továbbá kiemelten foglalkoztunk a függvény fogalmának az alakítása szempontjából fontos reprezentációs formáival (pl. képlet, grafikon, táblázat, nyíldiagram), illetve az azok közötti "átjárás" tanulói birtoklásának fontosságával.

A 2. fejezetben egy kárpátaljai magyar tannyelvű iskola 17 diákjával elvégeztünk egy felmérést a tanulók függvényről kialakult fogalomképzetének megismerése céljából. A felmérés eredményei alapján kiderült, hogy a tanulók jelentős része olyan fogalomképzetrel rendelkezik a függvényről, mely nincs kölcsönös kapcsolatban annak definíciójával. A tanulók nagy része csak tankönyvi definíciót tudott visszaadni, és nem tudta azt megfelelően alkalmazni konkrét példákra. A tanulók a függvényt kizárólag szabállyal leírható kapcsolatként értelmezték, és nehezen kezelték azokat az eseteket, ahol nem volt egyértelmű szabály. A különféle reprezentációs módok elszigetelten éltek a tanulók fejében, nem tudtak közöttük átjárni (pl. grafikon  $\leftrightarrow$  táblázat  $\leftrightarrow$  képlet). A valós életből vett példákat sem tudták hatékonyan értelmezni függvényként, a fogalom nem "élt" számukra.

A 3. fejezetben egy  $2 \times 45$  perces tanórán a tanulók különböző típusú feladatok segítségével dolgozták fel a függvény fogalmát. A cél az volt, hogy a tanulók ne csak képlettel, hanem szemléletes, tapasztalati alapon is tudják értelmezni a függvényeket. A tanítás fókuszában a függvény különbö-

ző reprezentációs formái közötti átjárás, valamint valós életből vett példák modellezése állt. A tanulók csoportmunka keretében vizsgálták meg, hogy a kapott a vizsgált kapcsolatok függvénykapcsolatot reprezentálnak-e. Eszközként használtuk a Geogebra szoftvert és alkalmaztuk a "vertikális vonal tesztet" is a grafikonok függvényjellegének megállapítására. A tanulók elkezdtek felismerni a függvény különféle formáit és alkalmazni a fogalmat a hétköznapi példákban is.

A dolgozat 4. fejezetében a tanítási kísérlet után 2 héttel elvégzett utóteszt eredményeit mutattuk be. A felmérés eredményei azt mutatták, hogy a tanulók fogalomképzete jelentős mértékben fejlődött. A függvénykapcsolatok különböző kontextusokban való felismerése már nem jelentett olyan nehézséget, mint az előtesztben. Nagyobb számban tudták alkalmazni a függvény definícióját annak eldöntésére, hogy az adott kapcsolat függvénykapcsolat-e. Javulás volt tapasztalható a különböző reprezentációk közötti váltásban. Kiemelendő, hogy a képlettel történő megadása a felismert függvénykapcsolatban továbbra is nehézséget okoz a vizsgált tanulói csoportnak. Emiatt úgy véljük, hogy ennek fejlesztése több célzott foglalkozást igényelne. A függvények mindennapi életből vett problémák megoldásában való alkalmazhatóságában is fejlődés mutatkozott a foglalkozások hatására.

A dolgozat bizonyítja, hogy a tanulói függvényfogalom-képzetek fejleszthetők tevékenységalapú, tapasztalati tanulással. A valós életből vett példák, csoportmunka, és a reprezentációs módok tudatos integrálása hatékony módszerek a fogalom megértésének eléréséhez. A tanítási kísérlet sikeres volt: a tanulók fogalomhasználata gazdagodott, és közelebb került az ideális függvényfogalomhoz.

# Irodalomjegyzék

- [1] *Skemp, R.R.* A matematikatanulás pszichológiája (S. Klein, ford.). Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005. (Eredeti könyv publikálva 1971-ben.)
- [2] *Szanyi Gy.* Mi a függvény?—középiskolásoknak tartott foglalkozás tapasztalatai. International Journal of Engineering and Management Sciences /Műszaki és Menedzsment Tudományi Közlemények, 5/1, pp. 596-607, 2020.
- [3] *Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., Reed, H.* Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. International Journal of Science and Mathematics Education, Volume 10, Issue 6, 1243–1267, 2012.
- [4] *Szanyi Gy.* A függvényfogalom kialakításának vizsgálata. PHd disszertáció, Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, 163 p., 2017.
- [5] *Kleiner I.* Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, Vol. 20, No. 4, p.282-300, 1989.
- [6] *Ambrus, A.* A konkrét és vizuális reprezentációk szükségessége az iskolai matematikaoktatásban.  
[http://epa.niif.hu/03900/03976/00057/pdf/EPA03976\\_magiszter\\_2003\\_3\\_061-074.pdf](http://epa.niif.hu/03900/03976/00057/pdf/EPA03976_magiszter_2003_3_061-074.pdf)
- [7] *Vinner, S., Dreyfus, T.* Images and definitios for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 356-366, 1989.
- [8] *Vinner, S.* Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14, 293-305., 1983.
- [9] *Ambrus, A.* Bevezetés a matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó, javított kiadás, 2004.

- [10] *Czeplédy, I., Orosz, Gy., Szalontai, T., & Szilák, A.* Matematika tan-  
tárgypedagógia II. Főiskolai jegyzet. Calibra Kiadó, Budapest, 93-105,  
1994.
- [11] *Csépe, V., Győri, M., Ragó, A.* Általános pszichológia 1-3.-  
2.- Tanulás- emlékezés- tudás. Osiris Kiadó, Budapest, 2007.  
[http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011\\_0001\\_520\\_](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_520_altalanopszichologia_2/index.html)  
[altalanopszichologia\\_2/index.html](http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_520_altalanopszichologia_2/index.html)
- [12] *Zenon W. Pylyshyn.* Mental imagery: In search of a theory. Behavioral  
and Brain Sciences, 25, pp. 157-238, 2002.
- [13] *Szanyi, Gy.* Általános iskolás tanulók és egyetemi hallgatók fogalom-  
képzetei a függvényről. International Journal of Engineering and Ma-  
nagement Sciences /Műszaki és Menedzsment Tudományi Közlemények,  
2/2, pp. 114-122, 2017.
- [14] *Sain, M.* Nincs királyi út. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [15] *Sierpinska, A.* On understanding the notion of function. In Harel, G.,  
Dubinsky, E. (eds.), The concept of function: Aspects of epistemology  
and pedagogy. DC: Mathematical Association of America, Washington,  
25-58, 1992.
- [16] *Stillwell, J.* Mathematics and Its History. Springer-Verlag New York  
Inc., 2010.
- [17] *Dienes, Z.* Építsük fel a matematikát. Edge 2000 Kft. 2015.

# Ábrák jegyzéke

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. A függvényfogalom alkotórészei . . . . .                                | 11 |
| 1.2. A függvény különböző reprezentációs módjai [4] . . . . .                | 12 |
| 2.1. A 2. feladat kérdései [4] . . . . .                                     | 15 |
| 2.2. A 2. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor . . . . .              | 16 |
| 2.3. A 2. feladat megoldottsága a 2016-os felméréskor [4] . . . . .          | 16 |
| 2.4. A 3. feladat kérdései [4] . . . . .                                     | 18 |
| 2.5. A 3. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor . . . . .              | 19 |
| 2.6. A 3. feladat megoldottsága a 2016-os felméréskor [4] . . . . .          | 19 |
| 2.7. A 4. feladat kérdései [4] . . . . .                                     | 20 |
| 2.8. A 4. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor . . . . .              | 20 |
| 2.9. Az 5. feladat kérdései [4] . . . . .                                    | 21 |
| 2.10. Az 5. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor . . . . .            | 22 |
| 2.11. A 6. feladat kérdései [4] . . . . .                                    | 22 |
| 2.12. A 6. feladat megoldottsága a 2025-ös felméréskor . . . . .             | 23 |
| 3.1. Bevezető példa . . . . .                                                | 27 |
| 3.2. "Füzetek" feladatkártya kitöltése . . . . .                             | 29 |
| 3.3. "Hónapok" feladatkártya kitöltése . . . . .                             | 30 |
| 3.4. "Hónapok" feladatkártya tanári magyarázata . . . . .                    | 31 |
| 3.5. "Gyertya" feladatkártya kitöltése . . . . .                             | 32 |
| 3.6. "Számok" feladatkártya kitöltése . . . . .                              | 33 |
| 3.7. Példa és ellenpélda a függvény fogalmára . . . . .                      | 34 |
| 3.8. Munkalap tengelyes tükrözésre a Geogebra szoftverben . . . . .          | 35 |
| 3.9. A tengelyes tükrözés feladatlap kitöltése . . . . .                     | 35 |
| 3.10. Példa a "vertikális vonal teszt" alkalmazására . . . . .               | 36 |
| 3.11. Feladatlap a különböző grafikonok vizsgálatára . . . . .               | 37 |
| 3.12. Osztálytermi megbeszélés a különböző grafikonok vizsgálatára . . . . . | 37 |
| 3.13. Osztálytermi megbeszélés az 1. feladatra . . . . .                     | 39 |
| 3.14. Az 1. feladat egy tanulói feladatlapja . . . . .                       | 39 |
| 3.15. A 2. feladat megoldása . . . . .                                       | 42 |

|       |                                                      |    |
|-------|------------------------------------------------------|----|
| 4.1.  | A 2. feladat kérdései az utótesztben . . . . .       | 44 |
| 4.2.  | A 2. feladat megoldottsága az utótesztben . . . . .  | 45 |
| 4.3.  | A 3. feladat kérdései az utótesztben . . . . .       | 45 |
| 4.4.  | A 3. feladat megoldottsága az utótesztben . . . . .  | 46 |
| 4.5.  | A 4. feladat kérdései az utótesztben . . . . .       | 47 |
| 4.6.  | A 4. feladat megoldottsága az utótesztben . . . . .  | 48 |
| 4.7.  | Az 5. feladat kérdései az utótesztben . . . . .      | 49 |
| 4.8.  | Az 5. feladat megoldottsága az utótesztben . . . . . | 49 |
| 4.9.  | A 6. feladat kérdései az utótesztben . . . . .       | 50 |
| 4.10. | A 6. feladat megoldottsága az utótesztben . . . . .  | 50 |

## Висновки

Ця кваліфікаційна робота досліджує дидактичні аспекти викладання та розуміння поняття функції серед учнів 9 класу загальноосвітньої школи. Метою роботи є з'ясувати, якими уявленнями про функцію володіють учні цієї вікової групи, а також — за допомогою навчального експерименту — сприяти формуванню адекватного уявлення про функцію, тобто досягти узгодженості між ментальним образом поняття та його формальним визначенням.

У першому розділі роботи докладно розглянуто психологічні та дидактичні аспекти засвоєння математичних понять, з особливою увагою до взаємозв'язку між визначенням поняття, ментальним образом і поняттєвим уявленням. Проаналізовано історичний розвиток поняття функції, який і досі впливає на його формування у шкільній практиці. Також було детально розглянуто основні форми репрезентації функції (наприклад, формула, графік, таблиця, стрілкова діаграма) та наголошено на важливості вільного переходу між цими формами для глибшого розуміння учнями.

У другому розділі описано дослідження, проведене серед 17 учнів угорськомовної школи в Закарпатті з метою вивчення їхніх уявлень про функцію. Результати опитування показали, що значна частина учнів має уявлення про функцію, яке не відповідає її формальному визначенню. Більшість учнів змогла лише відтворити підручникове визначення, не демонструючи вміння застосовувати його на практиці. Функцію вони переважно сприймали як правило або формулу, й мали труднощі з випадками, де правило не було явно виражене. Різні способи репрезентації існували в їхній свідомості ізольовано — учні не вміли здійснювати перехід між ними (наприклад, графік ↔ таблиця ↔ формула). Також вони не змогли ефективно інтерпретувати приклади з реального життя як функціональні залежності — поняття функції залишалося для них абстрактним і «неживим».

У третьому розділі описано викладання теми «Функція» у формі двох 45-хвилинних уроків, на яких учні опрацьовували поняття функції за допомогою різноманітних типів завдань. Метою було забезпечити не лише формальне, а й наочне, досвідне розуміння функції. Навчання було зосереджене на переході між різними способами подання функцій, а також на моделюванні ситуацій із реального життя. Учні в групах аналізували, чи можна вважати задану залежність функцією. Використовувалися такі інструменти, як програмне забезпечення GeoGebra та тест вертикальної прямої для визначення функціонального характеру графіків. Учні поступово почали впізнавати функцію в різних формах та застосовувати її в побутових прикладах.

У четвертому розділі подано результати післятесту, проведеного через два тижні після завершення навчального експерименту. Вони засвідчили суттєве покращення поняттєвих уявлень учнів. Розпізнавання функціональних залежностей у різних контекстах стало менш проблемним,

ніж під час передтесту. Значно більше учнів змогли використати формальне визначення функції для визначення, чи є певна залежність функцією. Також покращилася здатність до переходу між різними формами подання. Проте зазначено, що побудова формули функції за її описом або графіком і далі викликає труднощі, що вказує на необхідність додаткових цілеспрямованих занять. Також спостерігалось покращення в застосуванні поняття функції для розв'язання задач, пов'язаних із реальним життям.

Робота доводить, що поняттєві уявлення учнів про функцію можуть бути ефективно розвинені через діяльнісне, досвідне навчання. Використання прикладів із реального життя, робота в групах, а також свідоме поєднання різних способів репрезентації є результативними методами для досягнення глибокого розуміння поняття. Навчальний експеримент виявився успішним: учні розширили знання про функції й наблизилися до ідеального функціонального поняття.

## **Nyilatkozat**

Alulírott, Szanyi Erika, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

## Звіт подібності

## метадані

Назва організації

Hungarian College of Higher Education Ferenc Rakoczi II Transcarpathian

Заголовок

Szanyi Erika\_BSc\_szakdolgozat\_teljes

Науковий керівник / Експерт

Автор Габрієлла Пап

підрозділ

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II

## Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.

6.13%

6.13%

КП 1

10.53%

10.53%

КЦ

25

Довжина фрази для коефіцієнта подібності 2

9979

Кількість слів

74342

Кількість символів

## Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати навмисний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

|                        |    |    |
|------------------------|----|----|
| Заміна букв            | Б  | 1  |
| Інтервали              | A→ | 0  |
| Мікропробіли           | ␣  | 0  |
| Білі знаки             | Б  | 0  |
| Парафрази (SmartMarks) | a  | 40 |

## Подібності за списком джерел

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Колір тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

## 10 найдовших фраз

## Колір тексту

| ПОРЯДКОВИЙ<br>НОМЕР | НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)                                                                                                                                                                          | КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ<br>СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ) |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1                   | <a href="https://mat.unideb.hu/sites/default/files/inline-files/3_4_4_tananyag_20180614_0.pdf">https://mat.unideb.hu/sites/default/files/inline-files/3_4_4_tananyag_20180614_0.pdf</a>                           | 59 0.59 %                                 |
| 2                   | <a href="https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/b9588a4f-3ed5-4b1c-8474-4c34fc482b78/content">https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/b9588a4f-3ed5-4b1c-8474-4c34fc482b78/content</a> | 50 0.50 %                                 |
| 3                   | <a href="https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/b9588a4f-3ed5-4b1c-8474-4c34fc482b78/content">https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/b9588a4f-3ed5-4b1c-8474-4c34fc482b78/content</a> | 46 0.46 %                                 |
| 4                   | <a href="https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614">https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614</a>                                                                               | 44 0.44 %                                 |
| 5                   | <a href="https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614">https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614</a>                                                                               | 41 0.41 %                                 |

|                                         |                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                     |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 6                                       | <a href="https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614">https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614</a>                                                                               | 39 0.39 %                                                                           |
| 7                                       | <a href="https://core.ac.uk/download/161060102.pdf">https://core.ac.uk/download/161060102.pdf</a>                                                                                                                 | 38 0.38 %                                                                           |
| 8                                       | <a href="https://www.redalyc.org/pdf/405/40517206.pdf">https://www.redalyc.org/pdf/405/40517206.pdf</a>                                                                                                           | 23 0.23 %                                                                           |
| 9                                       | <a href="https://core.ac.uk/download/161060102.pdf">https://core.ac.uk/download/161060102.pdf</a>                                                                                                                 | 21 0.21 %                                                                           |
| 10                                      | <a href="https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614">https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614</a>                                                                               | 21 0.21 %                                                                           |
| з домашньої бази даних (0.00 %)         |                                                                                                                                                                                                                   |  |
| ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР                        | ЗАГОЛОВОК                                                                                                                                                                                                         | КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)                                              |
| з програми обміну базами даних (0.00 %) |                                                                                                                                                                                                                   |  |
| ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР                        | ЗАГОЛОВОК                                                                                                                                                                                                         | КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)                                              |
| з Інтернету (6.13 %)                    |                                                                                                                                                                                                                   |  |
| ПОРЯДКОВИЙ<br>НОМЕР                     | ДЖЕРЕЛО URL                                                                                                                                                                                                       | КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ<br>СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)                                           |
| 1                                       | <a href="https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614">https://ojs.lib.unideb.hu/IJEMS/article/download/4880/4614</a>                                                                               | 230 (12) 2.30 %                                                                     |
| 2                                       | <a href="https://core.ac.uk/download/161060102.pdf">https://core.ac.uk/download/161060102.pdf</a>                                                                                                                 | 156 (9) 1.56 %                                                                      |
| 3                                       | <a href="https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/b9588a4f-3ed5-4b1c-8474-4c34fc482b78/content">https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/b9588a4f-3ed5-4b1c-8474-4c34fc482b78/content</a> | 110 (3) 1.10 %                                                                      |
| 4                                       | <a href="https://mat.unideb.hu/sites/default/files/inline-files/3_4_4_tananyag_20180614_0.pdf">https://mat.unideb.hu/sites/default/files/inline-files/3_4_4_tananyag_20180614_0.pdf</a>                           | 69 (2) 0.69 %                                                                       |
| 5                                       | <a href="https://www.redalyc.org/pdf/405/40517206.pdf">https://www.redalyc.org/pdf/405/40517206.pdf</a>                                                                                                           | 30 (2) 0.30 %                                                                       |
| 6                                       | <a href="http://www.cse.buffalo.edu/~rapaport/575/mentalimages.html">http://www.cse.buffalo.edu/~rapaport/575/mentalimages.html</a>                                                                               | 17 (1) 0.17 %                                                                       |

### Список прийнятих фрагментів (немає прийнятих фрагментів)

|                  |       |                                       |
|------------------|-------|---------------------------------------|
| ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР | ЗМІСТ | КІЛЬКІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ) |
|------------------|-------|---------------------------------------|