

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II
Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний № _____

Кваліфікаційна робота
Аспекти викладання інтегрального числення у програмі середньої
ШКОЛИ

Пінте Едіна Іванівна
Студентка II-го курсу
Освітня програма «Середня освіта (Математика)»
Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»
Рівень вищої освіти: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри
Протокол № 3 / 2024

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йозефівна**
(к. ф.-м. н, доцент)

Завідувач кафедрою математики та інформатики : **Кучінка Каталін Йозефівна**
(к. ф.-м. н, доцент)

Робота захищена на оцінку _____, «___» _____ 202_ року
Протокол № _____ / 202_

**Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

Кафедра математики та інформатики

**Кваліфікаційна робота
Аспекти викладання інтегрального числення у програмі середньої
школи**

Рівень вищої освіти: магістр

Виконавець: студентка II-го курсу

Пінте Едіна Іванівна

освітня програма «Середня освіта (Математика)»
спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Кучінка Каталін Йозефівна**

к. ф.-м. н, доцент

Рецензент: **Сливка-Тилищак Ганна Іванівна**

*док. фіз.-мат. наук, професор, зав. каф. теорії
ймовірностей і математичного аналізу, ДВНЗ «УжНУ»*

Берегове
2025

Зміст	
Вступ	6
1. Теоретичні основи викладання інтегрального числення.....	7
1.1. Основи, поняття та застосування інтегрального числення	7
1.2. Роль інтегрального числення в українській базовій програмі .	13
1.3. Таксономія Блума	14
2. Дослідницький контекст	17
3. Експериментальне навчання	24
3.1. Процес і контекст навчання	24
3.2. Результати експериментального навчання	29
Висновки	32
Бібліографія	33
Список малюнків	35

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

Matematika és Informatika Tanszék

**INTEGRÁLSZÁMÍTÁS OKTATÁSÁNAK ASPEKTUSAI A KÖZÉPISKOLAI
TANANYAGBAN**

Magiszteri dolgozat

Készítette: Pinte Edina

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Kucsinka Katalin

PhD, docens

Recenzens: dr. Szlivka-Tilistyák Hanna

fiz.-mat. tudományok doktora, professzor, tanszékvezető

Valószínűességszámítás és Matematikai analízis Tanszék, UNE

Tartalomjegyzék

Bevezetés	6
1. Elmélet az integrálszámítás oktatásához	7
1.1. Az integrálszámítás alapjai, fogalma és alkalmazási területei	7
1.2. Integrálszámítás szerepe az ukrainai alaptantervben	13
1.3. Bloom-féle taxonómia	14
2. Kutatás körülménye	17
3. Kísérleti oktatás	24
3.1. Az oktatás folyamata és körülménye	24
3.2. Kísérleti oktatás eredményei	29
Következtetés	32
Irodalomjegyzék	33
Ábrák jegyzéke	35

Bevezetés

Diplomamunkámban az integrálszámítás oktatásának aspektusait vizsgálom a középiskolai oktatás tükrében. Az Ukrán Oktatási és Tudományos Minisztériuma által kiadott alaptantervet megvizsgálva, elsősorban azokat az integrálszámításhoz kapcsolódó témákat mutattam be és fogalmait írtam le, melyet tudnia kell egy 11. osztályos tanulónak. Majd szó esik a Bloom-féle taxonómiáról,

Az integrálszámítás elsajátítás nehézséget okoz a legtöbb tanuló számára, ezért meg akartuk vizsgálni, hogy milyen akadályokba ütköznek a tanulók a tananyag elsajátítása során. Legfőbb célunk, hogy bebizonyítsuk a tanulók csak mechanikusan elvégezhető műveleteket képesek elvégezni a témával kapcsolatban, az integrál fogalmának valódi jelentését nem értik. Munkámban nem egy új tanítási módszert szerettem volna kitalálni, inkább felkutatni, milyen módszerekkel is próbálztak ezzel.

A kutatásbn a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziumának számvitel és adóügy, szociálismunkás, turizmus szakjait, valamint a Kárpátaljai Magyar Líceum nagydobronyi, péterfalvi, kisgejőci és beregszászi egységeinek szépművészet, autószerelés, informatika (adatfeldolgozás és szoftverkezelés), szakács és vállalkozástan szakok tanulóit vontam be. Kontrolcsoportnak a főiskola informatika tanári szakos hallgatóit választottam.

A munkámban bemutatásra kerülnek a kutatás eredményei, ahol a következő kérdéseket fogalmaztuk meg "Van-e különbség a mechanikus cselekvést igénylő és megértésen alapuló feladatok között?", "Van-e különbség a csoportok mediánjai között a feladatok esetében?", "Van-e különbség a fiúk és lányok között a feladatok megoldásában?". Továbbá ismertetem az általam elvégzett kísérleti oktatás folyamatát és annak eredményeit, majd levonom az ezekből származó következtetéseket a középiskolai integrálszámítás tanítás fejlesztésének lehetőségeiről.

A kutatás eredményeit a XVI. Taní-tani (Online) Nemzetközi Konferencián, valamint a XIX. Kárpátaljai Tudományos Diákköri Konferencia Tanulás- és Tanításmódszertani Szekciójában publikáltam konferencia előadás formájában.

1. Elmélet az integrálszámítás oktatásához

1.1. Az integrálszámítás alapjai, fogalma és alkalmazási területei

Az integrálás a matematika egyik alapvető művelete, amely a differenciálás inverz folyamata. Amíg a differenciálás egy függvénynek a változási sebességét határozza meg, addig az integrálással a függvény alatti területet számíthatjuk ki. Az integrálást számos területen lehet alkalmazni, például fizikában, mérnöki tudományokban és közgazdaságtanban is.

Az integrálás során különböző módszereket alkalmazunk a függvények integrálására. Az első és leggyakrabban használt módszer a közvetlen integrálás, amikor a függvény egy ismert primitív függvény. Ezt a folyamatot alkalmazzuk a középiskolai oktatás során, viszont ezen kívül ismerünk más integrálszámítási módszereket is. Például ilyen a helyettesítéses integrálás, amely akkor hasznos mikor a függvény nem közvetlen integrálható, Ismeretes még többek között a parciális integrálás is, amelyet akkor alkalmazunk, ha a függvény szorzat formájában van megadva. Az integrálszámítás számos területen alkalmazható, ilyen például:

- terület- és térfogat számítás
- munka- és energiaszámítás
- valószínűségszámítás és statisztika
- differenciálegyenletek megoldása
- mérnöki területeken való alkalmazások (pl. áramlástechnika elektromágneség)

A határozatlan integrál fogalmának és alpműveleteinek bevezetése a középiskolai matematikatanításban

Adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, amelynek deriváltja az adott függvény. Például legyen egy függvény deriváltja $2x$. Meg kell határozni az eredeti függvényt! Az eredeti függvény, amit differenciálunk lehet az $y = x^2$. Ha bármelyik függvényt differenciáljuk, amely ettől csak egy konstans összeadandóval különbözik, akkor annak a deriváltja szintén $2x$. Ezek alapján beláthatjuk, hogy

az összes olyan függvény, melynek deriváltja $2x$, felírható az $y = x^2 + C$ alakban, ahol a C tetszőleges szám [2].

Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény primitívjének nevezzük az adott intervallumon, ha ezen az intervallumon az $f(x)$ függvény az $F(x)$ függvény deriváltja, vagyis:

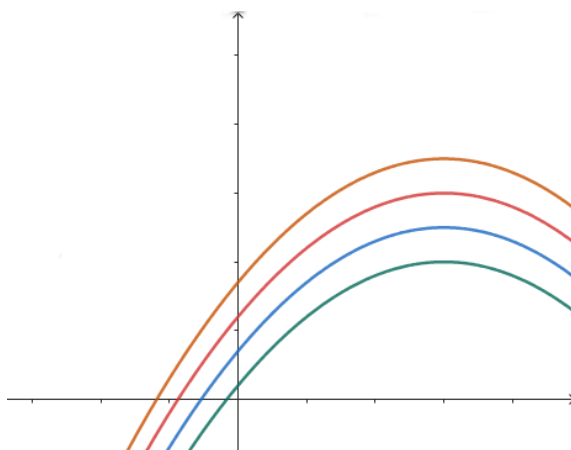
$$F'(x) = f(x) \text{ [16].}$$

Jelölése: ha $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, akkor $\int f(x)dx = F(x)$. Az $f(x)$ függvényt *integrandusnak* nevezzük.

Legyen az $f(x)$ függvény valamely primitív függvénye $F(x)$, akkor $F(x) + C$ is primitív függvénye $f(x)$ -nek:

$$[F(x) + C]' = F'(x), \text{ mert } \frac{dC}{dx} = 0, \text{ konstans deriváltja nulla.}$$

Valamely $f(x)$ függvény primitív függvényei koordináta-rendszerben ábrázolva (1.ábra):



1. ábra. Primitív függvény ábrázolása koordináta-rendszerben

Ezek a görbék egymásba párhuzamos eltolással átvihetők. A görbéknek ugyanaz az értelmezési tartománya, értékészlete pedig az $F(x)$ értékészletén kívül függ a C értékétől is. A primitív függvényt ezentúl a konstans feltüntetésével jelöljük:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ha a primitív függvények közül egy bizonyosat keresünk, akkor annak egy pontját meg kell adnunk, $P_0(x_0; y_0)$. A pont koordinátáinak ismeretében meg tudjuk határozni a C konstans értékét. Az $f(x)$ függvény primitív függvénye:

$$y = F(x) + C.$$

Ebbe behelyettesítve P_0 koordinátáit, C a következő képen fejezhető ki:

$$y_0 = F(x_0) + C, C = y_0 - F(x_0).$$

Tehát:

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)].$$

A határozatlan integrálás, vagy másnéven a primitív függvények keresése, bizonyos értelemben a differenciálásnak a megfordítása [2].

A határozatlan integrál főbb tulajdonságai:

1. A határozatlan integrál deriváltja megegyezik az integrandussal:

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

2. A határozatlan integrál differenciálja is megegyezik az integrandussal:

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx.$$

3. A differenciál integrálása egy folytonosan differenciálható függvény esetén a függvényt adja vissza, konstans hozzáadásával:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. A konstans szorzó kiemelhető az integráljel elé:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \text{ ahol } k = \text{const} \neq 0.$$

5. Két folytonos függvény integrálja az integrálok összegeként vagy különbségeként is felírható:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \text{ [16].}$$

Az integrálszámítás témakörének elsajátításához elengedhetetlen az alapintegrálok ismerete, amelyek hozzájárulnak a feladatok gyorsabb és könnyebb megoldásához.

Alapintegrálok:

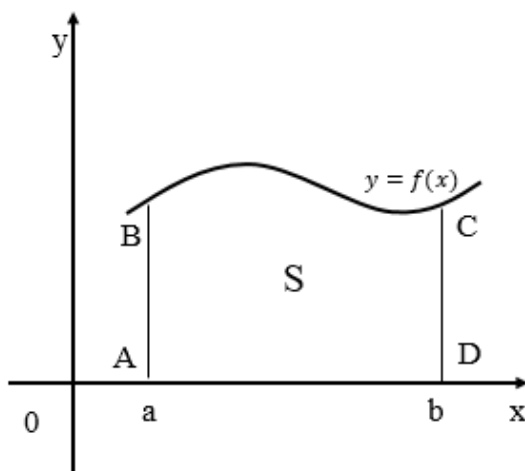
1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, (x \neq 0).$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}).$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C, (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1).$
9. $e^x dx = e^x + C.$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, (a \neq 0) [2]$

A határozott integrál fogalmának és alapműveleteinek bevezetése a középiskolai matematikatanításban

Egy görbevonallú trapéz területét szeretnénk meghatározni. Nézzünk egy $ABCD$ jelölésű görbevonallú trapézt (2.ábra), melyet felülről az $y = f(x)$ függvény határol és adott az $[a, b]$ pozitív intervallum, $f(x) > 0$.

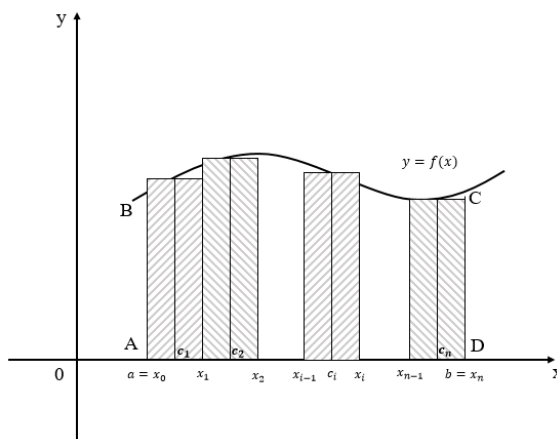


2. ábra. Görbevonallú trapéz területszámításra

A trapéz alapja az Ox tengelyen fekszik, a jobb és bal oldala megfelelően $x = a$ és $x = b$, valamint felülről az $y = f(x)$ határolja. Az iskolában tanultak alapján, megpróbálhatjuk a területet feldarabolni több kisebb területre (például téglalapokra) és ezen területek összegeként megközelíteni.

A görbevonalú trapéz S területének meghatározásához, felosztjuk az $[a;b]$ szakaszt n részre $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$. Minden ponton keresztül húzunk egy merőleges egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonjára (3.ábra). Ekkor kapunk n darab trapézt. Minden szakasz hossza $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, amelynek jelölésére a következőt használjuk $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, (i = \overline{1, n})$.

Legyen S - az $ABCD$ görbevonalú trapéz területe, ΔS_i - az i -edik görbevonalú trapéz területe, $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszok alapján. Akkor $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_i + \dots + \Delta S_n$, vagy $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.



3. ábra. Függvény alatti terület felosztása

Az adott $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszokon vegyünk fel c_i pontot, $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i, i = \overline{1, n}$ és ekkor mindegyik görbevonalú trapézból téglalap lesz, melynek magassága $f(c_i)$. Ennek a téglalapnak a területe $f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.

Az i -edik görbevonalú trapéznak a területe megközelítőleg egyenlő az i -edik trapéz területével.

$\Delta S_i \approx f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, és a teljes S görbevonalú trapéz területe:

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ezt az összeget nevezzük integrál összegnek.

Jelöljük λ -val a legnagyobb részét az $[x_{i-1}, x_i]$ szakasznak: $\lambda = \max_i \Delta x_i$. A $\Delta S_i \approx f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ értéke annál pontosabb, minél kisebb a λ . Tehát:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i [18].$$

Határozott integrál tulajdonságai

1. Ha az $f(x)$ integrálható az $[a; b]$ intervallumon, akkor integrálható lesz a $[b; a]$, tehát

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Ha egy határozott integrál alsó és felső határa megegyezik, akkor az integrál értéke nulla

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. A konstans szorzótényező ki emelhető az integráljel elé:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx, C = \text{const.}$$

4. Az $[a; b]$ intervallumon véges számú integrálható függvény algebrai összegének határozott integrálja egyenlő ezen függvények $[a; b]$ intervallumon lévő határozott integráljainak algebrai összegével:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Ha az $f(x)$ függvény integrálható $[a; b]$ intervallumon és $c \in [a; b]$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad [16].$$

A határozott integrál kiszámításához leggyakrabban használt képlet, a Newton-Leibniz formula, amely a következőképpen néz ki:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a), F'(x) = f(x).$$

Két integrálható függvény grafikonja közötti síkidom területének kiszámítása

Legyen f és g az $[a; b]$ intervallumon integrálható függvények, és legyen $[a; b]$ minden pontjában $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Határozzuk meg az $x = a$ és $x = b$, valamint a két függvény grafikonja által határolt S síkidom területét!

Nézzük meg az f függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ vaslamint az x tengely által határolt területet, amit az $S_1 = \int_a^b f(x)dx$ képlettel írhatunk fel. Hasonlóképpen a g függvény grafikonjának. az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az x tengely

által határolt területet, az $S_2 = \int_a^b g(x)dx$ képlettel határozhatjuk meg. Így a két függvény grafikonja közötti terület a két síkidom területének különbségével egyenlő, vagyis $S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$. Tehát a két függvény grafikonja közötti síkidom területét a két függvény határozott integrálja adja meg.

1.2. Integrálszámítás szerepe az ukrainai alaptantervben

Az integrálszámítás bevezetéséhez sok olyan előzetes tudásra van szükségünk, amely az ukrainai alaptantervben nincs biztosítva. Elsősorban a határérték számítást kellene bevezetni a diákok fogalomtárába, hogy aztán jól és hosszú távon el tudják sajátítani mind a deriválás témakörét, mind pedig az integrálás témakörét. A határérték fogalmának bevezetése és megértése elengedhetetlen eleme annak, hogy később a deriválást, majd pedig az integrálást megértsék.

Az alaptanterv szerint a differenciál fogalmát és annak tulajdonságait minimálisan, mindössze 14 órában tanítják a középiskolákban. Ez alatt a rövid idő alatt kell elsajátítani a következő kompetenciákat:

- A derivált fogalmának jelentősége, a geometriai és fizikai folyamatokban.
- Meghatározza a függvény érintőjének meredekségét és hajlásszögét az adott pontban.
- Függvényeket derivál a táblázat és a differenciálási szabályok segítségével.
- Alkalmazza a deriváltat a függvény monotonitási intervallumainak és szélsőértékeinek meghatározására, valamint grafikonok ábrázolására.
- Meghatározza a függvény legnagyobb és legkisebb értékét.
- Egyszerű alkalmazott feladatokat old meg a valós mennyiségek legnagyobb és legkisebb értékeinek meghatározására [17].

Ezen dolgok mind hasznosak a függvényvizsgálatban, azonban ilyen rövid idő nem elég arra, hogy ezeket a fogalmakat hosszú távon is elsajátítsák és azokat majd megfelelően alkalmazni tudják a későbbiekben.

Megnézve az alaptantervet az integrálszámításra adott órák száma, még a derivált számításra adott órák számától is kevesebb, összesen 10 óra. Ez idő alatt kell

megismerkedni a primitív függvény fogalmával, a primitív függvény meghatározásának szabályaival, valamint a görbevonallú trapéz területének és határozott integrálok kiszámításával.

Az általam vizsgált alaptantervhez tartozó tankönyvben, amit a kárpátaljai magyar iskolák használnak. A primitív fogalmának bevezetéséhez összesen 12 feladat van, amiből az utolsó 3 már jobb képességű diákok számára készült. A következő téma alatt, amelyben a tulajdonságokat taglalják szintén 12 feladat található, itt már a feladatok fele a magas tudásszintnek megfelelő feladatok közé sorolható. A görbevonallú trapéz területének és a határozott integrál kiszámítására összesen 15 feladat van, ebből 6 olyan feladat van, ami már magasabb szintű tudást igényel.

1.3. Bloom-féle taxonómia

A matematika oktatása, különösen az integrálszámítás tanítása, központi szerepet játszik a középiskolai tananyagban. Az integrálszámítás egy összetett és absztrakt témakör, amely nemcsak a matematikai fogalmak megértését, hanem azok alkalmazását is igényli. Az oktatás egyik alapvető célja, hogy a tanulók tartós és alkalmazható tudást szerezzenek, amely túlmutat az iskolai évek keretein. A maradék tudás mérése – vagyis annak felmérése, hogy a diákok milyen ismereteket őriznek meg hosszú távon – kulcsfontosságú az oktatás hatékonyságának értékelésében, különösen a matematikai oktatásban, ahol az egyes témakörök egymásra épülnek [15].

A Bloom-féle taxonómia ebben a folyamatban hasznos eszközként szolgál, mivel rendszerezi a tanulási célokat a kognitív képességek hierarchiája mentén, az ismeretektől kezdve a megértésen és alkalmazáson át egészen az elemzésig, szintézisig és értékelésig [3]. Ez a rendszer segít abban, hogy a tanítás ne csupán a tények memorizálására koncentráljon, hanem elősegítse a mélyebb megértést és a kritikai gondolkodást is. Az integrálszámítás oktatásában különösen fontos, hogy a diákok ne csak a fogalmakat és képleteket sajátítsák el, hanem képesek legyenek azokat különböző problémák megoldásában alkalmazni.

A kutatás célja felmérni, hogy a középiskolai oktatásban részt vevő tanulók az integrálszámítás témakör tanulása során milyen mélységű tudást szereznek: csak fogalmakat sajátítanak el vagy alkalmazni is tudják azokat, netalán attitűdként is tekinthetünk az itt megszerzett ismeretre. Ez a kutatás hozzájárulhat ahhoz, hogy

az oktatási módszerek és tantervek hatékonyabbak legyenek, és a tanulók hosszú távon is megőrizték a megszerzett tudást.

A kutatás fő célja feltárni az integrálszámítás középiskolai oktatásának lehetőségeit és kihívásait. A maradék tudás mérése lehetőséget nyújt az oktatási módszerek és tantervek hatékonyságának felülvizsgálatára, valamint a tanulók egyéni fejlődésének nyomon követésére. Feltehetjük magunknak, a következő kérdéseket:

- Milyen mértékben és mélységben kell tanulni az integrálszámítást egy középiskolásnak?
- Milyen előzetes tudásra van ahhoz szükség, hogy ezt az új témát sikeresen el tudják sajátítani?
- Milyen módszereket és eszközöket tudunk felhasználni ahhoz, hogy hatékony legyen az integrálszámítás oktatása?
- Hogyan tudjuk bemutatni a gyakorlati alkalmazását a diákoknak?
- Milyen hatással lehet ennek a témának az elsajátítása a diákok matematikai gondolkodására és problémamegoldó készségeire [8]?

A Bloom-féle taxonómia egy széles körben elismert és alkalmazott oktatási keretrendszer, amely segít a tanulási célok és eredmények meghatározásában, valamint az oktatási folyamatok tervezésében és értékelésében [6][14]. A taxonómiát Benjamin Bloom és munkatársai dolgozták ki 1956-ban, és azóta is meghatározó szerepet tölt be az oktatáskutatásban és a pedagógiai gyakorlatban [6] [12].

A Bloom-féle taxonómia három személyiségfejlesztési területet határoz meg, amelyek a következők: kognitív (értelmi), affektív (érzelmi-akarat), pszichomotoros (mozgásos) [6]. Ezeket tartják a Bloom-féle taxonómia fő jellemzőinek.

A taxonómia legismertebb része közzé a kognitív terület tartozik, amely hat szintre osztja a gondolkodási készségeket:

Ismeret – Az alapvető információk memorizálása és felidézése, például egy matematikai képlet vagy egy történelmi dátum megjegyzése.

Megértés – Az információk értelmezése és összefoglalása, például egy szöveg rövidített változatának elkészítése.

Alkalmazás – Az ismeretek gyakorlati szituációkban történő alkalmazása, például egy matematikai képlet használata egy valós probléma megoldásában.

Elemzés – Az információk szétbontása részekre, hogy megértsük azok kapcsolatait és struktúráját, például egy szöveg vagy egy matematikai probléma elemeinek azonosítása.

Szintézis – Új információk vagy megoldások létrehozása az elemzés során szerzett ismeretek alapján, például egy új termék vagy szolgáltatás kifejlesztése.

Értékelés – Az információk értékének, pontosságának vagy hasznosságának megítélése, például egy forrás megbízhatóságának értékelése [12] [5].

A következőkben betekintést nyerhetünk a taxonómia alkalmazásába is. A Bloom-féle taxonómia számos területen használható az oktatásban:

1. Tanulási célok meghatározása: Segít a tanároknak pontosan megfogalmazni, hogy mit szeretnének elérni a diákokkal [1].
2. Értékelés tervezése: Útmutatást nyújt a különböző szintű kognitív készségek mérésére szolgáló feladatok kidolgozásához [1] [4].
3. Tananyagfejlesztés: Támogatja a tananyagok strukturálását és a különböző gondolkodási szintek fejlesztését [14].
4. Kompetenciák kialakítása: Segít a szakmai kompetenciák meghatározásában és fejlesztésében [4] [13].

A Bloom-féle taxonómia különösen hasznos eszköz számos helyen látható használatának a jelentősége:

- A programozás oktatásában és a számítástechnikai gondolkodás fejlesztésében [1] [14].
- A mérnöki oktatásban, beleértve a környezetmérnöki képzést is [13].
- A szoftvermérnöki ismeretek és készségek értékelésében [4] [5].

2. Kutatás körülménye

A felmérés 2024 tavaszán vette kezdetét. A mérésben részt vettek a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Szakgimnáziumának szociális munkás, turizmus, számvitel és adóügy szakos diákjai, a Kárpátaljai Magyar Líceum beregszászi, kisgyéjőci, nagydobronyi és péterfalvai egységeinek 11. osztályos diákjai, valamint a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola informatika tanári szakjának első éves hallgatói. A kutatásban a diákoknak egy 9 feladatból álló kérdéssort kellett megoldaniuk, melyben megtalálhatóak tesztés, párosítás és kidolgozós feladatok is. A feladatsorokat összesen 131 diákkal sikerült megíratni. Ezen feladatok elvégzésre mindössze 45 perc állt rendelkezésükre.

A feladatokat két csoportra osztottuk. A feladatok első csoportjában azok a feladatok tartoznak, amelyek megoldása automatikus cselekvést igényel. Ilyen feladatnak számít a feladatsor 1., 2., 3., 5., 6. és 8. feladatai. Ezeknél a feladatoknál a megtanult képleteket, alapintegrálokat és intergál tulajdonságokat kell alkalmazni. A másik csoport a megértésen alapuló feladatok, ahol a diákoknak az integrál lényegét kell megéteniük, azt hogy mire is használjuk és, hogy ezt nem csak egy betanult mechanizmusként kell értelmezni.

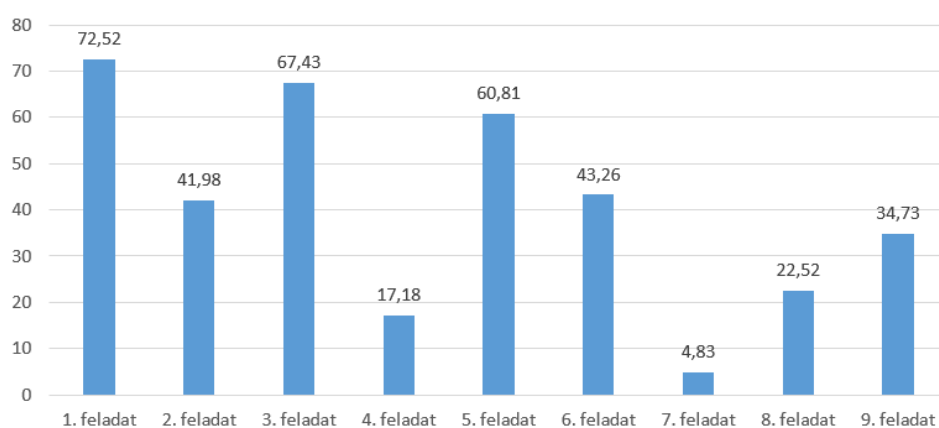
A feladatsor megoldása során összesen 24 pontot lehetett összegyűjteni. Az első és második feladat 1-1 pontot ért, mivel ezek egyszerű feleletválasztós feladatok. A harmadik feladat 3 pontot, minden helyes párosítás esetén 1 pont. A negyedik feladat 2 pontos volt, itt fel kellett ismerni, hogy a primitív már adott és csak fel kell írni a képletet egy konstans C hozzáadásával. Az 5., 6. és 7. feladatok 3 pontot értek, itt a részpontokat a műveleti lépések alapján osztottam ki. A 8. és 9. feladatok pedig 4 pontosak, hasonlóan értékelve mint az előtte lévő feladatok.

A feladatsor kidolgozása előtt elemeztem az Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által kiadott mintaterveket. Ennek a témakörnek a tananyagban való szerepe jelentős kihívásokat tartogat a pedagógusok számára, mivel absztrakt gondolkodást igényel és gyakorlati alkalmazások iránti érzékenységet, amelyhez nincs elegendő óraszám a középiskolai tanterv szerint. Egy ilyen elvont témakör megértésére a diákoknak sokkal több időre lenne szükségük, ahhoz, hogy hosszútávú megértésen alapuló eredményeket érjünk el.

A kutatásunk egyik alapfeltevése az volt, hogy az iskolás tanulók nagy része, bár

próbál megbirkózni az integrálszámítás témakör elsajátításának kihívásaival mégis csak a mechanikusan berögzült műveletek képes elvégezni, amint olyan szintű feladattal találkozik, amely esetében már magasabb szintű gondolkodásra van szükség, így nem tud továbblépni. A feltételek közül a normalitás nem teljesült az első csoportnál sem a Kolmogorov-Smirnov ($W(59) = [0, 206]$ $p < 0,001$), sem a Shapiro-Wilk teszt ($W(59) = [0, 882]$ $p < 0,001$) alapján, így a független mintás t-próba nem alkalmazható. Ezért, hogy a mintánk ne sérüljön a nemparaméteres Wilcoxon előjeles rangteszt eredményei szerint az iskolás tanulók nagy része a mechanikusan ($Mdn = 53,33$) berögzült műveleteket képes elvégezni a magasabb gondolkodási szinten lévő ($Mdn = 11,11$) feladatokkal szemben az integrálszámítás témakörben ($T = 188$ $Z = -9,377$ $p < 0,001$ (1-tailed) $r = 0,819$). Tehát, a statisztikai vizsgálat során megbizonyosodhattunk, arról, hogy az adott témakör oktatása adott óraszámmal nem ad olyan alapot, ami szükséges a magasabb szintű gondolkodás eléréséhez. Így az itt elsajátított tananyagot, csak képletek formájában memorizálják a tanulók, amit a továbbiakban már nem képesek alkalmazni.

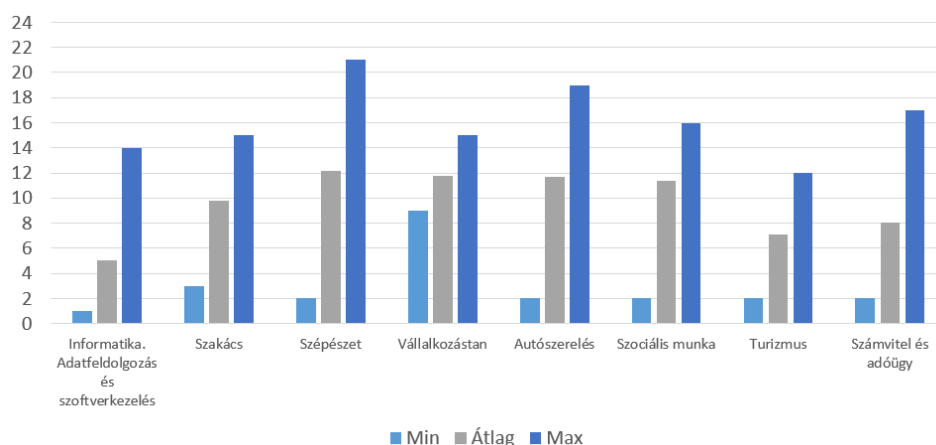
A 4. ábrán láthajuk a kutatásban szereplő összes diáknak, hogyan sikerült megoldaniuk a feladatokat. A feladatsort megnézve leolvasható az ábráról, hogy azok a feladatok és képletek, amelyeket folyamatosan gyakoroltak érték el a magasabb százalékokat. Míg azok a feladatok, amelyek már összetettebb gondolkodást igényeltek, vagy rosszul oldották meg, de legtöbb esetben hozzá sem kezdtek.



4. ábra. A tesztben szereplő feladatok megoldottságának mértéke

A következő 5. ábra azt mutatja meg, csoportonként hogyan szerepeltek a diákok a teszteken. Valamitn, hogy milyen csoportokénti átlagot érték el, a csoportokban

szereplők között elért legkisebb (Min) és legmagasabb (Max) pontokat.



5. ábra. A kutatásban szereplő csoportok eredményeinek átlaga, minimuma és maximuma

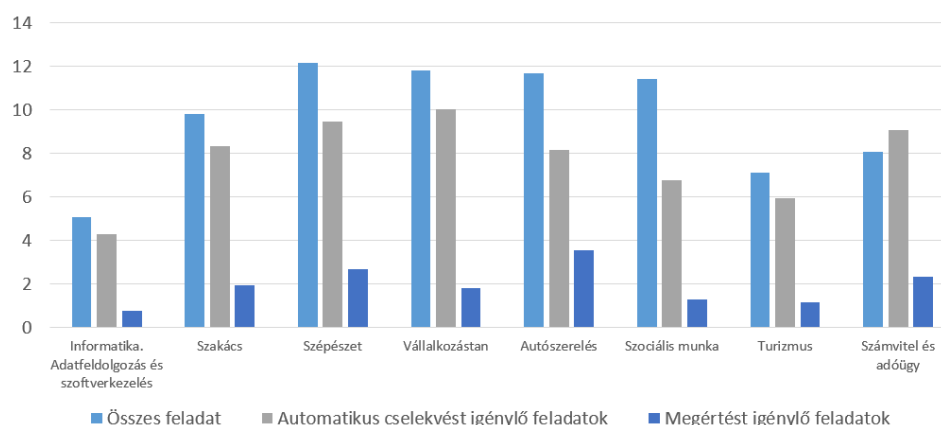
Következő feltevésünk az volt, hogy a különböző csoportok közötti eloszlás azonos a mechanikus cselekvést igénylő feladatok esetében. Ennek vizsgálatára a megfelelő statisztikai próba segítségével összehasonlítottuk a csoportok eredményeit. Mivel az adatok nem minden esetben mutattak normális eloszlást, ezért Kruskal-Wallis nem paraméteres próbát alkalmaztam a mediánok összehasonlítására. A mechanikus cselekvést igénylő feladatok megoldásában szignifikáns különbség figyelhető meg a csoportok között $\chi^2(7, N = 131) = 36,710$ $p < 0,001$. A csoportok között előforduló különbségeket is megvizsgáltam részletesebben. A csoportok utóelemzése során Bonfferoni-korrekciót alkalmaztunk, az eredmények $\alpha < 0,05$ szignifikancia szinten kerülnek értelmezésre.

A következő csoportokat hasonlítjuk össze: Autószerelő ($Mdn = 60,00$) Informatika, Adatfeldolgozó és Szoftverfejlesztő ($Mdn = 20,00$), Szakács ($Mdn = 60,00$), Számvitel és adóügy ($Mdn = 46,67$), Szépészet ($Mdn = 66,67$), Szociálismunka ($Mdn = 66,67$), Turizmus ($Mdn = 43,33$) és Vállalkozástan ($Mdn = 60,00$). Nem találtunk szignifikáns különbségeket a következő csoportok között: Informatika - Turizmus ($H = -18,549$ $Z = -1,588$ $p = 0,112$); Turizmus - Számvitel és adóügy ($H = 5,536$ $Z = 0,451$ $p = 0,652$); Turizmus - Autószerelő ($H = 23,338$ $Z = 1,944$ $p = 0,052$); Turizmus - Szakács ($H = 26,611$ $Z = 1,935$ $p = 0,053$); Számvitel és adóügy - Autószerelő ($H = 17,802$ $Z = 1,525$ $p = 0,127$); Számvitel és adóügy - Szakács ($H = 21,075$ $Z = 13,460$ $p = 0,117$); Számvitel és adóügy

- Vállalkozástan ($H = -34,275$ $Z = -1,814$ $p = 0,070$); Autószerelő - Szakács ($H = -3,273$ $Z = -0,248$ $p = 0,804$); Autószerelő - Szociálismunka ($H = -12,273$ $Z = -0,970$ $p = 0,332$); Autószerelő - Szépészet ($H = -13,427$ $Z = -1,016$ $p = 0,310$); Autószerelő - Vállalkozástan ($H = -16,473$ $Z = -0,880$ $p = 0,379$); Szakács - Szociálismunka ($H = -9,000$ $Z = -0,629$ $p = 0,530$); Szakács - Szépészet ($H = -10,154$ $Z = -0,685$ $p = 0,493$); Szakács - Vállalkozástan ($H = -13,200$ $Z = -0,664$ $p = 0,507$); Szociálismunka - Szépészet ($H = 1,154$ $Z = -0,081$ $p = 0,936$); Szociálismunka - Vállalkozástan ($H = -4,200$ $Z = -0,215$ $p = 0,830$); Szépészet - Vállalkozástan ($H = -3,046$ $Z = -0,153$ $p = 0,878$).

Szignifikáns különbség volt a következő csoportok mechanikust cselekvést igénylő feladatainak mediánjai között: Informatika - Számvitel és adóügy ($H = -24,085$ $Z = -2,125$ $p = 0,034$); Informatika - Autószerelő ($H = 41,887$ $Z = 3,793$ $p < 0,001$); Informatika - Szakács ($H = -45,160$ $Z = -3,496$ $p < 0,001$); Informatika - Szociálismunka ($H = -54,160$ $Z = -4,389$ $p < 0,001$); Informatika - Szépészet ($H = -55,314$ $Z = -4,282$ $p < 0,001$); Informatika - Vállalkozástan ($H = -58,360$ $Z = -3,153$ $p = 0,002$); Turizmus - Szociálismunka ($H = 35,611$ $Z = 2,696$ $p = 0,007$); Turizmus - Szépészet ($H = 36,765$ $Z = 2,673$ $p = 0,008$); Turizmus - Vállalkozástan ($H = -39,811$ $Z = -2,084$ $p = 0,037$); Számvitel és adóügy - Szociálismunka ($H = -30,075$ $Z = -2,330$ $p = 0,020$); Számvitel és adóügy - Szépészet ($H = -31,229$ $Z = -2,320$ $p = 0,020$).

Ugyanazt a feltevést szeretnénk megvizsgálni, most viszont a magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatok esetében. Minden vizsgálatot ugyanúgy elvégeztem, mint az előzőekben. A Kruskal-Wallis nem paraméteres próbát alkalmazva kaptam, hogy a magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatok megoldásában szignifikáns különbség figyelhető meg a csoportok között $\chi^2(7, N = 131) = 24,371$ $p = 0,001$. A csoportok között előforduló különbségeket is megvizsgáltam részletebben. A csoportok utóelemzése során Bonferroni-korrekciót alkalmaztunk, az eredmények $\alpha < 0,05$ szignifikancia szinten kerülnek értelmezésre.



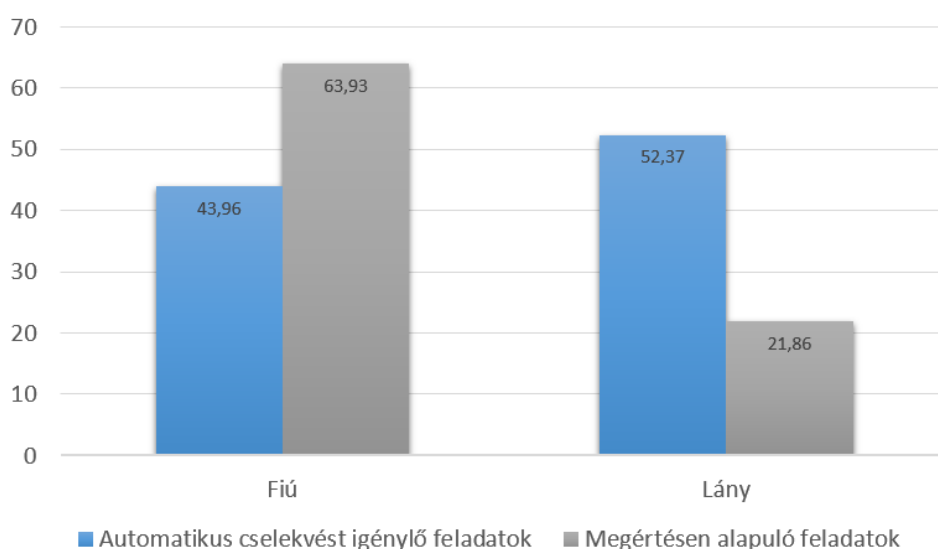
6. ábra. Csoportok összehasonlítása az automatikus cselekvést igénylő és megértésen alapuló feladatai alapján

A következő csoportokat hasonlítjuk össze: Autószerelő ($Mdn = 44,44$) Informatika, Adatfeldolgozó és Szoftverfejlesztő ($Mdn = 0,00$), Szakács ($Mdn = 11,11$), Számvitel és adóügy ($Mdn = 0,00$), Szépészet ($Mdn = 22,22$), Szociálismunka ($Mdn = 33,33$), Turizmus ($Mdn = 0,00$) és Vállalkozástán ($Mdn = 11,11$). Nem találtunk szignifikáns különbségeket a következő csoportok között: Informatika - Turizmus ($H = -7,202$ $Z = -0,647$ $p = 0,517$); Informatika - Számvitel és adóügy ($H = -8,130$ $Z = -0,753$ $p = 0,451$); Informatika - Vállalkozástán ($H = -20,580$ $Z = -1,167$ $p = 0,243$); Informatika - Szakács ($H = -21,365$ $Z = -1,736$ $p = 0,083$); Turizmus - Számvitel és adóügy ($H = 0,928$ $Z = 0,079$ $p = 0,937$); Turizmus - Vállalkozástán ($H = -13,378$ $Z = -0,735$ $p = 0,462$); Turizmus - Szakács ($H = 14,162$ $Z = 1,081$ $p = 0,280$); Turizmus - Szociálismunka ($H = 21,478$ $Z = 1,707$ $p = 0,088$); Turizmus - Szépészet ($H = 23,970$ $Z = 1,830$ $p = 0,067$); Számvitel és adóügy - Vállalkozástán ($H = -12,450$ $Z = -0,692$ $p = 0,489$); Számvitel és adóügy - Szakács ($H = 13,235$ $Z = 1,032$ $p = 0,302$); Számvitel és adóügy - Szociálismunka ($H = -20,550$ $Z = -1,672$ $p = 0,095$); Számvitel és adóügy - Szépészet ($H = -23,042$ $Z = -1,797$ $p = 0,072$); Vállalkozástán - Szakács ($H = 0,785$ $Z = 0,041$ $p = 0,967$); Vállalkozástán - Szociálismunka ($H = 8,100$ $Z = 0,436$ $p = 0,663$); Vállalkozástán - Szépészet ($H = 10,592$ $Z = 0,559$ $p = 0,576$); Vállalkozástán - Autószerelő ($H = 23,877$ $Z = 1,339$ $p = 0,181$); Szakács - Szociálismunka ($H = -7,315$ $Z = -0,536$ $p = 0,592$); Szakács - Szépészet ($H = -9,808$ $Z = -0,695$ $p = 0,487$); Szakács - Autószerelő ($H = 23,093$ $Z = 1,834$ $p = 0,067$);

Szociálismunka - Szépészet ($H = 2,492$ $Z = 0,183$ $p = 0,855$); Szociálismunka - Autószerelő ($H = 15,777$ $Z = 1,309$ $p = 0,190$); Szépészet - Autószerelő ($H = 13,285$ $Z = 1,055$ $p = 0,291$).

Szignifikáns különbség volt a következő csoportok magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatainak mediánjai között: Informatika - Szociálismunka ($H = -28,680$ $Z = -2,440$ $p = 0,015$); Informatika - Szépészet ($H = -31,172$ $Z = -2,533$ $p = 0,011$); Informatika - Autószerelő ($H = 44,457$ $Z = 4,226$ $p < 0,001$); Turizmus - Autószerelő ($H = 37,255$ $Z = 3,257$ $p = 0,001$); Számvitel és adóügy - Autószerelő ($H = 36,327$ $Z = 3,267$ $p = 0,001$).

Szerettük volna megvizsgálni azt a feltevést is, hogy a fiúk és lányok csoportja között jelentős eltérések vannak a mechanikusan begyakorolt műveletekkel megoldott és a megértésen alapuló feladatok között is.



7. ábra. A megírt feladatok nemek szerinti megoszlása

Nem teljesült a normalitás egyik esetben sem, sem a Kolmogorov-Smirnov (fiúk-mechanikus műveletek elvégzése: $W(69) = [0, 159]$ $p = 0,000$; fiúk-megértésen alapuló feladatok: $W(69) = [0, 286]$ $p = 0,000$; lányok-mechanikus műveletek elvégzése: $W(62) = [0, 133]$ $p = 0,008$; lányok-megértésen alapuló feladatok: $W(62) = [0, 240]$ $p = 0,000$), sem a Shapiro-Wilk teszt (fiúk-mechanikus műveletek elvégzése: $W(69) = [0, 932]$ $p = 0,001$; fiúk-megértésen alapuló feladatok: $W(69) = [0, 768]$ $p = 0,000$; lányok-mechanikus műveletek elvégzése: $W(62) = [0, 953]$ $p = 0,018$; lányok-megértésen alapuló feladatok: $W(62) = [0, 837]$ $p = 0,000$) alapján. Nempa-

raméteres független mintás Mann-Whitney tesztet alkalmaztam, és a következőket kaptam:

1. Mechanikusan begyakorolt műveletekkel oldott feladatok

Mann-Whitney tesztet használva a mechanikus cselekvéseket igénylő feladatoknál szignifikáns eltérés van a két nem között $U = 1692$ $Z = -2,070$ $p = 0,038$ (1-tailed) $r = 0,181$.

2. Megértésen alapuló feladatok esetében

Mann-Whitney tesztet használva a magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatoknál nincs szignifikáns eltérés a két nem között $U = 1993$ $Z = -0,710$ $p = 0,478$ (1-tailed) $r = 0,062$.

3. Kísérleti oktatás

3.1. Az oktatás folyamata és körülménye

A vizsgálatra a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán került sor. Összesen 7 elsőéves informatika tanári szakos hallgató vett részt a vizsgálatban. A hallgatók tudását írásbeli bemeneti- és kimeneti feladatsorral mértük fel.

A hallgatók integrállal kapcsolatos tudását mérő bemeneti- és kimeneti feladatsor kilenc feladatból állt. Mindkét feladatsorban ugyanazt a kérdéssort használtuk annak érdekében, hogy a tanulási eredmények összehasonlíthatóak legyenek. Az egyes feladatok pontszáma feladatonként eltérő, a feladatok nehézségi szintjének valamint bonyolultságának megfelelően.

A hallgatók 45 percet kaptak a feladatsor megoldására. Technikai eszközök, például grafikus számológépek használata nem volt megengedett. A résztvevők csoportjának kiválasztása, azért volt adott mivel tudásuk egyenértékű volt előképzettségüket tekintve egy középiskolai 11. osztályos diákkal.

A továbbiakban megnézzük a bemeneti- és kimeneti tesztekben szereplő kérdéseket:

1. kérdés: *Melyik képlettel számítható ki a görbevonalú trapéz területe?*

a) $\int_a^b f(x)dx = F(x) - F(b)$

b) $\int_a^b f(x)dx = A(x) - B(x)$

c) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

d) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Az első kérdés célja az volt, hogy a diákok felismerjék a képletet, amelyet már ez előtt tanultak. Ezzel nemcsak a korábban megtanultakat hívjuk elő, hanem előkészítjük őket az összetettebb feladatok megoldására. Ezt a kérdést egyfajta rávezetésnek tekinthetjük.

2. kérdés: *Válaszd ki az $\int \sqrt{x}dx$ határozatlan integrálját!*

a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + C$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{x^3} + C$

d) $2\sqrt{x} + C$

Ez a tesztés kérdése is hasonló megfontolások alapján került be a feladatsorba, mint az előző. A diákoknak fel kellett ismerni a határozatlan integrál kiszámításának menetét, az integrálási szabályokat, valamint hogy minden határozatlan integrál esetében használjuk a konstans C -t.

3. kérdés: Párosítsd az integrált a megoldásával!

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 1) $\int x^4 dx$ | a) $\frac{x^5}{5} + C$ |
| 2) $\int 4x^3 dx$ | b) $x^4 + C$ |
| 3) $\int \frac{3}{4} dx$ | c) $4x^3 + C$ |
| | d) $\frac{3}{4}x + C$ |

A harmadik kérdés célja annak felmérése, hogy a tanulók mennyire sajátították el a határozatlan integrálás alapvető szabályait, és képesek-e azokat helyesen alkalmazni. A feladat kifejezetten a hatványfüggvények integrálására összpontosít, így alkalmas annak ellenőrzésére, hogy a diákok értik-e az adott típusú függvényekre vonatkozó integrálási eljárást.

4. kérdés: Számítsátok ki az $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ integrált, melynek primitívje az $F(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. Határozd meg $\int \frac{2}{x^2-1} dx$ integrál értékét!

Ez a kérdés mélyebb szintű megértést kíván: a tanulónak észre kell vennie, hogy a feladatban már megadták a primitív függvényt, így a megoldás egyszerűen az adott $F(x)$ és egy konstans összege. A cél itt az, hogy a diákok helyesen értelmezzék a határozatlan integrál fogalmát, és tudják, hogy egy primitív függvény mindig csak egy általános alak, amelyben a konstans változhat.

5. kérdés: Számítsd ki a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ határozott integrált!

Ez a kérdés egy egyszerű határozott integrálás kiszámítására irányul. Fel kell ismerni az első feladatban lévő Newton-Leibniz formulának az alkalmazhatóságát, aminek segítségével határozható meg a határozott integrál.

6. kérdés: Számítsd ki a $\int_1^3 (x^2 + 2) dx$ határozott integrált!

Ez a feladat nemcsak a határozott integrál számításának képességét méri fel, hanem azt is vizsgálja, hogy a tanulók mennyire képesek alkalmazni az integrál additív tulajdonságát, azaz felismerik-e, hogy az integrál több részre bontható és az egyes részintegrálok összege adja a teljes értéket.

7. kérdés: Adott az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény, amelynek $F(x)$ a primitívje és $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{\pi}{2}$. Számítsd ki az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$!

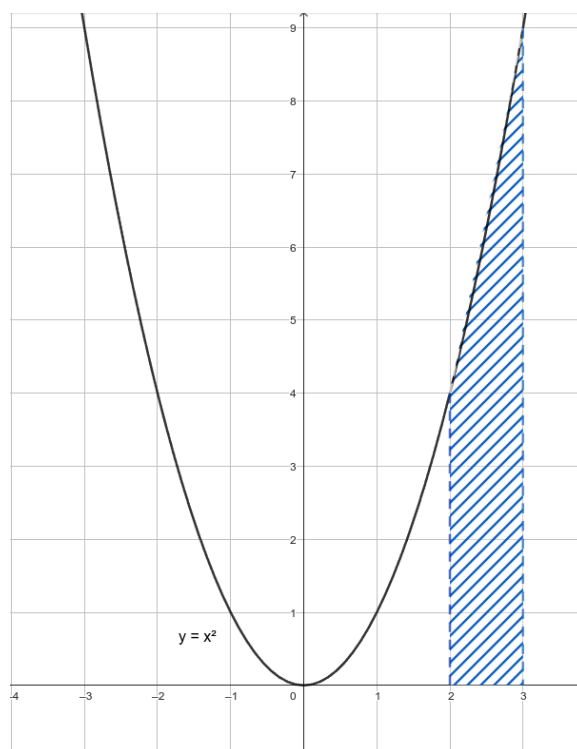
A 7. feladat célja, hogy a tanulók felismerjék a Newton–Leibniz-formula alkalmazhatóságát, és megértsék, hogyan kell kiszámítani egy határozott integrált egy adott primitív függvény segítségével. A feladat során nemcsak a képlet felismerésére van szükség, hanem arra is, hogy tudják: a határozott integrál értékének megha-

tározásához a primitív függvény felső határnál vett értékéből kell kivonni az alsó határnál vett értékét.

8. kérdés: Határozd meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonja alatti síkrész területét az $[0; 5]$ intervallumon!

Ez a kérdés már bevezeti a tanulókat az integrál geometriai értelmezésébe, célja annak tudatosítása, hogy a határozott integrál egy függvény grafikonja alatti területet jelent. A feladat arra ösztönzi a diákokat, hogy ne csak kiszámolják a terület értékét, hanem rajzolják meg a függvényt és vizuálisan azonosítsák azt a területrész, amelyet az integrál reprezentál. Így a tanulók mélyebb megértést szereznek az integrálás gyakorlati alkalmazásáról és a fogalom szemléletes jelentéséről is.

9. kérdés: Határozd meg az ábrán látható grafikon kijelölt részének területét!

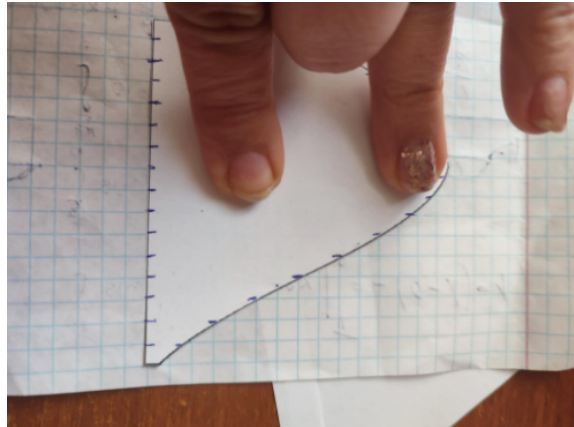


Ez a feladat a határozott integrál geometriai értelmezésére helyezi a hangsúlyt vizuális eszközökkel. A tanulóknak egy adott függvény grafikonja alapján kell meghatározniuk a kijelölt terület nagyságát, amely fejleszti a grafikonok értelmezéséhez szükséges készségeket. A cél, hogy a diákok megtanulják leolvasni a függvényt és a határokat.

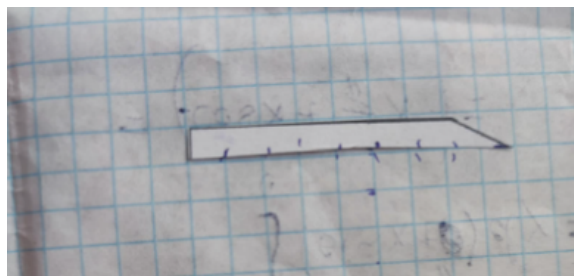
Első foglalkozás

Az első kísérleti foglalkozás célja az volt, hogy a tanulók képesek legyenek vizuálisan értelmezni egy határozatlan görbe alatti területet, és megalapozzuk a későbbi,

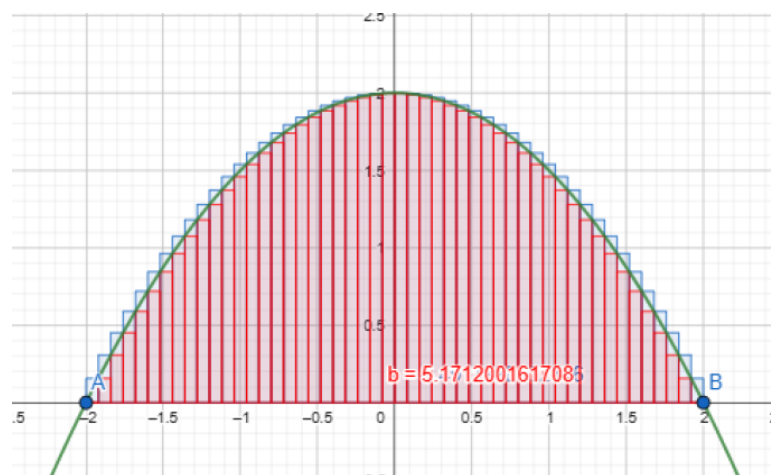
formálisabb integrálszámítási ismereteket. A foglalkozás során egy olyan görbe alatti területet vizsgáltunk, amelynek területe nem határozható meg egyszerű képlettel.



A tanulók feladata az volt, hogy négyzetrácsos lap segítségével, egységnyi szélességű sávokra bontva közelítőleg határozzák meg a területet.



Az óra végén GeoGebra programban is bemutattam nekik egy hasonló határozatlan görbe területének a felosztását.



8. ábra. Határozatlan síkterület felosztása GeoGebra segítségével

Ez a módszer lehetőséget adott arra, hogy tapasztalati úton, fokozatosan jussanak el az integrál fogalmához. Az óra tehát egyfajta bevezetesként szolgált a későbbi

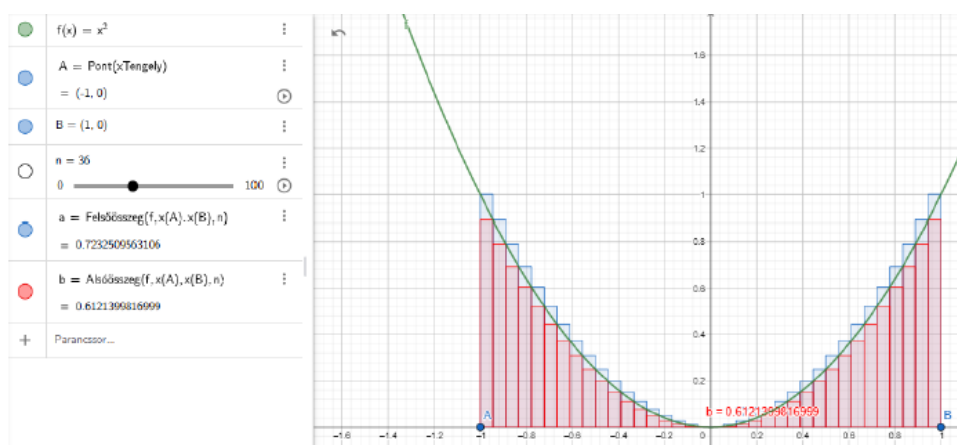
foglalkozásokhoz, miközben fejlesztette a tanulók térlátását és becslési készségét is.

Második foglalkozás

A bevezető első foglalkozás után, a második foglalkozáson a határozatlan- valamint határozott integrálok megoldásával foglalkoztunk. Olyan feladatokat kaptak a hallgatók, melyek megoldásához az alapintegrálok táblázatát, az integrál tulajdonságait és a Newton-Leibniz képletet kellett tudniuk alkalmazni. A foglalkozás alatt nagyobb hangsúlyt kapott az, hogy milyen kapcsolatban áll az integrál függvény és a primitív függvény, így rögzítve annak jelentését. Ezen foglalkozásnak az volt a célja, hogy fel elevenítsük a már előzetesen középiskolában megszerzett tudást és elmélyítsük azt a begyakorolt feladatokkal. Emellett a foglalkozás végén volt két olyan feladat, melyben adott volt a primitív függvény is, így láthatták, hogy a megoldás szinte adott, ebben a feladatban csak egy konstans tényező hiányzik.

Harmadik foglalkozás

Az utolsó foglalkozás teljes mértékben a területszámításról szólt különböző feladat típusokban. Először függvényeket kaptak, melyeknek meg volt adva az alsó- és felső határuk. Ezekhez rajzot kellett készíteniük, megmutatni a rajzon mit szerténnek meghatározni, majd kiszámítani annak területét. A feladatok másik része pedig olyan volt, hogy az adott ábrák alapján kellett felírni a függvény az alsó- és felső határaival együtt, valamint kiszámítani.



9. ábra. Riemann felső- és alsó összegek szemléltetése

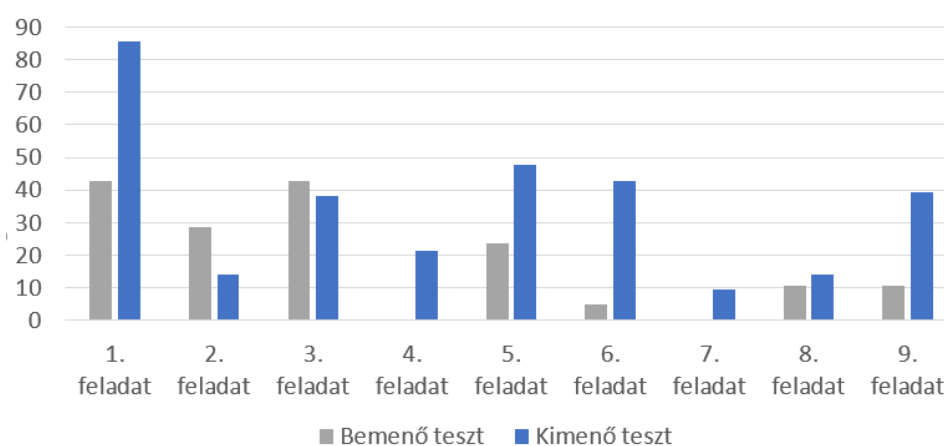
[9] Itt bemutattam nekik a GeoGebra segítségével, hogyan lehet alsó-és felső összegekként is kiszámítani az egész alakzat területét. Azt is bemutattam, hogy mennyire számít az, ha a beosztások minél kisebbek, így annál pontosabb értékek

kaphatóak. Úgy gondolom, hogy ez a vizuális elemekkel való ábrázolás nagyban hozzájárul a feladatok megoldásához.

3.2. Kísérleti oktatás eredményei

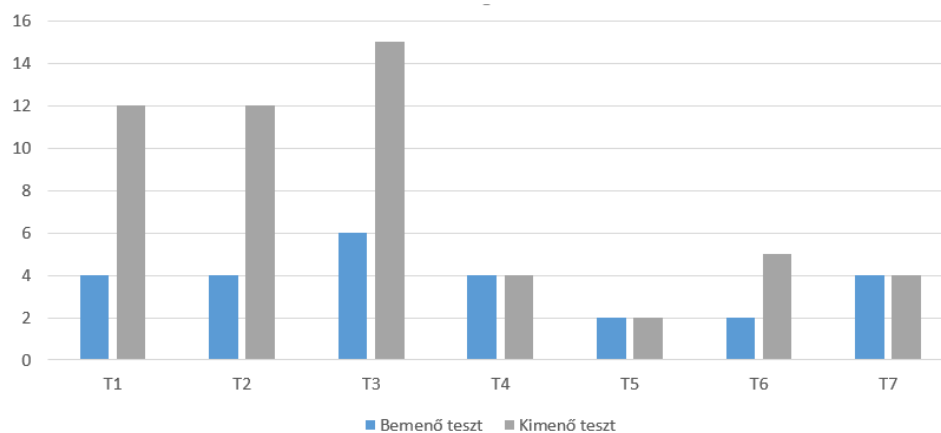
A kísérleti oktatás célja az volt, hogy a hallgatók fejlődést mutassanak a kimeneti feladatsor megoldásában, különösen azokban a feladatokban, amelyek magasabb szintű gondolkodást igényelnek. Ezzel azt kívántuk igazolni, hogy a mélyebb megértés elősegíthető olyan fogalmak bevezetésével, mint a primitív függvény. Emellett fontos szerepet kaptak a vizuális szemléltető eszközök, valamint a tapasztalati, érzékszervi tanulás, amelyek mind hozzájárultak a tananyag alaposabb elsajátításához.

A 10. ábra a hallgatók bemeneti és kimeneti feladatsorainak eredményeiben bekövetkezett változásokat szemlélteti. A legfőbb célunk az volt, hogy előrelépés történjen a magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatok terén. Ezt sikerült elérni, hiszen a 4., 7. és 9. feladatok esetében is egyértelmű javulás mutatkozik, amelyek éppen az elmélyült megértés és az absztrakció képességét igénylik.



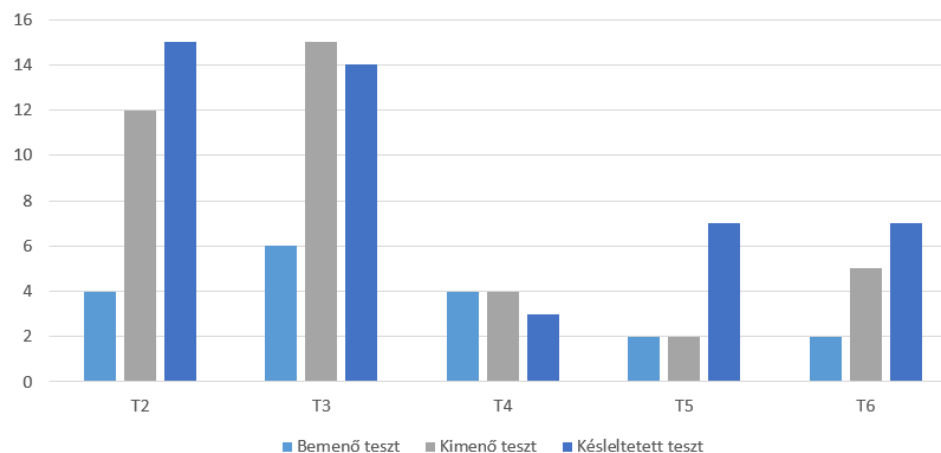
10. ábra. Bemeneti- és kimeneti feladatsor feladatonkénti eredményei százalékokban

A következő 11. ábrán azt szemléltetjük, hogyan teljesítettek az egyes hallgatók a bemeneti és kimeneti feladatsorok megírása során. Mivel a kimeneti mérésre már a kísérleti oktatások után került sor, az eredményeket egy oszlopdiagrammon is összehasonlítottuk. Az adatok alapján jól látható, hogy néhány tanulónál pozitív eredményeket figyelhetünk meg, ami azt jelzi, hogy ezek a foglalkozások segítettek nekik a fejlődésben.



11. ábra. Hallgatók pontszámai a bemeneti- és kimeneti feladatsor megírása után

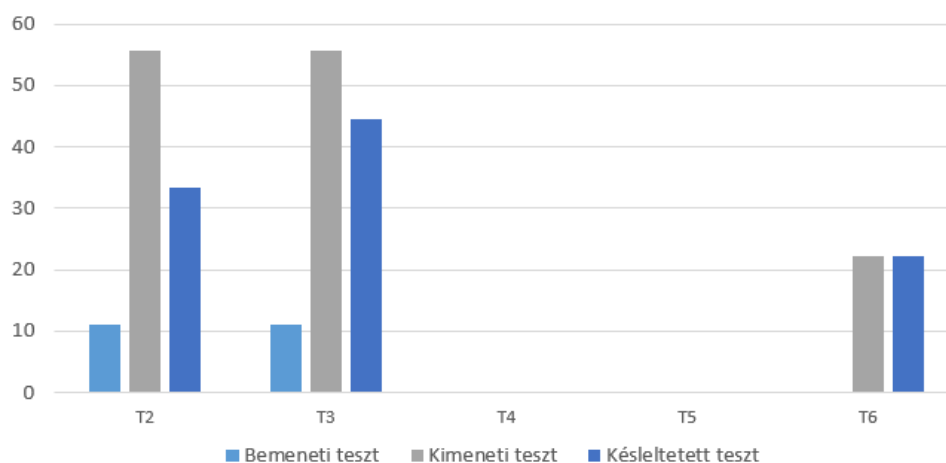
A későbbiekben egy késleltetett mérést is elvégeztünk, melynek eredményeit a 12. ábra szemlélteti. Ezen a mérésen már csak öt hallgató vett részt, így az ő eredményeiket hasonlítottuk össze a korábbi felmérések eredményeivel. A késleltetett mérés lehetőséget ad arra is, hogy megvizsgáljuk, milyen mértékben sikerült a tanult ismereteket hosszú távon is elraktározni, azaz mennyire volt tartós a foglalkozások hatása.



12. ábra. Hallgatók pontszámai bemeneti-, kimeneti- és késleltetett feladatsorok megírásakor

Végül külön is megvizsgáltam a kizárólag megértésen alapuló feladatok (a 4., 7. és 9. feladatok) eredményeit a bemeneti-, kimeneti- és késleltetett tesztek tükrében. Az összehasonlítás célja az volt, hogy képet kapjunk arról, milyen mértékben fejlődtek a hallgatók a mélyebb gondolkodást és az integrál fogalmának értelmezését

igénylő feladatok terén, illetve mennyire sikerült hosszabb távon is rögzíteniük a megszerzett tudást.



13. ábra. A magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatok eredményei bemeneti-, kimeneti- és késleltetett teszteléskor százalékokban

A 13. ábra szerint a késleltetett mérés eredményei visszaesést mutatnak a kimeneti teszthez viszonyítva. Két tanuló teljesen elhagyta a feladatok megoldását, ami motivációs problémákra vagy egyéni akadályokra (pl. időhiány, egyéb elfoglaltság) utalhat. Mindez arra utal, hogy a hosszú távú tudásmegőrzés és a tanulói aktivitás fenntartása még további fejlesztést igényel az oktatási folyamat során.

Következtetés

Diplomamunkám célja az volt, hogy megvizsgáljam a középiskolás 11. osztályos tanulók integrálszámítással való kapcsolatát. Az volt a feltevésünk, hogy a középiskolás diákoknak ez a témakör nehezen elsajátítható, amit a dolgozatban szereplő kutatás eredményei igazolnak.

A kutatási eredmények elemzéséről szóló részben három kérdésre szerettünk volna választ kapni. Az első megállapításunk az volt, hogy az automatikus cselekvést igénylő feladatok és a magasabb gondolkodást igénylő feladatok esetében eltérés van a tanulók eredményei között, ami be is igazolódott. Másik vizsgálat során azt próbáltuk kideríteni, hogy van-e különbség a csoportok feladatok pontszámának mediánjai között mind az automatikus-, mind pedig a megértést igénylő feladatok esetében. Itt azt az eredményt kaptuk mindkét esetben, hogy a csoportok mediánjai között szignifikáns eltérések figyelhetők meg. Végül pedig azt vizsgáltuk, hogy a fiúk és lányok feladtmegoldásai között vannak-e eltérések, ahol azt az eredményt kaptuk, hogy a mechanikusan begyakorolt műveletknél van, míg a megértésen alapuló feladatoknál nincs szignifikáns eltérés a fiúk és lányok feladat megoldásai között.

Megállapíthatjuk, hogy a kísérleti oktatás hozzájárult a mélyebb megértést igénylő feladatok eredményességéhez, viszont a késleltetett mérés alapján megfigyelhető, hogy a tartós tudásmegőrzés és belső motiváció erősítése továbbra is kihívást jelent. Egy újabb kísérleti oktatás tervezésekor több időt kell fektetni az ismételésre és gyakorlati alkalmazásra, hogy a megszerzett tudás jobban beépüljön a hosszú távú memóriába.

Az előzőekben levont következtetések alapján megállapítható, hogy a témakör középiskolai oktatása jelen formájában nem bizonyult kellően hatékonynak. Ennek fényében indokolt lehet a témakör eltávolítása azon oktatási intézmények tantervéből, ahol annak elhagyása várhatóan nem befolyásolja hátrányosan a tanulók eredményességét. Ugyanakkor javasolt a témakör óraszámának növelése azokban az iskolákban, ahol a diákok kompetenciái és tanulási igényei ezt indokoltá teszik.

Irodalomjegyzék

- [1] Attia, Ahmed S, “Bloom’s Taxonomy as a tool to optimize course learning outcomes and assessments in Architecture Programs.”, 2021, URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/b6d7883816ad0108120a457d9bc979c583b5a258>
- [2] Bárczy Barnabás, Integrálszámítás: Példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992, URL: <https://math.bme.hu/pataki/crs/1992>
- [3] Bloom, B. S., Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Longman, 1956
- [4] Bourque, Pierre et al. “Bloom’s taxonomy levels for three software engineer profiles.” Eleventh Annual International Workshop on Software Technology and Engineering Practice (2003): 123-129., URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/60ff240c2d496ee8de3394fc2706bbbeb42f3450f>
- [5] Buckley, Jim and Christopher Extton. “Bloom’s taxonomy: a framework for assessing programmers’ knowledge of software systems.” 11th IEEE International Workshop on Program Comprehension, 2003. (2003): 165-174., URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/5a49c56d930eb1cc6ab6b7fed768b535211959b8>
- [6] Józsa Krisztián, F. Balázs. “A tanulás affektív tényezői”, 2012, URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/35344473.pdf>
- [7] Katolikus Pedagógiai Intézet, Továbbképzés anyaga: Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése tehetséggondozás a matematikában, PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar, 2018, URL: <https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2018/2.Integr>
- [8] OpenAI. (2025). ChatGPT (Mar 14 version) [Large language model]. URL: <https://chatgpt.com/share/681a1e9a-f408-8010-a538-c4dd33be537d>
- [9] Pinte Edina, Alsó- és felső Riemann-integrál, 2025, URL: <https://www.geogebra.org/m/amv6duqc>

- [10] Pinte Edina, XIX. Kárpátaljai Tudományos Diákköri Konferencia (Tanulás- és Tanításmódszertani szekció), Beregszász, 2025
- [11] Pinte Edina, XVI. Taní-tani (Online) Nemzetközi Tudományos Konferencia, Miskolc, 2025
- [12] R. S. Alves, M. C. Mancebo, T. C. S. Boncompagno, W. D. O. Júnior, E. C. Romão, and R. V. Garcia, Problem-Based Learning: A Tool for the Teaching of Definite Integral and the Calculation of Areas, International Journal of Information and Education Technology, Vol. 9, No. 8, August 2019, URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/fc57/49320e20afef223a26beae41e028e05ba147.pdf>
- [13] Radomska, Monika and L. M. Chernyak. "THE ISSUES OF ENVIRONMENTAL ENGINEERS EDUCATION IN TERMS OF BLOOM'S TAXONOMY." (2016)., URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/d86a881274045a5762f02990e7b51cf81689d81d>
- [14] Sobral, Sónia Rolland. "Bloom's Taxonomy to Improve Teaching-Learning in Introduction to Programming." International Journal of Information and Education Technology 11 2021, 148-153., URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/2df92736c307068f15525bb5f37d0cb24e9b10dd>
- [15] Tóth László: Mérés-értékelés. Segédlet a kompetencia alapú pedagógus-képzés módszertani megújulásához. TÁMOP-4.1.2/B PROJEKT, Győr-Moson-Sopron megyei pedagógiai intézet, 2010 (toth)
- [16] Н. К. Дьяченко, Інтегральне числення функції однієї змінної (Навчальний посібник), Дніпро, 2022, URL: <https://dspace.dsau.dp.ua/bitstream/123456789/6581/1/2022>
- [17] Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень стандарту URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna>
- [18] Ю. В. Ситникова, Вища математика: Інтегральне числення (Конспект лекцій), Харків ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018, URL: <https://eprints.kname.edu.ua/50199/1/2018>

Ábrák jegyzéke

1.	Primitív függvény ábrázolása koordinátarendszerben	8
2.	Görbevonalú trapéz területszámításra	10
3.	Függvény alatti terület felosztása	11
4.	A tesztben szereplő feladatok megoldottságának mértéke	18
5.	A kutatásban szereplő csoportok eredményeinek átlaga, minimuma és maximuma	19
6.	Csoportok összehasonlítása az automatikus cselekvést igénylő és megértésen alapuló feladatai alapján	21
7.	A megírt feladatok nemek szerinti megoszlása	22
8.	Határozatlan síkterület felosztása GeoGebra segítségével	27
9.	Riemann felső- és alsó összegek szemléltetése	28
10.	Bemeneti- és kimeneti feladatsor feladatonkénti eredményei százalékokban	29
11.	Hallgatók pontszámai a bemeneti- és kimeneti feladatsor megírása után	30
12.	Hallgatók pontszámai bemeneti-, kimeneti- és késleltetett feladatso- rok megírásakor	30
13.	A magasabb szintű gondolkodást igénylő feladatok eredményei bemeneti-, kimeneti- és késleltetett teszteléskor százalékokban	31

Висновки українською мовою

Метою моєї дипломної роботи було дослідити ставлення учнів 11 класу старшої школи до інтегрального числення. Була висунута гіпотеза, що ця тема є складною для засвоєння старшокласниками, і результати дослідження, викладені в даній роботі, це підтверджують.

У розділі, присвяченому аналізу результатів дослідження, я прагнула відповісти на три ключові запитання. Першим висновком стало те, що існує суттєва різниця між результатами учнів у завданнях, що потребують автоматизованих дій, та завданнях, які вимагають вищого рівня мислення — це припущення підтвердилося. У другому дослідженні я намагалася з'ясувати, чи є відмінності між медіанами результатів груп у завданнях на автоматизацію та на розуміння. В обох випадках було виявлено значущі розбіжності між медіанами. Нарешті, я перевірила, чи існують відмінності між виконанням завдань хлопцями та дівчатами. З'ясувалося, що для завдань механічного характеру така різниця є, тоді як для завдань на розуміння статистично значущих відмінностей між результатами дівчат і хлопців не виявлено.

Отже, можна зробити висновок, що експериментальне навчання сприяло покращенню результатів у завданнях, які потребують глибшого розуміння, однак результати відтермінованого вимірювання свідчать про те, що проблема тривалого збереження знань і підтримки внутрішньої мотивації залишається актуальною. При розробці нових експериментальних програм варто передбачити більше часу для повторення та практичного застосування, щоб краще інтегрувати здобуті знання у довготривалу пам'ять.

Виходячи з наведених вище міркувань, можна стверджувати, що викладання цієї теми у загальноосвітніх школах у його нинішньому вигляді є недостатньо ефективним. У зв'язку з цим доцільним видається вилучення цієї теми з навчальних планів тих закладів, де її виключення не зашкодить загальній навчальній успішності учнів. Водночас рекомендую збільшити кількість навчальних годин у тих школах, де це відповідає рівню компетентностей і навчальних потреб учнів.

Nyilatkozat

Alulírott, Pinte Edina, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Я, Пінте Едіна Іванівна, підтверджую, що користувалась Chat GPT (<https://chat.openai.com/>) для редагування, стилізації тексту та перевірки помилок у власній роботі. Я завантажила свою роботу в повному обсязі і ввела наступні дані у період з 6 січня по 15 травня 2025 року:

1. Покращення академічного стилю та правильності мови, включаючи граматичні структури, пунктуацію та лексику.
2. Переклад іншомовних текстів та стилістичне редагування українських розділів роботи.
3. Генерація ідей та отримання натхнення для подальшого опрацювання змісту.

Отримані таким чином дані були використані для доопрацювання та перероблення тексту з метою отримання кінцевого варіанту роботи.

Пінте Едіна Іванівна

Звіт подібності

метадані

Назва організації

Hungarian College of Higher Education Ferenc Rakoczi II Transcarpathian

Заголовок

Diplomamunka Pinte

Науковий керівник / Експерт

Автор Габрієлла Пап

підрозділ

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II

Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.



25

Довжина фрази для коефіцієнта подібності 2

7157

Кількість слів

50930

Кількість символів

Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати навмисний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

Заміна букв	Б	99
Інтервали	A→	0
Мікропробіли		0
Білі знаки	Б	0
Парафрази (SmartMarks)	a	15

Подібності за списком джерел

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Колір тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

10 найдовших фраз		Колір тексту
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://dl.acm.org/doi/10.1016/j.ipm.2021.102584	26 0.36 %
2	Руденко, Антипова.docx 1/11/2021 Publishing House "Helvetica" (Видавничий дім "Гельветика")	19 0.27 %
3	https://users.math.msu.edu/users/liuqinbo/Chapter5.pdf	19 0.27 %
4	http://jase.tku.edu.tw/articles/jase-202106-24-3-0006	16 0.22 %

5	http://info.fmi.shu-bg.net/skin/tfiles/vm2_019.pdf	15 0.21 %
6	http://www.hope.art.pl/skrypty/analiza/analiza2p.pdf	13 0.18 %
7	https://sala.moeys.gov.kh/kh/library/00002908	12 0.17 %
8	https://sala.moeys.gov.kh/kh/library/00002908	12 0.17 %
9	https://hozir.org/matematika-oqitish-metodikasi-talim-yonalishining-3-v-kurs-tal.html?page=4	11 0.15 %
10	http://www.cram.com/flashcards/properties-of-definite-integrals-fundamental-theorem-of-calculus-839943	10 0.14 %

з домашньої бази даних (0.00 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-----------	--

з програми обміну базами даних (0.56 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	Руденко, Антипова.docx 1/11/2021 Publishing House "Helvetica" (Видавничий дім "Гельветика")	19 (1) 0.27 %
2	Functii integrabile. Aplicatii 6/28/2022 Universitatea Ovidius (Universitatea Ovidius)	13 (2) 0.18 %
3	Разработка программных приложений в терминах таксономии Блума 3/15/2025 National Technical University of Ukraine Igor Sikorskyi Kyiv Politech Institute (National Technical University of Ukraine Igor Sikorskyi Kyiv Politech Institute)	8 (1) 0.11 %

з Інтернету (3.52 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ДЖЕРЕЛО URL	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://sala.moeys.gov.kh/kh/library/00002908	30 (3) 0.42 %
2	http://www.hope.art.pl/skrypty/analiza/analiza2p.pdf	28 (3) 0.39 %
3	https://dl.acm.org/doi/10.1016/j.jpmp.2021.102584	26 (1) 0.36 %
4	http://info.fmi.shu-bg.net/skin/tfiles/vm2_019.pdf	25 (2) 0.35 %
5	https://users.math.msu.edu/users/liuqinbo/Chapter5.pdf	19 (1) 0.27 %
6	https://fayllar.org/1-boshlangich-funksiya-tushunchasi-anigmas-integral-va-uning.html	17 (2) 0.24 %
7	http://jase.tku.edu.tw/articles/jase-202106-24-3-0006	16 (1) 0.22 %
8	https://dl.acm.org/doi/10.1145/1345443.1345438	16 (2) 0.22 %
9	http://bspk.rena.narod.ru/qeyri_xetti_tenlikler_sisteminin_simpson_usulu_ile_helli.docx	15 (3) 0.21 %
10	https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennye-tendentsii-muzykalnogo-obrazovaniya-v-vengrii-metod-kooperativnogo-obucheniya	14 (2) 0.20 %
11	https://hozir.org/matematika-oqitish-metodikasi-talim-yonalishining-3-v-kurs-tal.html?page=4	11 (1) 0.15 %
12	https://slaidy.com/prezentacii-po-matematike/prezentaciya-po-matematike-quotneviznachenij-integralquot-skachat/pdf	10 (1) 0.14 %

13	https://www.yulucn.com/question/240055921	10 (2) 0.14 %
14	http://www.cram.com/flashcards/properties-of-definite-integrals-fundamental-theorem-of-calculus-839943	10 (1) 0.14 %
15	https://fayllar.org/1-mavzu-boshlangich-funksiya-va-aniqmas-integral-asosiy-integr.html?page=6	5 (1) 0.07 %

Список прийнятих фрагментів (немає прийнятих фрагментів)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗМІСТ	КІЛЬКІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-------	---------------------------------------