

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II
Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний № _____

Кваліфікаційна робота
Розвиток західно-європейської математики у 19-20 століттях

Піштак Даніел-Янош Яношович
Студент II-го курсу
Освітня програма «Середня освіта (Математика)»
Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»
Рівень вищої освіти: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри
Протокол № 3 / 2024

Науковий керівник:

Головач Й. І.
(*д.т.н, професор*)

Завідувач кафедрою математики та інформатики :

Кучінка Каталін Йозефівна
(*к. ф.-м. н, доцент*)

Робота захищена на оцінку _____, «___» _____ 202_ року

Протокол № _____ / 202_

**Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

Кафедра математики та інформатики

**Кваліфікаційна робота
Розвиток західно-європейської математики у 19-20 століттях**

Рівень вищої освіти: магістр

Виконавець: студент II-го курсу

Піштак Данієл-Янош Яношович

освітня програма «Середня освіта (Математика)»
спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: Головач Й. І.
(*д.т.н, професор*)

Рецензент: Міца О. В.
(*Зав. Кафедри ІУСТ УжНУ, д.т.н., професор*)

Берегове
2025

Зміст

Вступ	3
1. Розвиток математики XIX століття	4
1.1. Основні риси епохи	4
1.1.1. Розвиток аналізу та алгебри.....	4
1.1.2. Зміцнення формалізму західноєвропейської математики XIX століття	7
1.2. Визначні математики та їхня діяльність.....	8
1.2.1. Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855)	8
1.2.2. Огюстен-Луї Коші (1789-1857)	10
1.2.3. Еваріст Галуа (1811-1832).....	12
1.2.4. Бернхард Ріман (1826-1866).....	14
1.2.5. Вільям Рован Гамільтон (1805-1865).....	16
1.3. Основні математичні результати та теорії.....	18
1.3.1. Формування теорії груп і алгебраїчних структур	18
1.3.2. Неевклідова геометрія в XIX столітті	20
1.3.3. Розвиток комплексного аналізу.....	23
1.3.4. Основи статистики та теорії ймовірностей у XIX столітті	25
2. Розвиток математики XX століття	29
2.1. Основні характеристики епохи	29
2.1.1. Формалізація математики та розвиток аксіоматичних систем	29
2.1.2. Вплив комп'ютерів і цифрової математики.....	30
2.1.3. Швидкий розвиток алгебри	31
2.2. Визначні математики та їхня діяльність.....	32
2.2.1. Девід Гільберт (1862-1943)	32
2.2.2. Еммі Ностер (1882–1935)	33
2.2.3. Курт Гедель (1906–1978).....	34
2.2.4. Нойман Янош (1903–1957).....	36
2.2.5. Алан Тюрінг (1912–1954).....	37
2.3. Основні математичні результати та теорії.....	39

2.3.1.	Аксиоматична система Гільберта та формалізація геометрії.....	40
2.3.2.	Кільця Нетер та абстрактна алгебра	40
2.3.3.	Математичні основи квантової механіки	40
2.3.4.	Початки комп'ютерних алгоритмів та теорії інформації	41
3.	Вебсайт	42
3.1.	Опис вебсайту	42
3.1.1.	Вхід на вебсайт.....	42
3.1.2.	Пункти меню вебсайту.....	45
3.2.	Завантаження даних на вебсайт	46
3.2.1.	Дані про вчених	47
3.2.2.	Завантаження подій, що належать до періоду	54
3.2.3.	Завантаження теорій	55
	Összegzés	59
	Резюме	60

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

Matematika és Informatika Tanszék

A NYUGAT-EURÓPAI MATEMATIKA FEJLŐDÉSE A 19. ÉS 20. SZÁZADBAN

Magiszteri dolgozat

Készítette: Pisták Dániel-János

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Holovács József

(műszaki tudományok doktora, professzor)

Recenzens: Mitsa O. V.

(UNE IVRT tanszék tanszékvezetője, műszaki tudományok doktora, professzor)

Tartalomjegyzék

Bevezetés	8
1. A 19. századi matematika fejlődése	9
1.1. A korszak fő jellemzői	9
1.1.1. Az analízis és algebra fejlődése	9
1.1.2. A XIX. századi nyugat-európai matematika formalizmusának erő- södése	12
1.2. Meghatározó matematikusok és munkásságuk	13
1.2.1. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)	13
1.2.2. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)	15
1.2.3. Évariste Galois (1811-1832)	17
1.2.4. Bernhard Riemann (1826-1866)	19
1.2.5. William Rowan Hamilton (1805-1865)	21
1.3. Főbb matematikai eredmények és elméletek	23
1.3.1. Csoportelmélet és algebrai struktúrák kialakulása	23
1.3.2. Nem euklidészi geometria a XIX. században	25
1.3.3. A komplex analízis fejlődése	28
1.3.4. Statisztikai és valószínűségelméleti alapok a XIX. században . . .	30
2. A 20. századi matematika fejlődése	34
2.1. A korszak fő jellemzői	34
2.1.1. A matematika formalizálása és axiomatikus rendszerek kialakulása	34
2.1.2. A számítógépek és a digitális matematika hatása	35
2.1.3. Az algebra gyors fejlődése	36
2.2. Meghatározó matematikusok és munkásságuk	37
2.2.1. David Hilbert (1862-1943)	37
2.2.2. Emmy Noether (1882–1935)	38
2.2.3. Kurt Gödel (1906–1978)	39
2.2.4. Neumann János (1903–1957)	41
2.2.5. Alan Turing (1912–1954)	42
2.3. Főbb matematikai eredmények és elméletek	44

2.3.1.	Hilbert axiómarendszere és a geometria formalizálása	45
2.3.2.	Noether-gyűrűk és absztrakt algebra	45
2.3.3.	A kvantummechanika matematikai alapjai	45
2.3.4.	A számítógépes algoritmusok és információelmélet kezdetei . . .	46
3.	Weboldal	47
3.1.	Weboldal bemutatása	47
3.1.1.	Bejelentkezés a weboldalra	47
3.1.2.	Weboldal menüpontok	50
3.2.	Adatok feltöltése a weboldalra	51
3.2.1.	Tudósok adatai	52
3.2.2.	A korszakhoz tartozó események feltöltése	59
3.2.3.	Elméletek feltöltése	60
	Összegzés	64
	Резюме	65

Bevezetés

A matematika hosszú ideje kulcsfontosságú szerepet játszik a tudományos kutatásokban, a technológiai fejlődésben és a társadalmi változásokban. A 19. század meghatározó időszak volt, amelyet nagyszabású változások és dinamikus fejlődési folyamatok jellemeztek. A múlt évszázadban a nyugat-európai matematikai felfogás mélyreható változáson esett át, amelynek következménye meghatározóan alakította a tudományos gondolkodás korszerű törekvéseinek kibontakozását. Az elmúlt két évszázad tudományos módszertana és kutatási megközelítései ma is meghatározó szerepet játszanak a fizika, a közgazdaságtan, a mérnöki tudományok és az informatika területén.

Ezen időszak igazi jelentősége abban rejlik, hogy a matematikai fejlődés nemcsak elméleti áttöréseket hozott, hanem több tudományágat is mélyrehatóan és alapvetően megváltoztatott. A matematika nélkülözhetetlen eszköz, amely átszövi a tudományos kutatás és innováció szinte minden területét, legyen szó mérnöki munkáról, gazdasági elemzésekről, informatikai fejlesztésekről vagy fizikai kutatásokról. A matematika korszerű ágainak – például a számelméletnek, differenciálgeometriának, topológiának és modern algebrának – alkalmazásával a kutatók mélyebb és pontosabb elemzéseket tudnak végezni, ami lehetővé teszi a bonyolult tudományos problémák árnyaltabb megértését és megoldását. A matematikai gondolkodásmód átalakította a számítási módszereket, és teljesen új perspektívát nyújtott a valóság felfogásáról.

Diplomamunkám célja a XIX. század A XX. század Nyugat-Európa matematikai fejlődésének kulcsfontosságú állomásait vizsgálja, kiemelve azokat az úttörő felfedezéseket, amelyek meghatározó szerepet játszottak a modern tudományos gondolkodás kialakulásában. Különös figyelmet fordítok, irányzatokra és tudósokra, amelyek és akik kiemelkedő jelentőséggel bírtak ebben a történelmi periódusban. A diplomamunkám további célja, hogy a meghatározott korszak összegyűjtött adatait egy weboldalra különböző csoportosítások alapján egy kis lexikonként feltöltssem.

1. fejezet

A 19. századi matematika fejlődése

1.1. A korszak fő jellemzői

1.1.1. Az analízis és algebra fejlődése

Az analízis fejlődése a XIX. században

A 19. század matematikai vizsgálódásai mélyreható elméleti változásokat és újszerű tudományos megközelítéseket hoztak létre, amelyek alapvetően formálták át a matematika tudományának szerkezetét és módszertanát. A matematikai analízis fejlődésének legjelentősebb mérföldköveit és elméleti fordulatait ismertetjük a következőkben.

A XIX. század eleje: Az analízis megerősítése és a határértékek fogalmának kialakítása

A XIX. század során bekövetkező szociális és kulturális változások gyökeresen átalakították Európa civilizációjának karakterét, miközben a technikai innovációk és tudományos feltárások gyökeresen megváltoztatták az emberek életmódját. A múlt század első harmadában a matematikai analízis még alakulóban volt: bár a differenciál- és integrálszámítás módszertana már kellően kidolgozott volt, addig a kapcsolódó matematikai fogalmak és definíciók tudományos háttérének teljes körű megalapozása még váratott magára. A matematika területén a sorozatok és végtelen sorok elemzése régóta ismert volt, ám a konvergencia és a határérték tudományos szempontból pontos meghatározása még váratott magára. Akkoriban a matematikai kutatások fő iránya a gyakorlati alkalmazások felé fordult az integrál- és differenciálszámítás terén, miközben egyidejűleg az elméleti fejlődés is számottevő volt.

1820-1830: A határértékek és a sorozatok elméleti alapjai

A 19. század folyamán a művészeti és kulturális szféra mélyreható változásokon esett át, amelyeket különböző stílusirányzatok, mint a romantika és a realizmus alakítottak és formáltak. A korszak bővelkedett művészeti és szellemi áttörésekben, amelyek

mélyrehatóan alakították át a kor szellemi horizontját és kifejezésmódjait. A múlt század első évtizedeiben a tudósok aprólékos munkával alakították ki és vezették be a határérték fogalmát, ami döntő jelentőségűnek mutatkozott a matematikai analízis tudományának előrelendítésében. A matematika történetében az egyik úttörő fogalommeghatározást **Augustin-Louis Cauchy** végezte el, aki rendkívül pontos és alapos munkájával tudományos szempontból megalapozta és megreformálta a fogalom addigi értelmezését. Cauchy matematikai munkássága rendkívül jelentős volt az analízis tudományában, mivel ő dolgozta ki a konvergencia modern értelmezését, amelyet mind sorozatokra, mind függvényekre alkalmazni lehetett [35].

A XIX. század közepe: A modern analízis alapjainak kialakítása

A 19. század közepén az analízis alaposabb kidolgozása révén a matematikai tudományok egzaktasága és megalapozottsága egyre precízebbé vált. Az analízis innovatív területei, úgymint a funkcionális analízis és a topológia, fokozatosan nagyobb figyelmet kaptak és egyre szélesebb körben terjedtek el. Matematikai körökben egyre inkább elfogadottá válik az a nézet, miszerint a több dimenzióval rendelkező és összetett rendszerek alapos vizsgálata elengedhetetlen a tudományterület jövőbeni előrehaladásához.

Ebben az időszakban jelentős munkák születtek a lineáris operátorok, Hilbert-tér, és a differenciálható függvények elméletében, amelyek mind hozzájárultak a modern analízis megerősítéséhez.

A XIX. század vége: Az analízis és az algebra integrálása

A 19. század végén az analízis és az algebra egyre mélyebb kölcsönhatásba lépett, módszereik és szemléletmódjuk kölcsönösen formálva és kiegészítve egymást, ezáltal mindkét tudományterület jelentős fejlődésen ment keresztül. A tudományos vizsgálatok során innovatív módszerek kerültek kidolgozásra az analitikus és differenciálegyenletek megoldásának területén. A matematika dinamikus alakuló ágai, például a komplex analízis, szervesen kapcsolódnak az algebrai megközelítésekhez és geometriai kihívásokhoz. Ebben az időszakban a klasszikus vizsgálati eljárások összekapcsolódtak a matematika korszerű szemléletmódjával, így lefektették a huszadik század elemzésének elméleti alapjait.

Az algebra fejlődése a XIX. században

A XIX. században az algebra jelentős változásokon ment keresztül, amelyek alapvetően formálták a modern algebrai gondolkodásmódot. A korszak folyamán az algebra nemcsak új elméletekkel és módszerekkel gazdagodott, hanem a matematikai problémák megoldásának új megközelítései is megszülettek. Az alábbiakban az algebra fejlődésének fontosabb mérföldköveit és elméleti változásait tekintjük át.

A XIX. század eleje: Az algebrai egyenletek és csoportelmélet kezdetei

A XIX. század elején az algebra alapvetően az algebrai egyenletek megoldásával foglalkozott. A legfontosabb feladat a másodfokú, harmadfokú és negyedfokú egyenletek megoldási módszereinek pontos kidolgozása volt. A másodfokú egyenletek megoldása már korábban, a 17. század végén és a 18. század elején is ismert volt, de a harmadfokú és negyedfokú egyenletek megoldása ekkoriban még nem volt teljesen világos.

A XIX. század elején **Niels Henrik Abel** és **Évariste Galois** kutatásai jelentős áttörést hoztak ezen a téren. Abel 1824-ben bebizonyította, hogy az ötödfokú és ennél magasabb fokú algebrai egyenletek általános megoldása nem létezik. Galois pedig az algebrai egyenletek megoldhatóságát és az algebrai struktúrákat egy új szemszögből közelítette meg, a csoportelmélet révén. Galois munkássága megalapozta az algebrai egyenletek megoldhatóságával kapcsolatos modern elméleteket.

1820-1850: A csoportelmélet és a modern algebra születése

A XIX. század közepén az algebra más területeken is új irányvonalakra talált. A csoportelmélet, amely az algebrai struktúrák szimmetriáját vizsgálja, kiemelkedő szerepet kapott. **Évariste Galois** munkássága nemcsak az algebrai egyenletek megoldhatóságának megértését alapozta meg, hanem hozzájárult a csoportelmélet és az algebrai struktúrák alapvető elveinek kifejlesztéséhez is. A Galois-elmélet az algebrai egyenletek gyökeinek szerkezetét és a gyökök közötti kapcsolatok alakulását írja le a csoportelmélet nyelvén.

Ebben az időszakban jelentős fejlődés következett be a lineáris algebra és a mátrixok elméletében is, amely alapvető eszközzé vált az algebrai problémák megoldásában.

A XIX. század vége: Az algebrai struktúrák és a modern algebra kialakulása

A század végére az algebrai kutatások még szélesebb spektrumot öleltek fel. A **szimbolikus algebra**, amely a matematikai műveletek absztrakt jelölésére épít, elterjedt a matematikai közösségben. Az algebrai struktúrák, mint a gyűrűk, testek és modulok fogalma, egyre inkább központi szerepet kaptak az algebrai kutatásokban.

Ebben az időszakban a matematika más területei is szorosabb kapcsolatba kerültek az algebraival. Az algebrai struktúrák és azok alkalmazása a geometria, a számelmélet és a topológia különböző területein is megjelentek, elősegítve a modern matematika kialakulását.

A modern algebra kialakulása szoros kapcsolatban állt a 20. századi matematikai gondolkodásmód előrehaladásával. Az algebrai struktúrák elméleti és gyakorlati alkalmazásai hozzájárultak a matematikai tudományok fejlődéséhez és a későbbi matematika alapvető irányvonalainak meghatározásához [4].

1.1.2. A XIX. századi nyugat-európai matematika formalizmusának erősödése

A 19. század folyamán a nyugat-európai matematikai gondolkodásban jelentős átalakulás ment végbe, amelynek fő jellemzője a formalizmus fokozatos térnyerése és tudatos kimunkálása volt. A formalizmus célja a matematikai eszközök és gondolatok egyre pontosabb, szigorúbban meghatározott rendszerbe foglalása, amelynek elsődleges törekvése a matematikai gondolkodás logikai alapjainak megerősítése és belső koherenciájának garantálása.

Analízis formalizálása

A 20. század kezdetén a matematikusok a határérték, folytonosság és deriválhatóság fogalmait többnyire ösztönös módon közelítették meg, rendszerint fizikai jelenségek-ből és szemléletes példákból kiindulva. A német matematikusok, köztük Karl Weierstrass és Bernhard Riemann munkájának köszönhetően kifejtésre került az *epsilon-delta* definíciós módszer, amely lehetővé tette az analízis alapvető fogalmainak pontos matematikai megalapozását. Ez képezte a matematikai gondolkodás megalapozásának kezdeti szakaszát a tudományos precizitás irányába.

Halmazelmélet és a végtelen formalizálása

Cantor forradalmasította a matematikát azzal, hogy kidolgozta az végtelen halmazok átfogó elméletét, és ezzel átalakította a tudományág egy addig rendkívül bonyolult területét. Introdukálta a számosság elméleti keretét, és részletesen elhatárolta egymástól a végtelen típusok sajátosságait. Ez a megközelítés döntő jelentőségűvé vált a matematikai logika és az axiomatikus gondolkodás későbbi kibontakozásában.

Algebrai struktúrák kialakulása

A XIX. század közepén és végén fokozatosan eltolódott a figyelem az egyenletek megoldásáról az algebrai műveletek mögötti szerkezetekre. Az absztrakt algebrai fogalmak, mint a csoport, gyűrű és test, mind ebben a korszakban jelentek meg. Ez a változás előkészítette az algebra teljes formalizálását, amely a következő században csúcsosodott ki.

A logikai alapok erősítése

A XIX. század végére világossá vált, hogy a matematika csak akkor lehet teljesen megbízható tudomány, ha a logikai alapjai is szilárdak. Ekkor kezdtek el matematikusok – például Frege és Peano – axiomatikus rendszereket alkotni, amelyekből formálisan levezethetők voltak a matematikai tételek. Ez a törekvés vezette el a tudományt a XX. századi formalista iskolák, például David Hilbert programjához.

1.2. Meghatározó matematikusok és munkásságuk

1.2.1. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Élete



1.1. ábra. Carl Friedrich Gauss arcképe

Carl Friedrich Gauss 1777. április 30-án született a németországi Braunschweig városában, szerény körülmények között. Édesapja kertészként dolgozott, édesanyja írástudatlan volt. Gauss kivételes tehetsége már gyermekkorában megmutatkozott: háromévesen kijavította apja számítási hibáit, ötévesen pedig már átvette a családi költségvetés vezetését [5].

Hét éves korában kezdte meg tanulmányait a helyi iskolában, ahol hamar kitűnt matematikai képességeivel. Egy híres anekdota szerint, amikor tanára azt a feladatot adta, hogy a diákok adják össze az 1-től 100-ig terjedő számokat, a kis Gauss azonnal felismerte a sorozat szimmetriáját, és gyorsan kiszámolta az összeget (5050) [37].

Tehetségére felfigyelt Braunschweig hercege, aki ösztöndíjat biztosított számára. Ennek köszönhetően Gauss 1795-ben megkezdte tanulmányait a göttingeni egyetemen, ahol három év alatt jelentős matematikai felfedezéseket tett. 1799-ben doktorált az algebrára alaptételének első rigorózus bizonyításával [11].

Munkássága

Gauss munkássága rendkívül sokrétű volt, és számos tudományterületre kiterjedt:

- **Számelmélet:** 1801-ben jelent meg fő műve, a *Disquisitiones Arithmeticae*, amely megalapozta a modern számelméletet. Ebben a műben többek között bemutatta a kvadratikus reciprocitás tételét, amely a számelmélet egyik alapköve [11].
- **Geometria:** 1796-ban Gauss bebizonyította, hogy egy szabályos 17-szög szerkeszthető csak körző és vonalzó segítségével. Ez volt az első ilyen felfedezés az ókori görögök óta, és jelentős áttörést jelentett a geometria területén [37].
- **Csillagászat:** Gauss 1801-ben sikeresen kiszámította a Ceres kisbolygó pályáját, amelyet korábban elveszettnek hittek. Számításai alapján a csillagászok újra megtalálták az égitestet, ami nagy elismerést hozott számára [5].
- **Geodézia és fizika:** Gauss jelentős munkát végzett a geodézia területén, és kidolgozta a normál eloszlás (Gauss-görbe) elméletét, amely alapvető fontosságú a statisztikában és a hibaszámításban. Emellett hozzájárult az elektromágnesesség elméletéhez is [11].
- **Nem-euklideszi geometria:** Gauss már korán felismerte a nem-euklideszi geometria lehetőségét, azonban nem publikálta eredményeit, attól tartva, hogy azok nem lesznek elfogadottak a tudományos közösségben. Később Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij függetlenül dolgozták ki ezt az elméletet [5].

Gauss 1807-től haláláig a göttingeni egyetem professzora és a csillagvizsgáló igazgatója volt. Munkássága során több mint 150 tudományos dolgozatot írt, amelyek közül sokat csak halála után publikáltak. 1855. február 23-án hunyt el Göttingenben.

1.2.2. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Élete



1.2. ábra. Augustin-Louis Cauchy arcképe

Augustin-Louis Cauchy 1789. augusztus 21-én született Párizsban, egy jómódú és művelt család első gyermekeként. Édesapja, Louis-François Cauchy, jogász és királyi hivatalnok volt, aki nagy figyelmet fordított gyermekei oktatására. A francia forradalom idején a család menekülni kényszerült, és Arcueilbe költözött, ahol Cauchy fiatalon megismerkedett Lagrange és Laplace munkásságával, akiknek hatása egész életében érezhető volt [42].

1805-ben Cauchy felvételt nyert az École Polytechnique-re, ahol kiváló eredményeket ért el. Tanulmányait az École des Ponts et Chaussées mérnöki iskolában folytatta, majd 1810-ben mérnökként kezdett dolgozni a Cherbourg-i kikötő építésén. Azonban szenvedélye a matematika iránt arra ösztönözte, hogy 1813-ban visszatérjen Párizsba, és teljes mértékben a tudománynak szentelje életét [42].

1815-ben tanári állást kapott az École Polytechnique-en, ahol hamarosan professzorrá nevezték ki. 1818-ban feleségül vette Aloïse de Bure-t, akivel két leánygyermeket neveltek. Cauchy mélyen vallásos katolikus volt, és konzervatív nézetei miatt több alkalommal is konfliktusba került a korabeli tudományos közösséggel. Ennek ellenére rendkívül termékeny szerző volt: élete során mintegy 800 tudományos cikket és több tankönyvet írt [40].

Munkássága

Cauchy a matematikai analízis egyik megújítója volt, aki számos alapvető fogalmat és tételt vezetett be vagy formalizált:

- **Analízis:** 1821-ben megjelent *Cours d'analyse* című művében Cauchy elsőként adott rigorózus definíciót a határértékre és a folytonosságra, bevezetve a ma is használt ε - δ jelölést. Ezzel megalapozta a modern analízis szigorú módszertanát [46].
- **Cauchy-sorozat:** A konvergencia fogalmának pontosítására bevezette a róla elnevezett Cauchy-sorozat fogalmát, amely alapvető szerepet játszik a teljes metrikus terek elméletében [27].
- **Komplex analízis:** Cauchy úttörő munkát végzett a komplex függvénytan területén. Nevéhez fűződik a Cauchy-integráltétel és a Cauchy-féle integrálformula, amelyek a komplex analízis alapkövei. Bevezette a reziduum fogalmát is, amely kulcsfontosságú a komplex integrálok számításában [46].
- **Taylor-tétel:** Elsőként adott rigorózus bizonyítást a Taylor-tételre, meghatározva a maradéktag pontos alakját, ami jelentős előrelépést jelentett a függvények közelítése terén [46].
- **Mechanika és rugalmasságtan:** Cauchy jelentős hozzájárulást tett a mechanika és a rugalmasságtan területén is. Bevezette a Cauchy-féle feszültségi tenzort, amely a szilárdtestek belső feszültségállapotának leírására szolgál, és alapvető fontosságú a kontinuummechanikában [46].
- **Csoportelmélet:** A permutációs csoportok elméletének egyik megalapozója volt. Nevéhez fűződik a Cauchy-tétel, amely kimondja, hogy ha egy prímszám osztja egy véges csoport rendjét, akkor a csoportnak van olyan eleme, amelynek rendje ez a prímszám [46].

Cauchy munkássága rendkívül szerteágazó volt, és hatása a matematika számos területén érezhető. Nevéhez több mint tizenhat fogalom és tétel fűződik, többek között a Cauchy-sorozat, Cauchy-féle egyenlőtlenség, Cauchy-tétel és Cauchy-féle reziduumtétel. Munkái jelentős hatást gyakoroltak a matematika fejlődésére, és alapot szolgáltatottak számos későbbi eredményhez [40].

1.2.3. Évariste Galois (1811-1832)

Élete



1.3. ábra. Évariste Galois arcképe

Évariste Galois 1811. október 25-én született a Párizs melletti Bourg-la-Reine városában. Édesapja, Nicolas-Gabriel Galois, a település polgármestere volt, míg édesanyja, Adélaïde-Marie Demante, jogászi családból származott, és ő tanította fiát az első tizenkét évében [42].

1823-ban Galois beiratkozott a neves Lycée Louis-le-Grand iskolába, ahol hamar kitűnt matematikai tehetségével. 14 éves korában már Adrien-Marie Legendre *Éléments de Géométrie* című művét olvasta, és rövid időn belül elsajátította Joseph-Louis Lagrange eredeti munkáit is [46].

1828-ban megpróbált felvételt nyerni az École Polytechnique-re, Franciaország legelismertebb műszaki intézményébe, de sikertelenül. Ugyanebben az évben felvételt nyert az École Normale-ba (akkoriban École préparatoire), ahol folytatta matematikai tanulmányait [46].

Galois politikai nézetei is korán megnyilvánultak. Apja republikánus nézetei hatására ő maga is aktívan részt vett a politikai mozgalmakban. 1830-ban, a júliusi forradalom idején, Galois nyíltan bírálta az École Normale igazgatóját, amiért az megakadályozta a

diákokat abban, hogy részt vegyenek a forradalmi eseményekben. Ezért az esetért Galois-t elbocsátották az intézményből [46].

1831-ben Galois többször is letartóztatásba került politikai tevékenysége miatt. Egy alkalommal, egy banketten tett kijelentése miatt, amelyet a király elleni fenyegetésként értelmeztek, bíróság elé állították, de végül felmentették. Később, július 14-én, a Bastille napján tartott tüntetésen való részvétele miatt ismét letartóztatták, és hat hónap börtönbüntetésre ítélték [46].

1832. május 30-án Galois párbajba keveredett, amelynek körülményei máig tisztázatlanok. A párbaj során gyomorlövést kapott, és másnap, május 31-én, mindössze 20 éves korában elhunyt [46].

Munkássága

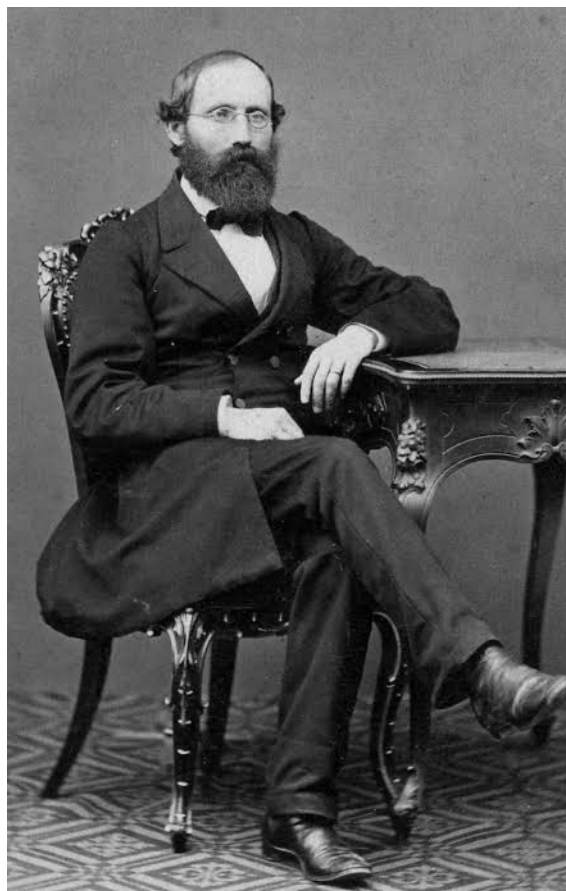
Évariste Galois munkássága alapvetően megváltoztatta az algebra és a matematika más területeinek fejlődését. Legjelentősebb hozzájárulása a róla elnevezett Galois-elmélet, amely az algebrai egyenletek megoldhatóságának feltételeit vizsgálja.

- **Galois-elmélet:** Galois kidolgozta azokat a feltételeket, amelyek alapján megállapítható, hogy egy algebrai egyenlet megoldható-e radikálisan, azaz gyökökkel kifejezhetően. Munkája során bevezette a csoportelmélet alapfogalmait, és megmutatta, hogy az egyenletek megoldhatósága szorosan összefügg a hozzájuk tartozó permutációs csoportok szerkezetével [46].
- **Csoportelmélet:** Galois elsőként használta a "csoport" kifejezést matematikai értelemben, és munkája megalapozta a modern csoportelméletet. Ezzel lehetővé tette az algebrai struktúrák mélyebb megértését és az egyenletek megoldhatóságának általános vizsgálatát [46].
- **Egyéb hozzájárulások:** Galois munkássága kiterjedt a számelmélet és a komplex számok elméletére is. Bár életében csak néhány cikke jelent meg, halála után jegyzeteit Joseph Liouville fedezte fel és publikálta, ami révén Galois munkássága széles körben ismertté vált [46].

Galois munkássága csak halála után kapta meg a megérdemelt elismerést. Ma a Galois-elmélet és a csoportelmélet alapvető részei a modern matematikának, és számos területen alkalmazzák őket, beleértve a kódoláselméletet, a kriptográfiát és a kvantummechanikát is.

1.2.4. Bernhard Riemann (1826-1866)

Élete



1.4. ábra. Bernhard Riemann arcképe

Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826. szeptember 17-én született a németországi Breselenzben, egy evangélikus lelkész, Friedrich Bernhard Riemann és felesége, Charlotte Ebell második gyermekeként. Édesapja tanította őt egészen tízéves koráig, majd egy helyi tanító, Schulz vette át az oktatását. Riemann rendkívüli matematikai tehetséget mutatott már fiatalon, és 14 éves korában már olyan műveket olvasott, mint Legendre és Gauss munkái [42].

1840-ben Riemann Hannoverbe költözött, hogy a Lyceumban tanuljon, majd 1842-ben a lüneburgi Johanneumba került. 1846-ban beiratkozott a göttingeni egyetemre, ahol először teológiát és filológiát tanult, hogy édesapja kívánságának eleget tegyen. Azonban hamarosan áttért a matematikára, és 1847-ben a berlini egyetemen folytatta tanulmányait, ahol olyan neves professzorok tanították, mint Jacobi, Dirichlet és Steiner. 1849-ben visszatért Göttingenbe, ahol 1851-ben megvédte doktori disszertációját, amely a komplex függvények elméletéről szólt [12].

1854-ben habilitációs előadását tartotta "Über die Hypothesen, welche der Geo-

metrie zu Grunde liegen" címmel, amelyben bemutatta a nem-euklideszi geometria alapjait és bevezette a sokdimenziós terek fogalmát. Ez az előadás később alapjául szolgált az általános relativitáselmélet matematikai keretének [12].

Riemann 1862-ben feleségül vette Elise Kochot, akitől egy lánya született. Egész életében egészségügyi problémákkal küzdött, és 1866. július 20-án hunyt el a szanatóriumi kezelés alatt álló Selascában, Olaszországban, tuberkulózis következtében [42].

Munkássága

Bernhard Riemann munkássága alapvetően megváltoztatta a matematika több területét, különösen az analízis, a geometria és a számelmélet terén.

- **Riemann-integrál:** Riemann kidolgozta az integrálás rigorózus elméletét, amely ma Riemann-integrál néven ismert. Ez az elmélet alapvető fontosságú a valós analízisben és a matematikai analízis más területein [12].
- **Riemann-féle zéta-függvény és Riemann-sejtés:** 1859-ben Riemann publikálta híres cikkét a prímszámok eloszlásáról, amelyben bevezette a zéta-függvényt és megfogalmazta a Riemann-sejtést. Ez a sejtés a zéta-függvény nem triviális zérushelyeinek elhelyezkedésére vonatkozik, és a matematika egyik legfontosabb megoldatlan problémája [12].
- **Riemann-geometria:** Riemann bevezette a görbült terek fogalmát és kidolgozta a differenciálgeometria alapjait. Munkája alapvető fontosságú volt az általános relativitáselmélet matematikai megalapozásában [12].
- **Komplex analízis:** Riemann jelentős hozzájárulást tett a komplex függvények elméletéhez, bevezetve a Riemann-felületek fogalmát, amelyek lehetővé teszik a többértékű függvények vizsgálatát és megértését [12].

Riemann munkássága mély hatást gyakorolt a matematika fejlődésére, és számos területen alkalmazzák eredményeit a mai napig.

1.2.5. William Rowan Hamilton (1805-1865)

Élete



1.5. ábra. William Rowan Hamilton arcképe

William Rowan Hamilton 1805. augusztus 4-én született Dublinban, Írországbán. Már gyermekkorában kivételes képességeket mutatott, különösen a nyelvészet és a matematika területén. Tizenhárom éves korára több mint tíz nyelvet beszélt, köztük a hébert, arabot, perzsát és szanszkritot is [43]. Matematikai érdeklődése és tehetsége már korán megmutatkozott, tanárai is különleges tehetségként tartották számon.

Tanulmányait a dublini Trinity College-ben folytatta, ahol már fiatalként elnyerte a matematikai katedrát, és mindössze 22 évesen a Királyi Csillagvizsgáló igazgatójává nevezték ki [43]. Bár főként elméleti matematikusként és fizikai gondolkodóként tartjuk számon, tudományos érdeklődése rendkívül sokrétű volt. Egész életét szülővárosához közel élte le, ahol 1865-ben hunyt el.

Munkássága

William Rowan Hamilton munkássága jelentős hatást gyakorolt a matematika és a fizika több ágára is, különösen az algebra, a mechanika és az optika területén.

- **Kvaterniók (quaternion):** Hamilton 1843-ban vezette be a kvaterniók fogalmát, amely a komplex számok háromdimenziós általánosítása. Ez volt az első igazán sikeres példája a nem kommutatív algebrának. A kvaterniókat különösen a 3D számí-

tógépes grafikában, robotikában és navigációs rendszerekben használják a forgások leírására [45].

- **Hamilton-féle mechanika:** A klasszikus mechanika új megközelítését dolgozta ki, amely a Lagrange-formalizmustól eltérően a fázistérben írja le a dinamika törvényeit. A Hamilton-egyenletek segítségével mélyebb megértést nyerhetünk a konzervatív rendszerek viselkedéséről, és ez az elmélet a kvantummechanika alapjául is szolgál [20].
- **Kanonikus transzformációk:** A Hamilton-féle formalizmusban bevezette a kanonikus transzformációk fogalmát, amelyek lehetővé teszik a mechanikai rendszerek egyszerűbb formában való vizsgálatát anélkül, hogy megváltozna azok fizikai tartalma. Ez a koncepció kulcsfontosságú a modern elméleti fizika, különösen a szimplektikus geometria területén [20].
- **Optikai karakterisztikus függvények:** Hamilton az optikában is úttörő volt: kidolgozta a karakterisztikus függvények elméletét, amely révén az optikai rendszerek leképezését matematikailag lehetett modellezni. Eredményei a geometriai optika és a hullámoptika közötti átmenet megértését is elősegítették [43].
- **Tér-idő intuíció előkészítése:** Bár Hamilton nem dolgozott közvetlenül a relativitáselméleten, a kvaterniók és a mechanikai szemlélete közvetve hozzájárult a későbbi tér-idő elméletek (pl. Minkowski-tér) kialakulásához. Matematikai formái a modern fizika számára alapvető struktúrákat készítettek elő.

Hamilton munkássága nemcsak a XIX. századi matematikára és fizikára gyakorolt mély hatást, hanem máig élő örökséget hagyott hátra a modern tudományos gondolkodásban.

1.3. Főbb matematikai eredmények és elméletek

1.3.1. Csoportelmélet és algebrai struktúrák kialakulása

Bevezetés

A XIX. század egyik legmeghatározóbb matematikai újítása a csoportelmélet megszületése volt. Ez a terület később nemcsak az algebrában, hanem a geometriában, az analízisben, sőt a modern fizikában is kulcsszerepet kapott. Az algebrai struktúrák absztrakt értelmezése lehetővé tette a matematikai objektumok közös elveken alapuló tanulmányozását.

Galois munkássága és a csoportelmélet megszületése

Évariste Galois (1811–1832) fiatal kora ellenére forradalmasította az egyenletelméletet és megteremtette a modern csoportelmélet alapjait. Az ő nevéhez fűződik a Galois-elmélet, amely szoros kapcsolatot állít fel az algebrai egyenletek megoldhatósága és az ezekhez tartozó permutációs csoportok szerkezete között [26].

- *Alapötlete:* Galois felismerte, hogy egy algebrai egyenlet gyökei közötti szimmetriák tanulmányozásával következtetni lehet arra, hogy az egyenlet megoldható-e gyökvonások segítségével.
- *Galois-csoport:* Minden egyenlethez hozzárendelhető egy csoport, amely a gyökök közötti permutációkat írja le. Ha ez a csoport úgynevezett „felbontható”, akkor az egyenlet gyökei kiszámíthatók gyökvonásokkal.
- *Legnagyobb eredménye:* Bebizonyította, hogy az ötödfokú (és magasabb fokszámú) egyenletek általánosságban nem oldhatók meg gyökvonásokkal – ellentétben az első- és negyedfokúakkal. Ezzel végérvényesen lezárta egy évszázadokon át húzódó matematikai kérdéskört [34].

Galois újfajta gondolkodása az algebrai struktúrák mögötti szimmetriák kiemelését tette lehetővé. Ez a megközelítés azóta is meghatározó a matematikai kutatásokban.

Arthur Cayley szerepe

Bár Galois volt az, aki elsőként fogalmazta meg a csoport fogalmát matematikai összefüggésben, Arthur Cayley (1821–1895) nevéhez fűződik a csoportelmélet absztraktabb megközelítése. Ő vezette be a Cayley-tételt, amely szerint minden csoport izomorf valamilyen permutációcsoport részcsoportjával [19]. Ezzel hozzájárult a csoportelmélet általánosításához és elterjedéséhez a matematikában.

Galois-tétel

Tétel: Legyen $f(x)$ egy nem konstans, irreducibilis polinom a $\mathbb{Q}$ felett. Ekkor a $f(x)$ megoldható gyökvonással pontosan akkor, ha a hozzá tartozó Galois-csoport felbontható.

Vázlatos bizonyítás:

- Tegyük fel, hogy $f(x)$ gyökei kifejezhetők gyökvonással, azaz létezik egy sor testbővítés:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

ahol $K_{i+1} = K_i(\sqrt[i]{a_i})$.

- Ekkor minden lépésben a bővítés fokszáma prímer (vagy annak hatványa), így az egyes Galois-csoportok normálrészei is lépcsőzetesen illeszkednek.
- A teljes Galois-csoport tehát rendelkezik egy olyan normálsorozattal, amelyben az egyes hányadcsoporthok abéli csoportok – vagyis a Galois-csoport felbontható.
- Fordítva: ha a Galois-csoport felbontható, léteznek megfelelő testbővítések, amelyek lépésről lépésre megadhatók gyökvonással.

Következmény: Nem minden magasabb fokú polinom oldható meg radikálisan. Az ötödfokú általános egyenlet például nem, mert a hozzá tartozó Galois-csoport (S_5) nem felbontható.

Cayley-tétel

Tétel: Minden véges csoport izomorf egy permutációs csoport részcsoporthjával.

Bizonyítás:

- Legyen G egy véges csoport, $|G| = n$.
- Definiáljunk minden $g \in G$ elemhez egy leképezést:

$$\lambda_g : G \rightarrow G, \quad \lambda_g(x) = gx$$

Ez λ_g bal oldali szorzásként működik.

- Mivel a csoportban minden elemhez létezik inverz, λ_g bijekció, azaz permutáció.
- Az összes ilyen λ_g permutációt tartalmazó halmaz:

$$\Lambda = \{\lambda_g \mid g \in G\} \subseteq S_G$$

ahol S_G a G halmazon működő összes permutáció csoportja.

- A λ leképezés:

$$\lambda : G \rightarrow S_G, \quad g \mapsto \lambda_g$$

egy csoporthomomorfizmus, és injektív.

- Következésképpen G izomorf $\lambda(G)$ -val, ami egy részcsoportha a S_G -ben.

Következmény: Minden absztrakt csoport leírható mint permutációk csoportja.

1.3.2. Nem euklidészi geometria a XIX. században

Bevezetés

A XIX. században a geometria területén alapvető szemléletváltás következett be. Több mint két évezreden át az euklidészi geometria uralta a matematikai gondolkodást, melynek ötödik posztulátuma (a párhuzamossági axióma) hosszú időn keresztül problémásnak bizonyult. A század elején több matematikus is felismerte, hogy ennek az axiómának a tagadása nem vezet ellentmondáshoz – ez vezetett a nem euklidészi geometriák kialakulásához.

János Bolyai és Nyikolaj Lobacsevszkij munkássága

A nem euklidészi geometria két fő megalapozója: János Bolyai és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij. Mindketten egymástól függetlenül dolgozták ki a *hiperbolikus geometriát*, amelyben egy adott egyenesen kívüli pontból végtelen sok párhuzamos egyenes húzható az adott egyeneshez.

- *Bolyai Appendix*: Bolyai János 1832-ben jelentette meg híres munkáját, az *Appendix*-et apja, Bolyai Farkas könyvének függelékéként. Ebben új, önálló geometriai rendszert mutatott be, amely nem tartalmazta az euklidészi ötödik posztulátumot.
- *Lobacsevszkij eredményei*: Lobacsevszkij már 1829-ben publikálta saját eredményeit Oroszországban, szintén a párhuzamossági axióma tagadásán alapuló rendszert alkotva.
- *Gauss szerepe*: Bár Gauss sosem publikálta nem euklidészi eredményeit, személyes levelezései alapján tudjuk, hogy tisztában volt a hiperbolikus geometria lehetőségével.

A geometria új szemlélete

A hiperbolikus geometria mellett egy másik alternatíva is megjelent: az elliptikus geometria, amelyben egyáltalán nem léteznek párhuzamos egyenesek. Ennek kidolgozása leginkább Bernhard Riemann nevéhez fűződik, aki 1854-es híres előadásában bevezette a görbült tér fogalmát, és megalapozta a modern differenciálgeometriát.

- *Riemann-geometria*: Riemann ötlete szerint a tér görbülete lehet pozitív, negatív vagy nulla – ez az elképzelés képezte az általános relativitáselmélet matematikai alapját is később.
- *Klein-féle egységesítés*: Felix Klein később egységes nézőpontból kezelte az összes geometriát az ún. *Erlangen program* keretében, ahol a geometriákat a transzformációcsoportjaik alapján kategorizálta.

Jelentősége a matematika fejlődésében

A nem euklidészi geometriák nem csupán új matematikai rendszerek kialakulását jelentették, hanem a matematika alapjainak újragondolását is elindították. A geometria már nem egyetlen „valóságos” tér leírása lett, hanem formális axiómákból felépíthető absztrakt rendszer. Ez a gondolkodásmód elvezetett a modern matematika axiomatikus megközelítéséhez.

- *Axiómák szerepe*: A különféle geometriai rendszerek lehetősége rávilágított arra, hogy a matematika nem szükségszerűen írja le a fizikai világot, hanem logikai következetességen alapul.
- *Fizikai alkalmazás*: Einstein általános relativitáselmélete már nem az euklidészi, hanem a Riemann-féle görbült tér fogalmára épült – ezzel a nem euklidészi geometria elnyerte fizikai jelentőségét is.

Gauss tétel

Gauss tételét a következőképpen vezethetjük le. Tekintsünk egy M kétdimenziós, zárt felületet (pl. gömbfelületet). A felület minden pontjához hozzárendelhetjük annak görbületét, amely a következő formulával adható meg:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

ahol R_1 és R_2 a felület két fő görbülete.

Gauss tételének központi eleme a következő integrál:

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

ahol dA a felületen elhelyezkedő területelem, és $\chi(M)$ az Euler-karakterisztika, amely a felület topológiai jellemzőjét adja meg. Az Euler-karakterisztika a következő kifejezéssel számolható ki:

$$\chi(M) = V - E + F$$

ahol V a csúcsok, E az élek, és F az arcok száma a térbeli hálózatban. A Gauss-tétel tehát kimondja, hogy a felület görbülete és az Euler-karakterisztika közötti kapcsolat meghatározza a tér geometriáját.

Ez a tétel azt jelenti, hogy egy kétdimenziós felület görbületi integrálja egyenlő az Euler-karakterisztika 2π -szeresével. A tétel alkalmazható bármilyen görbült felületre, és alapvetően összekapcsolja a felület geometriai jellemzőit a topológiai jellemzőkkel.

Riemann tétel matematikai levezetése

Riemann tételének központi eleme a görbült terek metrikájának meghatározása. Tekintsünk egy n -dimenziós differenciálható sokaságot, amelyet M -nek nevezünk. Az M sokaság pontjaihoz hozzárendelhetünk egy metrikát g , amely meghatározza a két pont közötti távolságot. A metrikát a következőképpen írhatjuk fel:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

ahol g_{ij} a metrika komponensei, dx^i pedig az M -beli differenciálok. A metrika g meghatározza a tér minden pontjában a távolságokat, és alapvetően lehetővé teszi a görbült tér geometriai szerkezetének leírását.

A Riemann-féle görbületet a következő kifejezés segítségével számíthatjuk ki:

$$R = g^{ij} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^k \right)$$

ahol Γ_{ij}^k a Christoffel-szimbolumok, amelyek a geodéziai görbék leírására szolgálnak. A görbület egy fontos jellemzője a Riemann-geometriának, amely lehetővé teszi a tér görbületi tulajdonságainak számítását.

Riemann tételét így fogalmazhatjuk meg:

$$R = 0$$

Ahol R a görbület, és az egyenlet azt jelenti, hogy ha a tér sík, akkor a Riemann-féle görbület nulla. Ha $R \neq 0$, akkor a tér görbült, és a Riemann tételének alkalmazása lehetővé teszi a nem euklideszi geometriák leírását, mint például a szférikus vagy hiperbólikus geometriát.

Riemann tehát alapvetően lehetővé tette a terek általános geometriájának vizsgálatát, amely magában foglalja a nem euklideszi geometriákat is, és amely alapot ad a modern fizikában, például az általános relativitáselméletben alkalmazott geometriai modelleknek.

1.3.3. A komplex analízis fejlődése

Bevezetés

A XIX. század a komplex analízis robbanásszerű fejlődésének időszaka volt. A korábban intuitív módszerekre épülő számításokat egyre inkább a szigorú fogalmi és elméleti keretbe illesztették. Kiemelkedő matematikusok – köztük Cauchy, Riemann, Weierstrass és mások – járultak hozzá egy új, szigorúan definiált komplex függvénytan elmélet megszületéséhez.

Cauchy és a szigorú analízis megalapozása

- *Cauchy integráltétele*: Augustin-Louis Cauchy a komplex analízis egyik alapítójaként megalkotta a híres *Cauchy-integráltételt*, mely szerint ha egy komplex függvény holomorf (azaz komplex differenciálható) egy egyszeresen összefüggő tartományban, akkor a tartomány bármely zárt görbéje mentén vett integrálja zérus.
- *Cauchy-integrál formula*: Szintén Cauchy nevéhez fűződik az ún. *integrál formula*, amellyel a függvény értéke kifejezhető a környező görbén vett integrálja segítségével – ez megalapozta a holomorf függvények rendkívüli regularitását.
- *Szigorúbb fogalomhasználat*: Cauchy bevezette az ϵ - δ definíciót, amely általános alapot teremtett az analízis formalizálásához.

Riemann és a komplex függvények topológiai szemlélete

- *Riemann-felületek*: Bernhard Riemann az 1850-es években vezette be az *Riemann-felület* fogalmát, amely lehetővé tette a többértékű függvények – például a komplex logaritmus vagy a gyökfüggvény – értelmezését egységes, topológiai alapon.
- *Riemann-leképezés tétele*: Riemann kidolgozta a konform leképezések elméletét is, különösen a *Riemann-leképezés tételét*, mely szerint bármely egyszeresen összefüggő síkbeli tartomány (kivéve az egész komplex síkot) konform módon leképezhető az egységkörre.
- *Geometriai szemlélet*: Riemann munkásságában a komplex analízis egyre inkább geometriai irányt vett, ami később hozzájárult a differenciálgeometria és az általános relativitáselmélet fejlődéséhez.

Weierstrass és az analitikus szigor

- *Hatványsorok elmélete:* Karl Weierstrass nevéhez fűződik a komplex függvények hatványsorokkal való reprezentációja. Kimutatta, hogy egy függvény analitikus, ha és csak ha hatványsorként kifejezhető, ezzel megerősítve a függvények osztályozásának alapját.
- *Egzakt definíciók:* Weierstrass munkásságára a maximális szigor jellemző – az analízisben bevezette az egyenletes konvergencia fogalmát, és számos olyan példát adott, amelyek rávilágítottak az intuíció korlátaira (pl. mindenütt folytonos, sehol sem deriválható függvény).
- *Kritika Riemannal szemben:* Bár elismerte Riemann eredményeit, Weierstrass élesen bírálta azok nem mindig teljesen rigorózus jellegét, és a komplex analízist egy teljesen aritmetikai alapra kívánta helyezni.

Dirichlet, Abel és más jelentős közreműködők

- *Dirichlet-elv:* Peter Gustav Lejeune Dirichlet bevezette a *variációs elvet*, amely a potenciálelmélet és a Dirichlet-probléma alapját képezte. Bár maga az elv eleinte nem volt teljesen rigorózus, fontos szerepet játszott a matematikai fizika fejlődésében.
- *Abel hozzájárulása:* Niels Henrik Abel tanulmányozta az elosztó (abeli) függvényeket, és munkásságával előkészítette a többváltozós komplex analízis és az elméleti algebra újabb irányait.
- *Cél a rendszeres elmélet:* A XIX. század során egyre nyilvánvalóbbá vált az igény egy olyan egységes elmélet megalkotására, amelyben a komplex függvények viselkedését pontos és teljes szabályrendszer írja le.

A komplex analízis jelentősége a matematikában

A XIX. század végére a komplex analízis nemcsak a matematika egyik legszilárdabban felépített ága lett, hanem szoros kapcsolatba került más területekkel is: a fizika, az algebra, a geometria és a topológia is profitált belőle.

- *Matematikai egységesítés:* A komplex analízis révén világossá vált, hogy a függvények viselkedése – például a sorfejtések, konvergencia és regularitás – mély összefüggéseket mutat, amelyek túlmutatnak a valós függvénytan keretein.
- *Modern matematika alapja:* A szigorúan felépített komplex analízis példaként szolg

A Cauchy-integráltétel és Cauchy-integrálképlet

Legyen f egy komplex értékű függvény, amely holomorf egy egyszeresen összefüggő tartományban D , és legyen γ egy pozitív irányban orientált, egyszeresen zárt görbe, amely D -ben helyezkedik el. Ekkor:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Cauchy-integrálképlet

Ha f holomorf egy D tartományban, és γ egy egyszeresen zárt, pozitívan orientált görbe D -ben, továbbá z_0 egy olyan pont, amely a γ által határolt tartomány belsejében van, akkor:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ez a képlet nemcsak azt mutatja meg, hogy a holomorf függvények értékei meghatározhatók a határértékeikből, hanem alapot ad a komplex analízis számos további eredményének, például a deriváltak kifejezésére:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Ez az összefüggés biztosítja, hogy a holomorf függvények nemcsak végtelenszer deriválhatók, hanem teljesen meghatározhatók a környezetük határán vett értékek alapján.

1.3.4. Statisztikai és valószínűségelméleti alapok a XIX. században

Bevezetés

A valószínűségszámítás és a statisztika tudományos rendszerezése a XVIII. században kezdődött, azonban a XIX. század hozta el azt a fordulópontot, amikor e területek szigorú matematikai alapokra kerültek. A valószínűségelmélet fokozatosan integrálódott az analízisbe, míg a statisztika gyakorlati alkalmazásai – például a demográfiában és a fizikában – új módszertani fejlesztéseket inspiráltak.

Laplace és a klasszikus valószínűségelmélet továbbfejlesztése

- *Analitikus valószínűségelmélet:* Pierre-Simon Laplace munkássága kulcsfontosságú volt a valószínűségi elméletek analitikus megközelítésében. Megalkotta a *valószínűségi generátorfüggvények* fogalmát, és bevezette azokat az eszközöket, amelyek a későbbi sztochasztikus modellek alapjául szolgáltak.

- *Bayes-tétel általánosítása*: Laplace terjesztette ki a Bayes-féle feltételes valószínűségi szabályt általános esetekre, megteremtve a *Bayes-inferencia* alapjait, amelyet napjainkban is széles körben alkalmaznak.
- *A valószínűségi eloszlások elmélyítése*: Foglalkozott a hibák eloszlásával és előkészítette a normális eloszlás szerepének matematikai megalapozását a természetes jelenségek leírásában.

Gauss és a normális eloszlás

- *Gauss-görbe*: Carl Friedrich Gauss statisztikai kutatásai során írta le a normális eloszlást, amely később *Gauss-eloszlásként* vált ismertté. Ezt az eloszlást számos valós folyamat – például mérési hibák – modellezésére használták.
- *Legkisebb négyzetek módszere*: Gauss megalkotta a *legkisebb négyzetek módszerét*, amely alapvető statisztikai eszközzé vált az adatelemzés és a regresszió területén.
- *Determinált és sztochasztikus modellek kapcsolata*: Gauss hozzájárult a mérések és a valószínűségi modellek kapcsolatának megértéséhez, különösen az égi mechanikában és a csillagászati számításokban.

Poisson és a ritka események elmélete

- *Poisson-eloszlás*: Siméon Denis Poisson a ritka események modellezésére kidolgozta a róla elnevezett *Poisson-eloszlást*, amely különösen fontos a diszkrét valószínűségi modellek világában.
- *Valószínűségelméleti elmélyítés*: Poisson „*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*” című művében nemcsak a jogi döntéshozatal valószínűségi alapjait vizsgálta, hanem jelentősen hozzájárult a valószínűségi mező formalizálásához is.
- *Valószínűség mint tudományos alap*: A Poisson-eloszlás alkalmazásai gyorsan megjelentek a statisztikai fizikában és a társadalomstatisztikában.

Chebyshev és a valószínűségelmélet formalizálása

- *Egyenlőtlenségek és határeloszlások*: Pafnuty Lvovich Chebyshev jelentős eredményeket ért el az egyenlőtlenségek terén (pl. Chebyshev-egyenlőtlenség), amelyek fontos szerepet játszanak a konvergencia elméletében és a statisztikai becslések megbízhatóságának mérésében.

- *Sztochasztikus függvények*: Chebyshev tanítványai – köztük Markov és Ljapunov – révén megalapozta a sztochasztikus folyamatok későbbi fejlődését.
- *Eloszlások és szórások*: Kutatásai során hangsúlyozta az eloszlások és szórások matematikai szerepét a statisztikai mintavételezés megalapozásában.

A valószínűségszámítás és statisztika hatása más területekre

A XIX. század végére a valószínűségelmélet és statisztika szorosan összefonódott más matematikai és természettudományos területekkel.

- *Statisztikai fizika*: A valószínűségi módszerek a fizikai statisztikai rendszerek, például a molekuláris gázelmélet és termodinamika alapjaivá váltak.
- *Társadalomstatisztika*: A népesség, halandóság, gazdasági és oktatási statisztikák módszeres feldolgozása egyre szigorúbb matematikai eszközöket igényelt.
- *Modern irányzatok előkészítése*: A XIX. századi eredmények közvetlenül vezettek a XX. század valószínűségi mértékelméletének és matematikai statisztikájának kibontakozásához.

Statisztikai és valószínűségelméleti alapok – Laplace és a Központi határeloszlás tétele

A XIX. század statisztikai és valószínűségelméleti fejlődésének egyik meghatározó alakja Pierre-Simon Laplace (1749–1827) volt, aki megalapozta a klasszikus valószínűségelméletet, és elsőként fogalmazta meg a központi határeloszlás tételét.

Központi határeloszlás tétele:

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyek várható értéke $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, és szórása $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Ekkor a

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

eloszlása a $n \rightarrow \infty$ határesetben konvergál a standard normális eloszláshoz:

$$Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

A tétel vázlatos bizonyítása (Laplace karakterisztikus függvény módszere):

A karakterisztikus függvény definíciója egy valószínűségi változóra X :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

A Z_n karakterisztikus függvénye így:

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(\varphi_X \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

A Taylor-sor alapján, ha X_i várható értéke μ , szórása σ , akkor:

$$\varphi_X \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 1 + i\mu \cdot \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o \left(\frac{1}{n} \right).$$

Ez alapján:

$$\left(1 + i\mu \cdot \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2},$$

ami a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye. Ebből következik, hogy $Z_n \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlás szerint.

Történeti jelentőség:

A tétel magyarázatot ad arra, hogy sok független tényező összege miért követ gyakran normális eloszlást. Ez lett a statisztikai mintavételezés és hibaszámítás matematikai alapja. Laplace munkássága meghatározó volt a klasszikus valószínűségelmélet megszületésében.

2. fejezet

A 20. századi matematika fejlődése

2.1. A korszak fő jellemzői

2.1.1. A matematika formalizálása és axiomatikus rendszerek kialakulása

A formalizmus célja a matematika "biztonságossá" tétele volt: minden állításnak levezethetőnek kellett lennie egy meghatározott szabályrendszerből. Ennek legfontosabb képviselője **David Hilbert** (1862–1943) volt, aki egy teljes, konzisztens és ellentmondásmentes matematikai rendszer kidolgozását tűzte ki célul.

Hilbert programjának lényege:

- Minden matematikai állítást szigorúan le kell vezetni egy axiómarendszerből.
- A használt logikai szabályok legyenek formálisan meghatározottak.
- A rendszer legyen *konzisztens* (ne vezethessen le ellentmondásokat), *teljes* (minden igaz állítás levezethető legyen), és *dönthető* (létezzen algoritmus, amely eldönti egy tetszőleges állítás igazságát).

Példa – Euklideszi geometria axiomatikus rendszere Hilbert szerint

Hilbert újraalapozta Euklidesz geometriáját a *Grundlagen der Geometrie* (1899) című művében. Ebben pontos axiómákat vezetett be például:

- **Pont és egyenes viszonyára:** Két különböző ponthoz mindig pontosan egy egyenes tartozik, amely mindkettőn átmegy.
- **Rendezési axióma:** Ha három pont egy egyenesen helyezkedik el, akkor az egyik a másik kettő között van.
- **Paralelogramma-axióma (Euklideszi ötödik posztulátum):** Egy adott egyenesre és egy rajta kívüli pontra pontosan egy vele párhuzamos egyenes fektethető.

Történeti jelentőség

A formalizmus elterjedése új fejezetet nyitott a matematika történetében. Megalapozta a *matematikai logika*, a *halmazelmélet* és a *számítástudomány* fejlődését, és lehetővé tette, hogy a matematika más tudományágak számára is pontos nyelvet és eszköztárat biztosítson.

A program azonban nem valósult meg maradéktalanul: **Kurt Gödel** 1931-ben bebizonyította híres *nemteljességi tételeit*, amelyek szerint bármely kellően gazdag formális rendszerben léteznek olyan igaz állítások, amelyek nem vezethetők le az adott rendszer axiómáiból.

2.1.2. A számítógépek és a digitális matematika hatása

A XX. század második felében a számítógépek megjelenése és fejlődése forradalmi változásokat hozott a matematika alkalmazásaiban, kutatási módszereiben és oktatásában egyaránt. A matematikai problémák numerikus és algoritmikus megközelítése vált lehetővé olyan mértékben, amely korábban elképzelhetetlen lett volna.

Numerikus módszerek és számítógépes szimulációk

A nagy számításigényű problémák – például differenciálegyenletek numerikus megoldása, mátrixokkal végzett műveletek, statisztikai becslések – hatékony megoldása számítógépek nélkül szinte lehetetlen lett volna. Ez különösen igaz az olyan alkalmazási területekre, mint:

- *Fizikai szimulációk* (pl. áramlások modellezése, kvantummechanikai számítások)
- *Mérnöki tervezés* (pl. repülőgépszárny aerodinamikai elemzése)
- *Pénzügyi modellezés* (pl. opcióárazás sztochasztikus modellekkel)

A diszkrét matematika előretörése

A digitális számítógépek természetükből adódóan bináris (kétállapotú) rendszerek, ezért különösen fontos szerepet kaptak a diszkrét matematika ágai, mint például:

- **Gráfelmélet** – hálózatok, útvonalak, kapcsolatok modellezése
- **Kombinatorika** – számolási lehetőségek vizsgálata
- **Algoritmuselemzés** – hatékony megoldások keresése problémákra
- **Számelmélet és kódoláselmélet** – különösen fontos a kriptográfiában

A diszkrét struktúrák vizsgálata új típusú gondolkodásmódot követelt meg, amely kifejezetten algoritmikus és gépi feldolgozásra alkalmas. Ezek az ágak korábban a matematika periferiáján helyezkedtek el, ám a számítástechnika térnyerésével központi jelentőségre tettek szert [9].

Számítógéppel segített bizonyítások

A számítógépek nemcsak a számítási feladatokban, hanem a matematikai bizonyítások ellenőrzésében is kulcsszerepet játszanak. Erre híres példa a **Négy szín tétel** (Four Color Theorem), amelyet Kenneth Appel és Wolfgang Haken bizonyítottak be számítógépes segítséggel 1976-ban [22].

Ez volt az első széles körben elfogadott olyan bizonyítás, amely számítógépes programokra támaszkodott, és több ezer esetet ellenőrzött automatikusan. Bár kezdetben sokan kételkedtek az ilyen bizonyítások érvényességében, mára ez a módszer egyre elterjedtebb, és megnyitotta az utat a *formális verifikáció* (gépi bizonyítás-ellenőrzés) irányába.

2.1.3. Az algebra gyors fejlődése

A XX. század első felében az algebra drámai fejlődésen ment keresztül, amelyet a fogalmi általánosítás, absztrakció és az axiomatikus megközelítés jellemez. Az addig főként egyenletmegoldással és számelméleti kérdésekkel azonosított algebra egyre inkább az absztrakt struktúrák (csoportok, gyűrűk, testek) vizsgálatának tudományává vált.

Csoportelmélet és struktúraelmélet

A csoportelmélet fejlődése meghatározó volt: az 1800-as évek végi Galois-elméletből kiindulva a csoportok elméletét mélyen továbbfejlesztették. A strukturális megközelítés lényege az volt, hogy különböző algebrai objektumokat (mint a mátrixok, permutációk, számtestek) közös tulajdonságaik alapján egységes elméleti keretben vizsgáljanak.

A csoportelmélet alkalmazásai a kvantummechanikában és kristálytanban is megjelentek, amely tovább erősítette jelentőségét [15].

Emmy Noether és a strukturális algebra

A korszak egyik legnagyobb hatású matematikusa **Emmy Noether** volt, aki a gyűrű- és testelmélet formalizálásában, valamint az algebrai struktúrák absztrakt megközelítésében kulcsszerepet játszott. Az ő hatására vált az algebra egyik központi céljává a belső szerkezetek – ideálok, homomorfizmusok, kvóciensstruktúrák – vizsgálata.

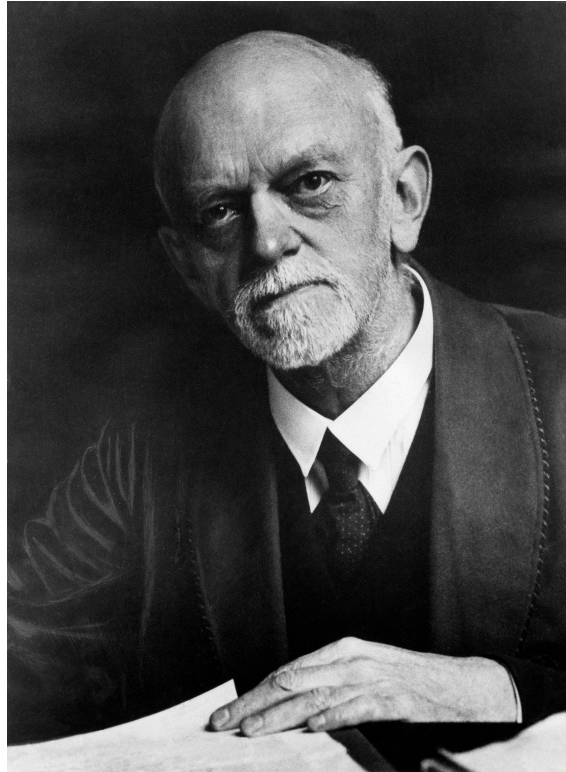
Noether munkássága nyomán kialakult az ún. *strukturális algebra* irányzata, amely az algebrai struktúrákat elsősorban morfizmusok (szerkezetet megtartó leképezések) segítségével vizsgálja [29].

Kategóriaelmélet és modern absztrakció

A század közepére a fokozódó absztrakció szükségessé tette az algebrai struktúrák közötti kapcsolatok általános keretbe foglalását. Ebből született meg a **kategóriaelmélet**, amely lehetővé tette különböző matematikai objektumok és köztük lévő leképezések egységes szemléletét.

2.2. Meghatározó matematikusok és munkásságuk

2.2.1. David Hilbert (1862-1943)



2.1. ábra. David Hilbert arcképe

David Hilbert a XX. század elejének egyik legnagyobb hatású matematikusa volt. Munkássága szinte minden matematikai területre kiterjedt, különösen a geometria, az algebra, az analízis, a logika és a matematikai fizika területén ért el kiemelkedő eredményeket. Emellett jelentős szerepet játszott a matematika formalizálásában és a modern axiomatikus megközelítés kialakításában.

Geometria axiomatikus felépítése

Hilbert 1899-ben megjelent *Grundlagen der Geometrie* (A geometria alapjai) című művében teljesen új alapokra helyezte az euklideszi geometriát. Ebben az axioma-rendszerben világosan megkülönböztette az axiómákat és a definíciókat, valamint a logikai következtetéseket. A mű célja az volt, hogy a geometria minden állítása pusztán formális logikai következtetésként legyen levezethető az axiómákból [18].

Hilbert-problémák

(1862-1943) Hilbert legismertebb öröksége az 1900-as párizsi matematikai kongresszuson előadott 23 híres problémája, melyek hosszú időre meghatározták a matematika fejlődési irányát. A problémák között szerepelt például a kontinuumhipotézis, a polinom-

gyűrűk struktúrája, a Riemann-sejtés vagy a lehetséges geometriai rendszerek osztályozása. Ezek a kérdések új kutatási irányokat nyitottak meg [6].

Formalizmus és metamatematika

Hilbert megalapozta a *formalizmus* filozófiai irányzatát, amely szerint a matematika nem más, mint szimbólumok manipulálása meghatározott szabályok szerint. Ennek keretében kidolgozta a *Hilbert-programot*, melynek célja az volt, hogy a matematika egészét formális logikai rendszerként értelmezze, és ennek konzisztenciáját finom eszközökkel igazolja. Bár Kurt Gödel később kimutatta e program bizonyos korlátait, Hilbert munkássága elindította a *matematikai logika* és a *számítástudomány* alapjait is jelentő kutatásokat.

2.2.2. Emmy Noether (1882–1935)



2.2. ábra. Emmy Noether arcképe

Emmy Noether a XX. század egyik legnagyobb hatású matematikusa volt, akinek eredményei mély nyomot hagytak az algebra és a matematikai fizika területén is. Noether úttörő szerepet játszott az absztrakt algebra kialakulásában, és nevét viseli a modern fizika egyik alaptétele is, a *Noether-tétel*.

Absztrakt algebrai struktúrák

Noether az algebrai struktúrák tanulmányozása során jelentős mértékben hozzájárult a gyűrűk, testek és ideálok elméletének fejlődéséhez. Az ő nevéhez fűződik az *Noether-gyűrűk* fogalma, amelyek olyan gyűrűk, ahol minden növekvő ideálsor stabilizálódik (más szóval kielégítik a leszállási lánc feltételét). Ez az elv kulcsfontosságú az algebrai geometriában és a kommutatív algebra elméletében is [1].

Noether-tétel

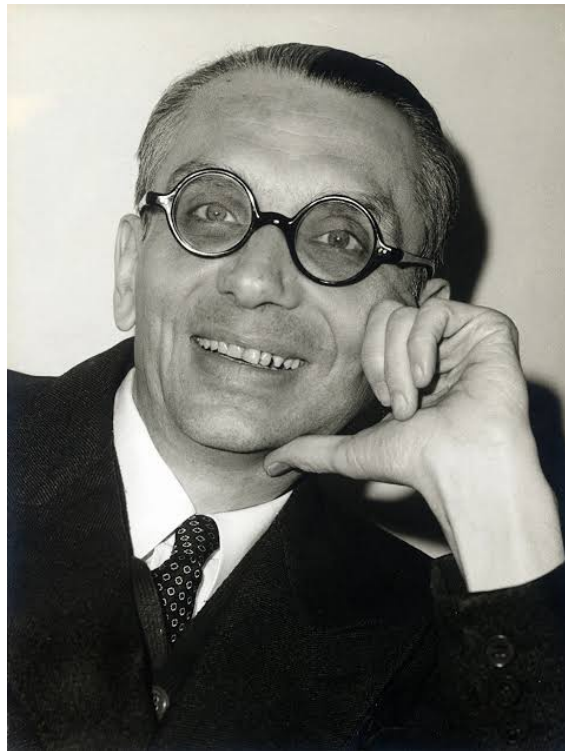
A fizika területén Emmy Noether legismertebb eredménye az 1915-ben megfogalmazott, majd 1918-ban publikált *Noether-tétel*, amely kimondja, hogy minden folytonos

szimmetria megfelel egy megmaradási törvénynek. Például az időbeli invariancia (szimmetria) az energia megmaradását vonja maga után, míg a térbeli invariancia az impulzus megmaradását. Ez a tétel nemcsak a klasszikus mechanika, hanem a kvantumelméletek és a modern részecskefizika szempontjából is alapvető jelentőségű [47].

Tanítványai és hatása

Noether Göttingenben tanított, ahol David Hilbert és Felix Klein támogatásával kapott lehetőséget oktatásra. Tanítványai között olyan neveket találunk, mint Bartel van der Waerden, aki az absztrakt algebra egyik klasszikus tankönyvét írta. Noether nemcsak kiváló kutató, hanem inspiráló tanár is volt, akinek szellemi öröksége meghatározta az algebra további fejlődését.

2.2.3. Kurt Gödel (1906–1978)



2.3. ábra. Kurt Gödel arcképe

Kurt Gödel osztrák származású matematikus és logikus, aki elsősorban a *formális rendszerek* elméletében elért eredményeiről ismert. Munkássága alapjaiban rengette meg a matematikai bizonyítás és igazság klasszikus elképzeléseit. Leghíresebb eredménye az *első és második nemteljességi tétel*, amelyek a XX. század egyik legfontosabb matematikai felfedezésének számítanak.

A nemteljességi tételek

Gödel 1931-ben publikálta híres eredményeit az *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* című cikkében, ahol bebizonyította:

- Az **első nemteljességi tétel** szerint minden olyan formális rendszerben, amely elegendően erős az aritmetika megfogalmazásához, léteznek olyan állítások, amelyek igazak, de a rendszerben nem bizonyíthatók.
- A **második nemteljességi tétel** kimondja, hogy egy ilyen rendszer saját konzisztenciáját (ellentmondásmentességét) sem tudja önmagán belül bizonyítani.

Ezek a tételek súlyos következményekkel jártak a Hilbert-programra, amely célul tűzte ki, hogy a matematika alapjait teljes mértékben axiomatikusan megalapozza és a rendszer konzisztenciáját bizonyítsa [21].

Formális rendszerek határai

Gödel eredményei megmutatták, hogy a matematika nem lehet teljesen *lezárt*, formális keretbe szorítható tudomány. Ezek az állítások alapvető filozófiai kérdéseket vetettek fel az igazság, bizonyíthatóság és emberi megismerés kapcsolatáról.

Hatása

Gödel tételei központi szerepet játszottak a XX. századi logika és matematika filozófiájának alakulásában. Munkássága hatással volt többek között Alan Turing számításelméletére és John von Neumann elméleti fizikájára is.

2.2.4. Neumann János (1903–1957)



2.4. ábra. Neumann János arcképe

Neumann János, a XX. század egyik legsokoldalúbb és legnagyobb hatású matematikusa, Budapesten született, majd az Egyesült Államokban teljesedett ki tudományos pályája. Nevéhez fűződik számos alapvető eredmény a *halmazelmélet*, *kvantummechanika*, *játékelmélet*, *numerikus matematika* és *számítástechnika* területén.

Hozzájárulása a matematikához és informatikához

Neumann egyik legismertebb hozzájárulása az elektronikus számítógépek elvi alapjainak lefektetése. Az ún. *neumanni elv* szerint a számítógép egységesen tárolja az adatokat és az utasításokat, és a működését négy fő egységre lehet bontani: központi vezérlőegység, aritmetikai egység, memória, valamint bemeneti–kimeneti egységek. Ez a modell lett az alapja a modern digitális számítógépeknek [28].

Játékelmélet és közgazdaságtan

Neumann másik kiemelkedő területe a *játékelmélet*, amelynek alapjait a Morgens-ternnel közösen írt *A játékelmélet és gazdasági viselkedés* (1944) című művében fektette le. Az elmélet új matematikai megközelítést adott a stratégiai döntéshozatal modellezéséhez, melynek máig is jelentős szerepe van a közgazdaságtanban, biológiában és politikatudományban [36].

Neumann és a matematika filozófiája

Neumann a matematikát nem csupán formális logikai rendszernek tekintette, hanem a gyakorlati alkalmazások és elméleti gondolkodás szintézisének. Több írásában hangsúlyozta, hogy a matematika fejlődése elválaszthatatlan a tudomány és technika alakulásától.

2.2.5. Alan Turing (1912–1954)



2.5. ábra. Alan Turing arcképe

Alan Mathison Turing brit matematikus, logikus, kriptográfus és a modern számítógépelmélet egyik megalapozója. Kiemelkedő munkássága a *számítástudomány*, *mesterséges intelligencia*, valamint a *kódfejtés* területén jelentős. Számos alapvető fogalom és modell – így például a *Turing-gép* – őhozzá köthető.

Turing-gép és számíthatóság

Turing 1936-ban publikálta „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem” című cikkét, amelyben bevezette az *absztrakt számoló gép*, a *Turing-gép* fogalmát. Ezzel megalkotta az algoritmikus számíthatóság egyik első formális modelljét, amely lehetővé tette a számítható és nem számítható problémák szigorú megkülönböztetését.

A Turing-gép koncepciója alapja lett a későbbi elméleti számítástudománynak és egyben a *Church–Turing-tézis* alapját is képezi, amely szerint minden algoritmikusan kiszámítható függvény kiszámítható egy Turing-géppel is.

Kriptográfia és a II. világháború

Turing a második világháború alatt kulcsszerepet játszott a német Enigma-kód feltörésében a brit Bletchley Parkban. Kifejlesztette a „Bombe” nevű elektromechanikus gépet, amely segítségével sikerült automatizálni a kódfejtést. Ezzel döntő módon hozzájárult a háború korábbi befejezéséhez és emberek millióinak megmentéséhez [?].

Mesterséges intelligencia

Turing 1950-ben publikálta híres cikkét „Computing Machinery and Intelligence” címmel, amelyben felvetette a kérdést: „*Gondolkodhatnak-e a gépek?*”. Ennek kapcsán bevezette a híres *Turing-tesztet*, amely máig is vita tárgya a mesterséges intelligencia kutatásában.

2.3. Főbb matematikai eredmények és elméletek

Halmazelmélet és formális logika fejlődése

A halmazelmélet és formális logika alapjai a 19. század végén és a 20. század elején alakultak ki, főként Georg Cantor és Gottlob Frege munkássága nyomán. Ezek az alapok képezték a modern matematika axiomatikus megalapozásának kiindulópontját, amelyet David Hilbert tovább formalizált. Az ilyen rendszerek célja az volt, hogy minden matematikai igazságot szigorúan formális, szimbólumokkal történő manipuláció révén lehessen levezetni.

Gödel azonban 1931-ben két alapvető tételt bizonyított be, amelyek megmutatták, hogy ez a cél alapvetően korlátokba ütközik:

Gödel első nemteljességi tétele: Minden olyan formális rendszer, amely elég erős az aritmetika alaptételeinek kifejezésére, tartalmaz olyan igaz állításokat, amelyek nem bizonyíthatók a rendszer axiómáiból.

Levezetés:

Legyen $\mathcal{S}$ egy formális rendszer, amely képes kifejezni az egész számok aritmetikáját. Gödel elkészítette az ún. Gödel-számozást, amely minden formulához és bizonyításhoz egyedi természetes számot rendel. Ezzel megmutatható, hogy létezik egy G formula, amely lényegében azt mondja:

$$G : \text{"}G \text{ nem bizonyítható } \mathcal{S}\text{-ben"} \quad (2.1)$$

Ha G bizonyítható $\mathcal{S}$ -ben, akkor G hamis (mivel azt állítja, hogy nem bizonyítható), ami ellentmondás. Ha pedig G nem bizonyítható, akkor G igaz, tehát létezik egy igaz, de nem bizonyítható állítás, ami bizonyítja a tételt.

Gödel második nemteljességi tétele: Minden elég erős és következetes formális rendszer nem bizonyíthatja a saját következetességét.

Levezetés:

Gödel második tétele kimondja, hogy egy olyan formális rendszer, mint $\mathcal{S}$, nem képes saját következetességét belülről bizonyítani, mert ez is egy olyan állítás, amely a rendszer határain kívül esik. Ha a rendszer képes lenne saját következetességét bizonyítani, akkor egy ellentmondásos rendszer is következetesnek bizonyulhatna, ami elfogadhatatlan.

2.3.1. Hilbert axiómarendszere és a geometria formalizálása

David Hilbert egyik legnagyobb hozzájárulása a geometria axiomatikus alapjainak lefektetése volt. 1899-ben megjelent "Grundlagen der Geometrie" (A geometria alapjai) című munkájában új megközelítést adott az euklideszi geometriához, amelyben világosan elkülönítette az axiómákat, definíciókat és logikai következtetéseket. Ez a formalizálás jelentős hatással volt a modern matematika fejlődésére [18].

2.3.2. Noether-gyűrűk és absztrakt algebra

Emmy Noether úttörő szerepet játszott az absztrakt algebra fejlődésében. Az ő nevéhez fűződnek a Noether-gyűrűk, amelyek alapvető fontosságúak a kommutatív algebra és algebrai geometria területén. A Noether-féle leszállási lánc feltétel, amely kimondja, hogy egy Noether-gyűrű minden növekvő ideálsorozata stabilizálódik, meghatározó alapelvnek számít a modern algebrai elméletekben [29].

Leszállási lánc feltétel:

Egy R gyűrű Noether-gyűrű, ha teljesül rá a leszállási lánc feltétel, azaz minden növekvő ideálsorozat stabilizálódik:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \Rightarrow \exists n, \text{ hogy } I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots \quad (2.2)$$

Ez azt jelenti, hogy bármely végtelen növekvő ideálsorozatnak létezik olyan tagja, amely után a sorozat minden eleme megegyezik.

Példa: A polinomgyűrűk, mint például $\mathbb{R}[x]$ vagy $\mathbb{C}[x, y]$, Noether-gyűrűk, mert minden ideál végesen generált.

2.3.3. A kvantummechanika matematikai alapjai

A kvantummechanika a 20. század egyik legforradalmibb matematikai és fizikai eredménye, amely a mikroszkopikus részecskék viselkedését írja le. Matematikai alapjait olyan kiemelkedő tudósok fektették le, mint Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg és Paul Dirac. A kvantummechanika alapelvei radikálisan eltérnek a klasszikus mechanika szabályaitól, és olyan új matematikai struktúrákat hoztak létre, mint a Hilbert-tér, az operátoralgebra és a mátrixmechanika.

Heisenberg-féle határozatlansági reláció:

A határozatlansági reláció a kvantummechanika egyik alapvető elve, amely kimondja, hogy egy részecske helyének és impulzusának mérési pontossága között alapvető korlát áll fenn.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.3)$$

ahol Δx a részecske helyének, Δp pedig az impulzusának bizonytalansága, és $\hbar$ a redukált Planck-állandó. Ez a tétel alapvetően korlátozza a részecske pontos helyének és mozgási mennyiségének egyidejű megismerhetőségét [16].

2.3.4. A számítógépes algoritmusok és információelmélet kezdetei

A 20. század közepén a számítógépes algoritmusok és az információelmélet fejlődése forradalmasította a matematika és az informatika területeit. Ennek alapjait olyan matematikusok és mérnökök fektették le, mint Alan Turing, Claude Shannon és John von Neumann. Turing munkássága különösen jelentős volt a számítógépek elméleti modelljének megalkotásában, amelyet ma Turing-gépnek nevezünk [48].

Turing-gép formális definíciója:

Egy Turing-gép egy véges állapotú automata, amely egy végtelen hosszúságú szalagon működik, amelyen szimbólumokat olvas és ír. A Turing-gép formálisan egy ötös:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0), \quad (2.4)$$

ahol:

- Q egy véges állapothalmaz,
- Σ a bemeneti ábécé,
- Γ a szalagon használható szimbólumok halmaza ($\Sigma \subset \Gamma$),
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times L, R$ egy átmenetfüggvény,
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot.

A Turing-gépek meghatározó szerepet játszanak a számítógépek elméleti alapjainak megértésében és a számítási problémák komplexitásának vizsgálatában [?].

3. fejezet

Weboldal

3.1. Weboldal bemutatása

A diplomamunkám két nagyobb részre bontható, az adatok gyűjtése a meghatározott kor-szakokhoz, illetve miután összegyűjtöttem a megfelelő adatokat, elkezdhettem foglalkoz-ni a weboldallal. Ez egy már alapjaiban elkészült weboldal, mely a matematika történeté-ről szól. Különböző menüpontokat tartalmaz, melyek alapján csoportosítani lehet egyes elemeket, például híres matematikusok, történelmi, matematika események, elméletek, problémák, stb. Ez a weboldal HTML, CSS, JavaScript segítségével lett létrehozva, tar-talmaz egy bejelentkezési felületet is, melyet egy adatbázis és egy szerver oldali progra-mozási nyelv segítségével lehet megvalósítani.

3.1.1. Bejelentkezés a weboldalra

Az adatok feltöltéséhez az első lépés a weboldalra való bejelentkezés, mely a II.Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Főiskola weboldalán a belső honlap menüpont kiválasztása után érhető el.



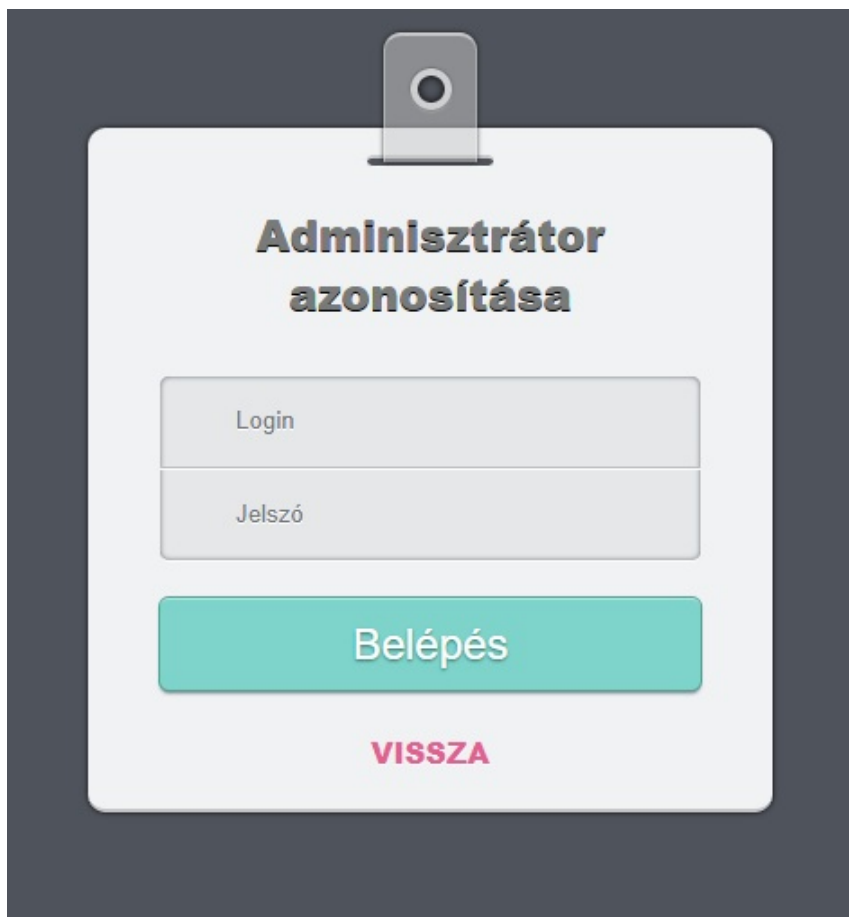
3.1. ábra. Belső honlap menüpont

Miután kiválasztottam a megfelelő menüpontot, elérhetővé válik egy lista, melynek elemei a tanszékek, itt a Matematika-Informatika tanszék kiválasztása után elérhetővé válnak a tanszékhez tartozó belső weboldalak, melyek között megtalálható a Matematika történelem weboldalam, ahova egy kis lexikonként fel lesznek töltve az adatok, illetve található még egy erre a weboldalra irányuló elérhetőség, mely az admin felületet tartalmazza, itt érhető el az adatok feltöltése lehetőség. Ezen az oldalon már nem csak az olvasás lehetséges, hanem tudunk friss adatokat feltölteni, meglévőket frissíteni, törölni, illetve akár olvasni is.

Kezdőlap	Matematika-Informatika tanszék
Webmail	Szakszótárak
Jelszómódosítás	Szótár admin belépés
Használat	
Oktatási anyagok	Matematika történelem
Digitális adatbázisok Цифрові бази даних	Mat. tört. admin belépés
Könyvtári online katalógus Каталог бібліотеки	
Matematika-Informatika tanszék	
Linkek	
Telefonszámok	
Letöltés	
www.kmf.uz.ua	
webkamerák	
Informatikai szabályzat	
Diak-csoportok	

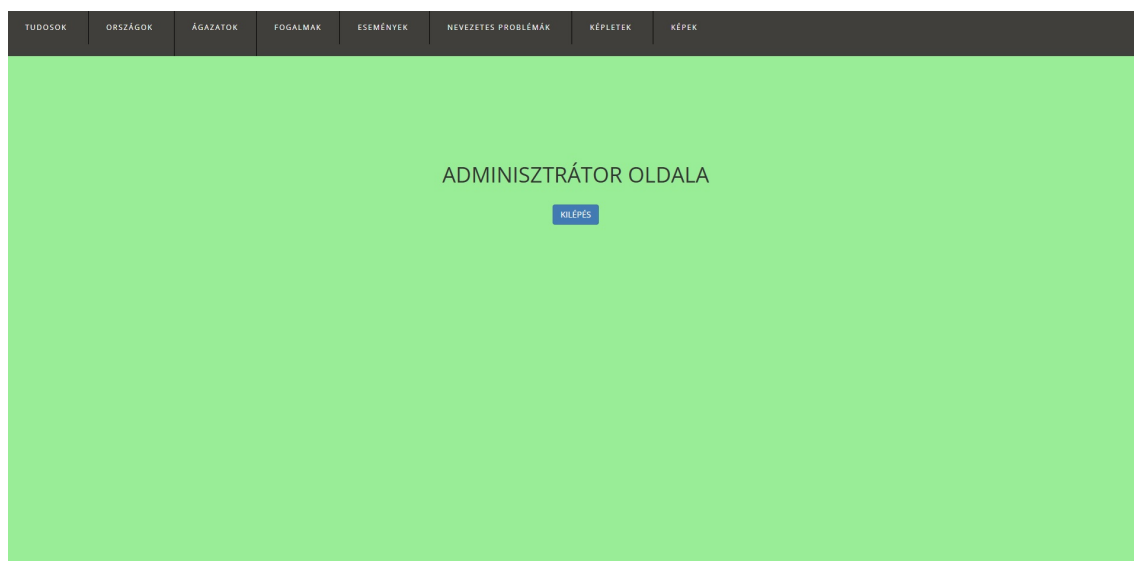
3.2. ábra. Belső honlap admin nézet elérése

Miután kiválasztottam az admin nézetet, megjelenik egy autentikációs felület, ahol csak a megfelelő felhasználónév és jelszó megadásával lesz elérhető a weboldal admin nézete, helytelen adatok megadása esetén hiba üzenetet kapunk, illetve nem enged belépni az oldalra.

The image shows a login form for an administrator, presented as a white clipboard with a silver clip at the top, set against a dark gray background. The clipboard has the title "Adminisztrátor azonosítása" in bold black text. Below the title are two light gray input fields: the first is labeled "Login" and the second is labeled "Jelszó". Below these fields is a teal button with the text "Belépés" in white. At the bottom of the clipboard is a red link labeled "VISSZA" in all caps.

3.3. ábra. Belső honlap admin nézet bejelentkezési felület

A helyes bejelentkezési adatok megadása után elérhetővé válik a Matematika történelem weboldal admin nézete.



3.4. ábra. Belső honlap admin nézet

3.1.2. Weboldal menüpontok

A weboldalon számos menüpont elérhető, mind azért felel, hogy az adatokat a lehető legjobb, legsokoldalúbb módon tudjuk csoportosítani, az olvasók kényelme érdekében, hogy minél könnyebben el tudják érni azokat az információkat, amiket keresnek.

Minden menüpont egy gyűjtőfogalom, melyet szét lehet bontani több kisebb részre, ezek a menüpontokhoz tartozó almenüpontok. Fő menüpontok a matematika történelem adatok csoportosításához: Tudósok, Ágazatok, Fogalmak, Események, Nevezetes Problémák. Ezen kívül én a nevezetes problémák menüpontban egyes problémák levezetéséhez különböző matematikai képleteket használtam, melyben nagy segítséget nyújtott az a lehetőség, hogy képlet szereksztésére van lehetőség a képletek menüpontban, itt lehetőség van arra, hogy Latex kódok segítségével írjak meg egy képletet. Más egyéb adatok feltöltése: Képek, Országok.

Az összegyűjtött adataim feltöltéséhez A következő pontokra volt szükségem: Tudósok, Országok, Események, Nevezetes problémák, Képletek, Képek.

TUDOSOK	ORSZÁGOK	ÁGAZATOK	FOGALMAK	ESEMÉNYEK	NEVEZETES PROBLÉMÁK	KÉPLETEK	KÉPEK
Tudosok adatai							
Tudos_elődők							
Tudos_kortársak							
Tudos_tanítványok							

3.5. ábra. A weboldal menüpontjai

3.2. Adatok feltöltése a weboldalra

Miután sikeresen bejelentkeztem a weboldara és átnéztem a menüpontokat, elkezdhettem feltölteni az adatokat. Ehhez három nagyobb csoportra bontottam az adatokat: Tudósok, Események, Problémák. Tudósok pontba szedtem össze minden tudóshoz tartozó adatot, életesemények feltalálásaik, elméleteik leírása röviden. Az események pont tartalmazza a két korszak előzményeit, leírását. A problémák pedig a két korszakhoz tartozó nagyobb feltalálásokat, elméleteket tartalmazza, melyhez tartozik egy rövid leírás, valamint egy matematikai levezetés.

3.2.1. Tudósok adatai

Elsősorban a tudósok adatait töltöttem fel a weboldara. Megnyitottam a Tudósok menü tudósok adatai almenüpontját, majd megnyílt egy oldal, ami tartalmazta a már feltöltött tudósok adatait, illetve itt lehet újakat feltölteni, meglévőket törölni, átszerkeszteni. Az Új matematikus bevitele gombra kattintva el is kezdhettem betölteni tudós adatait.

VISZTA a főoldalra

Új matematikus bevitele

show 20 entries

Search:

MATEMATIKUSOK Tabla szerkesztése													
ID	Nev	Ukrain nev	Ország	Ország változtatása	Nemzetiség	Szul _ev	Hely születet	Halál _ev	Hely meghalt	Kép	Kép bevitele	Bovebben	DELETE
2	Neumann János	Джон Фом Хейман	Magyarország		Empty	1898	Budapest	1967	Vashington	NeumannJeg	+		
20	Isaac Newton	Исаак Ньютон	Angl: Britannia		Empty	1643	Empty	1727	Empty	newtonJeg	+		
51	Abel Niels Hendrik	Абель Николь	Norvégia		Empty	1802	Empty	1829	Empty	abelJeg	+		
52	Banach Stefan	Банаш Стефан	Lengyelország		Empty	1892	Empty	1946	Empty	BanachJeg	+		
53	Bartow Isaac	Бартов Исаак	Angl: Britannia		Empty	1830	Empty	1877	Empty	bartowJeg	+		
54	Bernoulli Johann I.	Бернулли Йоган	Svájc		Empty	1687	Empty	1748	Empty	bernoulliJohannJeg	+		
55	Bernoulli Jacob	Бернулли Якоб	Svájc		Empty	1664	Empty	1706	Empty	BernoulliJacobJeg	+		
56	Bernoulli Daniel	Бернулли Даниел	Svájc		Empty	1700	Empty	1782	Empty	bernoulli_danielJeg	+		
57	Bessel Friedrich	Бессель Фридрих	Németország		Empty	1784	Empty	1848	Empty	BesselJeg	+		
58	Leibniz Gottfried	Лейбниц Готфрид	Németország		Empty	1646	Empty	1716	Empty	leibnizJeg	+		
59	Euler Leonard	Ейлер Леонард	Svájc		Empty	1707	Basel	1783	Szentpétervár	eulerJeg	+		
62	Cauchy Augustin Louis	Кошй Агустин Луи	Franciaország		Empty	1789	Párizs	1857	Boeux	cauchyJeg	+		
98	Wiles Andrew	Сар Енджов Джон Вайлс	Angl: Britannia		Empty	1963	Cambridge	1963	Empty	Wiles_AndrewJeg	+		
106	Weierstrass Karl	Вейерштрасс Карл	Németország		Empty	1816	Ennigerloh (Ennigerloh)	1897	Berlin	WeierstrassJeg	+		
108	Gauss Carl Friedrich	Гаусс Карл Фридрих	Németország		Empty	1777	Braunschweig	1856	Göttingen	gaussJeg	+		
113	Archimedesz	Архимед	Görögország		Empty	-287	Empty	-212	Empty	archimedJeg	+		
114	Bayes	Empty	Magyarország		Empty	1	Empty	Empty	Empty	archimedJeg	+		
118	Akrobat II	Акробат II	Magyarország		Empty	Empty	Empty	Empty	Empty	Empty	+		
117	Bolyai Farkas	Болъай Фаркас	Magyarország		Empty	1776	Marosvásárhely	1868	Marosvásárhely	Bolyai_Farkas.JPG	+		
118	Miletozi Thalesz	Милетоз Талес	Magyarország		Görög	-624	Miletosz	-548	Miletosz	thaleszJeg	+		

showing 1 to 20 of 20 entries

Previous 1 Next

3.6. ábra. Tudós adatok feltöltése

A gomb megnyit egy felugró ablakot, és itt adhatjuk meg az első kötelező adatot a tudóshoz, ami a név megadása magyar nyelven. Ha megadtuk a tudós nevét, elérhetővé válik a listában.

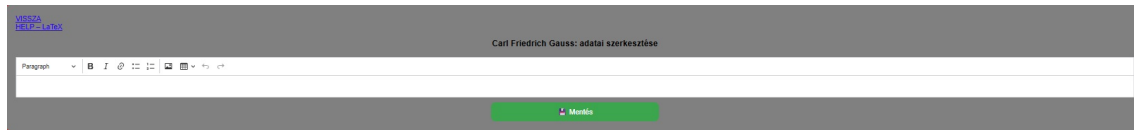
3.7. ábra. Felugró ablak kitöltése

Miután a tudós megjelent a listában már csak az oszlopokban található ikon gombok megnyitásával tudunk megadni számos adatot, ilyen módon vittem be az ukrán nevet, országot, nemzetiséget, születési és halál idő, hely adatokat. Ezknél csak egy kis adatbeviteli mező jelenik meg a kiválasztott oszlop megfelelő cellájában.

MATEMATIKUSOK Tabla szerkesztése													
ID	Név	Ukrán név	Ország	Ország változtatása	Nemzetiség	Szul. év	Hely születet	Halál év	Hely meghalt	Kép	Kép bevitel	Bővebben	DELETE
2	Neumann János	Джон Френк Нейман	Magyarország		Emegy	1903	Budapest	1957	Vashington	Neumann.jpg	+		
20	Isaac Newton	Исаак Ньютон	Nagy-Britannia		Emegy	1643	Emegy	1727	Emegy	newton.jpg	+		
51	Abel Niels Hendrik	Абел Нильс Хенрик	Norvégia		Emegy	1802	Emegy	1829	Emegy	abel.jpg	+		
52	Banach Stefan	Банаш Стефан	Lengyelország		Emegy	1892	Emegy	1945	Emegy	Banach.jpg	+		
53	Barrow Isaac	Барроу Исаак	Nagy-Britannia		Emegy	1630	Emegy	1677	Emegy	barrow.jpg	+		
54	Bernoulli Johann I.	Бернулі Йоганн	Svájc		Emegy	1667	Emegy	1748	Emegy	bernoulli_johann.jpg	+		
55	Bernoulli Jacob	Бернулі Якоб	Svájc		Emegy	1654	Emegy	1705	Emegy	Bernoulli_Jacob.jpg	+		
56	Bernoulli Daniel	Бернулі Даниїл	Svájc		Emegy	1700	Emegy	1782	Emegy	bernoulli_daniel.jpg	+		
57	Bessel Friedrich	Бессель Фрідріх	Németország		Emegy	1784	Emegy	1846	Emegy	Bessel.jpg	+		
58	Leibniz Gottfried	Лейбніц Готтфрід	Németország		Emegy	1646	Emegy	1716	Emegy	leibniz.jpg	+		
61	Euler Leonard	Ейлер Леонард	Svájc		Emegy	1707	Basel	1783	Szentpétervár	euler.jpg	+		
62	Cauchy Augustin Louis	Каві Аґустин	Franciaország		Emegy	1789	Párizs	1857	Socout	cauchy.jpg	+		
96	Wiles Andrew	Вілс Ендрю	Nagy-Britannia		Emegy	1953	Cambridge	1953	Emegy	Wiles_Andrew.jpg	+		
105	Weierstrass Karl	Вейерштрасс Карл	Németország		Emegy	1815	Ennigerloh (Ehringro)	1897	Berlin	Weierstrass.jpg	+		
106	Gauss Carl Friedrich	Гаусс Карл Фрідріх	Németország		Emegy	1777	Braunschweig	1855	Göttingen	gauss.jpg	+		
113	Archimedes	Архімедес	Görögország		Emegy	-287	Emegy	-212	Emegy	archimedes.jpg	+		
114	Aranyos	Араньос	Magyarország		Emegy	1	Emegy	Emegy	Emegy	aranyos.jpg	+		
116	Árpádok II.	Арпадов II	Magyarország		Emegy	Emegy	Emegy	Emegy	Emegy	Emegy	+		
117	Bolyai Farkas	Боліай Фаркас	Magyarország		Emegy	1775	Marosvásárhely	1856	Marosvásárhely	Bolyai_Farkas.JPG	+		
118													
119													

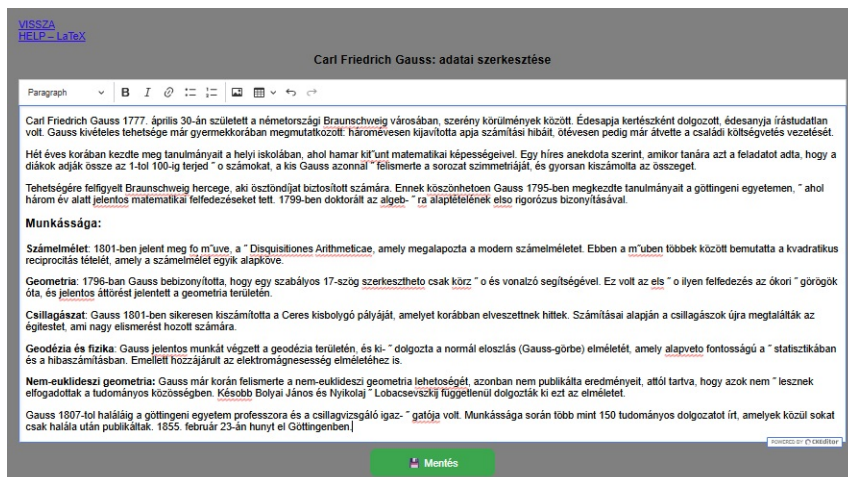
3.8. ábra. Egyébb adatok kitöltése

Miután kitöltöttem a mezők jelentős részét eljutottam a bővebben mezőig, itt nem egy kiugró beviteli mező jelenik meg, hanem egy másik oldalra visz ez a gomb, mely egy nagyobb szerkeszthető beviteli mezőt tartalmaz.



3.9. ábra. Bővebben mező

A megnyíló felületen lehetőség van szöveg szerkesztésére, itt egy előre meghatározott 12 px betűméret van, emellett be lehet állítani a betűtípusát, dőltm, vastag betűket, valamint számozott és jelölt listákat lehet létrehozni, valamint képek, táblázatok beillesztése is van lehetőség.



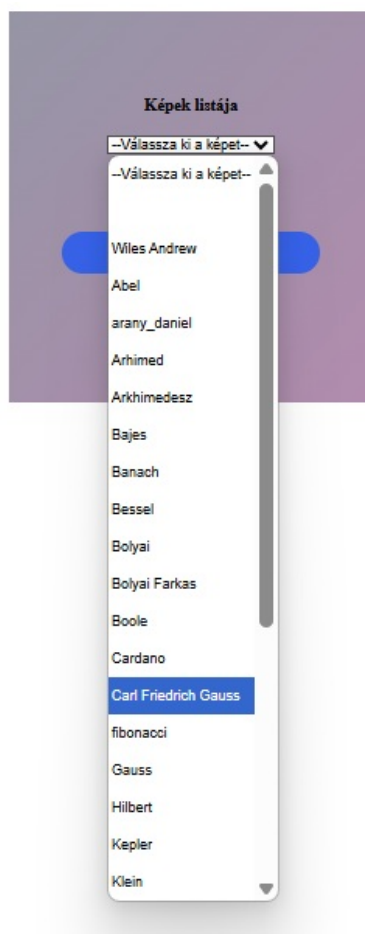
3.10. ábra. Bővebben mező

Miután egy tudós összes adatát feltöltöttem, kitöltöttem az összes beviteli mezőt, egy utolsó mező maradt hátra, ami a képek felöltése, ezt arra használtam, hogy a tudós-ról megjelenítsek egy képet az oldalon.

Kép	Kép bevitele
Neumann.jpg	+
newton.jpeg	+
abel.jpeg	+
Banach.jpg	+
barrow.jpeg	+
bernoulli_johann.jpeg	+
Bernoulli_Jacob.jpg	+
bernoulli_daniil.jpeg	+
Bessel.jpeg	+
lejb niz.jpeg	+
euler.jpeg	+
cauchy.jpg	+
Wiles_Andrew.jpg	+
Weierstrass.jpg	+
gauss.jpeg	+
arhimed.jfif	+
arhimed.jfif	+
<i>Empty</i>	+
Bolyai_Farkas.JPG	+
thalesz.jpg	+
Gauss.jpg	+

3.11. ábra. Kép hozzáadás mező

Az ikonra kattintva megjelenik egy lista mely a már feltöltött tudósokhoz tartozó képeket tartalmazza.



3.12. ábra. Képek listája

A listában csak olyan képek jelennek meg, melyek előzőleg már fel lettek töltve, ezek azonnal kiválaszthatóak, de ha éppen nem érhető el a kiválasztott tudóshoz a megfelelő kép, akkor a Képek menüpont segítségével lehet új képeket feltölteni a szerverre, mely a feltöltés után elérhető lesz a képek listájában is.

[VISSZA a főoldalra](#)

[Új kép bevitele](#)

Show entries
 Search:

Képek tudósokról				
ID	Kép	Fájl	Szöveg	DELETE
1		abel.jpeg	Abel	
2		Bolyai.jpg	Bolyai	
4		gauss.jpeg	Gauss	
5		newton.jpeg	Newton	
6		Banach.jpg	Banach	
7		leibniz.jpeg	Leibniz	
8		pascal.jpeg	Pascal	
9		Bessel.jpeg	Bessel	
10		Neumann.jpg	Neumann János	
81		Wiles_Andrew.jpg	Wiles Andrew	

Showing 1 to 10 of 28 entries

[Previous](#)
[1](#)
[2](#)
[3](#)
[Next](#)



3.13. ábra. Képek menüpont megnyitása

A megnyitott menüpontban az Új kép bevitelére kattintva felugrik egy ablak, melyben a számítógépről be lehet tölteni a megfelelő képet, majd a mentés gomb után el lehet kezdeni a mentés folyamatát, mely egy már meglévő listához adja a képet.



3.14. ábra. Új kép feltöltése

Az új kép tallózása, majd mentését követően megjelenik még egy ablak, ahol egy megnevezést kell adni a képnek, annak érdekében, hogy a listából a lehető legkönnyebben elérhető legyen.

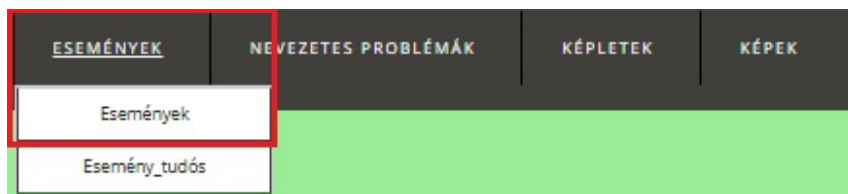


3.15. ábra. Új kép feltöltése

A kép elnevezése, mentése után a tudósok menü kép mezőjében a megjelenik a feltöltött kép, melyet ki lehet választani, majd hozzá lehet adni a tudóshoz.

3.2.2. A korszakhoz tartozó események feltöltése

A tudósok adatai feltöltése után a következő amit meg szerettem volna valósítani, az a XIX. és XX. század Nugat-Európa matematika történetének a főbb eseményei feltöltése a weboldalra, ehhez az események menüpontot használtam, hasonlóan a tudósok menüponthoz.



3.16. ábra. Események menüpont

Az események pont után megjelenik egy oldal, melyben a már hozzáadott események láthatóak, itt egy új létrehozásához egy gomb megnyomása után meg kell nevezni az eseményt egy felugró ablakban, majd ki lehet tölteni a többi nem kötelező mezőt.



3.17. ábra. Események menü megnyitása

A mezők kitöltése után az esemény leírását meg lehet adni a bővebben mezőben, itt a szerkesztési lehetőségeket használva külön bontottam egyes a korszakra jellemző eseményeket, valamint képeket és táblázatokat is fel lehet használni.

The screenshot shows a LaTeX editor interface. At the top, there's a title bar with "VISSZA", "HELP", and "LaTeX" links. Below it, the document title is "Az analízis és algebra fejlődése a XIX.századi Nyugat-Európában" fogalmanak története. The editor has a toolbar with various icons for text formatting and insertion. The main text area contains the following content:

Az analízis fejlődése a XIX. században

A 19. század matematikai vizsgálódásai mélyreható elméleti változásokat és újszerű tudományos megközelítéseket hoztak létre, amelyek alapvetően formálták át a matematika tudományának szerkezetét és módszertanát. A matematikai analízis fejlődésének legjelentősebb mérföldköveit és elméleti fordulatait ismertetjük a következőkben.

A XIX. század eleje: Az analízis megerősítése és a határértékek fogalmának kialakítása

A XIX. század során bekövetkező szociális és kulturális változások gyökeresen átalakították Európa civilizációjának karakterét, miközben a technikai innovációk és tudományos feltárások gyökeresen megváltoztatták az emberek életmódját. A múlt század első harmadában a matematikai analízis még alakulóban volt: bár a differenciál- és integrál számítás módszertana már kellően kidolgozott volt, addig a kapcsolódó matematikai fogalmak és definíciók tudományos háttérének teljes körű megalapozása még váratott magára. A matematika területén a sorozatok és végtelen sorok elemzése régóta ismert volt, ám a konvergencia és a határérték tudományos szempontból pontos meghatározása még váratott magára. Akkoriban a matematikai kutatások fő iránya a gyakorlati alkalmazások felé fordult az integrál- és differenciálszámítás terén, miközben egyidejűleg az elméleti fejlődés is számottevő volt.

1820-1830: A határértékek és a sorozatok elméleti alapjai

A 19. század folyamán a művészeti és kulturális szféra mélyreható változásokon esett át, amelyeket különböző stílusirányzatok, mint a romantika és a realizmus alakítottak és formáltak. A korszak bővelkedett művészeti és szellemi áttörésekben, amelyek 3 mélyrehatóan alakították át a kor szellemi horizontját és kifejezőmódjait. A múlt század első évtizedeiben a tudósok aprólékos munkával alakították ki és vezették be a határérték fogalmát, ami döntő jelentőségűnek mutatkozott a matematikai analízis tudományának előre lendítésében. A matematika történetében az egyik úttörő fogalom meghatározást Augustin-Louis Cauchy végezte el, aki rendkívül pontos és alapos munkájával tudományos szempontból megalapozta és megreformálta a fogalom addigi értelmezését. Cauchy matematikai munkássága rendkívül jelentős volt az analízis tudományában, mivel "o dol- gozta ki a konvergencia modern értelmezését, amelyet mind sorozatokra, mind függvényekre alkalmazni lehetett."

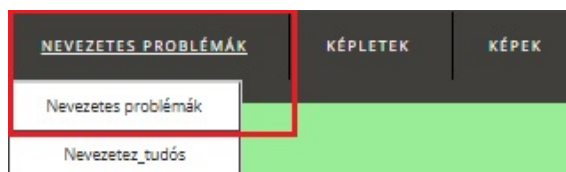
At the bottom of the editor, there is a green button labeled "Mentés".

3.18. ábra. Események bővebben

A mentés gomb lenyomása után már elérhetővé válik az oldalon a megfelelő menüpont alatt a bevitt adatom.

3.2.3. Elméletek feltöltése

A tudósok és az események felöltése után az elméletek feltöltése maradt hátra, ezt a nevezetes problémák menüpont alatt töltöttem fel.



3.19. ábra. Nevezetes problémák

A pont kiválasztása után már a megszokott módon elkezdtem felötlteni az adatokat. Kitöltöttem a kötelező megnevezés, valamint a nem kötelező ágazat és évszám mezőket is.

VISSZA a főoldalra

Új "nevezetes probléma" bevitele +

Show 50 entries Search:

NEVEZETES PROBLÉMÁK Tábla szerkesztése									
ID	Probléma neve	Probléma neve-UA	Év_1	Ágazat	Ágazat változtatása	Év_2	Probléma leírása	Bovebben	DELETE
14	A nagy Fermát sejtés (tétel)	Белая теорема Ферма	1637	számelmélet		1993			
18	sssfdfdfdfdf	Empty	Empty	analitikus geometria		Empty			
23	aaaaaaaa	Empty	1111	matematika		Empty			
25	Galois-tétel	Основная теорема теории Галуа	1832	matematika		Empty			

Showing 1 to 4 of 4 entries

Previous 1 Next

3.20. ábra. Nevezetes problémák menu megnyitása

A következő mező a Probléma leírása, mely megnevezi a probléma, tétel, elmélet pontos nevét, majd leírja a definícióját egy külön oldalon mely hasonlóan tartalmazza a megfelelő mezőket.

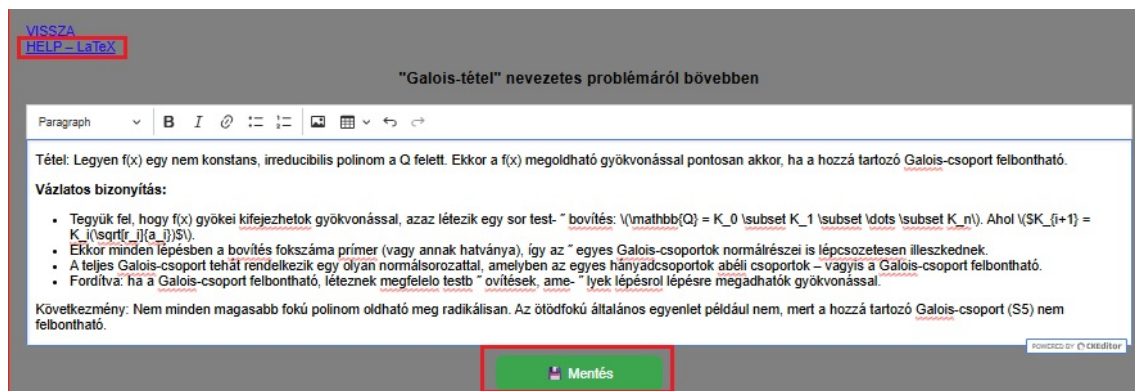
VISSZA

NEVEZETES PROBLÉMÁK "Leírás" szerkesztése						
ID	Tudos_Kép1	Kép1 bevitele	Tudós neve	Probléma leírása	Tudos_Kép2	Kép2 bevitele
25	Galois.jpg	+	Évariste Galois	Nem minden magasabb fokú polinom oldható meg radikálisan. Az ötödfokú általános egyenlet például nem, mert a hozzá tartozó Galois-csoport (S5) nem felbontható.	Empty	+



3.21. ábra. Nevezetes problémák rövid leírása

Miután ezzel a rövid leírással is végeztem, következett a bővebben mező kitöltése, melyet arra használtam, hogy egy tétel definícióját, levezetését, esetleg bizonyítását levezessem.



3.22. ábra. Nevezetes problémák leírása bővebben

Ebben a részben nagy hasznomra vált az, hogy a képleteket be lehetett tölteni LaTeX formában, ehhez a szerkesztő felületen lévő HELP - Latex linkre kellett kattintanom, mely megnyit egy oldalt, majd ezen az oldalon lehetőség van különböző képletek bevitelére, meglévőkh másolására, melyek Latex formátumban vannak feltöltve. Itt több új még az oldalon nem létező képleteket töltöttem fel. Miután beírtam Latex formában és adtam neki egy megnevezést, mentés gombra kattintva megjelent a listában, melyből a másolás gombra kattintva be tudtam illeszteni a szövegszerkesztőbe a megfelelő helyre.

[VISSZA](#)

LaTeX Sógó Kategóriák szerint

Keresés (pl. integrál)

Összes
int
limit
matrix
trig
Többi

Név (kategória.név)	LaTeX	Előnézet	Műveletek
aq	$a^2 + b^2 = c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$	Másol Szerk Töröl
er	$e^{i\pi} + 1 = 0$	$e^{i\pi} + 1 = 0$	Másol Szerk Töröl
Galois-tétel1	$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$	$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$	Másol Szerk Töröl
int.1	$\int x \, dx$	$\int x \, dx$	Másol Szerk Töröl
int.2	$\int_a^b f(x) \, dx$	$\int_a^b f(x) \, dx$	Másol Szerk Töröl
limit.5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	Másol Szerk Töröl
limit.a	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	Másol Szerk Töröl
matrix.2x2	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	Másol Szerk Töröl
matrix.det	$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	Másol Szerk Töröl
s	$s = \sqrt{a^2 + b^2}$	$s = \sqrt{a^2 + b^2}$	Másol Szerk Töröl
trig.basic	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Másol Szerk Töröl

Új képlet hozzáadása

Galois-tétel

$K_{i+1} = K_i(\sqrt[i]{a_i})$

Hozzáadás

$K_{i+1} = K_i(\sqrt[i]{a_i})$

Alaphelyzet

3.23. ábra. Képletek feltöltése Latex formában

A megfelelő adatok feltöltése után egy ellenőrzést követően a hibákat javítottam, majd véglegesítettem a mentést. Ezután az általam feltöltött információk elérhetővé váltak mindenki számára, aki a II.Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola oldalán a belső honlapra kattintva a Matematika-informatika tanszék menüt kiválasztva rákattint a Matematika Történele weboldal linkjére.

Összegzés

A diplomamunkám megvalósítása során sikerült mélyebb betekintést nyernem a XIX. és XX. század matematikatörténetébe. Megismertem olyan nagy tudósokat és elméleteiket, amelyeket korábban nem ismertem ilyen átfogó módon, valamint betekintést nyertem az egyes korszakok főbb jellemzőibe is. A megfelelő adatok összegyűjtése során számos szakirodalmat olvastam át, és ezek alapján felismertem, hogy egyes matematikatörténeti események különböző forrásokban meglepően eltérő módon jelennek meg. Ez jól mutatja, hogy a történelem nem csupán tényeken, hanem az egyes szerzők értelmezéseinek sokféleségén is alapul. Miután a két korszakot ugyanazon szempontok alapján csoportosítottam, világossá vált számomra, mennyi fejlődésen és változáson ment keresztül a matematika, illetve hogy milyen szilárd alapot tud nyújtani más tudományterületek számára is. Munkám során abba a problémába ütköztem, hogy egyes történelmi eseményekről vagy tudósok életéről különböző szakirodalmak eltérő adatokat közöltek. Az eltérések kiszűréséhez segítségül hívtam a mesterséges intelligenciát, amely jelentős mennyiségű forrás alapján segített az adatok összevetésében, és a leggyakrabban előforduló, valószínűleg megbízható információk kiválasztásában. A megfelelő adatok összegyűjtése sok időt vett igénybe, de közben rendkívül sokat tanultam a matematika történetéről. Az adatgyűjtést követően megkezdtem azok feltöltését a weboldalra, tematikusan csoportosítva. Ennél a folyamatnál többször előfordult, hogy egyes képformátumokat a rendszer nem tudott kezelni, de ezen kívül a munka többi része zökkenőmentesen haladt. Összességében a diplomamunkám során átfogó képet kaptam a XIX. és XX. századi matematikatörténetről, új ismeretekre tettem szert, elmélyültem a forráskritikai munkában, és betekintést nyertem egy weboldal struktúrájába is. A kivitelezés során a matematika több ágával megismerkedtem, így tágult a látóköröm a különböző matematikai korszakokkal és eseményekkel kapcsolatban.

Резюме

Під час виконання дипломної роботи мені вдалося глибше ознайомитися з історією математики XIX і XX століть. Я познайомився з видатними вченими та їхніми теоріями, які раніше не знав настільки ґрунтовно, а також отримав уявлення про основні риси окремих історичних періодів. Під час збору відповідних даних я прочитав велику кількість наукової літератури, і на основі цього усвідомив, що одні й ті самі історичні події в математиці можуть бути представлені зовсім по-різному в різних джерелах. Це яскраво демонструє, що історія ґрунтується не лише на фактах, а й на різноманітності інтерпретацій окремих авторів. Після того, як я класифікував два періоди за однаковими критеріями, стало очевидно, наскільки значний розвиток і зміни відбулися в математиці, а також яку міцну основу ця наука може надати іншим галузям. Під час роботи я зіткнувся з проблемою, що різні джерела надавали суперечливу інформацію про деякі історичні події або життя вчених. Для відфільтрування розбіжностей я скористався штучним інтелектом, який, проаналізувавши велику кількість джерел, допоміг зіставити дані та відібрати найбільш вірогідну і часто повторювану інформацію. Збір відповідних даних зайняв багато часу, але водночас я значно поглибив свої знання з історії математики. Після збору даних я почав їх завантаження на вебсайт, тематично згрупувавши їх. У цьому процесі кілька разів виникала проблема з тим, що система не підтримувала певні формати зображень, проте в іншому робота проходила без ускладнень. У підсумку під час виконання дипломної роботи я отримав цілісне уявлення про історію математики XIX і XX століть, здобув нові знання, поглибив навички критичного аналізу джерел, а також ознайомився зі структурою вже створеного вебсайту. Під час реалізації роботи я ознайомився з кількома галузями математики, що дозволило мені розширити свій кругозір щодо різних історичних періодів та подій у цій науці.

Irodalomjegyzék

Forrás: Ahlfors, L. V. *Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

- [1] Akhil Mathew. *Emmy Noether and the structure of modern algebra*. Notices of the AMS, 67(3): 360–366, 2020.

Forrás: Benedek István: *Komplex függvénytan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

- [2] Bolyai János: *Appendix – A tér abszolút tudománya*, 1832. Elérhető: <https://mek.oszk.hu/16700/16715/16715.pdf>
- [3] C. F. Gauss, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hamburg, 1809.
- [4] Csirmaz, L.: *A matematika történetének vázlata*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2008.
- [5] Cultura.hu: *Carl Friedrich Gauss, “a matematikusok fejedelme”*, 2017. Elérhető: <https://cultura.hu/kultura/240-eve-szuletett-carl-friedrich-gauss>
- [6] David E. Rowe. *Hilbert’s Problems: What Are They, and Why Do They Matter?* Notices of the AMS, 46(7): 674–681, 1999.
- [7] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1899.
- [8] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1899.
- [9] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, Vol. 1–3. Addison-Wesley, 1997.
- [10] Emmy Noether. *Idealtheorie in Ringbereichen*. Mathematische Annalen, 83(1):24–66, 1921.
- [11] Egri Zoltán: *Carl Friedrich Gauss élete és matematikája*, ELTE TTK, 2009. Elérhető: <https://doksi.net/hu/get.php?lid=13949>

- [12] Encyclopædia Britannica: *Bernhard Riemann*. Elérhető: <https://www.britannica.com/biography/Bernhard-Riemann>
- [13] Gauss, C. F.: *Levelezések Farkas Bolyaihoz*, 1804–1832. Részletek magyarul is elérhetők különféle történeti válogatásokban.
- [14] Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1), 173–198.
- [15] Hermann Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover Publications, 1931.
- [16] Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3-4), 172–198.
- [17] Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*.
- [18] Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*.
- [19] Hraskó Péter: *A kvaternióktól az algebrai struktúrákig, Dimenziók – Matematikai lapok*, 2020. Elérhető: https://epa.oszk.hu/05300/05331/00008/pdf/EPA05331_dimenziok_2020_025-033.pdf
- [20] Hraskó Péter: *Kanonikus transzformációk a klasszikus mechanikában*, 2015. Elérhető: <https://peter.hrasko.com/files/kanonikus.pdf>
- [21] Kántor Sándor. *Kurt Gödel nemteljességi tételei és hatásuk a matematikára*. Matematikai Lapok, LXVII. évfolyam, 2020/1. szám, pp. 25–34.
- [22] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. *Every Planar Map is Four-Colorable*. Illinois Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 3, 1977.
- [23] Klein, Felix: *Erlanger Programm*, 1872. Elérhető: https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Erlangen_Program
- [24] Kurt Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38:173–198, 1931.
- [25] Lobacsevszkij, Ny. I.: *A tér elmélete*, 1829. Magyar kiadás: Gondolat Kiadó, 1980.
- [26] Malinoczki Gergely: *Évariste Galois – A csoportelmélet úttörője*, ELTE, 2019. Elérhető: [https://zsomlei.web.elte.hu/Tan%C3%ADt%C3%A1s/Di%C3%A1kok%20\(szak,%20phd,%20tdk\)%20dolgozatai/malinoczki_gergely%20galois.pdf](https://zsomlei.web.elte.hu/Tan%C3%ADt%C3%A1s/Di%C3%A1kok%20(szak,%20phd,%20tdk)%20dolgozatai/malinoczki_gergely%20galois.pdf)

- [27] MatekArcok: *Cauchy, Augustin Louis*. Elérhető: <https://matekarcok.hu/cauchy-augustin-louis/>
- [28] Molnár László. *Neumann János és a számítógép születése*. Matematikai Lapok, LX-VII. évfolyam, 2010/2. szám, pp. 45–52.
- [29] Noether, E. (1921). Idealtheorie in Ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83(1), 24-66.
- [30] P. L. Chebyshev, *Des valeurs moyennes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1867.
- [31] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812.
- [32] Riemann, B.: *On the Hypotheses Which Lie at the Foundations of Geometry*, előadás: 1854. Elérhető: <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/Geom.html>
- [33] S. D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Bachelier, Paris, 1837.
- [34] Simonovits András: *A matematika történetéből: Galois élete és elmélete*, BME, 2016. Elérhető: https://math.bme.hu/~diffe/staff/simonovits_mattori.pdf
- [35] Szendrei, J.: *A matematika története*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
- [36] Tóth László. *Neumann János játékelméleti munkássága*. Közgazdasági Szemle, LI. évf., 2004/3. sz., pp. 267–278.
- [37] Tudás.hu: *Gauss – a matematika fejedelme*, 2021. Elérhető: <https://tudas.hu/gauss-a-matematika-fejedelme>
- [38] Tóth László: *Geometriai alapfogalmak – Euklidészi és nem-euklidészi szemlélet*, ELTE jegyzet, 2015. Elérhető: https://math.elte.hu/dload/tananyagok/geom_alapfogalmak.pdf
- [39] University of St Andrews: *Augustin-Louis Cauchy – Biography*. Elérhető: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/>
- [40] University of California, Berkeley: *Augustin-Louis Cauchy*. Elérhető: <https://math.berkeley.edu/~robin/Cauchy/>
- [41] University of St Andrews: *Évariste Galois – Biography*. Elérhető: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois/>

- [42] University of St Andrews: *Bernhard Riemann – Biography*. Elérhető: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann/>
- [43] Varga Zsuzsanna: *William Rowan Hamilton – Egy zseni portréja*, *Dimenziók – Matematikai Közlöny*, 2020/1., 25–33. o. Elérhető: https://epa.oszk.hu/05300/05331/00008/pdf/EPA05331_dimenziok_2020_025-033.pdf
- [44] Wikipédia: *Augustin Cauchy*. Elérhető: https://hu.wikipedia.org/wiki/Augustin_Cauchy
- [45] Waldhausen Tamás: *A kvaterniók*, Szegedi Tudományegyetem, Matematikatörténeti előadásanyag. Elérhető: https://www.math.u-szeged.hu/~twaldhantanas/regi/szamfog_2020tavasz/kvaterniok.html
- [46] Wikipédia: *Évariste Galois*. Elérhető: https://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois
- [47] Yvonne Kosmann-Schwarzbach. *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer, 2011.
- [48] Інститут Кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. (2023). Історія розвитку обчислювальної техніки в Україні. Київ.

Ábrák jegyzéke

1.1. Carl Friedrich Gauss arcképe	13
1.2. Augustin-Louis Cauchy arcképe	15
1.3. Évariste Galois arcképe	17
1.4. Bernhard Riemann arcképe	19
1.5. William Rowan Hamilton arcképe	21
2.1. David Hilbert arcképe	37
2.2. Emmy Noether arcképe	38
2.3. Kurt Gödel arcképe	39
2.4. Neumann János arcképe	41
2.5. Alan Turing arcképe	42
3.1. Belső honlap menüpont	47
3.2. Belső honlap admin nézet elérése	48
3.3. Belső honlap admin nézet bejelentkezési felület	49
3.4. Belső honlap admin nézet	50
3.5. A weboldal menüpontjai	51
3.6. Tudós adatok feltöltése	52
3.7. Felugró ablak kitöltése	53
3.8. Egyébb adatok kitöltése	53
3.9. Bővebben mező	54
3.10. Bővebben mező	54
3.11. Kép hozzáadás mező	55
3.12. Képek listája	56
3.13. Képek menüpont megnyitása	57
3.14. Új kép feltöltése	58
3.15. Új kép feltöltése	58
3.16. Események menüpont	59
3.17. Események menü megnyitása	59
3.18. Események bővebben	60
3.19. Nevezetes problémák	60
3.20. Nevezetes problémák menu megnyitása	61

3.21. Nevezetes problémák rövid leírása	61
3.22. Nevezetes problémák leírása bővebben	62
3.23. Képletek feltöltése Latex formában	63

Nyilatkozat

Alulírott, Pisták Dániel-János, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Я, Піштак Данієл-Янош Яношович, підтверджую, що користувалась Chat GPT (<https://chat.openai.com/>) у період з 6 лютого по 4 травня 2025 року для наступних цілей:

1. Формування структури роботи та розподіл змісту за основними розділами.
2. Редагування, стилізація тексту та перевірка помилок у власній роботі.
3. Покращення академічного стилю, зокрема граматики, пунктуації та лексики.
4. Опрацювання таблиць у хронологічному порядку.
5. Узагальнення та впорядкування використаної літератури.

Отримані таким чином дані були використані для доопрацювання та перероблення тексту з метою отримання кінцевого варіанту роботи.

Піштак Данієл-Янош Яношович

Звіт подібності

метадані

Назва організації

Hungarian College of Higher Education Ferenc Rakoczi II Transcarpathian

Заголовок

Diplomamunka Pisták Dániel

Науковий керівник / Експерт

Автор Габрієлла Пап

підрозділ

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II

Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.

1.21%

1.21%

КП 1

0.49%

0.49%

КЦ

25

Довжина фрази для коефіцієнта подібності 2

12085

Кількість слів

95702

Кількість символів

Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати навмисний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

Заміна букв	Б	120
Інтервали	A→	0
Мікропробіли	␣	0
Білі знаки	Б	0
Парафрази (SmartMarks)	a	13

Подібності за списком джерел

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Колір тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

10 найдовших фраз

Колір тексту

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://cyberleninka.ru/article/n/dispersionnaya-interpretatsiya-sootnosheniya-neopredelennostey-dlya-energii-i-vremeni-i-korotkoimpulsnoe-lazernoe-izluchenie	18 0.15 %
2	https://dun.unistra.fr/ipm/unit/bayesian/co/1_5_7.html	16 0.13 %
3	https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskie-obekty-struktury-i-dokazatelstva-vvedenie-k-tematicheskomu-vypusku	14 0.12 %

4	https://fr.wikisource.org/wiki/Recherches_sur_la_probabilit%C3%A9_des_jugements_en_mati%C3%A8re_criminelle_et_en_mati%C3%A8re_civile/Pr%C3%A9ambule	13 0.11 %
5	https://mathvoices.ams.org/featurecolumn/2021/12/01/alan-turing-computable-numbers/	13 0.11 %
6	http://www.ar-php.org/stats/al-kashi/doc/Al-Kashi_Background_Statistics.pdf	12 0.10 %
7	https://mathvoices.ams.org/featurecolumn/2021/12/01/alan-turing-computable-numbers/	11 0.09 %
8	https://www.nordicwittgensteinreview.com/article/view/3435	11 0.09 %
9	https://epdf.tips/the-ontology-of-spacetime-volume-1-philosophy-and-foundations-of-physics.html	10 0.08 %
10	ITTAP-2023_paper_74.pdf 10/6/2023 Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University (науково-дослідна частина)	10 0.08 %

з домашньої бази даних (0.00 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-----------	--

з програми обміну базами даних (0.08 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	ITTAP-2023_paper_74.pdf 10/6/2023 Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University (науково-дослідна частина)	10 (1) 0.08 %

з Інтернету (1.13 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ДЖЕРЕЛО URL	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://mathvoices.ams.org/featurecolumn/2021/12/01/alan-turing-computable-numbers/	42 (4) 0.35 %
2	https://cyberleninka.ru/article/n/dispersionnaya-interpretatsiya-sootnosheniya-neopredelennostey-dlya-energii-i-vremeni-i-korotkoimpulsnoe-lazernoe-izluchenie	18 (1) 0.15 %
3	https://dun.unistra.fr/ipm/unit/bayesian/co/1_5_7.html	16 (1) 0.13 %
4	https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskie-obekty-struktury-i-dokazatelstva-vvedenie-k-tematicheskomu-vypusku	14 (1) 0.12 %
5	https://fr.wikisource.org/wiki/Recherches_sur_la_probabilit%C3%A9_des_jugements_en_mati%C3%A8re_criminelle_et_en_mati%C3%A8re_civile/Pr%C3%A9ambule	13 (1) 0.11 %
6	http://www.ar-php.org/stats/al-kashi/doc/Al-Kashi_Background_Statistics.pdf	12 (1) 0.10 %
7	https://www.nordicwittgensteinreview.com/article/view/3435	11 (1) 0.09 %
8	https://epdf.tips/the-ontology-of-spacetime-volume-1-philosophy-and-foundations-of-physics.html	10 (1) 0.08 %

Список прийнятих фрагментів (немає прийнятих фрагментів)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗМІСТ	КІЛЬКІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-------	---------------------------------------