

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II
Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний № _____

Кваліфікаційна робота
Аналіз давньогрецької математики

Тар Бенце-Балаж Олександрович

Студент II-го курсу

Освітня програма «Середня освіта (Математика)»

Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Рівень вищої освіти: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри

Протокол № 3 / 2024

Науковий керівник:

Головач Й. І.
(*д.т.н, професор*)

Завідувач кафедрою математики та інформатики :

Кучінка Каталін Йожефівна
(*к. ф.-м. н, доцент*)

Робота захищена на оцінку _____, «__» _____ 202_ року

Протокол № _____ / 202_

**Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

Кафедра математики та інформатики

**Кваліфікаційна робота
Аналіз давньогрецької математики**

Рівень вищої освіти: магістр

Виконавець: студент II-го курсу

Тар Бенце-Балаж Олександрович

освітня програма «Середня освіта (Математика)»

спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Головач Й. І.**

(д.т.н, професор)

Рецензент: **Міца О. В.**

(Зав. Кафедри ІУСТ УжНУ, д.т.н., професор)

Берегове
2025

Зміст

Вступ	8
1 Значення та застосування історії математики	9
1.1 Предмет історії математики	9
1.2 Місце історії математики в освіті	9
1.3 Приклади застосування історії математики в навчанні	10
1.4 Зв'язок математики з іншими науками	11
2 Давньогрецька система числення	13
3 Грецька математика до Евкліда (VI ст. до н. е.– III ст. до н. е.)	16
3.1 Діяльність Фалеса	16
3.2 Математика Піфагора та піфагорійців	18
3.3 Поява доведення	20
3.4 Елейська школа	21
3.4.1 Філософія Парменіда	21
3.4.2 Апорії Зенона	22
3.5 Діяльність Евдокса	23
3.6 Архітас	24
3.7 Платонівські тіла	25
3.8 Арістотель	27
3.9 Класичні математичні задачі	27
3.9.1 Тричастковий поділ кута	28
3.9.2 Квадратура кола	28
3.9.3 Подвоєння куба (делоська проблема)	29
4 Елліністичний період (323 р. до н. е. – 30 р. до н. е.)	30
4.1 Діяльність Архімеда	30
4.2 Діяльність Евкліда	33
4.2.1 Аксиоматична система Евкліда	34
4.3 Конічні перетини Аполлонія	36
4.4 Астрономія	37
4.4.1 Діяльність Арістарха	37
4.4.2 Діяльність Ератосфена	38
4.4.3 Діяльність Гіппарха	39
4.5 Ктесібій	40
4.6 Нікомед	41
5 Римський період (30 р. до н. е. – 641 р. н. е.)	42

5.1	Причини занепаду грецької математики	42
5.2	Наукові досягнення римського періоду	43
5.3	Герон	43
5.4	Менелай	44
5.5	Теон Смирнський	45
5.6	Клавдій Птолемей	45
5.7	Діофант	47
5.8	Папп	49
5.8.1	Виникнення проєктивної геометрії	49
5.8.2	Ланцюги кіл Паппа	50
5.8.3	Антична евристика	50
5.9	Теон Александрійський, Гіпатія та Прокл	51
6	Представлення історико-математичного лексикону	53
	Список літератури	58
	Список ілюстрацій	63
	Додатки	65
	Висновок	72

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

Matematika és Informatika Tanszék

AZ ÓKORI GÖRÖG MATEMATIKA ELEMZÉSE

Magiszteri dolgozat

Készítette: Tar Bence Balázs

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Holovács József

(műszaki tudományok doktora, professzor)

Recenzens: Mitsa O. V.

(UNE IVRT tanszék tanszékvezetője, műszaki tudományok doktora, professzor)

Tartalomjegyzék

Bevezetés	8
1. A matematikátörténet jelentősége és alkalmazása	9
1.1. A matematikátörténet tárgya	9
1.2. A matematikátörténet helye az oktatásban	9
1.3. Példák matematikátörténet alkalmazására a tananyagban	10
1.4. A matematika kapcsolata más tudományokkal	11
2. A görög számírás	13
3. Euklidész előtti görög matematika (I. e. VI. - I. e. III. sz.)	16
3.1. Thalész munkássága	16
3.2. Püthagorasz és a püthagoreusok matematikája	18
3.3. A bizonyítás megjelenése	20
3.4. Az eleai iskola	21
3.4.1. Parmenidész filozófiája	21
3.4.2. Zénón apóriái	22
3.5. Eudoxosz munkássága	23
3.6. Arkhütaasz	24
3.7. Platóni testek	25
3.8. Arisztotelész	27
3.9. Kaliszikus matematikai problémák	27
3.9.1. Szögharmadolás	28
3.9.2. A kör négyszögesítése	28
3.9.3. Kockakettőzés (Délósi probléma)	29
4. Hellenisztikus kor (I. e. 323 – I. e. 30)	30
4.1. Arkhimédész munkássága	30
4.2. Euklidész munkássága	33
4.2.1. Euklidész axiómarendszere	34
4.3. Apollóniosz kúpszeletei	36
4.4. Csillagászat	37
4.4.1. Arisztarkhosz munkássága	37
4.4.2. Eratoszthenész munkássága	38
4.4.3. Hipparkhosz munkássága	39
4.5. Ktészibiosz	40
4.6. Nikomédész	41
5. Római kor (I. e. 30 – I. u. 641)	42

5.1. A görög matematika hanyatlásának okai	42
5.2. A római korszak tudományos eredményei	43
5.3. Héron	43
5.4. Menelaosz	44
5.5. Szmürnai Theón	45
5.6. Ptolemaiosz Klaudiosz	45
5.7. Diophantosz	47
5.8. Papposz	49
5.8.1. A projektív geometria születése	49
5.8.2. Papposz-körláncok	50
5.8.3. Antik heurisztika	50
5.9. Alexaandriai Theón, Hüpatia és Proklosz	51
6. A matematikatörténeti lexikon bemutatása	53
Összegzés	57
Irodalomjegyzék	58
Ábrák jegyzéke	63
Mellékletek	65

Bevezetés

Az ókori görög matematika kiemelkedő szerepet játszik a matematikatörténetben. Az ókori görögök munkássága olyan alapelveket teremtett meg, amelyek nélkülözhetetlenek és alapjaiban hozzájárultak a modern tudományok fejlődéséhez. A görög matematika nemcsak új matematikai ismereteket hozott, hanem megalapozta a tudományos gondolkodás módszertanát is, amely a deduktív logikára és a bizonyításokra épít.

Munkám alapját a legfontosabb történeti források és elemzések képezik, amelyek a görög matematika módszertani és történeti feldolgozására összpontosítanak. A kutatás nehézségei között szerepel, hogy az ókori görög matematika forrásai szétagoltan és különböző formátumokban érhetők el. A legtöbb forrás papíralapú, ami nem teszi lehetővé a gyors és hatékony keresést, míg a digitálisan elérhető anyagok gyakran nem interaktívak, korlátozott kereshetőséggel rendelkeznek. Mindez megnehezíti a kutatók, diákok és érdeklődők számára az információk gyors elérését, ami akadályozza az ismeretek hatékony feldolgozását és felhasználását.

A diplomamunka célja a görög matematika fejlődésének és legfontosabb eredményeinek átfogó bemutatása, valamint a digitális ismeretterjesztés elősegítése a téma szélesebb körű hozzáférhetősége érdekében. Kutatásom eredménye online formában válik elérhetővé a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola belső honlapján, ezzel segítve a téma iránt érdeklődőket és a jövőbeli kutatásokat.

1. A matematikatörténet jelentősége és alkalmazása

1.1. A matematikatörténet tárgya

A matematikatörténet magában foglalja mindazon tényeket, amelyek a matematika fejlődése során felhalmozódtak, az ezekre épülő, további ellenőrzést igénylő tudományos hipotéziseket, valamint a tények általánosításából származó elméleteket és tételeket. Emellett ide tartozik a matematika módszertana is, vagyis azoknak a törvényeknek és elméleteknek az összessége, amelyek a matematikai vizsgálatok során alkalmazott módszereket határozzák meg. Ezek az elemek szoros kapcsolatban vannak egymással, folyamatosan alakultak ki a történelem során, és a mai napig fejlődnek. A matematikatörténet célja, hogy tisztázza, hogyan zajlanak ezek a fejlődési folyamatok, és milyen irányba vezetnek - ezzel átfogó képet adva a matematika múltjáról, jelenéről és jövőbeli lehetőségeiről.

1.2. A matematikatörténet helye az oktatásban

Felmerülhet a kérdés, hogyan járulhat hozzá a matematikatörténet a tanítási módszerek gazdagításához?

A matematikatörténet integrálása az oktatásba számos előnnyel jár, ezért az iskolának, pedagógusoknak érdemes tudatosan alkalmazniuk ezt az eszközt, hogy a matematika oktatása inspirálóbb legyen. Ezáltal a diákok tágabb perspektívából szemlélhetik a matematika szerepét és alkalmazásait, hozzájárulva a tantárgy szépségének felfedezéséhez és a tanulók motivációjának növeléséhez.

A digitális térben zajló tanulás fokozott önállóságot kíván a diákoktól, miközben a tanárok számára is új módszertani megközelítések szükségesek. A cikk szerint a matematika történetének tanulmányozása, különösen a történeti–genetikus módszer és a régi matematikusok feladványainak bevonása, segíti a fogalmak mélyebb megértését és a gondolkodás fejlesztését. A történeti szemlélet strukturálható időrendi, problémaközpontú vagy területi alapon, és hozzájárul ahhoz, hogy a matematika ne csupán egy elvont tudományként, hanem gazdag kulturális örökségként jelenjen meg az oktatásban. ([16])

A matematikatörténeti elemek használata segíthet abban, hogy a diákok ne csak megtanulják, de valóban megértsék és hosszabb távon is megőrizték a tananyagot. Ha például tudják, hogy egy-egy képlet mögött milyen történelmi helyzet vagy kiemelkedő gondolkodó áll, az segíti a fogalmak kontextusba helyezését. A matematikatörténet segíthet a matematika nyelvezetének elsajátításában, mely átláthatóbbá teszi a tanulási folyamatot. A különböző matematikai jelölések (pl. $\sum$, $\in$, $\exists$) nem öncélúak, hanem a számítások egyszerűsítését és a feladatok átláthatóságát szolgálják. Emellett a nagy matematikusokhoz kapcsolódó történetek – legyenek akár izgalmas felfedezések vagy emberi sorsok – közelebb hozzák a tantárgyat, és segítenek abban, hogy a diákok könnyebben emlékezzenek az egyes fogalmakra. Ezáltal a matematika nemcsak tanulhatóbb, hanem

szerethetőbb is lesz. ([4]: 8-15. o.)

Felsőoktatásban a matematika szakos képzés célja, hogy a hallgatók elsajátítsák a matematikai problémák önálló megoldásához szükséges ismeretanyagot, és megfelelő gyakorlati jártasságra tegyenek szert. A matematika történetének oktatása felkészíti a hallgatókat a tudományos kutatás és tanítás terén való további tevékenységre, valamint hozzájárul ahhoz, hogy a jövőbeli matematikusok képesek legyenek hozzájárulni a tudományos közösséghez és abban elhelyezkedni.

1.3. Példák matematikatörténet alkalmazására a tananyagban

Hasonló háromszögek

Amikor a gúláról, vagy hasonló háromszögekről tanítunk, érdemes megemlíteni Thalész történetét, aki egy bot segítségével mérte meg egyiptomi utazása során a piramis magasságát. Ehhez a háromszögek hasonlóságának alapelvét alkalmazta, ami lehetővé tette számára, hogy pontosan meghatározza a piramis magasságát anélkül, hogy fel kellett volna másznia rá. ([10]: 75. o., [15]: 23-24. o.)

A Pitagorasz-tétel

A Pitagorasz-tételnek számos bizonyítása létezik, melyet a diákok is könnyen megértenek. Ilyen például Garfield bizonyítása az 1870-es évekből. A név hallatán azonnal felfigyelhetnek a diákok, és egyből eszükbe juthat a közkezdvelt karakter a meséből. Habár az említett bizonyítás szerzője valójában az Egyesült Államok 20. elnöke, James A. Garfield volt, ez az asszociáció tökéletes alkalmat nyújt arra, hogy egy szórakoztató stílusban ismertessük a tétel bizonyítását. Ez a bizonyítás a trapéz területképletére épül, tehát amikor legközelebb a trapézról tanítunk, jusson eszünkbe, hogy lehetőség adódik a Pitagorasz-tétel bizonyítására vagy megismétlésére is. ([4]: 22. o.)

Arkhimédész törvénye

Az alábbi Arkhimédészhez kapcsolódó történet kiváló arra, hogy megragadja a diákok figyelmét az óra kezdetén.

HIERÓN király áldozati koronát csináltatott, de gyanította, hogy az erre a célra szánt arany egy részét az ötvös család módon ezüsttel pótolta. A király a csalás bizonyítását ARKHIMÉDÉSZre bízta. A kiváló fizikus fürdés közben, észlelve súlyának csökkenését, jött rá a róla elnevezett fizikai törvényre, amely alkalmas volt a csaló mester leleplezésére. Örömeiben a „heuréka” (megtaláltam) szót kiáltozva, meztelenül rohant haza, hogy a meghamisított koronára alkalmazza a csak imént felfedezett törvényt. ([10]: 179. o.)

Arkhimédész emelőtörvénye

Egy másik elbeszélés szerint a királyt azzal a kijelentéssel lepte meg, hogy a szokás szerint szárazföldön épülő hadihajót az uralkodó egyedül, egymaga bocsáthatja a vízre, mégpedig a hajó teljes személyzetével együtt. A kezdetben kétkedő király nagy öröme az ARKHIMÉDÉSZ által emelőkből és csigákból összeállított szerkezet segítségével ez a művelet sikerült is. HIERÓN ekkor állítólag megparancsolta, hogy ARKHIMÉDÉSZ legvalószínűtlenebb kijelentéseit is köteles mindenki elhinni. Bizonyára ezek közé a kijelentések közé tartozott a nagy fizikusnak az emelőtörvényre alapozott, szállóigévé lett mondása, hogy „Adjatok egy szilárd pontot és kifordítom sarkaiból a világot.” ([10]: 179. o.)

Ez az idézet remek bevezetőként szolgálhat az emelőkarok tanításához a fizikában. Első hallásra nagyon furának tűnhet, és felkeltheti a fiatal közönség kíváncsiságát.

Kísérlet: Nyissuk ki az osztályterem ajtaját. Válasszunk ki két tanulót a demonstrációhoz. Egyikük álljon az ajtó zárjához közel (a forgásponttól távolabb), a másik pedig az ajtópánt közelében (a forgásponttól közelebb). A zárhoz közel álló diák próbálja meg becsukni az ajtót úgy, hogy befelé tolja azt. Eközben a pánthoz közelebb álló diák próbálja megnyitva tartani az ajtót, szintén tolással.

Könnyen észrevehető, hogy a zárhoz közelebb álló diák sokkal könnyebben képes becsukni az ajtót, míg az ajtópánthoz közelebb álló diák jelentős erőfeszítése ellenére sem képes hatékonyan ellenállni. Ez azért van, mert a zárnál álló diák nagyobb erőkart használ, így ugyanakkora erő mellett nagyobb forgatónyomatékot hoz létre.

A kísérletet megismételhetjük úgy, hogy a diákok helyet cserélnek, illetve különböző távolságokra helyezkednek az ajtópánttól. A változtatások tovább erősítik a megértést.

1.4. A matematika kapcsolata más tudományokkal

A matematika kulcsszereplője a tudományos világkép formálásának, és minden olyan törekvésnek, amely a valóság pontos, rendszerezett és logikus megértésére irányul. A matematika az emberi gondolkodás egyik legáltalánosabb eszköze. Nem véletlenül nevezik a matematikát gyakran minden tudomány szolgálojának, hiszen módszerei, logikai rendszere és modellalkotási képessége nélkülözhetetlenek.

A matematika számos tudomány fejlődésének mozgatórugója, mely új kérdéseket vet fel, új eszközöket kínál. A társadalomtudományokban, mint például a közgazdaságtanban, pszichológiában vagy szociológiában, a matematika segít az összefüggések felismerésében, adatok rendszerezésében és elemzésében.

A természettudományokban a matematika segítségével lehet pontos méréseket végezni, modelleket alkotni, törvényszerűségeket leírni, és előrejelzéseket készíteni. A ma-

tematikai algoritmusok, a statisztikai módszerek és a geometriai modellezés szinte minden modern tudományágban fontos szerepet töltenek be. A deduktív gondolkodás és az axiomatikus rendszerek a tudományos kutatás alapvető eszközeinek számítanak.

2. A görög számírás

Az első görög agyagtáblákon a következő számok szerepeltek:

1	5	10	100	1000
) ,	))))),	o	\	◇
		—	o	⊙

1. ábra. Az első ógörög számjegyek ([3]: 61. o., 3.2. ábra)



2. ábra. 2466 felírása ([3]: 62. o., 3.3 ábra)

A görög számjelölések a hieroglifikus számírás rendszerébe tartoztak, amely az egyiptomihoz hasonló elveken alapult. Ebben a rendszerben a számokat balról jobbra írták, a legnagyobb értékű jelöléssel kezdve.

Az első tisztán görög számírás az *attikai* volt. Ez a jelölésrendszer a görög számnevek kezdőbetűire épült. Minden számértéket a megfelelő szó első betűje jelölt, kivéve az egyest, amely saját különálló jelet kapott.

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10 ⁴	5·10 ⁴
Ι	Γ	Δ	Ϟ	Η	Ϛ	Χ	Ϟ	Μ	Ϟ

3. ábra. Az attikai számok ([3]: 62. o., 3.4 ábra)

Példa attikai számokkal:

$$43224 = \text{MMMMXXXHH}\Delta\Delta\text{III} \quad ([10]: 69. \text{ o.})$$

Az attikai számírást egészen az időszámításunk kezdetéig használták, majd fokozatosan felváltotta az *alfabetikus rendszer*, amelyben minden számhoz egy-egy görög betűt rendeltek.

A számokat úgy különböztették meg a szavaktól, hogy vonalat húztak a számok fölé. Például:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
egyesek	A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
tízesek	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Ϟ
	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
százások	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Φ	Ω	Ϡ
	ρ	σ	θ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
ezresek	,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ϛ	,ζ	,η	,θ

4. ábra. A görög alfabetikus számjegyek ([3]: 62. o., 3.5 ábra)

$$1234 = \overline{\alpha\sigma\lambda\delta}$$

Az alfabetikus jelölésben a görögök az ezresek elé mindig vesszőt írtak.

$$, \alpha = 1000; \quad , \gamma = 3000$$

A tízezret továbbra is M-mel jelölték. A tízezszeres számát egy számban M fölött jelölték a következőképpen:

$$20\,000 = \overset{\beta}{M} \quad \text{vagy} \quad 140\,000 = \overset{\rho\delta}{M}$$

A görögök szorzás során a számokat gyakran részekre bontották (tízesek, százások stb.), majd az egyes részösszegeket külön számították ki, mielőtt összeadták volna.

$$\begin{array}{r}
 25 \cdot 43 \\
 25 \cdot 40 = 800 \\
 20 \cdot 3 = 60 \\
 5 \cdot 40 = 200 \\
 5 \cdot 3 = 15 \\
 \hline
 1075
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \kappa \cdot \mu = \omega \\
 \kappa \cdot \gamma = \xi \\
 \varepsilon \cdot \mu = \sigma \\
 \varepsilon \cdot \gamma = \iota\varepsilon \\
 \begin{array}{c}
 \nearrow \searrow \\
 \nearrow \searrow \\
 \nearrow \searrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 , \alpha \\
 o\varepsilon \\
 , \alpha o\varepsilon
 \end{array}
 \end{array}$$

5. ábra. Példa szorzás műveletre ([3]: 63. o., 3.6 ábra)

Az alfabetikus számírás átláthatóbb feljegyzéseket tett lehetővé, és egyszerűbbé vált a számok leírása. Azonban a helyiértékek meghatározása és a nulla hiánya miatt a matematikai műveletek elvégzése bonyolult maradt.

Ezeket a problémákat a *abacus* (számolótable) segítségével oldották meg, mely lehetővé tette, hogy a számításokat fizikailag szemléltessék és gyorsabban végezzék el, különösen az összeadás és kivonás esetében. A számok elrendezése a számolótablelén lé-

nyegében a helyiérték szerinti csoportosítást jelentette. Az egyesek, tizedesek, százaskok és egyéb helyiértékek pozícióját külön vonalak vagy mélyedések jelölték.

A görög matematika fejlődésével megjelentek a tört számok is. Az egységszám-lálójú törteket az egész számok megjelölésével írták le:

$$\delta = 4, \quad \delta' = \frac{1}{4}$$

$$\theta = 9, \quad \theta' = \frac{1}{9}$$

A közönséges törtek kezdetben egy olyan elrendezésben jelentek meg, ahol a számláló a nevező alatt helyezkedett el, majd később a mai írásmódhoz hasonlóan a számláló felülre, a nevező pedig alulra került.

$$\frac{2}{3} = \frac{\gamma}{\beta} \implies \frac{2}{3} = \frac{\beta}{\gamma}$$

A törtek létezését a görögök sokáig tagadták, annak ellenére, hogy a gyakorlat mást mutatott. A görög *filozófia* és matematikai szemléletmód nem támogatta a tört fogalmát, mivel az nem illeszkedett a *sámelmélet* filozófiai alapjaihoz. Definíció szerint az egységekből összetevődő szám osztható volt, az 1 viszont nem. Ezért az oszthatatlanság, amely az egységre vonatkozott, nem engedte meg, hogy a törteket természetes módon elfogadják.

A görög matematikai gondolkodás számára az arányok (racionális számok: két egész szám hányadosa) voltak azok, amelyeket érvényesnek tekintettek. Az egész számok és az azok közötti arányok a világ rendjét és harmóniáját tükrözték, amit a görögök a matematikai tisztaság részeként értékelték.

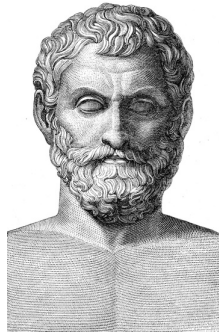
Viszont az irracionális számok, mint a $\sqrt{2}$, már problémát jelentettek számukra, mert az ilyen számok nem feleltek meg a racionális számok szabályainak, így nem lehetett őket tiszta tört formában kifejezni. Arkhimédész volt az első között, aki szakított a *filozófia* által megalapozott egység fogalmával, és elkezdte a törteket a ma ismert módon használni.

Csillagászatban a görögök a babilóniaiak 60-as számrendszerét alkalmazták, de saját számjegyeikkel jegyezték le az értékeket. Ebben a rendszerben jelent meg először a nulla fogalma. Ez jelentős előrelépést jelentett a számolásban, azonban a görögök nem fejlesztettek ki egy teljes értékű helyiértékes rendszert. Bár minden elméleti alapjuk megvolt hozzá, végül ezt a lépést később az indiai matematikusok tették meg. ([10]: 73. o.)

3. Euklidész előtti görög matematika (I. e. VI. - I. e. III. SZ.)

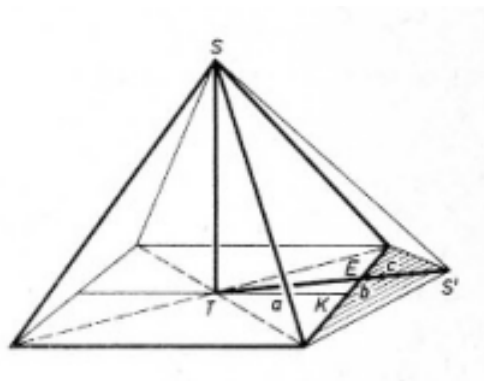
A korszak kezdetét I. e. VI. századra tehetjük, amikor a görög városállamok, Babilon és Egyiptom tudományos eredményeit felhasználva és továbbgondolva kezdték meg a saját matematikai eredményeik kidolgozását. A görögök a tudás általánosítására törekedtek, és az átvett tudást egy egészen új szintre emelték. A matematikai eredményeket gyakran filozófiai megfontolásokkal ötvözték. Ebben az időszakban kezdett kialakulni a matematika, amely a bizonyításon alapuló gondolkodásra épül.

3.1. Thalész munkássága

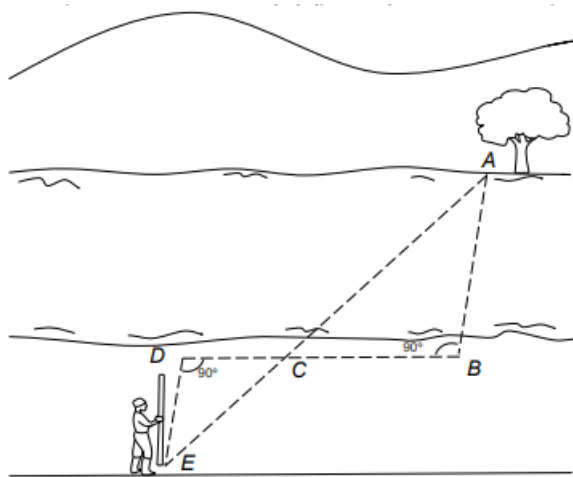


6. ábra. Thalész ([17])

Thalész (I. e. 624–548) ([6]) Milétoszban született, görög matematikus, természetfilozófus, fizikus és csillagász volt. A görög matematikatörténet egyik legkiemelkedőbb alakja, a **matematika atyjának** is nevezik. Az elsők között volt, aki nem csupán tapasztalati úton szerzett ismeretekre támaszkodott, hanem logikai bizonyításokkal is alátámasztotta matematikai állításait. Ez a szemléletmód jelentős előrelépést jelentett a görög tudományos gondolkodásban, és megalapozta a későbbi matematikai bizonyítások módszertanát.



7. ábra. A piramis magassága ([10]: 75. o., 10. ábra)



8. ábra. Tengeri távolságok mérése ([15]: 23. o., 6. ábra)

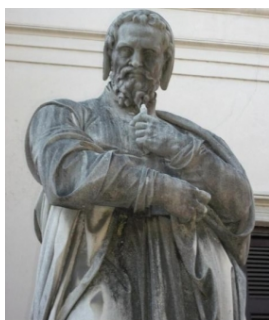
Élete során beutazta Egyiptomot és Mezopotámiát, ahol az ottani tudományos eredményekkel ismerkedett meg. Nevéhez fűződik egy napfogyatkozás előrejelzése i. e. 585-ben, amely békekötésre készítette a méd és lüd hadseregeket. Thalész egyéb eredményei közé tartozik a piramisok magasságának meghatározása (6. ábra; [10]: 75. o.), valamint a tengeri távolságok mérésére kidolgozott módszere (7. ábra; [10]: 76. o., [15]: 22-23. o.).

Plutarkhosz szerint: „*Thalész volt annak a kornak egyetlen bölcselője, aki a hétköznapi szinten félelmekkel szemlélte a világot, a többiek politikai érdekért nyerték el a bölcselő nevet.*”

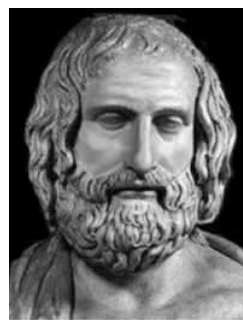
Thalészt a "hét bölcs" egyikeként is számon tartják, akiket a kiváló erkölcsi magatartásuk, bölcsességük és társadalmi szerepvállalásuk miatt emeltek ki. Bár a bölcsék listája forrásonként változó, Thalész minden változatban szerepel, ami kiemeli jelentőségét az ókori görög szellemi életben.

Matematikai munkássága során számos geometriai tételt is bizonyított:

- az átmérő felzi a kört ([3]: 64. o.).
- az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlőek ([3]: 64. o.).
- két háromszög egybevágó, ha két szögük és egy oldaluk megegyezik ([3]: 64. o.).
- a csúcsszögek egyenlőek ([3]: 64. o.).
- a félkörbe írt háromszög derékszögű (Thalész-tétel) ([3]: 64. o., [15]: 22. o.).
- a párhuzamos szelők tétele ([15]: 20-21. o.).



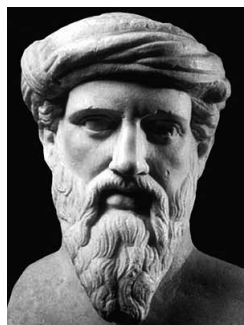
9. ábra. Anaximandrosz ([18])



10. ábra. Anaximenész ([19])

Thálész Milétosz városában hozta létre az első görög filozófiai iskolát. Követőivel (Anaximandrosz (I. e. 610-546) és Anaximenész (I. e. 585-525)) a természet racionális megismerésére törekedtek, és elvetették a mitológiai világmagyarázatokat. Ehelyett a valóság anyagi alapjait keresték. Tanításaik szerint a világ egyetlen alapvető anyagból (*arche*) származik, amelyből minden létrejön, és amelybe minden visszatér. A *természetfilozófia* teremtette meg azt a gondolkodásmódot, amely szerint a világ jelenségei és eredete megérthető racionális gondolkodással és megfigyeléssel. A milétoszi gondolkodók szerint a világ sokfélesége mögött egységes elv húzódik meg. A természet jelenségeit logikus törvényszerűségek szerint próbálták megérteni, és keresték az ellentétek működését, amelyek a világ változásait mozgatják (pl. meleg–hideg, nedves–száraz).

3.2. Püthagorasz és a püthagoreusok matematikája



11. ábra. Püthagorasz ([20])

Püthagorasz (I. e. 582-497) ([6]) a Milétoszhoz közeli Szamosz szigetén született. Filozófus és matematikus volt, akinek munkássága a matematika, a zene és a kozmológia összefonódásában érte el csúcspontját.

Követőit *püthagoreusoknak* nevezték, akik négy tudománnyal foglalkoztak (*püthagoreus mathéma*): aritmetika, geometria, *csillagászat* és zene ([10], [9]).

A püthagoreusok között az isteni harmónikus törvény (*logosz*) keresése és a számok titkainak megértése jelentett alapot. Pitagorasznál minden az egységből ered, minden létező dolognak száma van, és minden viszonyt, ami az ember körül történik, le lehet

számokkal írni. Püthagorasz fejezte ki a zenei harmóniát számokkal. Ahogy a számok az egységből származnak és harmóniájuk fellelhető például a zenében, hasonlóképpen a *kozmosz* (világegyetem) rendje és harmóniája egyetlen forrásból, Istentől ered.

Sok felfedezésről nem tudni, hogy követői közül valakihez vagy maga Püthagorasz nevéhez köthető. A püthagoreusok sokat foglalkoztak számelmélettel és egyes számoknak különleges jelentést tulajdonítottak. Jelképük a szent *tetakrüsz* (10) volt, ami a teljességet jelképezte. ([3]: 65. o.)

A görögök különösen gazdag és rendszerezett ismeretanyagot halmoztak fel a *számelmélet* területén. Már az ókorban különbséget tettek páros és páratlan számok között, és részletesen vizsgálták azok tulajdonságait. A prímszámokat (azok a számok, amelyek csak önmagukkal és eggyel oszthatók) és az összetett számokat (azok a számok, amelyek több osztóval rendelkeznek) szintén ismerték.

Egyik legnagyobb felfedezésük, hogy a négyzet átlójának és oldalának hossza összemérhetetlen (irracionális szám). Bár a tételt ismerték, a bizonyítás később jelent meg (Waerden bizonyítása [1] 50. o.)

Az "*Elemek*" ([2]) IX. könyvében Euklidész (I. e. 365-300) ([6]) részletesen foglalkozik ezekkel a számfogalmakkal. Több tétel is bemutatja a páros és páratlan számok tulajdonságait, valamint a számok viszonyaival és összetételével kapcsolatos szabályokat. Különösen a 21., 22., 29. és 30. tételek adnak fontos eredményeket ezekkel kapcsolatban. ([9]: 49. o.)

A számokat fekete és fehér kavicsokkal rakták ki téglalap-, háromszög-, négyzet- és vonalszámok alakjában.



12. ábra. Figurális számok ([9]: 49. o.)

További általánosítások a *figurális számok* kapcsolatban ([3]: 65. o.), valamint a pitagoraszai számhármak színes bemutatása és származtatása ([8]: 10. o.) részletesen olvashatók a megjelölt forrásokban.

3.3. A bizonyítás megjelenése

Szabó Árpád *"Hogyan vált a matematika deduktív tudománnyá?"* című munkájában azt a kérdését vizsgálja, hogy milyen körülmények között és miért alakult ki a bizonyításokra épülő deduktív gondolkodásmód a görög matematikában.

Szerinte ez a változás nem csupán egy belső matematikai fejlődés eredménye, hanem egy mélyebb intellektuális forradalom következménye, amelyet a görög filozófiai gondolkodás hozott létre. A bizonyítás nem csupán egy módszerként jelent meg a matematikában, hanem annak alapvető struktúráját alakította át, létrehozva a tudományos megismerés egyik legfontosabb eszközét.

A könyv szerzője rámutat arra, hogy az egyiptomi és babiloni matematikai gyakorlatokban nem volt szükség formális bizonyításokra, mivel ezek a kultúrák a matematikát elsősorban praktikus célokra, főként mérnöki, csillagászati és gazdasági problémák megoldására alkalmazták. A számítások helyességét a tapasztalat igazolta, így a matematikai állítások elfogadása empirikus alapon történt. Ezzel szemben a görögök számára a matematikai igazságok érvényessége túlmutatott az érzékszervi tapasztalatokon, és logikai érveléssel kellett igazolni.

Szabó Árpád különös figyelmet fordít az eleai filozófiára, amely szerinte döntő szerepet játszott a deduktív szerkezet kialakulásában. Az eleai Parmenidész filozófiája radikálisan új szemléletet hozott, és tanai alapjaiban befolyásolták a görög matematikai gondolkodást. Azt állította, hogy az érzékszervi tapasztalat nem megbízható a világ megismerésében, és az igazság csak a gondolkodás és a logikai érvelés útján érhető el.

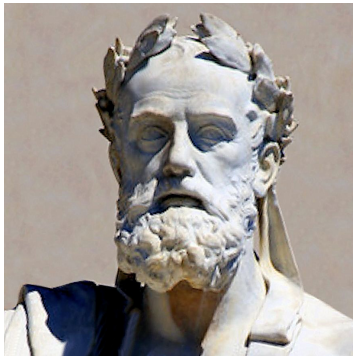
Parmenidész fontosnak tartotta a „nem-létező” fogalmának filozófiai megközelítését. Szerinte csak az létezhetséges, amiről gondolkodni tudunk, és ami logikailag ellentmondásmentesen kifejezhető. Ebből következik, hogy ha egy matematikai állítást igaznak akarunk tekinteni, azt nem lehet pusztán empirikus megfigyelésekre alapozni, hanem deduktív úton kell bizonyítani.

A görögök a deduktív módszer alkalmazásával megteremtették a matematika modern értelemben vett logikai struktúráját. A matematikai igazságokat nem csupán gyakorlati tapasztalatokból vagy intuícióból származtatták, hanem egy axiomatikus rendszerbe illesztették. Az állításokat korábban elfogadott axiómákból és bizonyított tételekből vezették le, így a matematika egy önálló, szigorúan logikailag felépített tudománnyá vált.

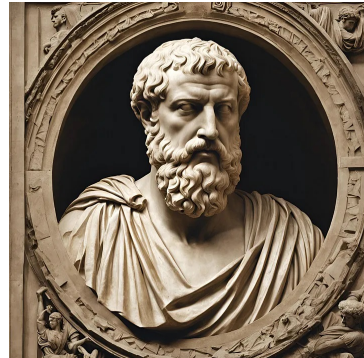
A deduktív matematika kialakulásával a görögök megteremtették azt a szemléletmódot, amely az egész tudományos gondolkodás és megismerés alapjává vált.

3.4. Az eleai iskola

3.4.1. Parmenidész filozófiája



13. ábra. Xenophanész ([21])



14. ábra. Parmenidész ([22])

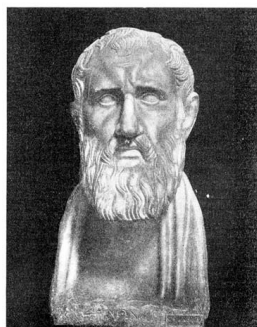
Az eleai iskola a I. e. 6–5. században virágzott dél-itáliai Elea városában. Bár Xenophanész (I. e. 576–484) ([6]) indította el a gondolkodási irányzatot, igazi rendszerré Parmenidész (I. e. 540–460) ([6]) fejlesztette. Az iskola legfőbb gondolata: az érzéki tapasztalat megtévesztő, az igaz megismerés csak az értelem révén lehetséges.

Későbbi követői főként dialektikus módszerekkel védték és fejlesztették tovább Parmenidész nézeteit.

Az eleai *filozófia* különösen elvont és spekulatív irányba fejlődött. Élesen szembehelyezkedett a milétoszi természetfilozófusokkal, akik a világ megismerését elsősorban az érzékszerveken keresztül vélték elérni. Ezzel szemben az eleaiak, főleg Parmenidész tanításában, azt vallották, hogy az érzékelés csupán csalóka látszat, és az igazi tudás csak a racionális gondolkodás révén ismerhető meg.

Parmenidész tanítása szerint a valóság egyetlen, oszthatatlan, változatlan és örök. Minden, ami sokaságként, mozgásként, keletkezésként vagy pusztulásként jelenik meg, csupán az érzékek által keltett illúzió. E gondolatmenet radikálisan szakított a korábbi filozófiai hagyományokkal, és olyan következtetésekhez vezetett, amelyek az utókort is mélyen foglalkoztatták. A filozófus nem riadt vissza a legparadoxabb állításoktól sem, ha azok logikailag következtek alapelveiből.

Parmenidész tanításait követve Zénón (I. e. 490-430) ([6]) a filozófiatörténet egyik első dialektikusaként vált ismertté. Híres apóriáiban – mint Akhilleusz és a teknős, vagy a repülő nyíl paradoxona – arra törekedett, hogy bebizonyítsa: ha elfogadjuk a mozgás és sokaság létezését, az logikai ellentmondásokhoz vezet. Így Zénón apóriái nem a józan ész elleni támadások voltak, hanem Parmenidész egységről szóló tanításának védelmei.



15. ábra. Eleai Zénón ([23])

3.4.2. Zénón apóriái

Zénón (I. e. 490-430) ([6]) Parmenidész tanítványa volt, filozófiáját az érzéki tapasztalattal szemben a racionális gondolkodás felsőbbrendűségére alapozta. Mesterének állításait paradoxonokkal védte, és azt akarta megmutatni, hogy ha elfogadjuk a sokaság és mozgás létét, logikai ellentmondásokba ütközünk.

Zénón *paradoxonjai* közül a legismertebbek a mozgás lehetetlenségét igyekeznek bizonyítani. Ezek a paradoxonok nem csupán szellemi játékok, hanem mély logikai és ontológiai kérdésekre mutatnak rá.

Zénón két leghíresebb paradoxonja:

Akhilleusz és a teknős: Akhilleusz versenyt fut a teknőssel, aki előnyt kap. Ekkor Akhilleusz sosem éri utol a teknőst, mert mire ő eléri azt a pontot, ahol a teknős volt, az már haladt tovább, és ez így megy a végtelenségig.

A repülő nyílvessző: Egy repülő nyíl egy adott pillanatban mozdulatlan, hiszen egy pillanatban sem változtat helyet. Ha minden időpillanatban nyugalomban van, akkor hogyan tud mozogni?

Zénón jelentősége történeti szempontból abban rejlik, hogy elsőként mutatott rá a végtelen problematikájára ([9]: 106. o.).

3.5. Eudoxosz munkássága



16. ábra. Eudoxosz ([24])

Eudoxosz (I. e. 408-355) ([6]) a görög matematika egyik kiemelkedő alakja. Eudoxosz legfőbb eredményei közé tartozik az *arányelmélet*, a "*kimerítés*" módszere és a *szférák elmélete*.

Eudoxosz arányelméletét Euklidész "*Elemek*" ([2]) műve őrizte meg számunkra az V. és X. könyvben.

A kimerítés módszerét gyakran tekintik a későbbi integrálszámítás elméleti előfutárának, noha a közkeletű tévhittel ellentétben nem tekinthető sem a differenciál-, sem az integrálszámítás kezdetleges formájának mint számítási algoritmusnak. Ezt az eljárást elsősorban indirekt bizonyítási eszközként használták, mely előzetesen megsejtett geometriai összefüggések szigorú igazolására szolgált. ([7]: 6. o.)

Eudoxosz szférái (az első kozmikus modell), amely a bolygók mozgásának magyarázatára épült, szintén nagy hatással volt a későbbi *csillagászat* fejlődésére. A szférák elmélete azt javasolta, hogy az égitestek mozgását koncentrikus gömbök rendszere határozza meg, mindegyik gömb különböző sebességgel forog. A bolygók látszólagos mozgása a különböző szférák kombinált mozgásainak eredménye, és azokat a görögök a bolygók pályáján lévő hurkokkal próbálták leírni. Eudoxosz elképzelése előzménye volt a későbbi ptolemaioszi rendszernek, amely a geocentrikus világgépet alapozta meg. ([10]: 134. o.)

3.6. Arkhütasz



17. ábra. Arkhütasz ([25])

Arkhütasz (I. e. 428-365) ([6]) Dél-Itáliában, Tarasz városában született. Nemcsak matematikusként, hanem hadvezérként, filozófusként és feltalálóként is alkotott. A püthagoreus iskola utolsó nagy alakjaként is számon tartjuk.

Philolaosz, Szókratész kortársa, aki elsőként írta le a püthagoreus tanokat. Arkhütasz az ő tanítványa volt. Platónnal szoros barátságot ápolt.

Platón híres művében, az *Államban*, az általa ideálisnak tartott vezetők számára kötelezővé tette a matematika tanulmányozását. A tudás jelentős részét Arkhütasztól sajátította el.

Arkhütasz maga is jelentős eredményeket ért el. Eukleidész *"Elemek"* ([2]) című művének VIII. könyve szinte teljes egészében az ő eredményein alapul. Ebben főként mértani sorozatokról van szó – például arról, hogyan lehet két szám közé olyan köztes számokat beilleszteni, amelyek egymással és az eredetiekkel folyamatos arányban állnak.

Egy másik jelentős mű, a *„Kanon metszete”* (*Katatomé Kanónosz*) szintén az ő gondolataira épül. Ebben Arkhütasz a zeneelméletből kiindulva vizsgálta a számelméletet. Ő volt az első, aki a mechanikát matematikai alapokra helyezte. Rájött például arra, hogy a hangmagasság függ a húr rezgésének sebességétől – bár tévedett abban, hogy a magasabb hangok gyorsabban terjednének a levegőben, mint a mélyebbek.

Arkhütasz nehézkesen, körülményesen fogalmazott, de még így is sokat tanulhatunk belőle. Valószínű, hogy Eukleidész egyes fejezetei – főként azok, ahol ez a stílus érezhető – szintén tőle származnak.

A matematika szerepét az oktatásban különösen hangsúlyozta, melyet négy fő területre osztott:

1. aritmetika (számok nyugalomban)
2. *geometria* (alakzatok nyugalomban)
3. zene (számok mozgásban)
4. *csillagászat* (alakzatok mozgásban).

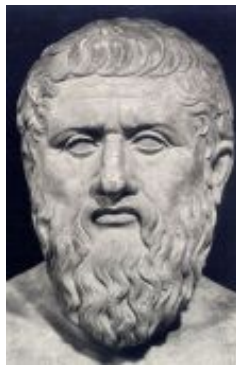
Ez volt a híres *matematikai quadrivium*, amely később a *trivium* (*nyelvtan, retorika, dialektika*) kiegészítésével együtt a „*hét szabad művészet*” rendszerét adta.

Arkhütasz emellett mechanikai eszközöket is készített: például kereplőt és egy repülő fagalambot.

Arkhütasz a kockakettőzéssel is foglalkozott. A problémát egy lenyűgöző, térbeli szerkesztéssel oldotta meg, amely három különböző felület (körhenger, körkúp, félgömb) metszéspontjára épült. Ez a szerkesztés nemcsak hogy meghaladta korának geometriai módszereit, hanem előrevetítette a térgeometria későbbi fejlődését is.

([10]: 114. o.)

3.7. Platóni testek



18. ábra. Platón ([26])

A szabályos testek, más néven *platóni testek*, az ókori görög gondolkodás egyik legszebb példái a *geometria* és a *filozófia* összefonódására. E testek különleges térbeli alakzatok, melyek minden oldala azonos szabályos sokszög, csúcsaikban pedig minden él azonos módon találkozik. Az öt szabályos testet már a püthagoreusok is ismerték. Platón (I. e. 427–347) ([6]) volt az, aki rendszerezte őket és filozófiai jelentőséget tulajdonított nekik. A *Timaios* című művében a világot felépítő elemekhez (föld, víz, levegő, tűz, éter) társította ezeket a testeket. Platón filozófiája szerint ezek a testek a világegyetem szerkezetének geometriai alapjai.

Arisztotelész Platón tanítványa volt, aki később másként közelítette meg a térbeli testek szerepét, inkább fizikai és anyagi szempontból elemezte őket, szemben Platón metafizikai és idealista megközelítésével. A szabályos testeket már inkább matematikai szerkezeteknek tekintette.

Euklidész "*Elemek*" ([2]) című könyvében bebizonyította, hogy csak öt szabályos test létezhet.

1. DEFINÍCIÓ. A poliéder a háromdimenziós térben lévő szilárd alakzat síkbeli sokszögek által határolt felülete. Ha két sokszög egynél több pontban találkozik, akkor egy teljes

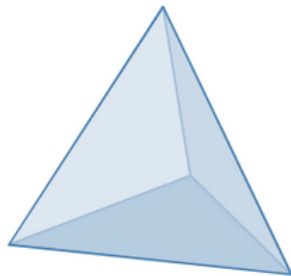
élüknek közösnek kell lennie. Ezeket a síkbeli sokszögeket a poliéder **oldalainak**, éleiket a poliéder **éleinek**, csúcsaikat pedig a poliéder **csúcsainak** nevezzük. ([11]: 4. o.)

2. DEFINÍCIÓ. Egy P poliéder **konvex**, ha a P két tetszőleges pontjára a közöttük lévő egyenes szakasz teljes egészében a poliéder által határolt szilárd alakzatban van. ([11]: 5. o.)

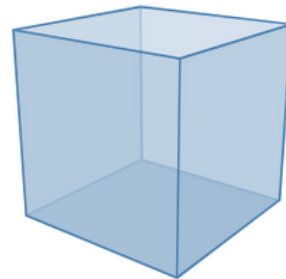
3. DEFINÍCIÓ. A **platóni test** olyan konvex poliéder, amelynek minden oldala egyenlő szabályos sokszög, és amelynek minden csúcsán ugyanannyi oldal található. ([11]: 5. o.)

Az öt szabályos test:

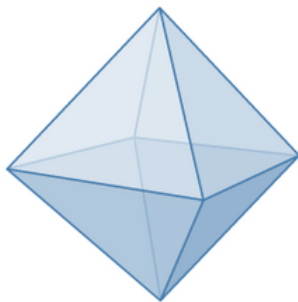
- **Tetraéder:** 4 szabályos háromszögből áll, 4 csúcsa és 6 éle van.
- **Hexaéder (kocka):** 6 négyzetből áll, 8 csúcsa és 12 éle van.
- **Oktaéder:** 8 szabályos háromszögből áll, 6 csúcsa és 12 éle van.
- **Dodekaéder:** 12 szabályos ötszögből áll, 20 csúcsa és 30 éle van.
- **Ikoszaéder:** 20 szabályos háromszögből áll, 12 csúcsa és 30 éle van.



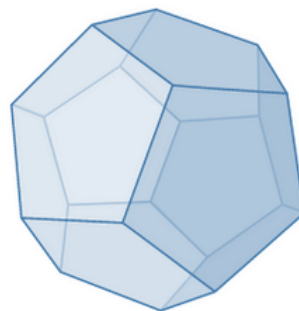
19. ábra. Tetraéder



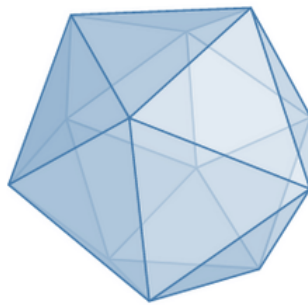
20. ábra. Hexaéder (kocka)



21. ábra. Oktaéder

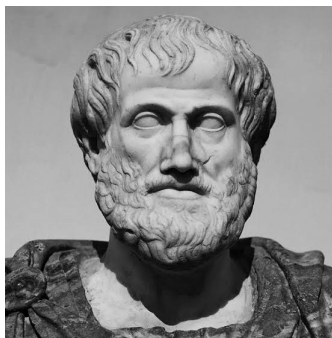


22. ábra. Dodekaéder



23. ábra. Ikozaéder

3.8. Arisztotelész



24. ábra. Arisztotelész ([27])

Arisztotelész (I. e. 384-322) ([6]) görög filozófus és matematikus volt. A makedóniai Sztageirában született, fiatalkorától a természettudományok és *filozófia* érdekelte. 17 éves korától Platón tanítványa volt Athénban. Később Nagy Sándor nevelőjeként szolgált, majd Athénba visszatérve saját iskolát alapított. Tanítványaival együtt a tudományok szinte minden ágát kutatta. Ő emelte a logikát tudománnyá, ezzel megalapozva a matematikai gondolkodást. Kidolgozta a *szillogizmus* elméletét, amely a deduktív következtetés és a matematikai bizonyítások alapja lett. Logikai rendszere két évezreden át meghatározta a tudományos érvelés szabályait. Az arányosság fogalmával is foglalkozott. Számára a szépség egyik kulcsa volt, amit geometriai elvekhez is kapcsolt.

3.9. Kalsszikus matematikai problémák

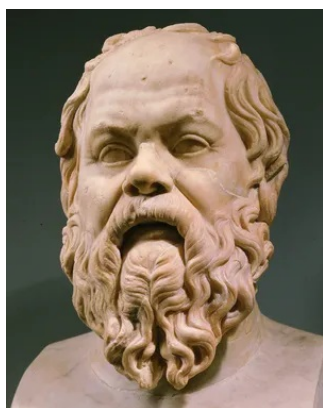
Platón filozófiája komoly hatást gyakorolt matematikai gondolkodás fejlődésére. A geometriát tekintette az emberi megismerés egyik legfőbb eszközének. Ennek szellemében alapította meg Athéni Akadémiáját, melynek bejáratán az alábbi felirat állt:

„Ne lépjen be az, aki nem ismeri a geometriát.”

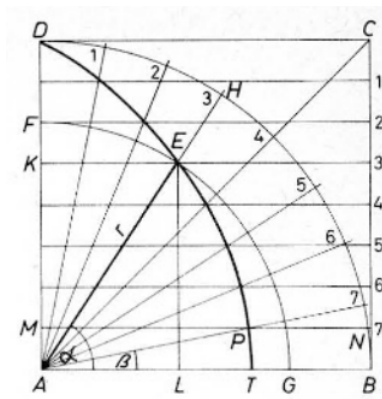
Az Akadémián folytatott kutatások a *geometria* logikai megalapozására irányultak. Ebben Arisztotelész (I. e. 384-322) ([6]), Platón tanítványa is jelentős szerepet játszott. Ő volt az, aki a logikát elsőként rendszerezett tudománnyá emelte.

Az Athéni Akadémiához köthetők az olyan nevezetes geometriai szerkesztési problémák, mint a *kockakettőzés*, a *szögharmadolás* és a *kör négyszögesítése*.

3.9.1. Szögharmadolás



25. ábra. Eliszi Hippiasz ([28])

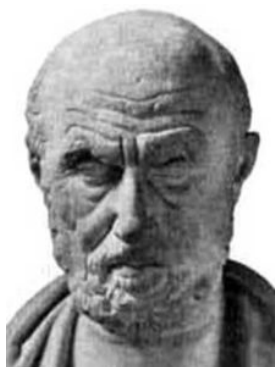


26. ábra. Triszektrix ([10]: 107. o., 40. ábra)

A feladat egy tetszőleges szög felosztása, három egyenlő részre körző és vonalzó segítségével.

Ezt a feladatot elsőként Eliszi Hippiasz (I. e. 420) ([6]) oldotta meg. A szögharmadoláshoz kapcsolódó legfontosabb matematikai érdeme az volt, hogy feltalált egy speciális görbét, amelyet *triszektrix*-nek nevezett el. Ez a görbe lehetővé tette egy szög három egyenlő részre osztását. Ez a módszer viszont nem euklidészi szerkesztés. ([10]: 106. o., [1]: 16. o.)

3.9.2. A kör négyszögesítése



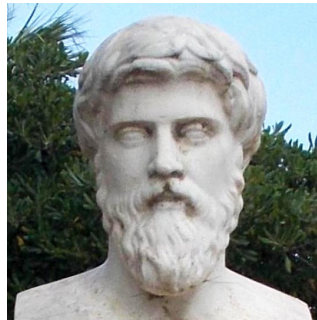
27. ábra. Khioszi Hippokratész ([29])

A feladat az, hogy egy adott területű körhöz vele egyenlő területű négyzetet kell szerkeszteni körző és vonalzó segítségével. Tehát, ha a kör területe $T = \pi \cdot r^2$, akkor a megszerkesztett négyzet oldala $x = r\sqrt{\pi}$ kell legyen. A probléma az, hogy egy $\sqrt{\pi}$

hosszúságú szakasz nem hozható létre pusztán körzővel és vonalzóval, ezért a kör négyszögesítése euklidészi szerkesztéssel lehetetlen.

A körnégyszögesítés megoldásában Khioszi Hippokratész (I. e. 450) ([6]) próbálkozását tekintjük a legkiemelkedőbbnek. Habár nem tudott egy adott körhöz pontosan vele egyenlő területű négyzetet megszerkeszteni, de újfajta módszert alkalmazott. A kör egyes részeit, az úgynevezett holdacskákat (körívek határolta síkidomokat) átalakította olyan alakzatokká, amelyeknek területe megegyezett egy-egy háromszög vagy trapéz területével. Ezzel ő lett az első, aki görbe határu síkidomokat sikeresen négyszögesített részlegesen. Bár ez még nem jelentette a kör teljes négyszögesítésének megoldását, Hippokratész eredményei fontos lépést jelentettek a probléma megértésében. ([10]: 101. o., [1]: 18. o.)

3.9.3. Kockakettőzés (Délósi probléma)



28. ábra. Plutarkhosz ([30])

Ezt a problémát Plutarkhosz görög történetíró jegyezte fel a következőképpen:

„Délosz szigetén pestis járvány tört ki. A szigetlakók a híres delphoi jóshoz fordultak tanácsért. A válasz úgy szólt, hogy: „Ha meg akarnak szabadulni a járványtól, cseréljék ki Apolló kocka alakú oltárkövét kétszer akkorára.”

A feladat az, hogy körző és vonalzó segítségével meg kell szerkeszünk egy olyan kockának az élét, amelynek térfogata kétszerese egy adott kocka térfogatának. Tehát ha az eredeti kocka éle a , akkor az új kocka éle x úgy, hogy teljesül:

$$\begin{aligned}x^3 &= 2a^3 \\x &= a \cdot \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

A feladat tehát $\sqrt[3]{2}$ megszerkesztését követeli, ami egy harmadfokú egyenlet megoldása. Ezért a kockakettőzés problémája – akárcsak a kör négyszögesítése vagy a szög-harmadolás – lehetetlen feladat tisztán geometriai eszközökkel. ([10]: 105. o., [1]: 17. o.)

4. Hellenisztikus kor (I. e. 323 – I. e. 30)

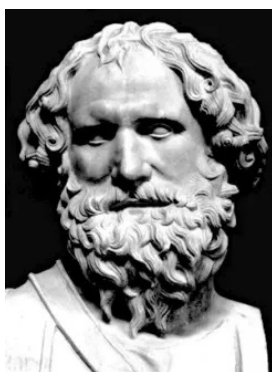
Ez a korszak Nagy Sándor hódításaival és birodalmának megalapításával vette kezdetét. A görög kultúra és tudomány az egész keleti Mediterráneumban elterjedt, új tudományos központokat hozva létre. Közülük a legjelentősebb Alexandria volt, amelyet Nagy Sándor alapított Egyiptomban. A város gyorsan fejlődött, és otthont adott egy egyetemnek, amelynek könyvtára több mint 600 000 papirusztekercset tartalmazott. ([3]: 60. o.)

A hellenisztikus korszak a görög matematika virágkorát jelentette. Nemcsak az egyéni teljesítmények voltak meghatározóak, hanem a tudás összegzése, rendszerezése és továbbfejlesztése is. A korszakban kidolgozott eredmények hosszú távon hatást gyakoroltak a matematika alakulására. Ehhez az időszakhoz köthető többek között Euklidész, Arkhimédész és Apollóniosz munkásságának eredményei, matematikai problémák megoldása, valamint az *analízis* és a *trigonometria* alapjainak megteremtése.

A geometriában Apollóniosz jelentős felfedezéseket tett a kúpszeletek vizsgálatában, míg Euklidész axiómarendszerével és számos más eredményével gyakorolt maradandó hatást a tudományra. Ő volt az első között, aki szigorúan deduktív módon rendszerezte a matematikai ismereteket. Euklidész fő műve az "*Elemek*" ([2]), melyet az első egyetemi tankönyvnek tekintünk, összefoglalja a legfontosabb geometriai, számelméleti és algebrai ismereteket. Axiómarendszere annyira időtállóan bizonyult, hogy csak a 20. században születtek olyan felfedezések, amelyek meghaladták azt.

Ebben a korszakban a matematika jelentősen hozzájárult a *fizika* fejlődéséhez is. A korszak egyik legkiemelkedőbb alakja Arkhimédész volt, aki a matematikán kívül a *mechanika* területén is maradandót alkotott. Lefektette a *statika* alapjait, és a *mechanika elemeiről* című művében az egyszerű gépek működését írta le. Emellett megalkotta a *hidrosztatika* tudományát, amely lehetővé tette a hajók teherbírásának és a testek sűrűségének pontos mérését.

4.1. Arkhimédész munkássága



29. ábra. Arkhimédész ([31])

Arkhimédész (I. e. 278-212) ([6]) az ókor egyik legnagyobb tudósa volt, aki szá-

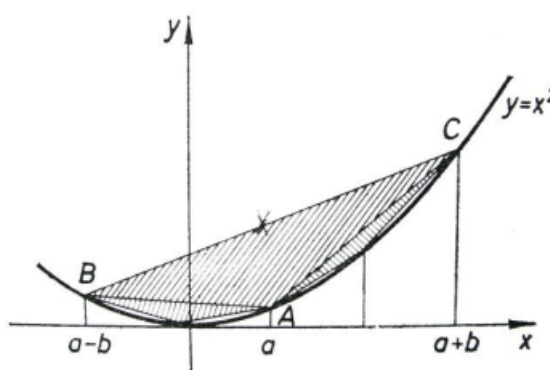
mos területen ért el kiemelkedő eredményeket, különösen a matematika és a *fizika* terén.

Arkhimédész munkássága hozzájárult az *analízis* fejlődéséhez. Egyik legkiemelkedőbb matematikai eredményei közé tartozik a π szám értékének meghatározása és az arra adott közelítések. A π , vagyis a kör kerületének és átmérőjének aránya, évezredek óta foglalkoztatta a matematikusokat. Arkhimédész nemcsak a π közelítését találta meg, hanem olyan módszert dolgozott ki, amely előre vetítette a későbbi analitikai és numerikus közelítési technikákat.

Arkhimédész alkalmazta először a *poligonális módszert* (*kettős közelítés módszere*), amelynek lényege, hogy egy kört sokoldalú, szabályos sokszögekkel közelítette. Minél több oldala volt a sokszögnek, annál közelebb került a köre. Ő két különböző szabályos sokszöget használt: egy belsőt és egy külsőt, amelyek egy-egy körrel érintkeztek. Ezzel a módszerrel képes volt meghatározni a kör kerületét az egyes sokszögek kerületei alapján. Minél több oldalú sokszöget alkalmazott, annál pontosabb eredményeket kapott. A π értékének becslésére egy 96 oldalas sokszöget alkalmazott, így kapta, hogy:

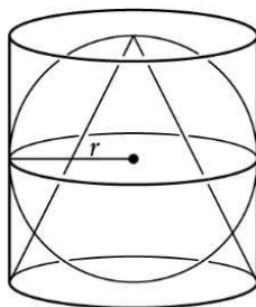
$$3,1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} < 3,1429$$

([8]: 13. o.).



30. ábra. Parabolaszélet ([7]: 8. o., 2. ábra)

Nevéhez fűződik a parabolaszélet területének meghatározása is.

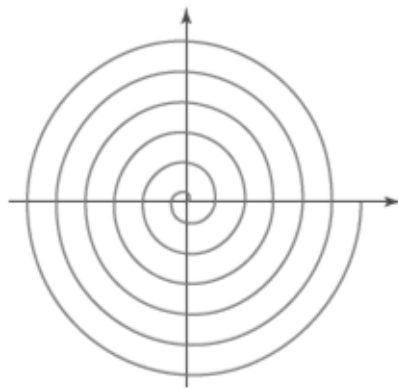


31. ábra. Arkhimédész ábrája ([4]: 61. o., 2.1 ábra)

Arkhimédész kiszámította a gömb és a henger térfogatát és felszínét. Kimutatta, hogy az egységsugarú gömb, az azt körülvevő egyenes körhenger és a hozzá illeszkedő körkúp térfogatai 3 : 2 : 1 arányban állnak. Ezt a felfedezést olyan fontosnak tartotta, hogy később a hozzá tartozó ábrát sírkövére vésette. ([4]: 17-18. o.)

Arkhimédész alkalmazta Eudoxosz kimerítési módszerét, amely az infinitezimálisok, azaz a végtelenül kicsiny mennyiségek használatán alapul. Ezzel a módszerrel képes volt meghatározni bonyolult alakzatok területét és térfogatát. Egy adott geometriai alakzat területét vagy térfogatát egy ismert alakzatokból álló sorozattal közelítette.

Legismertebb fizikai felfedezése az Arkhimédész-törvény, amely kimondja, hogy minden folyadékba merülő testre felhajtóerő hat, amely egyenlő a test által kiszorított folyadék súlyával.

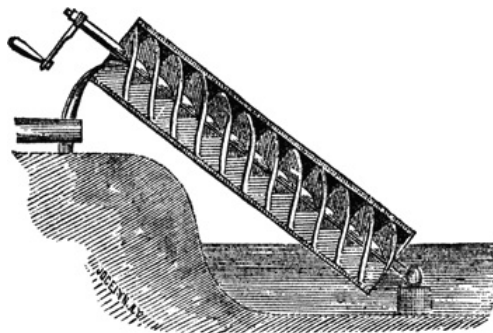


32. ábra. Arkhimédészi spirál

Arkhimédész spirálja egy olyan görbe, amelyet egy egyenletes sebességgel forgó egyenesre merőlegesen, szintén egyenletes sebességgel mozgó pont ír le. Az *Arkhimédészi spirál* egyenlete a következő formában adható meg polárkoordinátákban:

$$r = a + b\theta,$$

ahol r a sugár, θ a polárszög radiánban, míg a és b valós számok, amelyek a spirál kezdőpontját és növekedésének mértékét szabályozzák.



33. ábra. Arkhimédészi csavar ([32])

Arkhimédész kiváló mérnök volt, számos mechanikai eszközt tervezett. Ezek közé tartoznak emelőművek, csigasorok, valamint legismertebb találmánya, az *Arkhimédészi csavar*. Ez a szerkezet egy spirál alakú csőből áll, amely képes vizet emelni egy alacsonyabb szintről magasabbra, például öntözési célokra.

([10]: 178. o., [9]: 122. o.)

4.2. Euklidész munkássága



34. ábra. Euklidész ([33])

Euklidész (I. e. 365–300) ([6]) görög matematikus volt, aki az ókori Alexandriai Iskola egyik vezető tudósa. Életéről kevés információ maradt ránk.

Euklidész munkássága nagymértékben hozzájárult a *geometria* fejlődéséhez, és ő az egyik legfontosabb alakja volt az alexandriai tudományos életnek. A görög történetíró, Proklosz szerint egy érdekes anekdota kapcsolódik Euklidészhez: I. Ptolemaiosz király egyszer megkérdezte tőle, hogyan lehetne könnyen elsajátítani a geometriát, mire Euklidész válasza a következő volt: „A geometriához nem vezet királyi út.” Ez a válasz jól tükrözi Euklidész személyiségét, aki nem ismert el könnyű utakat a tudás megszerzésében. Egy másik ismert történet szerint egy tanítványa a *geometria* hasznáról érdeklődött, mire Euklidész rávilágított arra, hogy a matematika tanulása nem könnyed szórakozás, és humorosan azt válaszolta: „Adj ennek az embernek három obolust, mert a geometria tanulásának hasznát keresi.”

Euklidész legismertebb műve az „*Elemek*” ([2]), amely az ókori világ egyik legfontosabb matematikai műve, és a Biblia után a legtöbbet kiadott könyv volt. Az „*Elemek*” alapvetően a *geometria* és a *számelmélet* alapjait fektette le, és az első olyan mű, amely következetesen alkalmazza a deduktív módszert. Euklidész az akkori ismert matematikai ismereteket rendszerezte, és azokat a legminimálisabb kiinduló alapelvekből (axiómákból és posztulátumokból) építette fel. Az „*Elemek*” tehát nemcsak a geometria, hanem az egész matematikai gondolkodás alapját képezte.

Euklidész művében minden tételt külön fejezetben tárgyalt, minden fejezet elején

megfogalmazta a tételt, majd logikai úton bizonyította. Az egyes tételek végén mindig egy azonos mondattal zárta a bizonyítást: „*Quad erat demonstrandum*”, azaz „*Éppen ezt kellett megmutatni.*” Az mű emellett megfogalmazta a *euklidészi szerkesztés* (*szerkesztés csak körző és vonalzó használatával*) szabályait is, amelyek a mai napig alapot adnak a geometriai szerkesztésekhez.

Euklidész nem volt olyan matematikus, aki új elméleteket alkotott volna, inkább az elődök munkásságát rendszerezte és logikai alapokra helyezte. Mégis, számos újdon-ságot is bevezetett: például ő bizonyította be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám, és ő adta meg a prímszámok meghatározását is, valamint bebizonyította, hogy a prímszámok száma végtelen. Tőle származik a legnagyobb közös osztó (LNKO) meghatározására szolgáló algoritmus is.

Műve nemcsak a geometria, hanem a *számelmélet* és a matematikai *logika* alapjait is lefektette. Euklidész az előző matematikai rendszerek alapján bizonyította be a pitagoraszai számhármassok végtelen számát, és megfogalmazta a tökéletes számok definícióját. A tökéletes számokkal kapcsolatosan Pitagorasznál is tovább ment, és felismerte, hogy a tökéletes számok előállíthatók két szám szorzataként, ahol az egyik szám a kettő hatványa, a másik pedig egy egységgel kevesebb, mint a következő kettő hatványa.

Euklidész a szabályos testek elméletét is kidolgozta, és bebizonyította, hogy összesen csak öt féle szabályos test létezhet.

([10]: 144. o., [5])

4.2.1. Euklidész axiómarendszere

Az "*Elemek*" ([2]) I. könyve tartalmazza azokat az alapelveket, amelyekre az egész *geometria* épül. Euklidész ezeket a princípiumokat három csoportba osztotta, amelyek a következők:

Definíciók: olyan kifejezések, amelyek egy-egy matematikai alapfogalom pontos jelentését határozzák meg. Euklidész ezekből kiindulva kezdte el felépíteni a további tételeket.

1. Pont az, aminek nincs része.
2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.
4. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
6. A felület végei (=szélei) vonalak.
7. Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.
9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szö-

get.

10. Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögei keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.

11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.

12. Hegyesszög pedig, amelyik kisebb a derékszögnél.

13. Határ az, ami vége valaminek.

14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.

15. A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül [ezt nevezzük körvonalnak] úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.

16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.

17. A körnek átmérője bármely, a középponton át haladó egyenes vonal, amely mindkétoldalt a kör területén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.

18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül. <A félkör középpontja ugyanaz a pont, amelyik a köré is.>

19. Egyenes vonalú alakzatok (azaz sokszögek) azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.

20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlő oldalú háromszög az, amelynek három egyenlő oldala van, egyenlő szárú, amelynek csak két egyenlő oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlő oldala van.

21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögű, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.

22. A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú, rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű, rombold, amelynek a szemközi oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz.

23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

Posztulátumok: szükségképp igaznak tekintett állítások.

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.

2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.

3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.

4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.

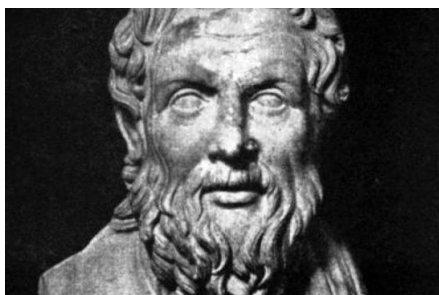
5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegeben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegeben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.

Axiómák: olyan alapvető tételek, amelyek nyilvánvalóak, és nem igényelnek bizonyítást. Euklidész azokat a geometriai törvényeket sorolta ide, amelyek igazságát mindenki elfogadja.

1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, akkor az összegek egyenlők.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.
7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
8. Az egész nagyobb a résznél.

([2])

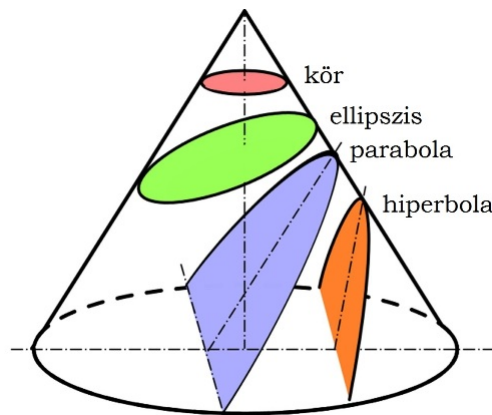
4.3. Apollóniosz kúpszeletei



35. ábra. Apollóniosz ([34])

Apollóniosz (I. e. 260-190) ([10]) a kúpszeletek elméletének kidolgozója volt. Kiemelkedő munkája a "*Kónikák*", amely a *kúpszeletek* (*ellipszis, parabola, hiperbola*) rendszerezett tárgyalásával foglalkozik. Ezeket az elnevezéseket ő használta először ezekre az alakzatokra. Apollónioszt sokan még Eukleidésznél is nagyobbabbnak tartották a geometriában, azonban műveinek nagy része elveszett, így munkásságának teljes mélységét ma már nem ismerhetjük meg. Már előtte is vizsgálták ezeket az alakzatokat (Menaikmosz I. e. 350 körül [10]), de ő volt az, aki részletesen elemezte őket. Kimutatta, hogy a kúpszeletek tulajdonságai függetlenek attól, hogy az alakzat egy egyenes vagy ferde kúpból származik. Apollóniosz munkássága fontos lépés volt a koordináta geometria megalapozásában is. A kúpszeletekhez egyenleteket rendelt, amelyet ő *szüimptóma*-nak nevezett. Ezen a fogalmon olyan feltételt értett, amelynek a görbe minden pontja eleget tesz. A "*Kónikák*" című mű egyik híres problémája a négy adott pontra vonatkozó

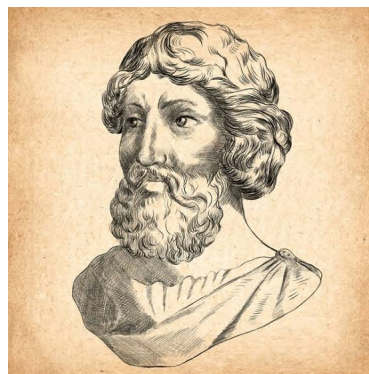
szerkesztés, valamint a szerkesztendő kör (*Apollónioszi kör*) problémája. Apollóniosz kúpszelet-elméletének mélysége és rendszere nagyban hozzájárult a későbbi *analitikus geometria* kialakulásához. ([3]: 215-236. o.)



36. ábra. Kúpszeletek ([35])

4.4. Csillagászat

4.4.1. Arisztarkhosz munkássága

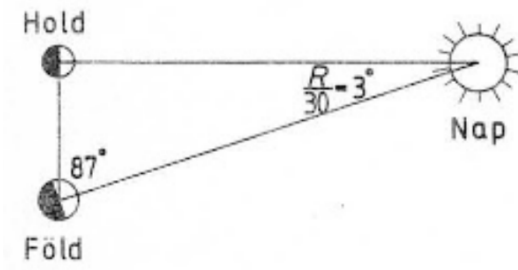


37. ábra. Arisztarkhosz ([36])

Arisztarkhosz (I. e. 310-250) ([6]), akit gyakran az ókor Kopernikuszaként emlegetnek, Szamosz szigetén született. Legjelentősebb gondolata a *heliocentrikus világkép* volt. Azt tanította, hogy a Nap áll a világmindenség középpontjában, és a Föld a többi bolygóval együtt körpályán kering körülötte, miközben saját tengelye körül is forog. Ez a felfogás forradalmi volt abban a korban, amikor a Földet tartották az univerzum középpontjának, és minden égitest mozgását ehhez próbálták igazítani.

Tanítása nagy ellenállást váltott ki, és Kleantész, a híres sztoikus filozófus azt javasolta, hogy Arisztarkhoszt vádolják meg vallásgyalázással, mert nézetei szembementek a kor megszokott világképével. Az egyik legfőbb érv Arisztarkhosz ellen az volt, hogy ha a Föld valóban a Nap körül kering, akkor az állócsillagoknak az égbolton kis köröket

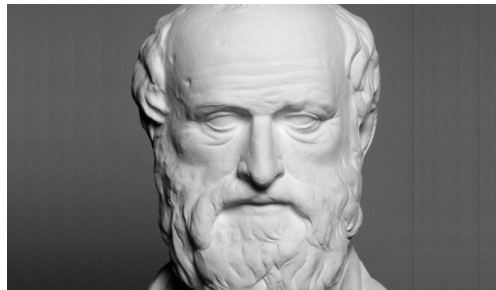
kellene leírniuk, vagyis észlelhető lenne az úgynevezett csillagparallaxis. Azonban a görög csillagászok nem tudtak ilyen mozgást kimutatni. A parallaxis tényleges észlelésére csak jóval később, 1837-ben került sor, amikor Friedrich Wilhelm Bessel német csillagász először mérte meg pontosan egy csillag helyzetének apró elmozdulását.



38. ábra. Arisztarkhosz mérése ([10]: 246. o., 162. ábra)

Arisztarkhosz volt az, aki elsőként próbálta megbecsülni a Föld–Nap és a Föld–Hold távolság arányát geometriai módszerekkel. Azt figyelte meg, hogy félhold álláskor a Hold–Nap és Nap–Föld vonalak közti szög kb. 87° , és ez alapján kiszámította, hogy a Nap 18–20-szor távolabb van tőlünk, mint a Hold. Ezzel Arisztarkhosz gyakorlatilag $\sin 3^\circ$ értékét becsülte. ([10]: 243. o.)

4.4.2. Eratoszthenész munkássága



39. ábra. Eratoszthenész ([37])

Eratoszthenész (I. e. 276-119) ([6]) Küréné városában született. Tanulmányait Alexandriában kezdte, ahol a neves költő és tudós, Kallimakhosz tanítványa volt, majd Athénba ment, ahol a sztoikus Arisztón és az akadémikus Arkeszilaosz filozófiájával ismerkedett meg.

Élete egyik legmeghatározóbb fordulata volt, amikor III. Ptolemaiosz Euergetész meghívására visszatért Alexandriába, és átvette az alexandriai Nagykönyvtár vezetését. Emellett az uralkodó fia, a későbbi IV. Ptolemaiosz nevelését is rábízták, ami azt mutatja, hogy nemcsak tudósként, hanem pedagógusként is nagy megbecsülésnek örvendett.

Eratoszthenész igazi polihisztor volt: matematikával, csillagászattal, fizikával, földrajzzal, filozófiával, történelemmel és költészettel egyaránt foglalkozott. Ennek ellenére kortársai között akadtak irigyei, akik a *Nagy Béta* névvel illették, utalva arra, hogy

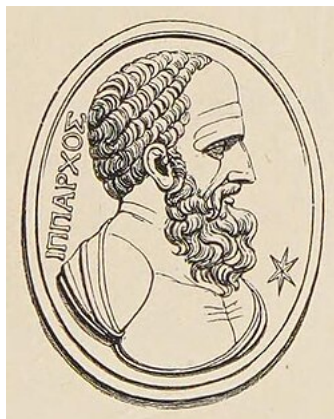
minden tudományban csak a második. Tisztelői ezzel szemben *Pentathlosz*nak, vagyis öttusázónak nevezték, elismerve sokoldalúságát.

Legismertebb földrajzi műve a "*Geographika*", amelyben elsőként fektette le a tudományos *földrajz* alapelveit. A matematikai munkássága szintén figyelemre méltó: foglalkozott a híres déloszi problémával (kockakettőzés), és jelentős mértékben hozzájárult a közepek elméletének fejlődéséhez. Erről írta a *Peri mezotéton* (A közepekről) című kétkötetes művet, amelyben az aritmetikai, mértani és harmonikus közepek közötti összefüggéseket vizsgálta. Az egyik legnagyobb tudományos teljesítménye azonban csillagászati jellegű. Ő volt az első, aki becsülte a Föld területét. Számításait a nyári napforduló idején tett megfigyelések alapján végezte el Küréné és Alexandria között. Az egyenlítő hosszára kapott eredménye körülbelül 250 000 sztadion (kb. 39 375 km) volt, amely meglepően közel áll a valós mérethez.

Eratoszthenész szitája egy olyan algoritmus, mely lehetőséget ad a prímszámok megtalálására a természetes számok között. Az eljárás lényege, hogy először felírjuk sorban a számokat 2-től a kívánt határig. Ezután az első számot, ami nem lett áthúzva (ez mindig 2), bekarikázzuk, majd eltávolítjuk az összes olyan számot, amely osztható vele. Ezt követően a következő bekarikázatlan számot, 3-at, karikázzuk be, és áthúzzuk az összes 3-mal osztható számot is. A folyamatot tovább ismétljük, amíg el nem érjük a kívánt számhatárt. A végén azok a számok maradnak bekarikázva, amelyek prímszámok, míg az áthúzott számok összetett számok.

([10]: 251-253. o.)

4.4.3. Hipparkhosz munkássága



40. ábra. Hipparkhosz ([38])

Hipparkhosz (I. e. 160-125) ([6]) Nicaeában született. Tanulmányait Alexandriában végezte, majd fiatalon Rodosz szigetén telepedett le, ahol saját csillagvizsgálót épített és saját maga által tervezett műszerekkel végzett rendkívül pontos megfigyeléseket. Életéről ugyan kevés adat maradt fenn, azonban tudományos munkásságának hatása és más

szerzők méltatásai alapján egyértelmű, hogy a hellenizmus egyik legnagyobb csillagásza volt. Hipparkhosz fő célkitűzése egy olyan világmodell megalkotása volt, amely matematikailag is pontosan leírja az égitestek mozgását. Az Apollóniosz által kidolgozott geocentrikus rendszert vette alapul, melyben a bolygók a Föld körül keringő epiciklusok középpontjai körül mozognak. Az *epiciklus* egy kisebb kör, amelynek a középpontja egy nagyobb kör (*deferensz*) mentén mozog. Hipparkhosz ezt a rendszert továbbfejlesztette újabb epiciklusok bevezetésével. Ezt a rendszert később Ptolemaiosz tökéletesítette.

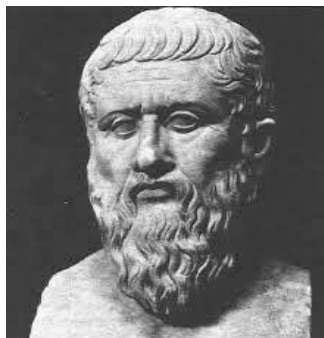
Hipparkhosz nevéhez fűződik a világ első ismert csillagkatalógusának elkészítése. I. e. 134-ben egy új csillag megjelenését észlelte a Skorpió csillagképben, ami arra ösztönözte, hogy rendszerezze az égbolt állócsillagait. Mintegy 850 csillag pozícióját határozta meg, és ezeket fényességük szerint hat kategóriába sorolta. Ez a rendszer tette lehetővé a csillagok fényességváltozásainak nyomon követését, és azt a felismerést, hogy az „állócsillagok” sem feltétlenül mozdulatlanok.

Hipparkhosz a régi adatok és saját megfigyeléseinek összevetésével fedezte fel a napéjegyenlőségi pontok (tavaszpont és ősypont) lassú eltolódását. A jelenséget ő 36 ívmásodperc/év mértékben határozta meg, ami közel van a mai, 50 ívmásodperces értékhez.

Hipparkhosz kiszámította az év hosszát, amely a mai értéktől mindössze 6 perccel tér el, és elődeinél pontosabban határozta meg a Föld–Hold távolságot és a Hold sugarát. A földrajzi helymeghatározás terén ő vezette be elsőként a hosszúsági és szélességi körök rendszerét, amely a mai értelemben vett koordináta-rendszer alapját képezi.

Legnagyobb matematikai újítása a hűrtáblázat elkészítése volt. Egy adott sugarú kör középponti szögeihez rendelte hozzá a hozzájuk tartozó húr hosszát. Ez a táblázat lényegében az első ismert szinusztáblázatnak tekinthető. Ezzel Hipparkhosz megalapozta a *trigonometria* tudományát. A húrszámítás módszerét később Ptolemaiosz is átvette, aki az "*Almagest*" című munkájában részletesen bemutatja a táblázatok használatát. Tőle tudjuk azt is, hogy Hipparkhosz egy tizenkét kötetes művet írt a kör húrjairól, amely sajnos elveszett. ([10]: 254-256. o.)

4.5. Ktészibiosz



41. ábra. Ktészibiosz ([39])

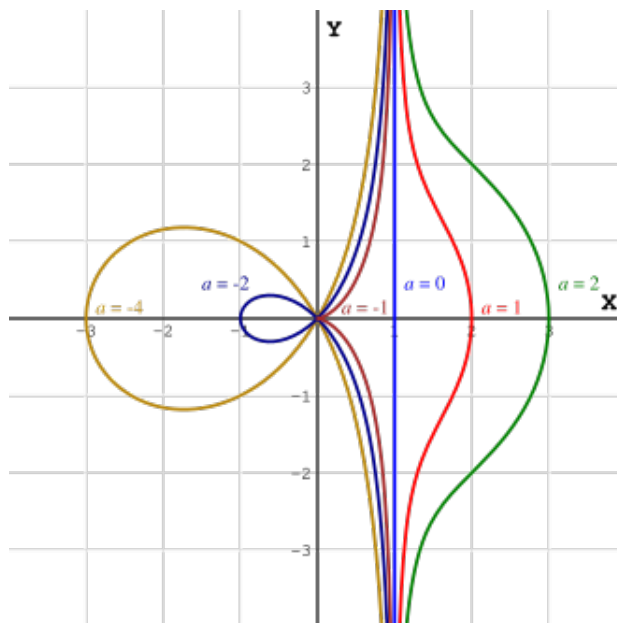
Ktészibiosz (I. e. III. sz.) ([6]) Alexandriában tevékenykedő görög feltaláló, a hellenisztikus technikai tudomány egyik úttörője volt. Matematikai jelentősége főként az *alkalmazott matematika* területén mutatkozott meg: elméletei a nyomás, térfogat, időmérés és folyadékmozgás vizsgálatára irányultak, ezzel megalapozva a későbbi hidrodinamika és pneumatika fejlődését. Pontos méréseken alapuló szerkezetei hozzájárultak a mérnöki matematika és a matematikai *fizika* kialakulásához. Alexandriában mechanikai iskolát alapított. Találmányai között kiemelkedik a vízóra (klepszidra), a dugattyús vízpumpa, valamint a víziorgona, amelyek a víz és levegő szabályozott áramlásán alapultak. Őt tartják a pneumatika tudományának megalapítójának. Emellett az automatizált szerkezetek, mint például önműködő csapok és zenei automaták előfutáraként is számon tartják. Ktészibiosz munkássága meghatározó volt az alexandriai gépészeti iskola fejlődésében, és komoly hatást gyakorolt a későbbi mechanikusokra, például Hérónra. ([10]: 147. o., [9]: 126. o.)

4.6. Nikomédész



42. ábra. Nikomédész ([40])

Nikomédész (I. e. III. sz.) ([6]) görög matematikus, akit leginkább a *konhoisz* (*kagylógörbe*) felfedezéséről ismerünk. E görbét a kockakettőzés és a szögharmadolás geometriai problémáinak megoldására alkalmazta. A kagylógörbét később olyan neves tudósok is tanulmányozták, mint Viète, Descartes, Fermat és Newton. Nikomédész egy speciális körzöt (*Konhoisz körző*) is konstruált, amellyel e görbét meg lehetett szerkeszteni. Munkássága jelentős lépést jelentett az alkalmazott *geometria* fejlődésében, különösen a nem euklideszi konstrukciók területén. ([10]: 124-127. o.)



43. ábra. Kagylógörbe ([41])

5. Római kor (I. e. 30 – I. u. 641)

Egyiptom I. e. 30-ban a rómaiak uralma alá került. A római kor a görög matematika hagyatékának átvételét és továbbadását jelentette. Ebben az időszakban a gyakorlati alkalmazások kerültek előtérbe, míg az elérhető tudás inkább megőrzésre, mintsem fejlesztésre irányult. Ezt a korszakot a hanyatlás korszakának is nevezik. A római korszak végét két nagy világvallás, a kereszténység és az iszlám térhódítása jelentette, melyek lezárták a görög tudományos hagyományok fejlődését. 529-ben a keresztény bizánci császár bezáratta az athéni akadémiát, melynek következtében a görög tudósok Szíriába és Perzsiába menekültek. Később az iszlám előretörésével 641-ben az arabok elfoglalták Alexandriát, és a könyvtár maradványait megsemmisítették. ([3]: 97. o.)

5.1. A görög matematika hanyatlásának okai

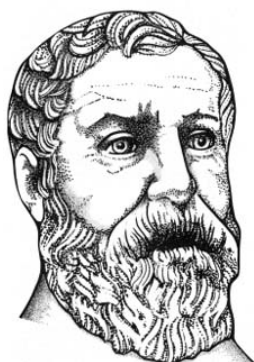
A görög-római korszakban a matematikát számos korlát jellemezte. Hiányzott a megfelelő jelölésrendszer (nem használtak változókat, mivel a számokat betűk jelölték), nem ismerték a nullát és a negatív számokat ([12]: 16. o., [8]: 3. o.). Ez megnehezítette a bonyolultabb problémák megoldását és a deduktív rendszerek alkalmazását, amely a geometriai megközelítést is egyre komplikáltabbá tette. A *geometria* területén ebben az időszakban nem születtek a korábbi korszakalkotó felfedezésekhez hasonló újítások. Az eredmények gyakran nélkülözték a korábbi görög hagyományokra jellemző szigorú logikai igazolást. Az irracionális számok tulajdonságainak és természetének tisztázatlansága pedig tovább akadályozta a fejlődést ([12]: 16. o.).

5.2. A római korszak tudományos eredményei

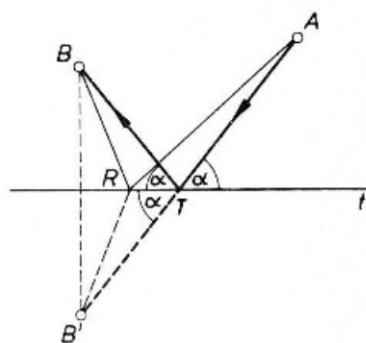
A korszakot jellemző művek a *kommentárok* voltak, melyek összefoglaló gyűjtemények a görögök korábbi eredményeiről. Ezekben nemcsak közérthető módon magyarázták el az eredményeket, hanem egyszerűsítették a bizonyításokat is, ezáltal elősegítve a megértést és a tudás továbbörökítését. A kihívások dacára bizonyos területeken megemlézésre méltó eredmények születtek:

5.3. Héron

Héron (I. u. I. sz.) ([6]) mérnök és feltaláló volt. Főleg a matematika gyakorlati alkalmazásával foglalkozott. A *"Dioptra"* című írásában például földmérési technikákat mutat be. Megemlézésre méltó *"Pneumatika"* című műve is, amely olyan szerkezeteket ismertet, melyek lég- vagy gőznyomással működnek. *"Mekhanika"* című munkájában az egyszerű gépek (emelő, csavar, lejtő) működését írja le. A *"Katoptrika"* műve az *optika* területén jelentett mérföldkövet. Ebben fogalmazza meg a fényvisszaverődés törvényeit, és hangsúlyozza, hogy a fény mindig a legrövidebb utat választja.



44. ábra. Héron ([42])



45. ábra. Fénytörés ([10]: 269. o., 187. ábra)

Matematikai írásai közül kiemelkedik a *Metrika* és a *Geometrika*. Ezek nem elméleti újításokat tartalmaznak, inkább a számítási gyakorlatra helyezik a hangsúlyt. A *Geometrika* lapjain jelenik meg először a háromszög területének kiszámítására szolgáló képlet, amelyet ma Héron-képletként ismerünk. ([10]: 269. o.)

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{ahol } s = \frac{a+b+c}{2}$$

Bár műveiben előfordulnak hibák, például mértékegységek helytelen használata vagy túlságosan leegyszerűsített következtetések. Héron nem elméleti matematikusként alkotott, sokkal inkább egy olyan feltalálóként, aki képes volt a tudományos ismereteket a mindennapok szolgálatába állítani.

5.4. Menelaosz



46. ábra. Menelaosz ([43])

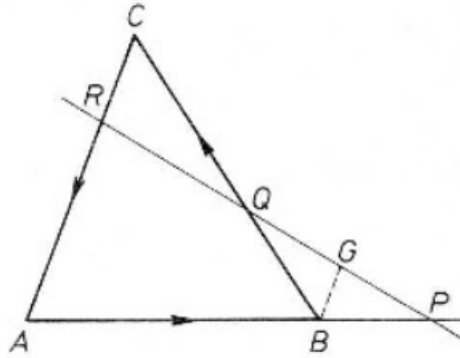
Menelaosz (I. e. 100 körül) ([10]), görög matematikus és csillagász, életéről meglehetősen kevés információ áll rendelkezésre, azonban nevét és tudományos munkásságát számos forrás említi, főként Alexandriával kapcsolatban. Bár származása és pontos életrajza nem ismert, egyértelmű, hogy jelentős csillagászati megfigyeléseket végzett Rómában Traianus uralkodásának első éveiben (98-tól), ami arra utal, hogy a tudományos központok közötti kapcsolatokat jól ismerte.

Menelaosz hatkötetes művet írt a kör húrjairól, amelyet az alexandriai Theón említ. E mű tartalmazhatta a szinusztáblázatnak megfelelő húrtáblázatot is, bár sajnos az eredeti mű nem maradt fenn. Az arab forrásokból tudható, hogy írt csillagászati munkákat, egy elemi geometriát és egy hidrosztatikai művet is. Geometriai elemei című könyvét a bagdadi arab matematikus, Szabit ibn Kurrá fordította le Könyv a háromszögekről címmel, de ennek a műnek sem maradtak fenn példányai. Az egyetlen megmaradt írása az arab nyelvű, háromkötetes Sphaerica, amely főként a gömbháromszögtan témájával foglalkozik.

A "*Sphaerica*" első kötetében Menelaosz lefekteti a gömbháromszögtan alapjait, az Eukleidész-féle axiomatizáló módszert követve. E műben szerepel a gömbháromszög definíciója, amely szerint „A gömbháromszög az a hely, amelyet a gömbfelületen a legnagyobb körök ívei zárnak be”. Menelaosz továbbá azt is bizonyította, hogy a gömbháromszög szögeinek összege mindig nagyobb két derékszögnél, és ő volt az első, aki következetesen megkülönböztette a gömbháromszöget a síkháromszögtől. A gömbháromszöget *tripleuron*-nak, míg a síkháromszöget *trigónon*-nak nevezte.

A harmadik kötetben található a róla elnevezett *síkbeli Menelaosz-tétel*, amely bár nem az ő felfedezése, hiszen a könyvében hivatkozik rá, mégis ő bizonyította először gömbháromszögekre.

1. TÉTEL (Menelaosz-tétel). *Ha az ABC háromszög oldalainak egyeneseit valamely RQP egyenessel metsszük, akkor az irányított szakaszokra teljesül, hogy*



47. ábra. Menelaosz-tétel ([10]: 257. o., 173. ábra)

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

[[10]: 257. o.].

5.5. Szmürnai Theón



48. ábra. Szmürnai Theón ([44])

Szmürnai Theón (125 körül) ([10]), újplatonista filozófus és matematikus, egy aritmetikai kompendiumot írt, amely az aritmetika mellett a zenét és a csillagászatot is magában foglalta. A mű legértékesebb része a *csillagászat* történetének összefoglalása volt, amely fontos forrást jelentett a korabeli tudományos gondolkodás számára. ([10]: 289. o.)

5.6. Ptolemaiosz Klaudiosz

Ptolemaiosz Klaudiosz (I. u. 85-165) ([6]) görög csillagász, matematikus és geográfus volt. A római uralom alatt álló Egyiptomban, feltehetően Alexandriában élt és dolgozott. Életéről kevés adat maradt fenn.

Legismertebb és legnagyobb hatású műve az "*Almagest*" (jel.: A *csillagászat* nagy összefoglalása). Ez a 13 kötetes mű egy óriási enciklopédia, amely az antik *csillagászat*

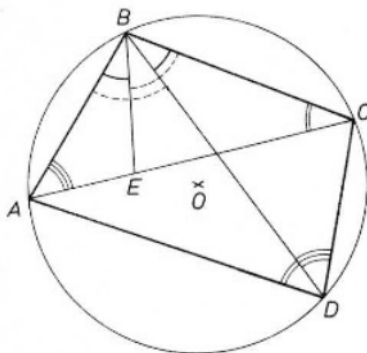


49. ábra. Ptolemaiosz Klaudiosz ([45])

addig ismert eredményeit gyűjti össze, és saját megfigyelésekkel, számításokkal, valamint új elméleti megközelítésekkel bővíti azokat.

Az "*Almagest*" központi eleme a geocentrikus világkép, amely a Földet helyezi a világegyetem középpontjába. Már Hipparkhosz és Apollóniosz is használták az ún. deferens–epiciklus rendszert a bolygómozgások leírására, de Ptolemaiosz vezette be a kiegyenlítő pontot (*equans*), amely lehetővé tette, hogy a bolygók látszólag egyenetlen mozgása mégis egyenletesnek tűnjön egy megfigyelési pontról.

Matematikához kapcsolódóan fontos megemlíteni az "*Almagest*" első könyvét. Ez tartalmazza az ún. *Ptolemaiosz-tételt*, amely a körbe írható négyszögek (húrnégyszögek) oldalai és átlói közötti összefüggést írja le:



50. ábra. Ptolemaiosz-tétel ([10]: 264. o., 183. ábra)

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Ptolemaiosz másik fontos munkája a *Geógraphiké hüphégészisz* (jel.: Földrajzi útmutató), amely nyolc könyvből áll. Ebben bemutatja a világ akkor ismert részét, több mint 8000 földrajzi hely koordinátájával. Bár számos tévedést tartalmaz, ez volt az egyik legnagyobb hatású földrajzi mű a középkorban. Az ehhez kapcsolódó térképeket későbbi másolók rajzolták meg. Ez a munka különösen jelentős abból a szempontból, hogy a föld-

rajzot is matematikai alapokra helyezte. Gömbi koordinátákkal dolgozott, és foglalkozott a földfelszín ábrázolásának problémáival.

([10]: 265. o., [3]: 98. o.)

5.7. Diophantos



51. ábra. Diophantos ([46])

Életének részleteiről sajnos kevés biztos adat áll rendelkezésre, de személyéről és életkoráról egy különleges forrás, a sírfelirata ad leírást:

*Vén Diophantost rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,
Megtanította a sírt: mondja el élte sorát.
Évei egyhatodát tölte ki a gyöngye gyerekkor,
Még feleannyi lefolyt, s álla szakálla kinőtt.
Egyheted eltelt még, és nászágy várta a férfit,
Elmúlt újra öt év, és fia megszületett.
Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefenn, mint
Atyja, mivel neki így szabta az isteni sors.
őt gyászolva a sír felé hajlott agg Diophantos:
Négy évvel később ő is elérte a célt.
Mondd, hány esztendőit élt hát meg gyászban, örömben
S itta az édes fényt, míg hona lett ez a sír?*

Ez a flirat egyfajta verses matematikai rejtvényként írja le Diophantos életét. Ha az ismeretlen x -szel jelöljük élete teljes hosszát, akkor az alábbi egyenlet adódik:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Ennek megoldása szerint Diophantos 84 évet élt.

Diophantost az **algebra atyjának** tekintjük. Munkáiban ugyan fellelhetők geometriai eszközök, de elsősorban aritmetikai számításokra és egy új jelölésrendszer kidolgozására összpontosított. Fő műve az "*Aritmetika*" 16 kötetes, ebből 6 maradt ránk.

A könyv 189 megoldását tartalmazza - ezeket ma *diophantosi egyenletek*nek nevezzük. Diophantosz kizárólag pontos megoldásokat fogadott el, de csak a pozitív racionális számokat tekintette érvényesnek. A törteket már számként kezelte. Ez szakítást jelentett azzal a klasszikus görög felfogással, amely kizárólag a természetes számokat tekintette valódi számnak. Munkájában található szórövidítéseket a szimbolikus algebra kezdetének tekintjük (9. ábra).

ι vagy $\iota\sigma\varsigma$ (iszosz)=egyenlő.
 ς (a szóvégi sz)= az ismeretlen jele.
 $\varsigma\varsigma$ (az előbbi jel kettőzve)= az ismeretlen többes száma. Ha például az ismeretlennek az 1-től különböző együtthatója van: $8x = \varsigma\varsigma\eta$, ahol $\eta = 8$.
 $\overset{\circ}{\mu}$ vagy $\overset{\circ}{M}$ (a monasz=egység szó kezdőbetűje és indexként a második betűje)= a megadott nevezetlen egység jele például $\overset{\circ}{M}\bar{\iota}\bar{\alpha} = 11$, ahol $\bar{\iota} = 10$ és $\bar{\alpha} = 1$.
 Δ^Y (dünamisz)= az ismeretlen négyzete. Például $\Delta^Y \bar{\epsilon} = 5x^2$.
 K^Y (kübosz)= az ismeretlen köbe. Például: $K^Y \bar{\beta} = 2x^3$.
 $\Delta^Y \Delta$ (dünamodünamisz= négyzetszer négyzet)= az ismeretlen negyedik hatványa. Például: $\Delta^Y \Delta \bar{\gamma} = 3x^4$.
 ΔK^Y (dünamokübosz= négyzetszer köb)= az ismeretlen ötödik hatványa. Például: $\Delta K^Y \bar{\delta} = 4x^5$.
 $K^Y K$ (kübokübosz= köbször köb)= az ismeretlen hatodik hatványa. Például: $K^Y K \bar{\epsilon} = 5x^6$.
 $\hbar$ = a kivonás jele.

52. ábra. Diophantosz algebrai jelölésrendszere ([10]: 274-275. o.)

Diophantosz "*Arithmetika*" című művének első könyve olyan feladatokat tartalmaz, amelyek lineáris, meghatározott egyenletekre vezethetők vissza, elsősorban az alábbi alakban:

$$ax = b \quad \text{vagy} \quad ax^2 = b$$

Diophantosz a későbbi részekben olyan másodfokú egyenleteket is tárgyal, mint például:

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad \text{és} \quad bx + c = ax^2$$

Diophantosz határozatlan egyenletekkel is foglalkozott. Egy határozatlan egyenlet olyan algebrai egyenlet, amelyben kettő vagy több ismeretlen van. Ez azt jelenti, hogy több megoldás is lehetséges. Általában egész vagy racionális számmegoldásokat keresünk. Például:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

A határozatlan egyenletek megoldásánál Diophantosz gyakran alkalmazta a következő két módszert:

1. A hamis feltevés módszere

Ennek során az ismeretleneket olyan számokkal vagy kifejezésekkel helyettesítette be, amelyek az egyenlet feltételeinek csak részben feleltek meg. Ezután megvizsgálta, hogy miért nem teljesül az összes feltétel, majd az eltérések alapján korrigálta a feltevést. (Példa: II. 20. feladat [3]: 101. o.)

2. A kettős egyenlet módszere

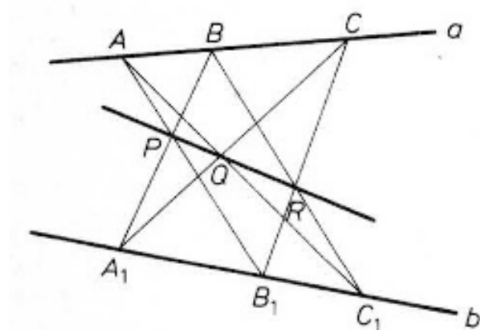
A másik gyakran alkalmazott módszere a kettős egyenlet módszere volt. Ez akkor volt hasznos, amikor egy változó két különböző módon kifejezett alakjának egyszerre kellett négyzetnek lennie. Diophantosz ekkor a két kifejezés különbségét szorzattá alakította, majd ezt két külön egyenletre bontotta. Így a probléma egy összetett feltételből egyszerűbb, külön megoldható részekre bomlott. (Példa: II. 11. feladat [3]: 102. o.) ([10]: 273-279. o., [3]: 100. o.)

5.8. Papposz

Papposz (I. u. IV. sz.) ([6]) elsősorban a korábbi görög matematikusok munkáit értelmezte és egészítette ki, különösen Euklidész és Ptolemaiosz műveihez fűzött jelentős kommentárokat. Legjelentősebb műve a "Szüinagógé" (*Gyűjtemény*), amelyben nagy szakértelemmel rendszerezte elődei kiemelkedő eredményeit, miközben saját felfedezéseit is bemutatta. [[10]: 279. o.]

5.8.1. A projektív geometria születése

Papposz eredményei főleg a **projektív geometria** megalkotásához köthetők. Különösen jelentős a Papposz-tétel, amely később a *projektív geometria* egyik alappillérvé vált.



53. ábra. Papposz-tétel ([10]: 282. o., 191. ábra)

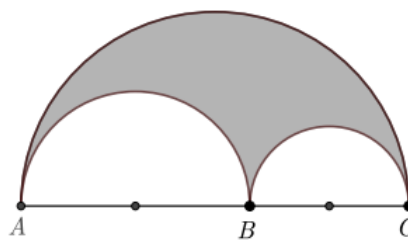
2. TÉTEL (Papposz-tétel). *Két egyenes egyikén (a) vegyünk fel tetszőlegesen három pontot: A, B és C, a másik egyenesen (b) pedig három pontot: A₁, B₁ és C₁. Rajzoljuk meg*

az AB_1 , BA_1 , BC_1 , CB_1 , CA_1 és AC_1 egyeneseket. Ekkor az AB_1 és BA_1 , a BC_1 és CB_1 , valamint a CA_1 és AC_1 egyenesek metszéspontjai egy egyenesre esnek.

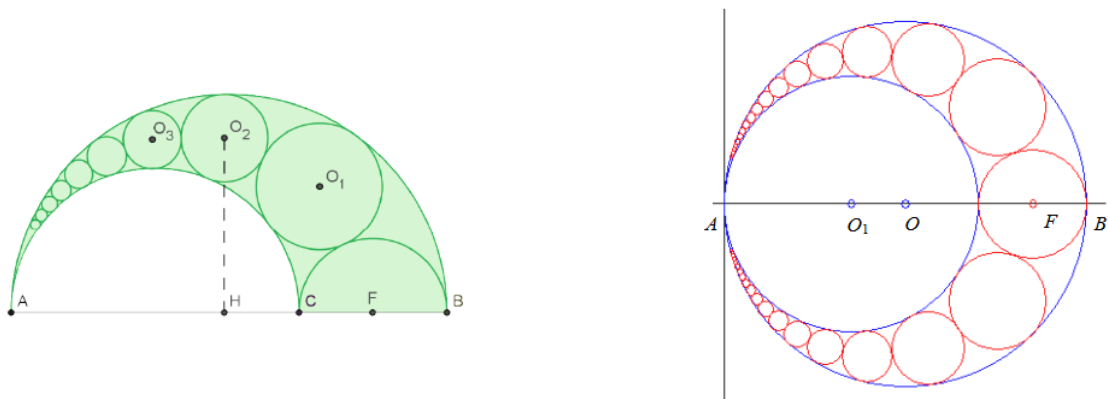
([10]: 282. o.)

5.8.2. Papposz-körláncok

A Papposz-körlánc egy olyan sorozat, amely érintkező körökből áll, és egy arbeloszon belül helyezkedik el. Az arbelosz egy olyan sík terület, amit három félkör határol. Ezek a félkörök egy egyenesen helyezkednek el, páronként azonos csúcspontokkal. Az egyenes, amely meghatározza őket, az összes félkör csúcsait összeköti. ([13])



54. ábra. Arbelosz ([10]: 20. o., 7. ábra, szerkesztve)



55. ábra. Papposz-körláncok ([14]: 43. o., 14. és 15. ábra)

5.8.3. Antik heurisztika

A matematikában a tételek és bizonyítások mögött sokszor nem látszik, hogyan fedezték fel őket. Papposz, az ókori görög matematikus, az antik szerzők munkáit kommentálva betekintést adott a felfedezés módszereibe, amit *heurisztikának* (a felfedezés művészete) nevezett. Papposz ezeket a módszereket a klasszikus matematikai problémák megoldására alkalmazta és rendszerezte. Két fő módszert különböztetett meg:

Analízis: az ismeretlen eredményből indul ki, és visszafelé haladva vizsgálja, milyen feltételek mellett lehet az igaz. Célja a probléma megértése, a feltételek feltárása.

Kétféle analízist különböztetett meg:

Az egyik a bizonyítási feladatokhoz kapcsolódik, ahol az ismeretlen állítást igaznak feltételezve keresünk ellentmondást vagy igazolást. Ez az analízis tehát a feltételezett tétel visszafejtése.

A másik esetben a megoldásból indulunk ki, és azt vizsgáljuk, hogy az milyen feltételek mellett hozható létre.

Szintézis: az analízis során megtalált kiindulópontból indul ki, és előrehaladva lépésről lépésre felépíti a bizonyítást.

([9]: 55. o.)

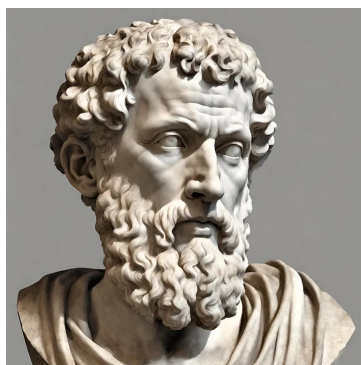
5.9. Alexaandriai Theón, Hüpatia és Proklosz

A késő ókori görög tudományos élet egyik utolsó felvirágzását az alexandriai iskola képviselte. Alexandria Theón (I. u. IV. sz.) ([6]) matematikus és csillagász főként Eukleidész "*Elemek*" ([2]) című geometriai munkájához és Ptolemaiosz csillagászati írásaihoz készített részletes kommentárokat, ezzel megőrizve e művek tudományos örökségét.



56. ábra. Alexandria Hüpatia ([47])

Alexandriai Hüpatia (kb. 370–415) ([6]) a tudománytörténet első jelentős női tudósa volt, akit gyakran az *első női polihisztorként* emlegetnek. Matematikus, csillagász és filozófus volt az ókori Alexandria városában, ahol kivételes oktatásban részesült apja, Alexandria Theón révén. Az újplatonikus filozófiai irányzat követőjeként Hüpatia Platón és Arisztotelész tanításait ötvözte, és előadásaival nagy hatást gyakorolt korának értelmiségi életére. Számos klasszikus tudományos művet kommentált, köztük Diophantos aritmetikáját ("*Aritmetika*") és Apollóniosz kúpszeleteit ("*Konikák*"), valamint valószínűleg Eukleidész és Ptolemaiosz írásait is magyarázta. Oktatóként is jelentős szerepet töltött be: matematikát, filozófiát és csillagászatot tanított, tanítványai közül sokan később fontos társadalmi és tudományos pozíciókat töltöttek be. Hüpatia nemcsak elméleti, hanem gyakorlati tudományos munkát is végzett, többek között fejlesztette a *hidrométer* és az *asztrolábium* használatát.



57. ábra. Proklosz ([48])

Proklosz (I. u. 410–485) ([6]), a Lükiából származó filozófus, az athéni Akadémia vezetőjeként az utolsó nagy újplatonikus gondolkodó volt. Bár elsősorban filozófusként ismert, az Eukleidész *"Elemek"* című művéhez írt kommentárja révén jelentős matematikatörténeti forrással szolgált. Ennek bevezetésében közölte kivonatossan Eudémosz (Arisztotelész tanítványa) mára elveszett *"A geometria története"* című munkájának részleteit.

E három gondolkodó munkássága a görög tudomány utolsó nagy hullámát jelentette, hidat képezve az ókori örökség és a középkor tudományossága között.

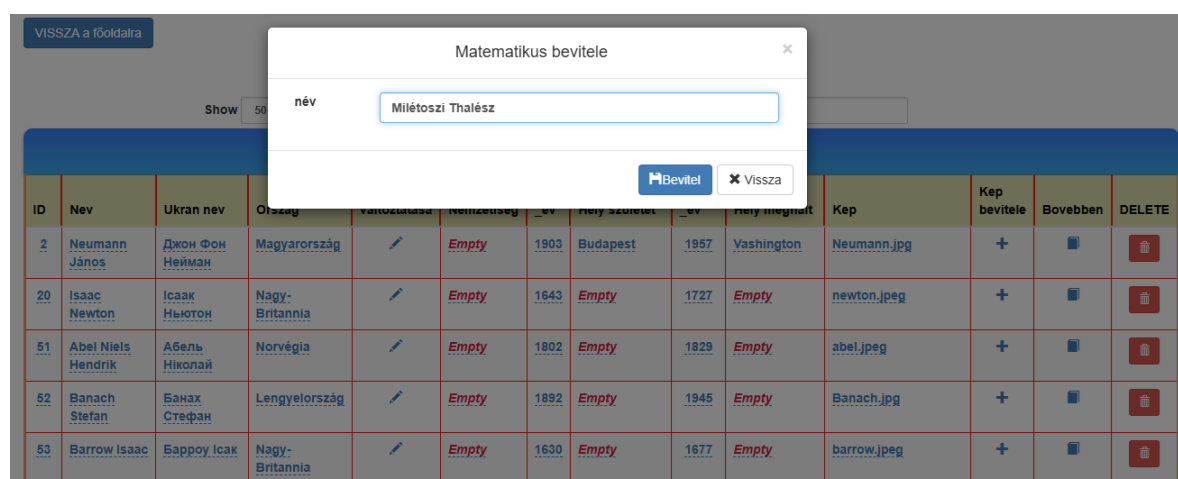
6. A matematikatörténeti lexikon bemutatása

A digitális lexikon tartalmainak feltöltése az admin felületen keresztül történik. Az adatok kategóriák szerint rendezett menüpontokban kezelhetők.



58. ábra. Admin felület (Saját kép)

A felületen a különböző tartalmi elemek (tudósok adatai, kapcsolatok, fogalmak, problémák, események, országok, képek, képletek) táblázatos formában kerülnek rögzítésre. Az előre definiált mezők biztosítják a következetes struktúrát és az egységes megjelenést.

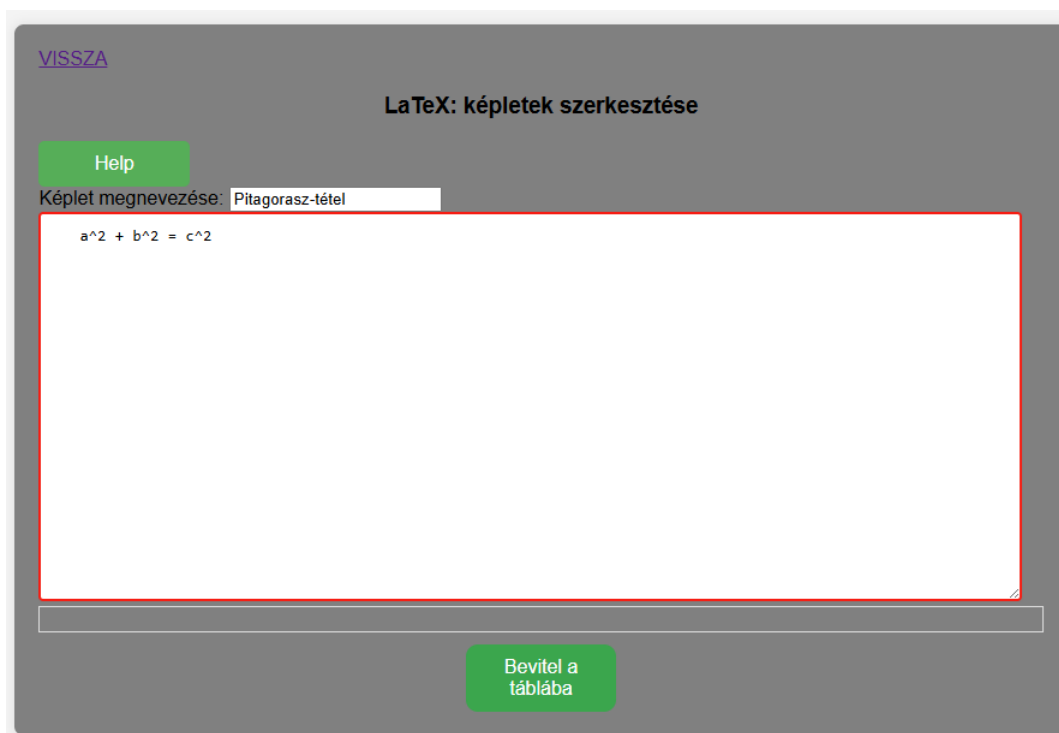


59. ábra. Tudós hozzáadása (Saját kép)



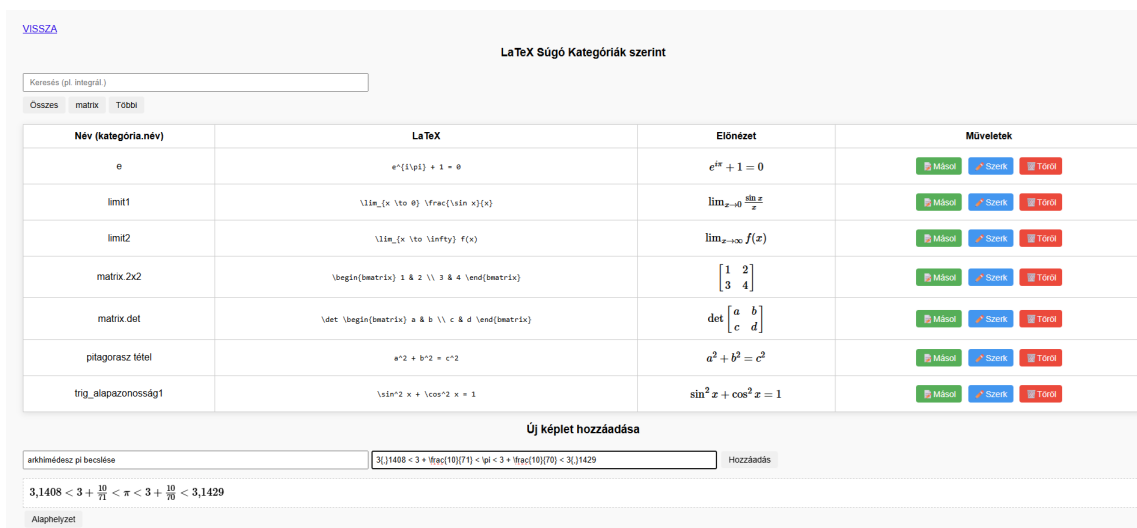
60. ábra. Tudós adatainak szerkesztése (Saját kép)

A tudósokról, fogalmakról és nevezetes problémákról bővebb szöveges leírás készíthető egy beépített szövegszerkesztő segítségével. Ehhez a megfelelő kategória táblázatának *Bővebben* mezőjében található ikonra kattintva nyílik meg a szerkesztőfelület, ahol a szöveg formázása, hivatkozások beszúrása és egyéb kiegészítések végezhetők el.



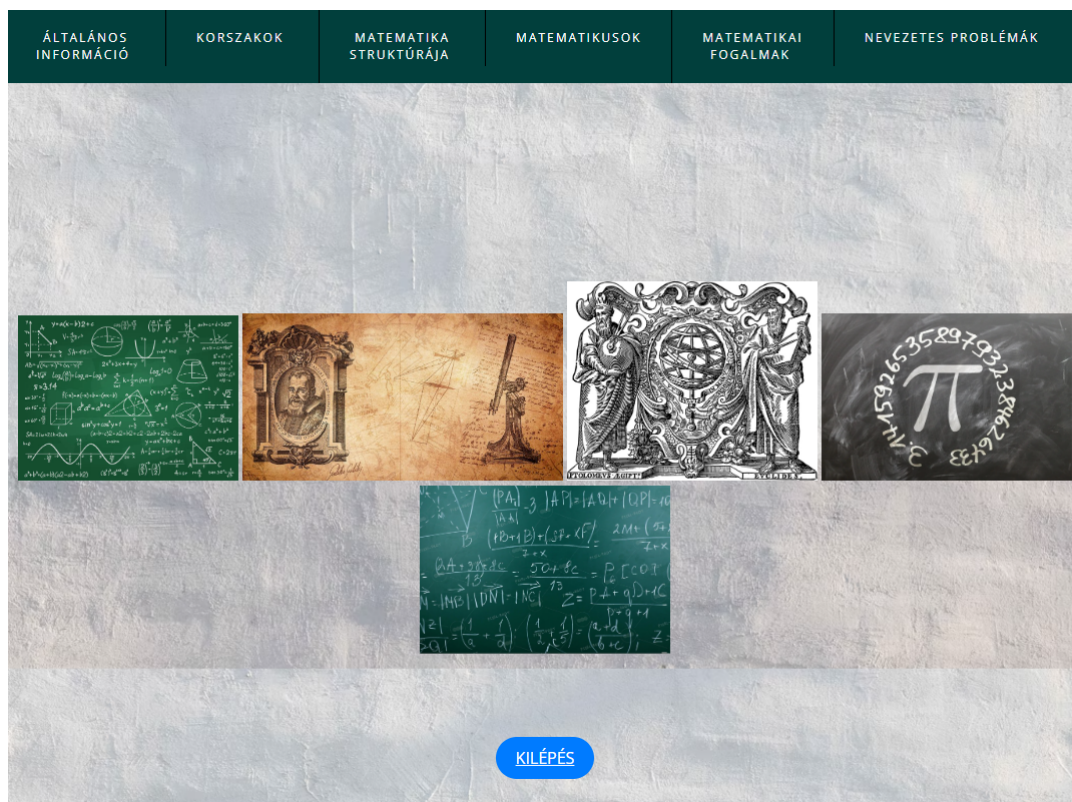
63. ábra. Beépített LaTeX-szerkesztő (Saját kép)

A beépített szövegszerkesztőben is lehetőség van képletek beszúrására az integrált LaTeX-szerkesztő segítségével. A szerkesztés során kiválaszthatunk korábban már hozzáadott képleteket, vagy új képletet is létrehozhatunk. Az újonnan beírt képlet előnézete a szerkesztőfelület alsó részén jelenik meg, így azonnal ellenőrizhetjük a megjelenést, mielőtt mentenénk a tartalmat.



64. ábra. LaTeX-szerkesztő a beépített szövegszerkesztőben (Saját kép)

A feltöltött tartalmak azonnal megjelennek a felhasználói felületen, ahol strukturáltan, jól kereshető formában válnak elérhetővé a látogatók számára.



65. ábra. A felhasználói felület (Saját kép)

Összegzés

Dolgozatomban a görög matematika történetének legfontosabb állomásait, szereplőit és felfedezéseit mutattam be kronológikus sorrendben, külön figyelmet fordítva a korszak szellemi hátterére és az egyes eredmények tudománytörténeti jelentőségére. Céлом az volt, hogy átfogó képet adjak a görög gondolkodás hatásáról a matematika fejlődésére, valamint rávilágítsak arra, hogy ezek az eredmények miként váltak a modern tudomány alapjaivá. A dolgozat külön értékét az adja, hogy a feldolgozott tartalom egy elektronikus formában elérhető, digitális lexikon részét képezi. Ez lehetővé teszi, hogy a görög matematika legfontosabb fogalmai, szereplői és eredményei rendszerezett, jól kereshető és korszerű formában váljanak hozzáférhetővé. A jövőben célszerű lenne más ókori kultúrák, például a babiloni vagy az egyiptomi matematika feldolgozására is fókuszálni, hogy még átfogóbb képet kapjunk a tudomány fejlődésének korai szakaszaiban zajló folyamatokról.

Bízom benne, hogy munkám hozzájárul a matematikai gondolkodás iránti érdeklődés elmélyítéséhez, valamint új kutatási irányokat is inspirálhat a tudománytörténet területén.

Irodalomjegyzék

- [1] Berekszászi, G. (2022). *Már az Ókorban is tudták*. BSc szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikatanítási és Módszertani Központ.
- [2] Euklidész. (1983). *"Elemek"*. (M. Gyula, Trans.; Á. Szabó, Ed.) Gondolat.
- [3] Filep, M. (1997). *A tudományok királynője. A matematika fejlődése*. Typotex Kiadó, Budapest.
- [4] Kelemen, D. (2022). *A matematikatörténet felhasználása a matematikaoktatásban* (BSc szakdolgozat, Ferenc Rákóczi II. Kárpátaljai Magyar Főiskola, Matematika és Informatika Tanszék). <https://dspace.kmf.uz.ua/jspui/handle/123456789/1701>
- [5] Kondor, E. (2007). *Euklidész élete és munkássága. Az Elemek*. Szakdolgozat, Debreceni Egyetem, Természettudományi Kar.
- [6] Lukács, M. (2009). *A világ alaptörvény kutatásának kezdetei. A nagy ókori gondolkodók*.
- [7] Lukács, M. (2010). *A matematikai analízis története a 17-18. században* Szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematika BSc tanári szakirány.
- [8] Pejó, B. (n.d.). *Matematikatörténet*.
- [9] Ropolyi, L., & Szegedi, P. (Eds.). (2000). *A tudományos gondolkodás története. Előadások a természettudományok és a matematika történetéből az ókortól a XIX. századig*. Eötvös Loránd Tudományegyetem.
- [10] Sain, M. (1986). *Nincs királyi út! Matematikatörténet*. Gondolat, Budapest.
- [11] Séra, T. (2024). *Szimmetrikus poliéderek* (Magiszteri szakdolgozat, Ferenc Rákóczi II. Kárpátaljai Magyar Főiskola, Matematika és Informatika Tanszék). <https://dspace.kmf.uz.ua/jspui/handle/123456789/3950>
- [12] Simonovits, A. (2007, június 26). *Matematikatörténeti vázlat*. BME, Matematikai Intézet.
- [13] Újvári, D., & Németh, L. (2024). Apollóniusz-feladatok és körlán-cok GeoGebrával. *DIMENZIÓK: Matematikai Közlemények*, 12, 13–23. <https://doi.org/10.20312/dim.2024.02>

- [14] Борисенко, В. Д., Устенко, С. А., & Устенко, І. В. (2021). Арбелос і пов'язані з ним кола. Прикладні питання математичного моделювання, 4(2.2), 33-44. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.3>
- [15] Ткаченко, А. (2024). Фалес Мілетський. Основні теореми та їх застосування в геометрії. У світі математики, 1(2), 18-25. <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.3>
- [16] Месарош, Л. (2023). Еволюція становлення дисципліни історії математики через аналіз вітчизняних та зарубіжних літературних джерел. Освіта. Інноватика. Практика, 11(5), 45–51. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i5-007>
- [17] Wikipedia. (2025). Thales of Miletus.
https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)
- [18] Red Zambala. (2013). Anaximander of Miletus | Milesian school.
https://philosophy.redzambala.com/sites/default/files/styles/front-333/public/field/image/Anaximander-xx_0.jpg?itok=ZSOqVKnx
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)
- [19] Universal Buddhism. (n.d.). Anaximenes.
https://universalbuddhism.com/philosophers_posts/anaximenes/
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)
- [20] MathReference. (2021). Püthagorasz.
<https://www.mathreference.org/index/page/id/113/lg/hu>
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)
- [21] Probaway. (2013, June 3). Philosophers Squared – Xenophanes.
https://probaway.wordpress.com/2013/06/03/philosophers-squared_xenophanes/
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)
- [22] Licentia Poetica. (2023). The Way of Truth.
<https://licentiapoetica.com/the-way-of-truth-ce4d5b3530f3>
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)
- [23] Arcanum. (n.d.). Zénón. In Ókori lexikon.
<https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/Lexikonok-okori-lexikon-CA894/z-CD2CD/zeno-CD2E9/>
(Hozzáféres időpontja: 2025. 05. 01.)

- [24] OSZK. (n.d.). Eudoxosz.
https://dka.oszk.hu/021200/021263/134_kiskep.jpg
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [25] Wikipedia. (2024). Arkhütaasz.
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkh%C3%BCtasz>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [26] Filosofia.org. (n.d.). Platon.
<https://www.filosofia.org/000/platon05.jpg>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [27] Michael, W. C. (2024, December 24). Aristotle: Everything You Need to Know. Classical Liberal Arts Academy. <https://classicalliberalarts.com/classical-philosophy/aristotle-everything-you-need-to-know-2023/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [28] Encyclopaedia Britannica. (n.d.). Hippias of Elis. Encyclopaedia Britannica.
<https://www.britannica.com/biography/Hippias-of-Elis>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [29] Matematikai Karcok. (n.d.). Hipokratesz. Matematikai Karcok.
<https://matekarcok.hu/hippokratesz/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [30] Citatum. (n.d.). Plutarkhosz. Citatum.hu.
<https://www.citatum.hu/szerzo/plutarkhosz>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [31] Magyar Iskola. (2022, June). Arkhimedesz törvénye. Magyar Iskola.
<https://www.magyar-iskola.sk/2022/06/arkhimedesz-torvenye/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [32] Wikipedia. (n.d.). Arkhimédészi csavar.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9d%C3%A9szi_csavar
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [33] Encyclopædia Britannica. (n.d.). Euclid – Greek mathematician.
<https://www.britannica.com/biography/Euclid-Greek-mathematician>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [34] Kagylókürt. (n.d.). Tyana-i Apollóniosz mester.
<https://www.kagylokurt.hu/16070/orientacio/szentek-elete/tyana-i->

apolloniosz-mester.html

(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)

- [35] Süni Univerzum. (2016, October 14). Dobalódzunk a szavakkal.
<https://sunnyiverzum.wordpress.com/2016/10/14/dobalodzunk-a-szavakkal/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [36] Shutterstock. (n.d.). Search results for "Aristarchus of Samos".
<https://www.shutterstock.com/hu/search/aristarchus-samos>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [37] Famous Mathematicians. (n.d.). Eratosthenes.
<https://www.famousmathematicians.net/eratosthenes/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [38] Wikipedia. (2024). Hipparkhosz (csillagász).
https://hu.wikipedia.org/wiki/Hipparkhosz_%28csillag%C3%A1sz%29
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [39] Computer Timeline. (n.d.). Ctesibius of Alexandria – 280 BC.
<http://www.computer-timeline.com/timeline/ctesibius-of-alexandria/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [40] MacTutor History of Mathematics Archive. (n.d.). Nicomedes.
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nicomedes/>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [41] Mktyscn. (2009, September 3). Conchoid of de Sluze for several values of a [SVG image]. Wikimedia Commons.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conchoid_of_deSluze.svg
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [42] Wikimedia Commons. (2024). Hérón (matematikus).
<https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9r%C3%B3n>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [43] Mathlete Training Centre. (2025). Menelaus.
https://www.mathletetraining.com/math_wiki/menelaus/
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [44] Maths History. University of St Andrews. (n.d.). Theon of Smyrna.
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Theon_of_Smyrna/
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)

- [45] Wikipedia. (2025). Klaudiosz Ptolemaiosz.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Klaudiosz_Ptolemaiosz
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [46] Wikipedia. (2024). Diophantosz.
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Diophantosz>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [47] Wikipedia. (2024). Alexandriai Hüpatia.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Alexandriai_H%C3%BCpatia
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)
- [48] Licentia Poetica. (2023). Theology and the Divine.
<https://licentiapoetica.com/theology-and-the-divine-ebd061f6633a>
(Hozzáférés időpontja: 2025. 05. 01.)

Ábrák jegyzéke

1.	Az első ógörög számjegyek ([3]: 61. o., 3.2. ábra)	13
2.	2466 felírása ([3]: 62. o., 3.3 ábra)	13
3.	Az attikai számok ([3]: 62. o., 3.4 ábra)	13
4.	A görög alfabetikus számjegyek ([3]: 62. o., 3.5 ábra)	14
5.	Példa szorzás műveletre ([3]: 63. o., 3.6 ábra)	14
6.	Thalész ([17])	16
7.	A piramis magassága ([10]: 75. o., 10. ábra)	16
8.	Tengeri távolságok mérése ([15]: 23. o., 6. ábra)	17
9.	Anaximandrosz ([18])	18
10.	Anaximenész ([19])	18
11.	Püthagorasz ([20])	18
12.	Figurális számok ([9]: 49. o.)	19
13.	Xenophanész ([21])	21
14.	Parmenidész ([22])	21
15.	Eleai Zénón ([23])	22
16.	Eudoxosz ([24])	23
17.	Arkhütasz ([25])	24
18.	Platón ([26])	25
19.	Tetraéder	26
20.	Hexaéder (kocka)	26
21.	Oktaéder	26
22.	Dodkaéder	26
23.	Ikozaéder	27
24.	Arisztotelész ([27])	27
25.	Eliszi Hippiasz ([28])	28
26.	Triszektrix ([10]: 107. o., 40. ábra)	28
27.	Khioszi Hippokratész ([29])	28
28.	Plutarkhosz ([30])	29
29.	Arkhimédesz ([31])	30
30.	Parabolaszelet ([7]: 8. o., 2. ábra)	31
31.	Arkhimédesz ábrája ([4]: 61. o., 2.1 ábra)	31
32.	Arkhimédeszi spirál	32
33.	Arkhimédeszi csavar ([32])	32
34.	Euklidész ([33])	33
35.	Apollóniosz ([34])	36
36.	Kúpszeletek ([35])	37
37.	Arisztarkhosz ([36])	37

38.	Arisztarkhosz mérése ([10]: 246. o., 162. ábra)	38
39.	Eratoszthenész ([37])	38
40.	Hipparkhosz ([38])	39
41.	Ktészibiosz ([39])	40
42.	Nikomédész ([40])	41
43.	Kagylógörbe ([41])	42
44.	Héron ([42])	43
45.	Fénytörés ([10]: 269. o., 187. ábra)	43
46.	Menelaosz ([43])	44
47.	Menelaosz-tétel ([10]: 257. o., 173. ábra)	45
48.	Szmürnai Theón ([44])	45
49.	Ptolemaiosz Klaudiosz ([45])	46
50.	Ptolemaiosz-tétel ([10]: 264. o., 183. ábra)	46
51.	Diophantosz ([46])	47
52.	Diophantosz algebrai jelölésrendszere ([10]: 274-275. o.)	48
53.	Papposz-tétel ([10]: 282. o., 191. ábra)	49
54.	Arbelosz ([10]: 20. o., 7. ábra, szerkesztve)	50
55.	Papposz-körláncok ([14]: 43. o., 14. és 15. ábra)	50
56.	Alexandriai Hüpatia ([47])	51
57.	Proklosz ([48])	52
58.	Admin felület (Saját kép)	53
59.	Tudós hozzáadása (Saját kép)	53
60.	Tudós adatainak szerkesztése (Saját kép)	53
61.	Beépített szövegszerkesztő (Saját kép)	54
62.	Képletek táblázata (Saját kép)	54
63.	Beépített LaTeX-szerkesztő (Saját kép)	55
64.	LaTeX-szerkesztő a beépített szövegszerkesztőben (Saját kép)	55
65.	A felhasználói felület (Saját kép)	56

Mellékletek

Név	Élt	Születés helye(Görögország)	Tudományterület
Thalész	I.e. 624-546	Milétoz	természetfilozófia csillagászat geometria fizika
Anaximandrosz	I.e. 610-546	Milétoz	természetfilozófia
Anaximenész	I.e. 585-525	Milétoz	természetfilozófia
Püthagorasz	I.e. 582-497	Szamosz	geometria csillagászat aritmetika zeneelmélet
Parmenidész	I.e. 540-460	Elea	filozófia metafizika politika logika
Hérakleitosz	I.e. 535-475	Epheosz	természetfilozófia kozmológia
Zénón	I.e. 490-430	Elea	filozófia dialektika analízis
Khioszi Hippokratész	I.e. 450 körül	Khiosz	geometria
Hippiasz	I.e. 420 körül	Élisz	geometria filozófia
Deinosztratosz	I.e. 350 körül	-	geometria
Menaikhmosz	I.e. 350 körül	-	geometria
Eudoxosz	I.e. 408-355	Knidosz (Törökország)	matematika csillagászat
Arkhütasz	I.e. 428-365	Tarentum	matematika filozófia mechanika
Platón	I.e. 427-347	Athén	matematika filozófia
Arisztotelész	I.e. 384-322	Sztageria	filozófia természettudományok logika, metafizika politika/ etika

1. táblázat. Euklidész előtti görög matematikusok (I.e. VI - I.e. III. sz.)

Név	Élt	Születés helye	Tudományterület
Euklidész	I.e. 365-300	Alexandria (Egyiptom)	aritmetika geometria
Arisztarkhosz	I.e. 310-250	Szamosz (Görögország)	csillagászat
Arkhimédész	I.e. 278-212	Szürakúza (Görögország)	matematika fizika csillagászat analízis
Eratoszthenész	I.e. 276-119	Küréné (Görögország)	matematika csillagászat geográfia fizika
Apollóniosz	I.e. 260-190	Pergé (Görögország)	geometria csillagászat
Hipparkhosz	I.e. 160-125	Nicaea (Görögország)	csillagászat trigonometria
Ktészibiosz	I.e. III. sz.	Alexandria (Egyiptom)	matematika mechanika
Nikomédész	I.e. III. sz.	Alexandria (Egyiptom)	geometria matematika

2. táblázat. A hellenizmus görög matematikusai (I.e. 323 - I.e. 30)

Név	Élt	Születés helye	Tudományterület
Hérón	I. sz.	Alexandria (Egyiptom)	matematika mechanika
Menelaosz	100 körül	Alexandria (Egyiptom)	gömbi geometria trigonometria
Szmürnai Theón	125 körül	Szmürna (Törökország)	matematika filozófia
Ptolemaiosz Klaudiosz	85-165	Alexandria (Egyiptom)	csillagászat geometria geográfia
Diophantos	III. sz.	Alexandria (Egyiptom)	algebra
Papposz	IV. sz.	Alexandria (Egyiptom)	projektív geometria geográfia/ csillagászat
Alexandriai Theón	IV. sz.	Alexandria (Egyiptom)	matematika
Alexandriai Hüpatia	370-415	Alexandria (Egyiptom)	matematika csillagászat
Proklosz	410-485	Konstantinápoly (Törökország)	filozófia matematika

3. táblázat. A római korszak görög matematikusai (I.e. 30 - I.u. 641)

Személy	Esemény
Milétoszi Thalész	geometriai tételek bizonyítása piramis magasságának meghatározása tengeri távolságok mérésének módszere
Püthagorasz	püthagoreus iskola megalaptása figurális számok és számelméleti sejtések az irracionális számok felfedezése
Parmenidész	az eleai iskola megalapítása a deduktív módszer megalkotása
Zénón	a végtelen és a határérték kérdésének felmerülése
Khioszi Hippokratész	a körnégyszögesítés részleges megoldása "holdacskákkal"
Hippiasz	a szögharmadolás megoldása a triszektrix görbével
Eudoxosz	az arányelmélet kidolgozása a kimerítés módszerének megalkotása szférák modelljének megalkotása
Arkhütasz	a kockakettőzés problémájának térbeli megszerkesztése
Platón	az Athéni Akadémia megalapítása szabályos poliéderek rendszerezése
Arisztotelész	a logika alapjainak kidolgozása

4. táblázat. Az Euklidész előtti görög matematika eseményei

Személy	Esemény
Euklidész	az "Elemek" c. könyv megírása a geometria axiomatizálása LNKO algoritmus kidolgozása Euklidészi szerkesztés módszere
Arisztarkhosz	a heliocentrikus világkép első ismert képviselője
Arkhimédész	π értékének becslése a gömb térfogatának és felszínének meghatározása a felhajtóerő felfedezése és testek sűrűségének meghatározása a parabolaszeglet területének meghatározása a statika alapjainak lerakása mechanikus gépek készítése az emelő elv
Eratoszthenész	a Föld kerületének meghatározása Eratoszthenész szitája (prímszámok keresésének algoritmus)
Apollóniosz	a kúpszeletek kidolgozása a koordináta-geometria megalapozása
Hipparkhosz	az első csillagkatalógus elkészítése a hűrtáblázat elkészítése és a trigonometria megalkotása csillagászati mérések hosszúsági és szélességi körök bevezetése
Nikomédész	a kagylógörbe felfedezése

5. táblázat. A hellenisztikus korszak eseményei

Személy	Esemény
Hérón	a háromszög területének kiszámítása (Hérón -képlet) a matematika alkalmazásai gyakorlatban
Ptolemaiosz Klaudiosz	a geocentrikus modell megalkotása 8000 hely földrajzi koordinátájának leírása (Geographiké c. mű)
Diophantos	az algebra tudományának megalkotása
Papposz	a projektív geometria megalkotása papposz-körláncok
Alexandriai Hüpatia	az első női matematikus és polihisztor a hidrométer és az asztrolábium feltalálása
Proklosz	kommentárok Euklidész "Elemek" művéhez

6. táblázat. A római korszak eseményei

Probléma	Leírás
Szögharmadolás	A feladat egy tetszőleges szög felosztása, három egyenlő részre körző és vonalzó segítségével.
Kör négyszögesítése	A feladat az, hogy egy adott területű körhöz vele egyenlő területű négyzetet kell szerkeszteni körző és vonalzó segítségével.
Kockakettőzés	A feladat az, hogy körző és vonalzó segítségével meg kell szerkeszünk egy olyan kockának az élét, amelynek térfogata kétszerese egy adott kocka térfogatának.

7. táblázat. Nevezetes problémák az ókori görög matematikában

Probléma	Matematikus neve
Szögharmadolás	Hippiasz Archimédész Eratoszthenész Nikomédész
Kör négyszögesítése	Arkhimédész Khioszi Hippokratész Eratoszthenész
Kockakettőzés	Khioszi Hippokratész Arkhütasz Eratoszthenész Dinosztratosz Menaikhmosz Apollóniosz Nikomédész

8. táblázat. Nevezetes problémák megoldói

Ágazat őse	Ágazat
-	Természetfilozófia
Természetfilozófia	Fizika
Fizika	Mechanika
Mechanika	Statika
Fizika	Optika
Természetfilozófia	Geográfia (földrajz)
-	Matematika
Matematika	Analízis
Matematika	Aritmetika
Aritmetika	Algebra
Matematika	Geometria
Geometria	Analitikus geometria
Geometria	Projektív geometria
Geometria	Gömbi geometria
Matematika	Logika
-	Csillagászat
Csillagászat	Trigonometria

9. táblázat. Kialakult tudományterületek és azok előzményei

Висновок

У своїй роботі я представив найважливіші етапи історії грецької математики, її ключових постатей і відкриттів в хронологічному порядку, зокрема звертаючи увагу на інтелектуальний контекст епохи та історичне значення кожного досягнення. Моя мета полягала в тому, щоб дати загальне уявлення про вплив грецького мислення на розвиток математики та показати, як ці досягнення стали основою сучасної науки. Особливою цінністю роботи є те, що її матеріал є частиною електронного, цифрового лексикону. Це дозволяє зробити найважливіші поняття, постаті та досягнення грецької математики доступними в зручному, структурованому та добре пошуковому форматі. В майбутньому доцільно було б звернути увагу і на вивчення математики інших стародавніх культур, таких як вавилонська чи єгипетська, для того щоб отримати ще більш повне уявлення про процеси розвитку науки в ранні етапи.

Сподіваюся, що моя робота сприятиме поглибленню інтересу до математичного мислення та надихне на нові дослідження в історії науки.

Nyilatkozat

Alulírott, Tar Bence Balázs, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Я, Тар Бенце-Балаж Олександрович, підтверджую, що користувалась Chat GPT (<https://chat.openai.com/>) у період з 6 лютого по 4 травня 2025 року для наступних цілей:

1. Формування структури роботи та розподіл змісту за основними розділами.
2. Редагування, стилізація тексту та перевірка помилок у власній роботі.
3. Покращення академічного стилю, зокрема граматики, пунктуації та лексики.
4. Опрацювання таблиць у хронологічному порядку.
5. Узагальнення та впорядкування використаної літератури.

Отримані таким чином дані були використані для доопрацювання та перероблення тексту з метою отримання кінцевого варіанту роботи.

Тар Бенце-Балаж Олександрович

Звіт подібності

метадані

Назва організації

Hungarian College of Higher Education Ferenc Rakoczi II Transcarpathian

Заголовок

Tar Bence Balázs_Diplomamunka

Науковий керівник / Експерт

Автор Габрієлла Пап

підрозділ

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II

Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.

4.84%

4.84%

КП 1

1.21%

1.21%

КЦ

25

Довжина фрази для коефіцієнта подібності 2

12467

Кількість слів

99847

Кількість символів

Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати навмисний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

Заміна букв	Б	94
Інтервали	A→	0
Мікропробіли	␣	0
Білі знаки	Б	0
Парафрази (SmartMarks)	a	16

Подібності за списком джерел

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Колір тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

10 найдовших фраз

Колір тексту

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://www.math.elte.hu/thesisupload/thesisfiles/2022bsc_matelem3y-enpm5i.pdf	190 1.52 %
2	https://dea.lib.unideb.hu/bitstream/handle/2437/78119/Szakdolgozat.pdf;sequence=1	173 1.39 %
3	https://dea.lib.unideb.hu/bitstream/handle/2437/78119/Szakdolgozat.pdf;sequence=1	76 0.61 %
4	https://dea.lib.unideb.hu/bitstream/handle/2437/78119/Szakdolgozat.pdf;sequence=1	62 0.50 %
5	https://matekarcok.hu/kategoria/nevezetes-matematikai-problemak/	29 0.23 %

6	https://oip-journal.org/index.php/oip/article/view/162	21 0.17 %
7	https://wordwall.net/hu/resource/91478140/term%C3%A9szettudom%C3%A1ny-vizsga	17 0.14 %
8	https://uk.m.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D1%96%D0%B9_%D0%84%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82	11 0.09 %
9	https://uk.m.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D1%96%D0%B9_%D0%84%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82	9 0.07 %
10	https://www.math.elte.hu/thesisupload/thesisfiles/2022bsc_matelem3y-enpm5i.pdf	9 0.07 %
з домашньої бази даних (0.00 %)		
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
з програми обміну базами даних (0.00 %)		
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
з Інтернету (4.84 %)		
ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ДЖЕРЕЛО URL	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://dea.lib.unideb.hu/bitstream/handle/2437/78119/Szakdolgozat.pdf;sequence=1	311 (3) 2.49 %
2	https://www.math.elte.hu/thesisupload/thesisfiles/2022bsc_matelem3y-enpm5i.pdf	206 (3) 1.65 %
3	https://matekarcok.hu/kategoria/nevezetes-matematikai-problema/	29 (1) 0.23 %
4	https://oip-journal.org/index.php/oip/article/view/162	21 (1) 0.17 %
5	https://uk.m.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D1%96%D0%B9_%D0%84%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82	20 (2) 0.16 %
6	https://wordwall.net/hu/resource/91478140/term%C3%A9szettudom%C3%A1ny-vizsga	17 (1) 0.14 %

Список прийнятих фрагментів (немає прийнятих фрагментів)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗМІСТ	КІЛЬКІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-------	---------------------------------------