

Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II
Кафедра математики та інформатики

Реєстраційний № _____

Кваліфікаційна робота
Похідна функції та її застосування в процесі
розв'язування задач прикладного характеру

Варга Маріанна Олександрівна
Студентка II-го курсу
Освітня програма «Середня освіта (Математика)»
Спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»
Рівень вищої освіти: магістр

Тема затверджена на засіданні кафедри
Протокол № 3 / 2024

Науковий керівник:

Дзямко Вікторія Йосипівна
кандидат педагогічних наук, доцент

Завідувач кафедрою математики та інформатики :

Кучінка Каталін Йожефівна
(к. ф.-м. н, доцент)

Робота захищена на оцінку _____, «__» _____ 202_ року

Протокол № _____ / 202_

**Міністерство освіти і науки України
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

Кафедра математики та інформатики

Кваліфікаційна робота
Похідна функції та її застосування в процесі
розв'язування задач прикладного характеру
Рівень вищої освіти: магістр

Виконавець: студентка II-го курсу

Варга Маріанна Олександрівна

освітня програма «Середня освіта (Математика)»
спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: Дзямко Вікторія Йосипівна

кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: Млавець Юрій Юрійович

кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

доцент кафедри кібернетики і прикладної математики

ДВНЗ Ужгородський національний університет

Берегове
2025

Зміст

Вступ.....	6
1. Історичне тло похідної.....	7
2. Теоретичне тло похідної.....	8
2.1. Властивості функцій.....	8
2.2. Поняття похідної	9
2.2.1. Правила диференціювання	13
2.2.2. Похідна елементарних функцій	13
3. Геометричне та фізичне тлумачення	15
4. Практичне застосування похідної	18
5. Місце і роль похідної в навчальній програмі математики української середньої школи.....	27
6. Представлення дослідження.....	29
6.1. Висновки.....	53
Список літератури.....	55
Перелік рисунків	57
Додатки	58
Висновки.....	67

**Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

Matematika és Informatika Tanszék

**A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSA A
GYAKORLATI PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁNAK FOLYAMATÁBAN
Magiszteri dolgozat**

Készítette: Varga Marianna

II. évfolyamos matematika

szakos hallgató

Témavezető: Dzjámkó Viktória

a pedagógiai tudományok kandidátusa, docens

Recenzens: Mlavetsz Jurij

a fizika és a matematika kandidátusa, docens

a Kibernetika és Alkalmazott Matematika Tanszék docense

az Ungvári Nemzeti Egyetem oktatója

Tartalomjegyzék

Bevezetés	6
1. A derivált történelmi háttere	7
2. A derivált elméleti háttere	8
2.1. Függvénytulajdonságok	8
2.2. A derivált fogalma	9
2.2.1. Differenciálási szabályok	13
2.2.2. Elemi függvények deriváltjai	13
3. Geometriai és fizikai értelmezés	15
4. A derivált gyakorlati alkalmazásai	18
5. A derivált helye és szerepe az ukrajnai középiskolai matematika- tantervben	27
6 Kutatás bemutatása	29
6.1 Következtetések	53
Irodalomjegyzék	55
Ábrajegyzék	57
Mellékletek	58
Висновки	67

Bevezetés

A matematikai analízis egyik központi fogalma a derivált, amely nem csupán elméleti jelentőséggel bír, hanem számos gyakorlati területen is fontos szerepet tölt be. A derivált lehetőséget ad különböző mennyiségek változásának leírására, így a fizikától a kémián át a biológián és közgazdaságtanon keresztül sokféle szituációban alkalmazható. Legyen szó mozgások elemzéséről, növekedési folyamatokról vagy éppen gazdasági optimumkeresésről – a derivált fogalma minden esetben hasznos matematikai eszközként szolgál.

Dolgozatom célja, hogy átfogó képet nyújtson a derivált fogalmáról: bemutatja annak történeti háttérét, elméleti megalapozását, geometriai és fizikai értelmezéseit, valamint gyakorlati alkalmazási lehetőségeit. Kiemelten foglalkozom azzal, hogy hogyan jelenik meg ez a fogalom az ukrán középiskolai oktatásban, különös tekintettel a 10. és 11. évfolyam tananyagára. Napjaink oktatásának egyik legnagyobb kihívása, hogy a tanulók számára az elméleti tudás ne önmagában álljon, hanem értelmezhető és alkalmazható is legyen. A derivált tanítása ebben kiemelkedő lehetőséget kínál.

A dolgozat hat fejezetből áll. Az első fejezet a derivált történeti háttérét ismerteti. A második rész az elméleti alapokat rendszerezi: ide tartozik a függvénytulajdonságok, a differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjainak áttekintése. A harmadik fejezet a derivált geometriai és fizikai jelentésére koncentrál. Ezt követi a negyedik rész, amely konkrét gyakorlati alkalmazásokon keresztül mutatja be a derivált hasznosságát. Az ötödik fejezet az ukrain középiskolai oktatás tantervi háttérét elemzi, végül a hatodik fejezetben bemutatom saját kutatásomat, amelyben tanulók és tanárok attitűdjeit, módszertani szokásait és a derivált oktatásának hatékonyságát vizsgáltam.

A dolgozat célja tehát nem csupán a derivált matematikai jelentőségének bemutatása, hanem az is, hogy rávilágítson annak oktatási és gyakorlati szerepére.

1. A derivált történelmi háttere

A derivált a matematika egyik alapvető fogalma, amely a XVIII. században alakult ki. Isaac Newton és Gottfried Wilhelm Leibniz függetlenül egymástól dolgozták ki a differenciál-számítás elméletét, amely mérföldkő volt a matematika fejlődésében. Isaac Newton (1643-1727), miközben a mechanika törvényein dolgozott, vezette be a derivált fogalmát, amely lehetővé tette a fizikai mennyiségek változásainak pontosabb elemzését. Az ő fő műve, a *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, óriási hatással volt a természettudományok fejlődésére, és mérföldkőnek számít a tudomány történetében.

Ezzel párhuzamosan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a deriváltat egy másik szemszögből, a geometriai megközelítésből alkotta meg. Leibniz a dolog természetét úgy fogta fel, hogy az segít megérteni a görbék és azok érintőinek viselkedését. Ő dolgozta ki azokat a matematikai szimbólumokat, amelyeket ma is használunk a differenciál-számításban.

Fontos megemlíteni, hogy bár Newton és Leibniz tették le a differenciál-számítás alapjait, a fogalom nem volt teljesen ismeretlen a matematika történetében. Már jóval előttük Archimedes (i. e. 287 - i. e. 212) sikeresen alkalmazott határértékekkel kapcsolatos gondolatokat a matematikai problémák megoldásában, mint például a tangens vonalak építése a bonyolult görbékre, és képes volt a függvények maximumainak meghatározására is.

A 17. század végén a különböző matematikai iskolákban, mint például R. Descartes (1596-1650), J. Roberval (1602-1675), D. Gregory (1638-1675) és I. Barrow (1630-1677) munkáiban már előfordultak a derivált fogalmával kapcsolatos első nyomok.

A további fejlesztésekben nagy szerepe volt L'Hopitalnak (1661-1704), a Bernoulli családnak (1744-1807), Lagrange-nak (1736-1813) és Cauchy-nak (1789-1857), akik a differenciál-számításban szerzett tudományos eredményeikkel hozzájárultak a fogalom tisztázásához és annak továbbfejlesztéséhez. Az első világos és általánosan elfogadott definíciót azonban Cauchy adta, amely azóta is alapjául szolgál a matematikaelemző kurzusoknak.

2. A derivált elméleti háttere

2.1. Függvénytulajdonságok

Egy függvény **kölcsönösen egyértelmű**, ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez különböző függvényértékek tartoznak. Azaz, ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Zérushelynek nevezzük az értelmezési tartomány azon pontját vagy pontjait, ahol a függvény értéke nulla, tehát $f(x) = 0$.

A **monotonitás** a függvény értékeinek növekedését vagy csökkenését jellemzi:

- A függvény szigorúan monoton növekvő, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.
- A függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.
- A függvény monoton növekvő, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- A függvény monoton csökkenő, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Maximum az értékkészlet legnagyobb eleme (ha létezik), **minimum** pedig a legkisebb eleme. A maximumhely vagy minimumhely az az x érték, ahol a függvény felveszi ezeket az értékeket. A függvénynek abszolút maximuma van az x_0 pontban, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden x esetén. Hasonlóan, abszolút minimuma van az x_0 pontban, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden x esetén.

Lokális (helyi) maximum egy olyan x_0 pontban van, amelynek környezetében nincs nagyobb függvényérték. Lokális minimum esetén pedig nincs kisebb függvényérték az adott környezetben.

A függvény páros, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$. **A függvény páratlan**, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.

Egy függvény **periodikus**, ha létezik olyan pozitív valós szám p , amelyre $f(x + p) = f(x)$ minden x értelmezési tartománybeli elemre. A legkisebb ilyen p a függvény periódusa.

Folytonos függvény esetén konvexitásról beszélhetünk. Ha a függvénygörbe bármely két pontját összekötő húr a görbe fölött halad, akkor a függvény konvex. Ha a húr a görbe alatt van, akkor a függvény konkáv. A konvexitás változási pontját inflexiós pontnak nevezzük.

2.2. A derivált fogalma

Érintő egyenes

Az érintő egyenes egy függvény grafikonján lévő olyan egyenes, amely az adott pontban "érinti" a görbét, tehát az egyenes nem keresztezi azt, hanem a pontban egyezik a görbével. Egy függvény grafikonján az x_0 pontban húzott érintő egyenes meredeksége pontosan megegyezik a függvény deriváltjának értékével az x_0 pontban.

A pontos definíció szerint, ha egy f függvény az x_0 pont környezetében értelmezett, akkor az x_0 pontban az érintő meredeksége a következő határértékkel adható meg:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ez a határérték lényegében a függvény értékének változását mutatja az x_0 pont környezetében, és ez egyben az érintő egyenes meredekségét is meghatározza. Az érintő egyenes tehát egy olyan egyenes, amely az x_0 pontban áthalad, és meredeksége a derivált értékével egyezik. Az érintő egyenes egyenlete a következő formában írható fel:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ahol $f'(x_0)$ a derivált értéke az x_0 pontban, és $f(x_0)$ az x_0 pont függvényértéke.

Geometriai értelmezés: Az érintő egyenes adja a függvény "helyi" viselkedését az adott pontban. Ha a derivált értéke pozitív, akkor az érintő egyenes emelkedő, ha negatív, akkor csökkenő irányban halad, és ha nulla, akkor vízszintes.

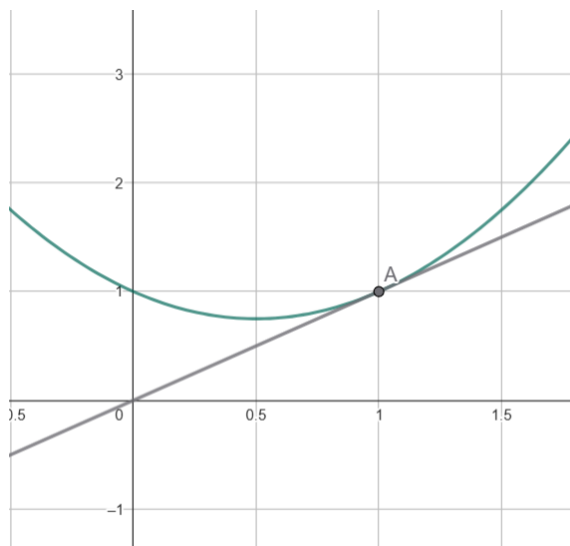
Példa: Tekintsük a $f(x) = x^2 - x + 1$ függvényt. Az érintő egyenesét meghatározhatjuk az $x_0 = 1$ pontban:

1. A függvény értéke: $f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$. 2. A függvény deriváltja: $f'(x) = 2x - 1$, így $f'(1) = 2(1) - 1 = 1$. 3. Az érintő egyenes egyenlete:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$$

Ez az egyenes az $x_0 = 1$ pontban érinti a függvényt, és meredeksége $f'(1) = 1$.

A következő ábrán látható a $f(x) = x^2 - x + 1$ függvény görbéje, valamint az $x_0 = 1$ pontban húzott érintő egyenes.



1. ábra. Az $f(x) = x^2 - x + 1$ függvény görbéje és az $x_0 = 1$ pontban húzott érintő

A derivált definíciója

Legyen adott egy f függvény, amely értelmezve van az x_0 pont környezetében. Azt mondjuk, hogy az f deriválható az x_0 pontban, ha létezik a következő határérték:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ezt a határértéket $f'(x_0)$ -val vagy $y'(x_0)$ -val jelöljük.

Deriváltfüggvény

Ha egy f függvény minden pontján deriválható egy adott intervallumban, akkor az f deriváltfüggvényét $f'(x)$ vagy $y'(x)$ jelöli, attól függően, hogy milyen jelölésekkel dolgozunk.

A deriváltfüggvény $f'(x)$ egy új függvényt alkot, amely az eredeti f függvény minden egyes pontjának deriváltját tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy ha egy függvény deriválható, akkor képesek vagyunk meghatározni, hogy az adott pont környezetében milyen mértékben változik az értéke. A derivált függvény segítségével tehát információt nyerhetünk a függvény lokális viselkedéséről, például, hogy növekvő vagy csökkenő, illetve hogy van-e extrémum a függvényen (maximum, minimum).

A deriváltfüggvény tulajdonságai:

1. A deriváltfüggvény is egy függvény, amelynek értelmezési tartománya ugyanaz, mint az eredeti függvényé, de a pontokon, ahol az eredeti függvény nem deriválható, a deriváltfüggvény értéke nem létezik.

2. A deriváltfüggvény adja meg a görbe érintőjének meredekségét minden pontban. Ha a deriváltfüggvény pozitív, akkor a görbe emelkedik, ha negatív, akkor csökken.
3. Ha egy függvénynek a deriváltja nullát ad egy pontban, az azt jelenti, hogy az érintő vízszintes, tehát lehet, hogy egy lokális maximumról vagy minimumról van szó.

Példa: Tekintsük az alábbi egyszerű függvényt:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Ekkor a függvény első deriváltja:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Ez a deriváltfüggvény azt mutatja, hogy az $f(x)$ függvény minden egyes pontjának meredeksége a függvény görbéjén miként változik. Például, ha $x = 2$, akkor a derivált:

$$f'(2) = 2(2) - 4 = 0$$

Ez azt jelenti, hogy $x = 2$ pontban a függvény érintője vízszintes, tehát ott lokális minimum található, mivel a görbe előbb csökken, majd növekszik.

Geometriai jelentés: A deriváltfüggvény értéke geometriai értelemben az adott pontban húzott érintő meredekségét adja meg. Ha a derivált pozitív, az érintő emelkedik; ha negatív, akkor süllyed; ha nulla, akkor vízszintes érintőről van szó.

A deriváltfüggvény tehát kulcsszerepet játszik a függvények viselkedésének megértésében, mivel segítségével a függvények növekedési és csökkenési intervallumait, szélsőértékeit és görbületét elemezhetjük.

Magasabb rendű deriváltak

Azt mondjuk, hogy az f függvény kétszer deriválható az x_0 pontban, ha:

1. Az f függvény deriválható minden pontban egy olyan nyílt intervallumban, amely tartalmazza az x_0 pontot.
2. Az f' függvény is deriválható az x_0 pontban.

Ekkor a függvény második deriváltját $f''(x_0)$ -ként jelöljük, és azt a változást mutatja, hogy a függvény első deriváltja hogyan változik az x_0 pont környezetében.

Általánosságban, ha egy függvény n -szer deriválható, akkor az n -edik deriváltat $f^{(n)}(x_0)$ -val jelöljük. Ez azt jelenti, hogy a függvény első, második, harmadik stb. deriváltja mind létezik, és mindegyik egy-egy új függvényt alkot. A magasabb rendű deriváltak segítenek mélyebben megérteni a függvény viselkedését, például a görbületeket vagy a sebesség és gyorsulás változásait.

Példa: Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Az első derivált:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

A második derivált:

$$f''(x) = 6x - 6$$

A harmadik derivált:

$$f^{(3)}(x) = 6$$

Látható, hogy a harmadik derivált állandó, tehát az eredeti függvény görbülete folyamatosan változik egyenletesen.

Folytonosság és deriválhatóság

Ha egy függvény deriválható egy adott pontban, akkor az ott folytonos is. Az állítás megfordítása azonban nem igaz: egy függvény lehet folytonos egy pontban anélkül, hogy ott deriválható lenne.

- Ha egy függvény f deriválható egy pontban x_0 , akkor a következő határérték létezik és véges:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ekkor a függvény a x_0 pont körüli értékekben nem tartalmaz szakadást, ugrást vagy végtelen folyamatokat, tehát folytonos a x_0 pontban.

- Az állítás megfordítása nem igaz: léteznek olyan függvények, amelyek folytonosak egy pontban, de nem deriválhatók ott. Például:

- A $f(x) = |x|$ függvény folytonos a $x = 0$ pontban, de nem deriválható ott.

- A $f(x) = x^{1/3}$ folytonos a $x = 0$ pontban, de nem deriválható ott.

Tehát bár a deriválhatóság biztosítja a folytonosságot, fordítva nem igaz, hogy a folytonosság biztosítja a deriválhatóságot.

2.2.1. Differenciálási szabályok

A differenciálási szabályok lehetővé teszik bonyolultabb függvények deriválását egyszerűbb részek segítségével. Az alábbiakban bemutatjuk a legfontosabb szabályokat:

- **Konstans függvény:** Ha $f(x) = c$, akkor $f'(x) = 0$.
- **Konstans szorzata:** Ha $f(x) = c \cdot g(x)$, akkor $f'(x) = c \cdot g'(x)$.
- **Összeg és különbség:** $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.
- **Szorzat szabálya:** $(gh)' = g'h + gh'$.
- **Hányados szabálya:** $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$.
- **Inverz függvény deriváltja:** Ha f inverzfüggvénye f^{-1} , akkor

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{ahol } f(x) = y.$$

- **Láncszabály (összetett függvény):** $(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

2.2.2. Elemi függvények deriváltjai

Az alábbi táblázat az alapvető elemi függvények deriváltját és értelmezési tartományát mutatja:

$f(x)$	$f'(x)$	Értelmezési tartomány (D_f)
x^n	nx^{n-1}	R
a^x	$a^x \ln a$	R
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	R
$\cos x$	$-\sin x$	R
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0, \pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	R
x	$-\frac{1}{1+x^2}$	R
$\sinh x$	$\cosh x$	R
$\cosh x$	$\sinh x$	R
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$	R

[4]

Ezek az elemi deriváltak gyakran fordulnak elő különféle matematikai, fizikai, mérnöki és gazdasági alkalmazásokban.

3. Geometriai és fizikai értelmezés

A deriválás az analízis egyik központi fogalma, amelynek mind elméleti, mind gyakorlati jelentősége van. A derivált fogalma két fő értelmezési irányvonal mentén értelmezhető: geometriai és fizikai szempontból. E két megközelítés lehetővé teszi a derivált fogalmának intuitív megértését és alkalmazását a különböző tudományterületeken.

A derivált geometriai értelmezése

A derivált geometriai jelentése szerint egy függvény adott pontjában az érintő egyenes meredekségét adja. Ez a vonal érinti a görbét az adott pontban, és azt a pontot tekintve a legjobb közelítést nyújtja.

Vegyünk egy újabb példát: tekintsük a $f(x) = \sin(x)$ függvényt, és határozzuk meg az érintő egyenest az $x = \frac{\pi}{4}$ pontban.

A szinusz függvény deriváltja a következő képlettel számolható:

$$f'(x) = \cos(x)$$

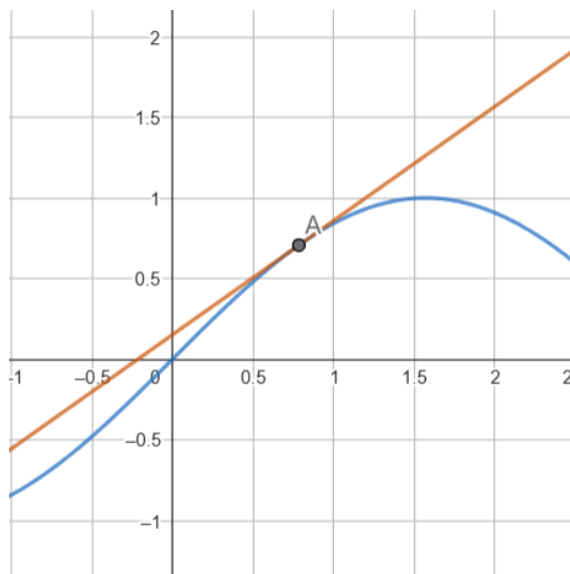
Ezért a $x = \frac{\pi}{4}$ pontban a derivált értéke:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ez alapján az érintő egyenes egyenlete a következőképpen alakul:

$$y - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Az alábbi ábrán látható a $f(x) = \sin(x)$ függvény és az érintő egyenes az $x = \frac{\pi}{4}$ pontban:



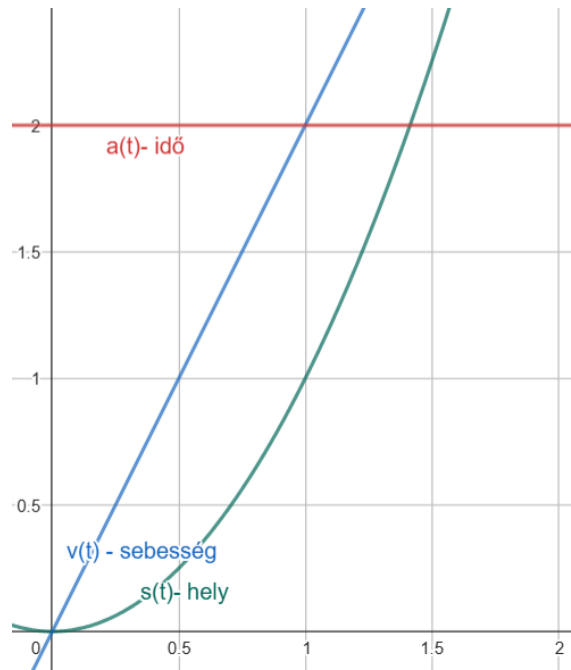
2. ábra. A szinusz függvény és érintője az $x = \frac{\pi}{4}$ pontban

A derivált fizikai értelmezése

A derivált fizikai értelmezésében a változások sebességének mérésére használjuk. Egy test mozgásának vizsgálatakor, ha $s(t)$ jelöli a test által megtett utat az idő függvényében, akkor a derivált a test pillanatnyi sebességét adja meg:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a sebesség a hely változásának idő szerinti arányát adja meg. A sebesség egy skaláris mennyiség, amelynek iránya és nagysága is fontos, és ez a mennyiség közvetlenül a mozgó objektum állapotát jellemzi.



3. ábra. A hely, sebesség és gyorsulás kapcsolata az idő függvényében

A gyorsulás a sebesség idő szerinti változása, tehát a sebesség első deriváltja, és második deriváltja a hely függvényében:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

A gyorsulás a mozgás dinamikáját írja le: ha a gyorsulás pozitív, a test sebessége nő, míg ha negatív, a test lassul.

4. A derivált gyakorlati alkalmazásai

1. Feladat:

Az 1917-ben gyártott és nosztalgiajárműként megőrzött 109.109 sorozatszámú gőzmozdornynál több próbaút során is vizsgálták, hogy a mozdony szénfogyasztása hogyan függ a mozdony átlagsebességétől. A mérések szerint v km/h átlagsebesség esetén ($50 < v < 100$) jó közelítéssel az óránkénti szénfogyasztás:

$$f(v) = 0,5v^2 - 65v + 3800 \text{ kg}$$

A mozdony a hozzákapcsolt szerkocsiban 6,1 tonna szenet tudott magával vinni.

- a) Számítsd ki, hogy 60 km/h átlagsebesség esetén (a megadott modell szerint) hány km hosszúságú útra elegendő a 6,1 tonna szénkészlet!
- b) Határozd meg azt az átlagsebességet, amelynél a 6,1 tonna szén a lehető leghosszabb útra elegendő! [5]

Megoldás:

- a) A szénfogyasztás függvénye a következő:

$$f(v) = 0,5v^2 - 65v + 3800 \quad [\text{kg/óra}].$$

A 6,1 tonna szénre elegendő út hossza kiszámítható:

$$s = \frac{6100}{f(v)} \cdot v = \frac{6100}{0,5v^2 - 65v + 3800} \cdot v.$$

Behelyettesítve $v = 60$:

$$s(60) = \frac{6100}{0,5 \cdot 60^2 - 65 \cdot 60 + 3800} \cdot 60 = \frac{6100}{1700} \cdot 60 = 215,3 \text{ km}.$$

Válasz: 60 km/h sebességnél a mozdony körülbelül 215,3 km-t tud megtenni a 6,1 tonna szénnel.

- b) A szénfogyasztás függvénye:

$$f(v) = 0,5v^2 - 65v + 3800.$$

A maximális út hossza:

$$s(v) = \frac{6100}{0,5v^2 - 65v + 3800} \cdot v$$

A származtatott függvényt úgy számoljuk ki, hogy meghatározzuk a maximumot:

$$s'(v) = \frac{3500(7600 - v^2)}{(0,5v^2 - 65v + 3800)^2}$$

A maximális út a következő módon található meg:

$$7600 - v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 7600 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{7600} \approx 87,2 \text{ km/h}$$

Válasz: A leghosszabb útra 87,2 km/h sebességnél elegendő a 6,1 tonna szén.

2. Feladat:

A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az

$$f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000)$$

összefüggés adja meg, ahol x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

- A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?
- Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km. Igazold, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint)

$$279v - 502200 + \frac{265050000}{v} \text{ kg.}$$

- A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800 \text{ km/h} \leq v \leq 1100 \text{ km/h}$. A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás? [5]

Megoldás:

- a) A felhasznált üzemanyag tömegét az alábbi másodfokú függvény adja meg:

$$f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000).$$

Ez egy felfelé nyíló parabola, hiszen a főegyüttható pozitív. Ezért a függvénynek minimumhelye van. Meghatározzuk a deriváltat:

$$f'(x) = \frac{1}{20}(2x - 1800) = \frac{1}{10}x - 90.$$

A szélsőértéket ott találjuk, ahol a derivált nulla:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{10}x - 90 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 900.$$

Megvizsgáljuk a második deriváltat:

$$f''(x) = \frac{1}{10} > 0,$$

tehát valóban minimumhelyről van szó.

A minimumérték:

$$\begin{aligned} f(900) &= \frac{1}{20}(900^2 - 1800 \cdot 900 + 950000) \\ &= \frac{1}{20}(810000 - 1620000 + 950000) \\ &= \frac{1}{20}(700000) \\ &= 7000 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Válasz: 900 km/h sebességnél az egy óra alatt elhasznált üzemanyag tömege minimális, értéke 7000 kg.

- b) A repülőgép útja 5580 km hosszú. Ha a sebesség v km/h, akkor a repülési idő:

$$t = \frac{5580}{v}.$$

Az üzemanyag-felhasználás:

$$g(v) = t \cdot f(v) = \frac{5580}{v} \cdot \frac{1}{20}(v^2 - 1800v + 950000).$$

Egyszerűsítve:

$$g(v) = \frac{279}{v}(v^2 - 1800v + 950000).$$

Kibontva:

$$g(v) = 279v - 502200 + \frac{265050000}{v}.$$

Válasz: Az üzemanyag-felhasználás ezen az úton:

$$g(v) = 279v - 502200 + \frac{265050000}{v} \text{ kg.}$$

c) Adott: $800 \leq v \leq 1100$. A teljes útra vonatkozó üzemanyag-függvény:

$$g(v) = 279v - 502200 + \frac{265050000}{v}.$$

Deriváljuk:

$$g'(v) = 279 - \frac{265050000}{v^2}.$$

A szélsőértéket ott keressük, ahol a derivált nulla:

$$g'(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad 279 = \frac{265050000}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{265050000}{279}.$$

Számítással:

$$v = \sqrt{950000} = 100\sqrt{95} \approx 974.7.$$

Ez az érték benne van az adott tartományban. Vizsgáljuk az előjelet:

- Ha $v < 974.7$, akkor $g'(v) < 0$: csökkenő,
- Ha $v > 974.7$, akkor $g'(v) > 0$: növekvő.

Ezért $v \approx 975$ km/h esetén **lokális minimum** van. A maximum a szélsőértékek között, az intervallum végpontjain lesz. Összehasonlítva:

$$g(800) > g(975) < g(1100),$$

tehát:

Válasz: A legkisebb üzemanyag-felhasználás 975 km/h sebességnél, a legnagyobb 800 km/h-nál fordul elő.

3. Feladat:

- a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (k paraméter valós számot jelöl.)

Számítsa ki, hogy $x = 1$ a függvény lokális szélsőértékhelye mely k érték esetén valósul meg! Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvény lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye! Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is!

- b) Határozza meg a valós számok halmazán a

$$g(x) = x^3 - 9x^2$$

képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!

Megoldás:

- a) Legyen $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$. Mivel szélsőértékről csak ott beszélhetünk, ahol az első derivált zérushelyet vesz fel, deriváljuk a függvényt:

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 9.$$

Mivel $x = 1$ helyen szeretnénk szélsőértéket, beírjuk az $x = 1$ -et az első deriváltba, és megoldjuk az egyenletet:

$$f'(1) = 3(1)^2 + 2k(1) + 9 = 3 + 2k + 9 = 2k + 12.$$

Az $x = 1$ akkor lesz szélsőértékhely, ha $f'(1) = 0$:

$$2k + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -6.$$

Tehát: $x = 1$ akkor lesz szélsőértékhely, ha $k = -6$.

Most nézzük meg, hogy maximum vagy minimum:

Az $f'(x)$ az előbbi $k = -6$ értékre:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

Keressük meg a derivált zérushelyeit:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)(x - 3) = 0.$$

Zérushelyek: $x = 1$ és $x = 3$. A derivált előjele:

$$x < 1: f'(x) > 0,$$

$$x = 1: f'(x) = 0,$$

$$1 < x < 3: f'(x) < 0,$$

$$x = 3: f'(x) = 0,$$

$$x > 3: f'(x) > 0.$$

Ez alapján:

$x = 1$ pontban a függvény **lokális maximumot** vesz fel, $x = 3$ pontban a függvény **lokális minimumot** vesz fel.

Tehát: f függvénynek $k = -6$ esetén **két** lokális szélsőértékhelye van: egy maximum ($x = 1$) és egy minimum ($x = 3$).

b) A függvény:

$$g(x) = x^3 - 9x^2.$$

1. lépés: Első derivált:

$$g'(x) = 3x^2 - 18x.$$

2. lépés: Második derivált:

$$g''(x) = 6x - 18.$$

3. lépés: Inflexiós pont ott lehet, ahol a második derivált zérus és előjelet vált:

$$g''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

4. lépés: Előjelvizsgálat:

- Ha $x < 3$, pl. $x = 2$: $g''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$, tehát a függvény **konkáv**.

- Ha $x > 3$, pl. $x = 4$: $g''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$, tehát a függvény **konvex**.

Válasz: A második derivált előjelet vált, tehát inflexiós pont van $x = 3$ -nál.

4. Feladat:

A mandzsu fűzfa magasságát közelítően a következő képlet adja meg:

$$m(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 7$$

A hegyi mamutfenyő magasságát közelítően a következő képlet adja meg:

$$h(t) = 0,4t^2 + 5t + 0,4$$

Mindkét képletben t az 1969 óta eltelt időt jelöli években ($t \geq 1$), és a magasságot méterben számolják.

- Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását közös oszlopdiagramon, amely a magasságot az 1970 és 2000 közötti időszakban, 10 évenként mutatja. A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket!
- A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?
- Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amely magasságát a következő képlet írja le:

$$g(t) = -3t^2 + 33t + 72$$

A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években ($t \leq 21$).

[6]

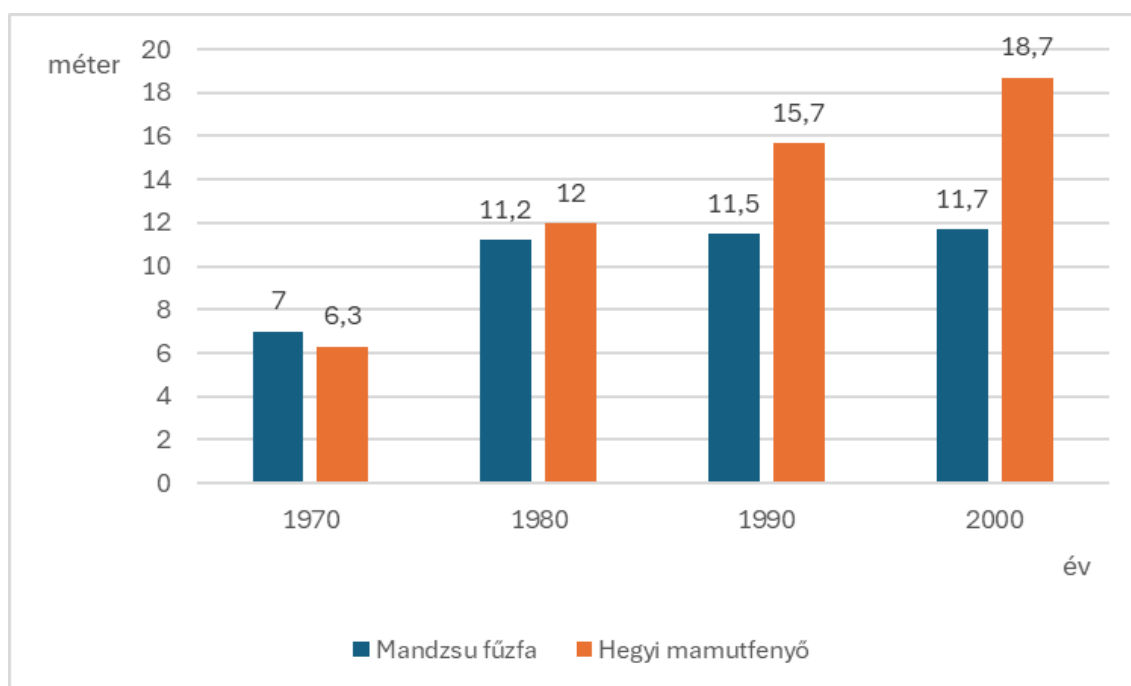
Megoldás:

- A magasságok táblázatba foglalása és ábrázolása**

Először is kiszámítjuk a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságát az adott képletek segítségével az eltelt évek függvényében. A magasságokat az alábbi táblázatban rögzítem:

Év (t)	Mandzsú fűzfa magassága (m)	Hegyi mamutfenyő magassága (m)
1970($t = 1$)	7	6,3
1980($t = 11$)	11,2	12,0
1990($t = 21$)	11,5	15,7
2000($t = 31$)	11,7	18,7

A fenti táblázat alapján a magasságok a következő értékeket veszik fel az évek függvényében. A diagramon tüntetem fel ezeket az értékeket.



4. ábra. A mandzsú fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változása 1970 és 2000 között

b) **A mamutfenyő 10,5 méteres magasságának meghatározása**

A mamutfenyő magasságát az alábbi képlet adja meg:

$$h(t) = 0,4t^2 + 5t + 0,4$$

Keresnünk kell azt az évet (t), amikor a magasság eléri a 10,5 métert, tehát megoldjuk az alábbi egyenletet:

$$0,4t^2 + 5t + 0,4 = 10,5$$

Első lépésben rendezzük az egyenletet:

$$0,4t^2 + 5t + 0,4 - 10,5 = 0$$

$$0,4t^2 + 5t - 10,1 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, amelyet a következőképpen oldunk meg a másodfokú képlettel:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ahol $a = 0,4$, $b = 5$, és $c = -10,1$. A képletbe helyettesítve:

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(0,4)(-10,1)}}{2(0,4)}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 16,16}}{0,8}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{41,16}}{0,8}$$

$$t = \frac{-5 \pm 6,41}{0,8}$$

Így két megoldásunk van:

$$t_1 = \frac{-5 + 6,41}{0,8} \approx 1,76, \quad t_2 = \frac{-5 - 6,41}{0,8} \approx -14,3$$

Mivel t_2 negatív, az érvényes megoldás $t_1 \approx 1,76$. Mivel az évet az egész számokhoz közelítve kell meghatározni, ezért a mamutfenyő 10,5 méteres magasságot 1977-ben éri el.

c) **A $g(t)$ függvény monotonitása**

A kérdéses függvény a következő:

$$g(t) = -3t^2 + 33t + 72$$

A függvény monotonitását az első derivált segítségével vizsgáljuk. Az első derivált:

$$g'(t) = -6t + 33$$

Most oldjuk meg az $g'(t) = 0$ egyenletet:

$$-6t + 33 = 0$$

$$t = \frac{33}{6} = 5,5$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény 5,5-nél változtatja meg a monotonitását. A derivált előjeleit vizsgálva azt találjuk, hogy $t = 5,5$ előtt a függvény növekvő, és utána csökkenő.

Most vizsgáljuk meg a magasságot: a fa magassága nem csökkenhet, így a függvény nem írhatja le egy fa növekedését sem.

5. A derivált helye és szerepe az ukrainai középiskolai matematika-tantervben

Az ukrainai középfokú oktatásban a matematika tantárgy tanítása a 10–11. évfolyamon három különböző szinten zajlik: *стандартний* (alapszint), *поглиблений* (haladó szint) és *профільний* (profil szint). Ez a differenciált rendszer lehetőséget ad arra, hogy a tanulók képességeikhez, érdeklődésükhöz és továbbtanulási céljaikhoz igazodva sajátítsák el a matematikai ismereteket, így többek között a derivált fogalmát is.

Minden szinten két fő tantárgycsoport jelenik meg: az **algebra és analízis** (алгебра і початки аналізу), valamint a **geometria** (геометрія). A derivált kizárólag az algebra és analízis tantárgy keretében jelenik meg, különböző mélységben, kizárólag a 11. évfolyamban.

Alapszint (стандартний рівень)

Ez a szint minden tanuló számára kötelező, célja az általános matematikai műveltség kialakítása, gyakorlati jelleggel.

- **10. évfolyam:** Algebra és analízis – 54 óra, geometria – 51 óra. A tananyag még nem tartalmazza a deriváltat.
- **11. évfolyam:** Algebra és analízis – 54 óra, geometria – 51 óra. A derivált fogalmát bevezető jelleggel tanítják: geometriai és fizikai értelmezés, egyszerű függvényvizsgálat (monotonitás, szélsőérték), egyszerű alkalmazások (pl. sebesség). A téma mélysége korlátozott.

Haladó szint (поглиблений рівень)

Ezt a szintet azok a tanulók választják, akik már a korábbi években emelt szintű matematikai képzésben részesültek. A tananyag mélyebb, különösen analízis terén.

- **10. évfolyam:** Algebra és analízis – 210 óra, geometria – 105 óra. A derivált még nem szerepel, de előkészítő témák (határérték, folytonosság) jelen vannak.
- **11. évfolyam:** Algebra és analízis – 210 óra, geometria – 105 óra. A derivált fogalmát részletesen tanítják: definíciók, szabályok, első és másodrendű derivált, függvényvizsgálat, szélsőértékek, alkalmazások (fizikai, gazdasági példák).

Profil szint (профільний рівень)

A profil szint a legmagasabb szintű matematikaoktatást jelenti, elsősorban műszaki, természettudományos vagy gazdasági pályára készülő tanulók számára.

- **10. évfolyam:** Algebra és analízis – 210 óra, geometria – 105 óra. A tananyag előkészíti a derivált tanítását, de a fogalom még nem jelenik meg önálló témaként.
- **11. évfolyam:** Algebra és analízis – 210 óra, geometria – 105 óra. A derivált tanítására teljes mélységben sor kerül: fogalomalkotás, szabályok, alkalmazások (grafikonépítés, optimalizálás), kapcsolódó elméleti háttér (pl. konvexitás, inflexió pontok, asszimptoták), valamint komplex gyakorlati problémák megoldása.

A derivált megjelenése az óraszámok tükrében

Szint és tantárgy	10. évf. (óra)	11. évf. (óra)	Derivált tanítása
Algebra és analízis (alap)	54	54	Csak 11. évf., bevezető szinten (definíció, alkalmazások)
Geometria (alap)	51	51	Nem szerepel
Algebra és analízis (haladó)	210	210	11. évf.-ban részletesen, alkalmazásokkal
Geometria (haladó)	105	105	Nem szerepel
Algebra és analízis (profil)	210	210	11. évf.-ban teljes mélységben, komplex példákkal
Geometria (profil)	105	105	Nem szerepel

A fenti táblázat jól mutatja, hogy a derivált tanítása kizárólag az algebra és analízis tantárgy keretében történik, és csak a 11. évfolyamban jelenik meg. Az alap szinten a téma bevezető szinten szerepel, míg a haladó és profil szinteken részletesen és gyakorlatorientáltan tárgyalják.

Ez a fokozatosság lehetővé teszi, hogy a tanulók egyéni tudásszintjüknek és érdeklődésüknek megfelelően mélyítsék el ismereteiket, és felkészüljenek a felsőoktatási matematika tanulmányokra, különösen olyan területeken, ahol a differenciálszámítás alkalmazása alapvető jelentőségű.

6 Kutatás bemutatása

Célkitűzés és kutatási kérdések

Dolgozatomban a differenciálszámítás középiskolai oktatásának feltérképezésére törekszem, különös tekintettel a tanárok módszertani gyakorlatára és a tanítás során szerzett tapasztalataikra. Arra keresem a választ, hogy milyen tanítási megközelítések jellemzik az oktatást, hogyan használják a pedagógusok a rendelkezésre álló óraszámot, miként reagálnak a tanulók a tananyagra, illetve milyen tényezők befolyásolják a tanári döntéseket az oktatás során.

Kutatásomban többek között azt vizsgálom, hogy a különböző tanári életkor, tapasztalat és intézménytípus hogyan hat a tanítási gyakorlatra; milyen arányban alkalmazzák az elméleti és gyakorlati példákat; hogyan élik meg a diákok a differenciálszámítást; valamint milyen szerepet kapnak a digitális eszközök az oktatásban. Kiemelt figyelmet fordítok arra is, hogy a pedagógusok milyen fejlesztési javaslatokat fogalmaznak meg az oktatás hatékonyságának növelése érdekében.

Kérdőív bemutatása

A differenciálszámítás tanítása a középiskolai matematikaoktatás egyik kulcsfontosságú területe, amely számos pedagógiai kihívást rejt magában. Jelen tanulmány célja, hogy feltárja a differenciálszámítás oktatásának gyakorlati tapasztalatait és nehézségeit a középiskolai környezetben. Ennek érdekében egy online, Google Űrlap segítségével készült kérdőívet töltött ki összesen 34 középiskolai matematikatanár, akik különböző

iskolatípusokban – líceumban, szakgimnáziumban, technikumi iskolában és gimnáziumban – dolgoznak. A válaszadók sokszínű életkori és szakmai háttere lehetővé teszi, hogy átfogó képet kapjunk a differenciálszámítás tanításának jelenlegi helyzetéről.

Az első kérdés a kitöltők nemi összetételére vonatkozott. A válaszadók között egyértelmű többséget képviselnek a nők, akik a teljes minta 76,5%-át teszik ki, míg a férfiak aránya 23,5%, amit a mellékelt diagramon is jól nyomon követhetünk. Ez a megoszlás pontos képet ad a kérdőívben részt vevő pedagógusok nemi összetételéről.

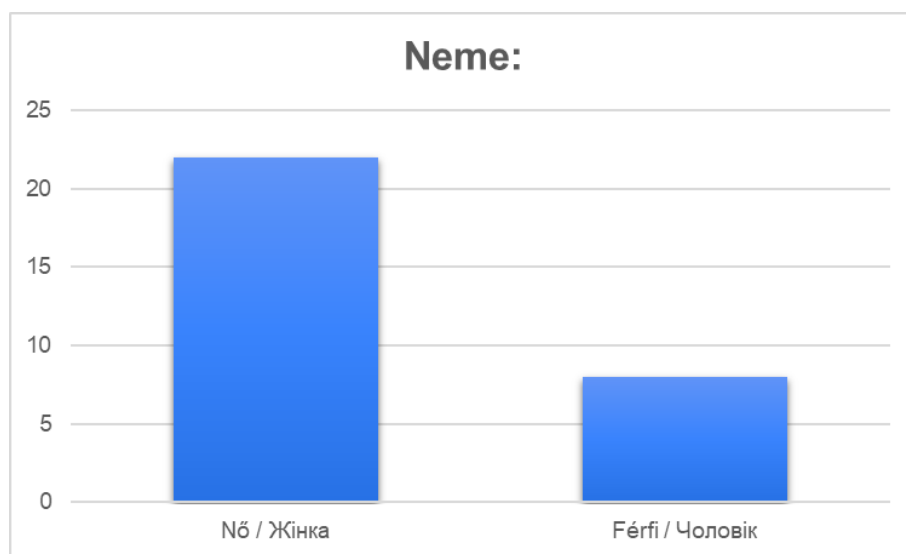


Рис. 5. A válaszadók nemi megoszlása

A második kérdés a kitöltők életkori megoszlását vizsgálta. A válaszadók életkora igen változatos képet mutat, amely jól tükrözi a pedagógusok életkori összetételét a mintában. Az 55–64 éves korosztály képviseli a legnagyobb arányt 26,5%-kal, ezt követi a 25–34 és a 35–44 éves csoport, mindkettő 20,6%-kal. A 45–54 évesek aránya 17,6%, míg a legfiatalabb, 18–24 éves pedagógusok 11,8%-ot tesznek ki. A kitöltők között egy fő 65 év feletti is található. Az életkor szerinti megoszlást a mellékelt diagram szemléletesen ábrázolja.

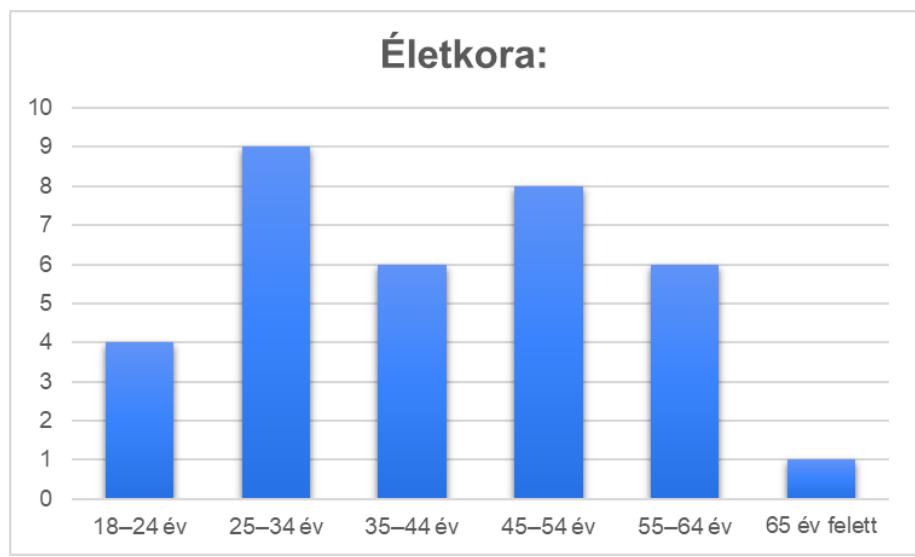


Рис. 6. A válaszadók életkori megoszlása

A harmadik kérdés a kitöltők által tanított iskola típusára vonatkozott. A válaszadók többsége líceumban tanít, összesen 18 fő, ami a minta 52,9%-át jelenti. Ezt követik a szakgimnáziumok pedagógusai, akik 10-en vannak, és a válaszadók 29,4%-át teszik ki. Az „egyéb” kategóriába sorolható válaszok között szerepeltek "Gimnázium" és "загальноосвітня школа" valamint más, meg nem nevezett intézménytípusok is, amelyek összesen 4 válaszadót érintettek. A részletes megoszlást a mellékelt diagram szemlélteti, amely jól ábrázolja az intézménytípusok közötti arányokat.



Рис. 7. Válaszadók iskolatípus szerinti megoszlása

A negyedik kérdés arra irányult, hogy a válaszadók hány éve tanítanak matematikát.

A kitöltők között változatos tapasztalati háttér figyelhető meg: a legtöbben, 38,2%-uk több mint 20 éve foglalkoznak matematikatanítással. Ezt követi a 0–5 éve tanítók csoportja 23,5%-kal, majd a 6–10 évvel tapasztalattal rendelkezők 20,6%-kal, míg a 11–20 éve tanítók aránya 17,6%. Ez a megoszlás jól tükrözi a pedagógusok szakmai sokszínűségét, amit a mellékelt diagram is szemléltet.

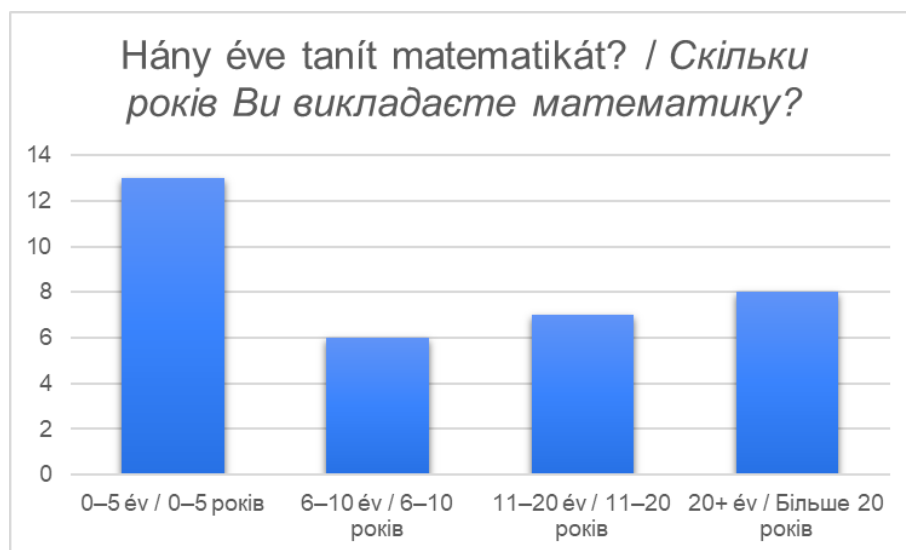


Рис. 8. Válaszadók matematikatanításban eltöltött évei

Az ötödik kérdés arra irányult, hogy a válaszadók tanítják-e jelenleg a differenciálszámítást. A válaszok alapján a kitöltők 82,4%-a igenlő választ adott, míg 17,6% nem tanítja jelenleg ezt a témakört.

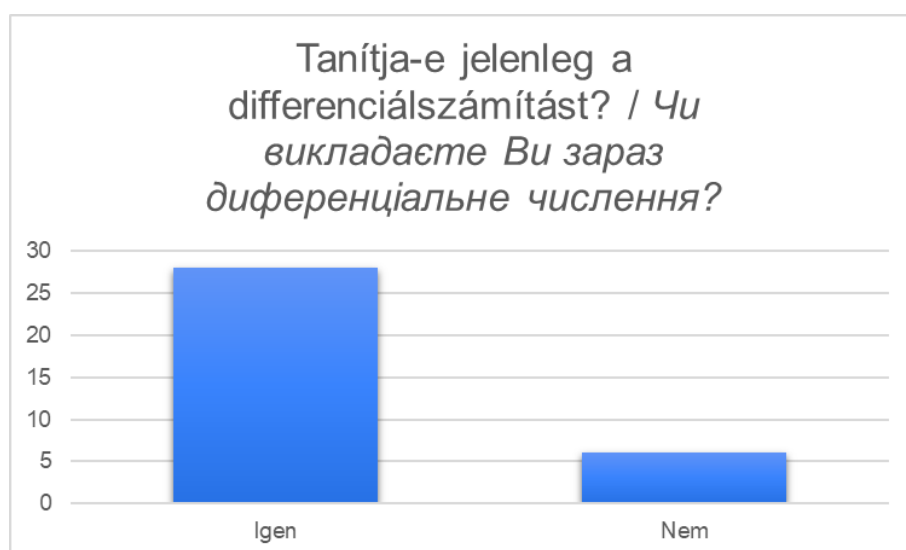


Рис. 9. Differenciálszámítást jelenleg tanítók és nem tanítók aránya

A hatodik kérdés arra irányult, hogy a válaszadók mely évfolyamban tanítják a derivált témakörét. Az eredmények szerint 18 fő kizárólag a 10. évfolyamban oktatja ezt a témát, míg 6 válaszadó csak a 11. évfolyamban tanítja. Emellett 8 pedagógus jelölte meg, hogy mindkét évfolyamban, vagyis a 10. és 11. osztályban is tanítja a deriváltat. Egy kitöltő jelezte, hogy jelenleg nem tanítja a témakört és egy kitöltő nem adott választ, ezeket az „egyéb” kategóriába soroltam.



Рис. 10. A derivált témakörének tanítása évfolyamonként

A hetedik kérdés arra irányult, hogy a válaszadók elegendőnek tartják-e a 10. évfolyamos tanmenetben megadott óraszámot a differenciálszámítás bevezetésére és gyakorlására. A kérdésre összesen 33 válasz érkezett. A mellékelt diagramon jól látható, hogy a válaszadók megosztottak ebben a kérdésben: míg egy részük úgy véli, hogy a rendelkezésre álló óraszám elegendő, addig mások nem tartják azt megfelelőnek. Ez az eltérő vélemény rávilágít arra, hogy az óraszám kérdése továbbra is fontos szempont a tananyag tervezése és a témakör hatékony elsajátítása szempontjából.

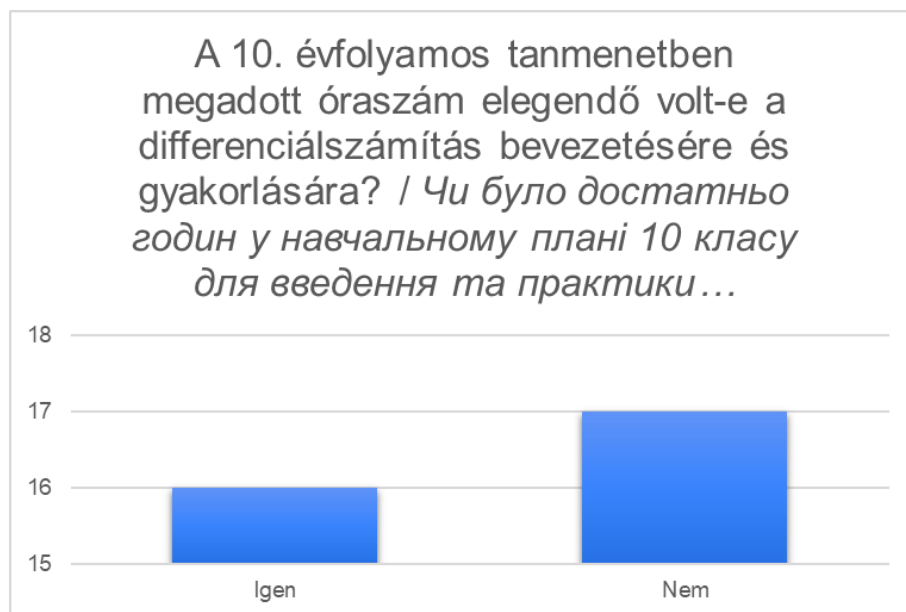


Рис. 11. A válaszadók véleménye a 10. évfolyamos óraszám elegendőségéről

Az előző kérdésre „Nem” választ adó kitöltők számára lehetőség nyílt megadni, hogy átlagosan hány tanórával lépik túl a 10. évfolyamos tanmenetben előírt óraszámot a differenciálszámítás bevezetése és gyakorlása során. Összesen 16 válasz érkezett erre a kérdésre. A kérdőív válaszai alapján jól látszik, hogy a legtöbb pedagógus néhány tanórás többlettel igyekszik kiegészíteni az előírt időkeret szűkösségét. A leggyakrabban két tanórás túllépést jelölték meg a válaszadók, de előfordultak háromtól hat óráig terjedő értékek is. Egy kitöltő ennél jóval nagyobb, tízórás többletidőt is megadott. Mindez arra utal, hogy a differenciálszámítás bevezetése a gyakorlatban gyakran több időt igényel, mint amit a tanterv megfogalmaz.

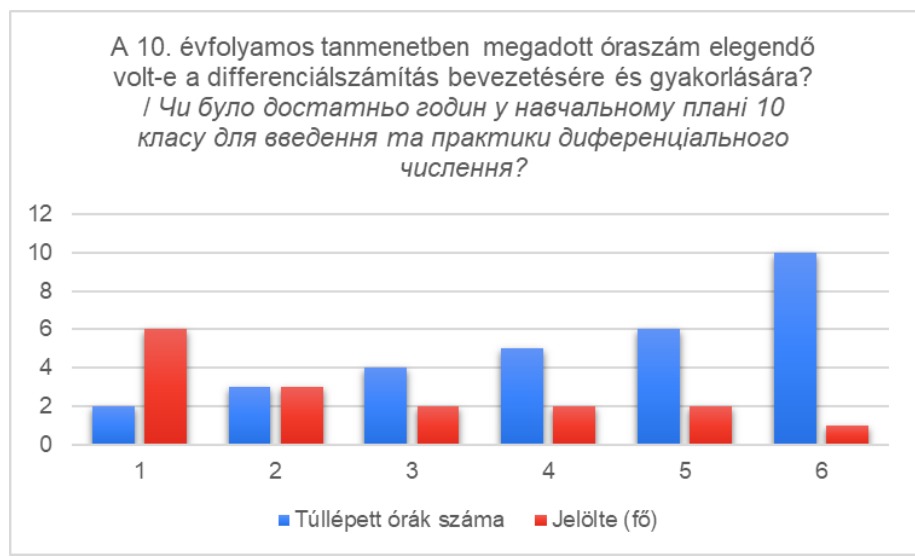


Рис. 12. A válaszadók által túllépett tanórák számának megoszlása

A kérdőív kilencedik kérdése arra irányult, hogy a válaszadók elegendőnek tartják-e a 11. évfolyamos tanmenetben megadott óraszámot a differenciálszámítás elmélyítésére és alkalmazására. Összesen 32 válasz érkezett. A válaszadók 18 fővel, azaz a kitöltők 56,3%-ával úgy vélik, hogy az óraszám elegendő. Ugyanakkor 14 fő 43,7% szerint a rendelkezésre álló óraszám nem biztosít kellő időkeretet a témakör megfelelő elmélyítésére. A megoszlást az alábbi diagram szemlélteti:

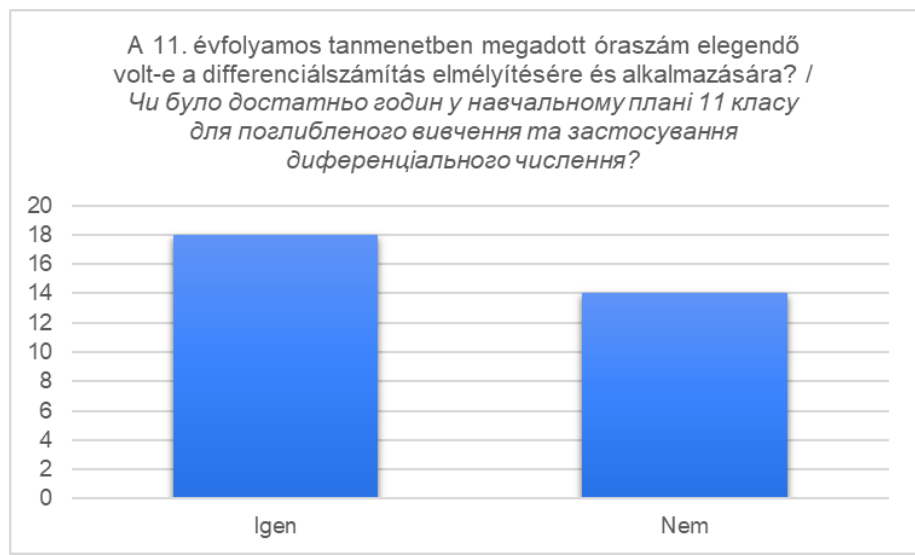


Рис. 13. A váalszadók véleménye a 11. évfolyamos óraszám elegendőségéről

Ez az eredmény azt mutatja, hogy a pedagógusok körében megosztott a vélemény, bár enyhe többség az óraszám elegendőségét támogatja.

Az előző kérdésre „Nem” választ adó pedagógusokat megkértem, hogy becsüljék meg, átlagosan hány tanórával lépik túl a tantervben meghatározott óraszámot. Összesen 13 válasz érkezett. A legtöbb válasz 2 és 10 közötti túllépést jelölt meg. Egy kitöltő ugyanakkor 40 órát adott meg, amely kiugró értéknek tekinthető, és feltehetően elírás, ezért az elemzés során ezt külön kezeltem. A többi válasz alapján a túllépés jellemzően 2–10 tanóra közé esik.

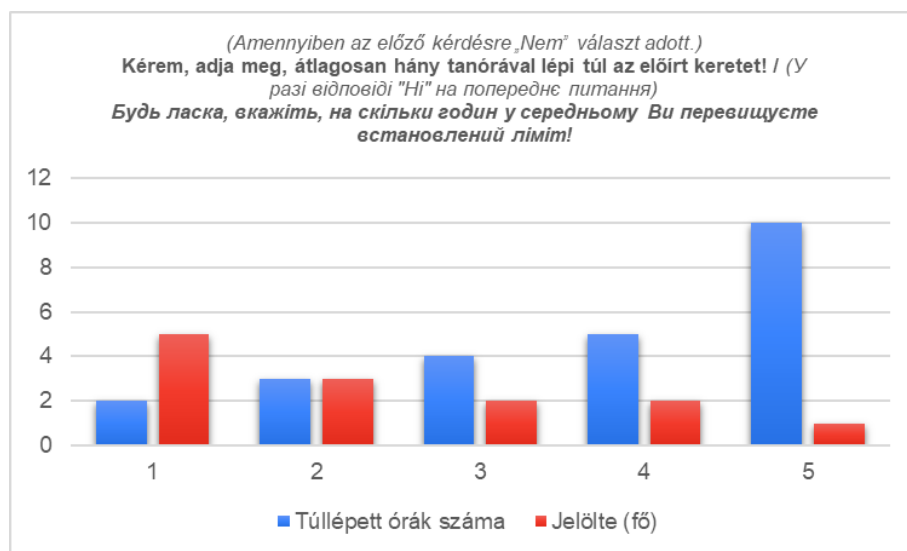


Рис. 14. A válaszadók által túllépett tanórák számának megoszlása

A kérdőívben arra is rákérdeztem, hogy a differenciálszámítást tanítják-e más évfolyamon vagy képzési formában (például 12. osztály, technikum). Erre a kérdésre mindössze három válasz érkezett, melyek között szerepel az alábbi: „Тема викладається у курсі 'Вища математика' у ЗУІ”. Két kitöltő jelezte, hogy nem tanítja máshol a témakört („Nem tanítom”, illetve „Nem”). Az alacsony válaszadói szám miatt az adatokat nem ábrázoltam diagramon.

A kérdőív következő kérdése arra irányult, hogy milyen arányban oszlanak meg az elméleti és gyakorlati ismeretek a differenciálszámítás fogalmának kialakítása során. A válaszok alapján a legtöbben (18 fő) a **30% elmélet – 70% gyakorlat** arányt tartották jellemzőnek, ami azt mutatja, hogy a gyakorlati példák erőteljes hangsúlyt kapnak a tanítás során.



Рис. 15. Elmélet és gyakorlat aránya a tanításban

Az eredmények alapján jól látható, hogy a tanítási gyakorlatban elsősorban a gyakorlati szemléltetés kerül előtérbe, ugyanakkor az elmélet is fontos szerepet tölt be a fogalom megértésében.

A kérdőívben rákérdeztem arra is, hogy a pedagógusok milyen tématerületekről hoznak gyakorlati példákat a differenciálszámítás fogalmának kialakítása során. A leggyakoribb említett terület a fizika, amely 25 alkalommal szerepelt a válaszok között. Ezt követi a gazdaság (14 említés), majd kisebb arányban jelenik meg a biológia (7), a kémia (5) és a geográfia (3). Egy-egy válasz említést tett a geometriáról, illetve az építészet és logisztika területéről is. Összesen 5 válaszadó jelezte, hogy nem alkalmaz témaspecifikus gyakorlati példákat az oktatás során. Az adatok alapján jól látható, hogy a példák jelentős része a természettudományos tantárgyak köréből származik, különösen a fizikából. Fontos azonban megjegyezni, hogy a válaszadók több tématerületet is megjelölhettek, így az említések száma meghaladja a válaszadók számát.

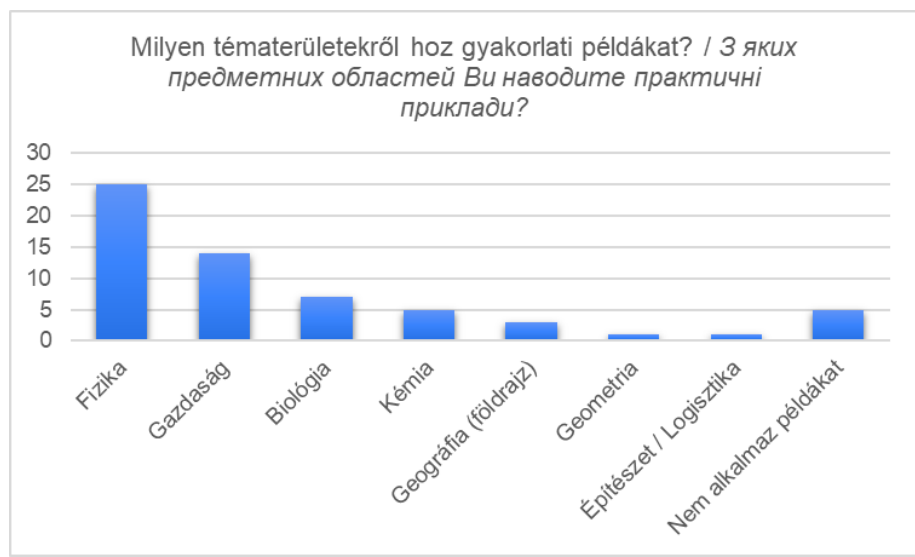


Рис. 16. Gyakorlati példák tématerületei a differenciálszámítás tanítása során

A kérdőívben arra is kíváncsi voltam, hogy a válaszadók szerint melyik évfolyamban értik meg legnehezebben a tanulók a derivált fogalmát. A legtöbben (18 fő) a 10. osztályt jelölték meg, vagyis a legtöbb nehézség ekkor jelentkezik, amikor a diákok először találkoznak a differenciálszámítással. 12 válaszadó úgy vélte, hogy minden évfolyamon egyformán nehéz a tananyag megértése, ami arra utalhat, hogy a nehézségek nem feltétlenül az életkori sajátosságokból, hanem inkább a fogalom absztraktságából adódnak. Két válaszadó a 11. osztályt jelölte meg legnehezebbnek, míg szintén két fő nyilatkozott úgy, hogy nem tudja megítélni.



Рис. 17. A derivált megértésének nehézsége évfolyamok szerint

A következő kérdésben arra voltam kíváncsi, hogy a pedagógusok szerint mi okozza a legnagyobb nehézséget a tanulók számára a derivált fogalmának elsajátítása során. A kérdőívben több válaszlehetőség közül is lehetett választani, így a visszajelzések alapján komplexebb képet kaptam a diákokkal kapcsolatos tapasztalatokról. A leggyakrabban említett probléma az elvont elméleti tartalom megértésének nehézsége volt, amelyet szorosan követett a geometriai és fizikai értelmezés bonyolultsága, valamint a képletek nagy száma. Többen kiemelték a gyakorlati példák hiányát és az idő szűkösségét is mint gátló tényezőket. Ezek az eredmények arra engednek következtetni, hogy a derivált fogalma sok tanuló számára nehezen hozzáférhető, különösen abban az esetben, ha nem társul hozzá elegendő idő, szemléltetés vagy gyakorlatorientált megközelítés.



Рис. 18. A derivált tanulásának legfőbb nehézségei a válaszadók szerint

Hogyan viszonyulnak a tanulók a témához? Ez a kérdés arra irányult, hogy feltérképezze, milyen attitűddel közelítenek a diákok a vizsgált tananyaghoz. A cél az volt, hogy kiderüljön: valódi érdeklődés jellemzi-e őket, vagy inkább mechanikusan, esetleg kényszerből sajátítják el az ismereteket. A válaszok segítenek megérteni, milyen tanulási stratégiák, érzések és nehézségek dominálnak a tanulók körében.

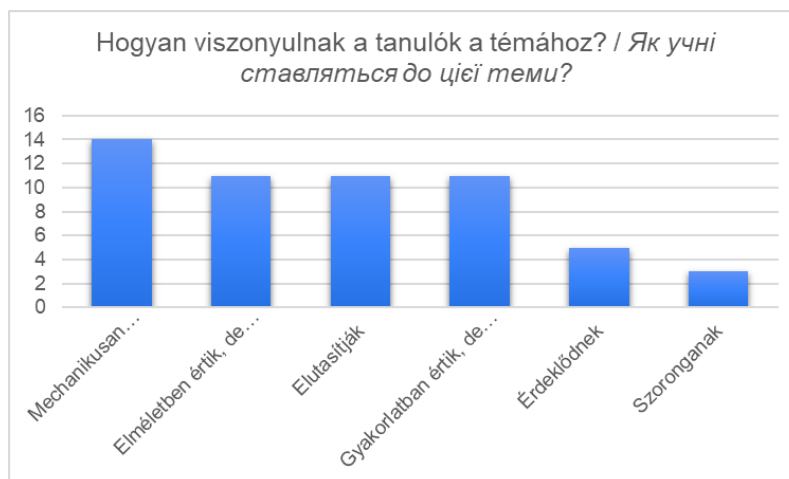


Рис. 19. A tanulók viszonyulása a derivált témához

A válaszokból kiderül, hogy a legtöbb tanuló inkább mechanikusan tanulja meg az anyagot, vagyis nem feltétlenül törekszik annak mélyebb megértésére. Jelentős azok aránya is, akik elméletben ugyan értik a tananyagot, de nehézséget okoz számukra annak gyakorlati alkalmazása. Az elutasító és szorongó hozzáállás is jelen van, ami arra utal, hogy sok tanuló számára ez a téma nemcsak nehéz, de idegen is marad. A válaszokból az is kitűnik, hogy kevesen érdeklődnek igazán a téma iránt, ezért a motiváció erősítése és a tananyag élményszerűbb feldolgozása kiemelt figyelmet érdemelne.

A következő kérdés a digitális eszközök használatának gyakoriságára vonatkozott. A válaszok alapján elmondható, hogy a digitális eszközök használata széles körben elterjedt a tanárok körében. A legtöbben alkalmanként élnek ezekkel az eszközökkel, de jelentős azoknak a száma is, akik rendszeresen beépítik őket a tanításba. Ugyanakkor van egy kisebb csoport, amely csak ritkán vagy egyáltalán nem alkalmaz digitális eszközöket. Ez arra utal, hogy bár a technológiai eszközök használata általánossá vált, a gyakoriságuk és szerepük az oktatásban még mindig tanáronként változó.



Рис. 20. A digitális eszközök használatának gyakorisága a tanítás során

A kérdőív egyik további kérdésével arra kerestem a választ, hogy a résztvevő pedagógusok mely tanítási módszereket tartják a leghatékonyabbnak a differenciálszámítás oktatásában. Az eredmények alapján világosan kirajzolódott bizonyos preferenciarendszer a különböző módszerek között. A válaszokból kitűnt, hogy a legtöbben a hagyományos, tanári irányítású frontális magyarázatot tartják a leghatékonyabbnak; ez a forma továbbra is meghatározó szerepet tölt be az oktatási gyakorlatban. Ugyanakkor jelentős számban említették a problémákra alapozott, aktív tanulási megközelítést is, amely elősegíti a mélyebb megértést és a kritikus gondolkodás fejlesztését. A válaszok szerint a digitális eszközök alkalmazása egyre nagyobb szerepet kap, tükrözve a technológiai eszközök integrálódását a mindennapi tanítási folyamatba. Bár kisebb arányban, de a projektalapú és felfedeztető tanulási módszerek is megjelentek a válaszok között, főként a tanulók aktív bevonása és önálló gondolkodásra nevelése miatt. Egy válaszadó az „egyéb” kategóriát jelölte meg, de ehhez nem társult részletes kifejtés.

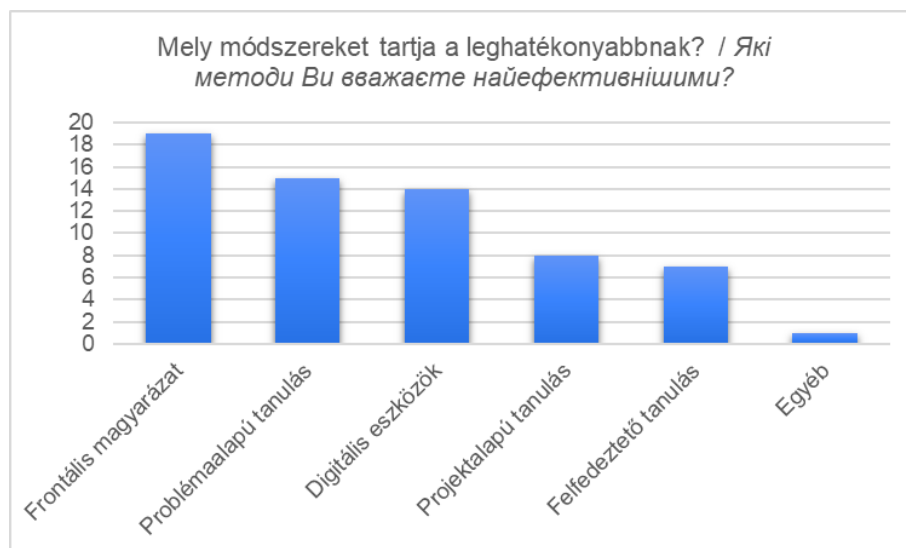


Рис. 21. A leghatékonyabbnak tartott tanítási módszerek megoszlása

Összességében a válaszok azt mutatják, hogy a leghatékonyabbnak tartott tanítási módszerek egyensúlyt teremtenek a hagyományos és az innovatív, interaktív tanulási formák között, így támogatva a tanulók sokoldalú fejlődését.

A kérdőív következő kérdésében arra voltam kíváncsi, hogy a válaszadó pedagógusok milyen fejlesztési irányokat tartanak a legfontosabbnak a differenciálszámítás tanításának hatékonyságához. A kérdésre több válaszlehetőség közül lehetett választani, így a megjelölt opciók száma meghaladta a kitöltők számát. A legtöbben azt emelték ki, hogy a tankönyvekben több gyakorlati példára lenne szükség. Ezt követte az interaktív példatár iránti igény, amely a tanulók számára könnyebben hozzáférhető, élményszerű tanulási lehetőségeket biztosíthatna. Szintén sok válasz érkezett a tanterv rugalmasabbá tételének szükségességéről, ami lehetővé tenné a tananyag tanulókhoz igazított feldolgozását. Többen hangsúlyozták a vizualizációs lehetőségek bővítését is, amely elősegítené az elvont tartalmak szemléletesebb bemutatását. Végül, de nem utolsósorban, sokan fontosnak tartották a tanári továbbképzések szerepét is, amelyek révén a pedagógusok naprakész módszertani tudással gazdagodhatnak. Ezek az eredmények jól mutatják, hogy a pedagógusok komplex, több szinten megvalósuló fejlesztési folyamatot tartanak szükségesnek ahhoz, hogy a differenciálszámítás tanítása eredményesebb és befogadhatóbb legyen.



Рис. 22. A legfontosabb fejlesztési irányok megoszlása a válaszadók szerint

Összességében a válaszok egy modern, a tanulói szükségletekre reagáló, interaktív és gyakorlatias fejlesztési irányt vetítenek előre, amely egyszerre támogatja a tananyag alkalmazhatóságát és a pedagógusok szakmai fejlődését.

A kérdőív utolsó nyitott kérdésében arra kértem a válaszadókat, hogy osszanak meg olyan tapasztalatokat vagy ötleteket, amelyeket hasznosnak tartanak a differenciálszámítás tanításával kapcsolatban. Bár többen jelezték, hogy nincs megosztandó gondolatuk, számos értékes és inspiráló javaslat is érkezett, amelyek a matematikaoktatás fejlesztését célozzák. Különösen hangsúlyos volt a gyakorlati szemlélet fontosságának kiemelése, ahogyan az egyik pedagógus megfogalmazta:

„При викладанні даної теми в ЗЗСО варто розв’язувати задачі практичного змісту, так як учні не бачать зв’язок математики з іншими предметами і не розуміють, для чого їм вивчати дану тему.”

Egy másik válaszadó a deriválási módszerek gyakorlására helyezi a hangsúlyt:

„Рendszeresen alkalmazom a deriválási módszerekre egy önálló feladatsort, amit meg kell védeni, kb. 100 feladat deriválási módszerekre.”

Továbbá fontosnak tartják az életszerű, szemléletes példák használatát a matematikaoktatásban. Egy részletesebb vélemény szerint:

„A legtöbb, kicsit bonyolultabb matematikai eszközök nyers átadása a legnagyobb probléma. Hogy a diákok könnyebben megérthessék, esetleg érdekelje is ez az eszköz őket, életszerű, könnyen értelmezhető példákon át kellene közelíteni a matematikai eszközt, melyet átadni készülünk. Pl, gyorsuló autó, elrúgott labda, stb... Miután az életszerű példák által sikerült felkelteni a figyelmüket, rátérhetünk a számításokra, még mindig elmélet és definíciók nélkül. Ha azt is megemésztették már, sokkal könnyebben veszik a száraz definíciókat és tételeket, mivel van gyakorlati alap, amihez köthetik ezeket. Véleményem szerint ezek nem kizárólag a deriválásnál fennálló problémák, hanem általános gondok a matematika oktatásban.”

Összességében a megosztott tapasztalatok azt jelzik, hogy a matematikaoktatás hatékonyságának növelése érdekében szükséges a gyakorlati alkalmazások és szemléletes példák beemelése, valamint a tanulók aktív bevonása a tanulási folyamatba.

Leíró statisztikai jellemzők

A kérdőíves kutatás során gyűjtött adatok elsődleges feldolgozása leíró statisztikai mutatók segítségével történt. Ezek az alapvető statisztikai jellemzők — mint az átlag, medián, szórás vagy tartomány — lehetővé teszik az adatok eloszlásának és központi tendenciáinak áttekintését.

Jelen vizsgálatban elsősorban a résztvevők életkorára és arra fókuszáltunk, hogy tanítanak-e jelenleg differenciálszámítást. Az életkor szerinti bontás és a tanítási gyakorlat megismerése azért lényeges, mert ezek a tényezők befolyásolhatják a differenciálszámítás oktatásának módját és minőségét.

A leíró statisztikai elemzés eredményei rávilágítottak a minta korcsoportos összetételére, valamint a tanítási tapasztalatok megoszlására, melyek alapul szolgálnak a további, mélyebb elemzésekhez.

Magyarázat: A fenti táblázat az életkori kategóriákat, az egyes kategóriák középértékeit, valamint a kategóriákban található válaszadók darabszámát mutatja. A súlyozott érték oszlop a középérték és a darabszám szorzatát tartalmazza. A súlyozott átlagot úgy számítottuk ki, hogy a súlyozott értékek összegét elosztottuk a darabszámok

Életkor	Középérték	Darab	Súlyozott érték
18–24 év	21	4	84
25–34 év	29,5	9	265,5
35–44 év	39,5	6	237
45–54 év	49,5	8	396
55–64 év	59,5	6	357
65 év felett	70	1	70
Súlyozott átlag			41,46

Табл. 1. A válaszadók életkori megoszlása és súlyozott átlag számítása

összegével:

$$\bar{x} = \frac{\sum(\text{kategória középértéke} \times \text{darabszám})}{\sum \text{darabszám}} = \frac{1409,5}{34} \approx 41,46.$$

Ez az érték az átlagos életkort jelzi a mintában, figyelembe véve az életkori csoportok eloszlását.

Statisztikai mutató	Érték
Várható érték (átlag)	41,46
Standard hiba	2,36
Medián	39,5
Módusz	29,5
Szórás	13,78
Minta varianciája	189,98
Csúcsosság	-1,06
Ferdeség	0,16
Tartomány	49
Minimum	21
Maximum	70
Összeg	1409,5
Darabszám	34

Табл. 2. Leíró statisztikai jellemzők az életkor súlyozott átlag alapján

Magyarázat: A táblázat a minta életkorának súlyozott átlagán alapuló leíró stati-

sztikai mutatókat tartalmazza. A várható érték (átlag) mutatja az életkor középértékét, a medián a minta középső értékét, míg a módusz a leggyakrabban előforduló életkori csoport középértékét jelzi. A szórás és variancia a minta szóródását mutatják, a csúcosság és ferdeség pedig a mintabeli eloszlás alakját jellemzik. A tartomány a legkisebb és legnagyobb érték közötti különbséget mutatja.

Ez az elemzés segít megérteni az életkor eloszlásának jellemzőit a mintában, amely fontos az eredmények értelmezése szempontjából.

A kérdőíves kutatás során arra is választ kerestem, hogy a válaszadó matematika szakos tanárok hány éve tanítanak. Az alábbi táblázat a tanítási tapasztalat intervallumait, az egyes kategóriákhoz tartozó tanárok számát, valamint a hozzájuk rendelt középértékeket tartalmazza. Ezek alapján kiszámítható a súlyozott átlag, amely a minta tanításban eltöltött éveinek várható értékét mutatja.

A számítás során a középértékeket szoroztam a kategóriákba tartozó válaszadók számával, majd az így kapott súlyozott értékeket összegeztem. Ezt követően elosztottam a teljes elemszámmal, azaz 34 fővel:

$$\text{súlyozott átlag} = \frac{389}{34} \approx 11,44 \text{ év}$$

Ez azt jelenti, hogy a válaszadó tanárok átlagosan több mint 11 éve tanítanak matematikát, ami tapasztalt szakmai háttérre utal.

Tanítási tapasztalat	Darab	Középérték	Súlyozott érték
0–5 év / 0–5 років	13	2,5	32,5
6–10 év / 6–10 років	6	8	48
11–20 év / 11–20 років	7	15,5	108,5
20+ év / Більше 20 років	8	25	200
Összesen	34		389

Табл. 3. A válaszadók tanítási tapasztalata évekre bontva

Az egyes tanítási évek eloszlásának leíró statisztikai jellemzőit az alábbi táblázat foglalja össze:

Mutató	Érték
Várható érték	11,44
Szórás	9,04
Standard hiba	1,55
Medián	8
Módusz	2,5
Minimum	2,5
Maximum	25
Tartomány	22,5
Ferdeség	0,47
Csúcsosság	-1,35
Minta varianciája	81,71

Табл. 4. A tanítási évek statisztikai mutatói

Az adatok alapján elmondható, hogy az eloszlás enyhén jobbra ferde, és a normáeloszláshoz képest kissé laposabb. A mintában szereplő tanárok között egyaránt vannak pályakezdők és több évtizedes tapasztalattal rendelkező pedagógusok is, ami változatos szakmai hátteret tükröz.

A digitális eszközhasználat és az életkor közötti összefüggés vizsgálata

A vizsgálat célja az volt, hogy feltárjam, van-e kapcsolat a középiskolai matematika tanárok életkora és a digitális eszközök tanítási gyakorlatban történő használatának gyakorisága között.

A vizsgált hipotézisek a következők voltak:

- **Nullhipotézis (H_0):** Nincs kapcsolat az életkor és a digitális eszközhasználat gyakorisága között.
- **Alternatív hipotézis (H_1):** Van kapcsolat az életkor és a digitális eszközhasználat gyakorisága között.

Adatok és kódolás

A mintában 34 középiskolai tanár vett részt. Az életkorukat és a digitális eszközhasználat gyakoriságát kategóriákba soroltam, majd számszerűsítettem az elemzéshez az alábbi módon:

Kód	Életkor kategória
1	18–24 év
2	25–34 év
3	35–44 év
4	45–54 év
5	55–64 év
6	65 év felett

Табл. 5. Életkor kategóriák és hozzárendelt kódok

Kód	Digitális eszközhasználat gyakorisága
0	Soha
1	Ritkán
2	Igen, alkalmanként
3	Igen, rendszeresen

Табл. 6. Digitális eszközhasználat gyakoriságának kategóriái és kódjai

Elemzési módszer

Mivel a minta elemszáma kicsi ($N=34$), és a változók ordinális (rangsorolt) kategóriák, ezért a kapcsolat vizsgálatához nem paraméteres módszert, a Spearman-féle rangkorrelációs együtthatót alkalmaztam.

Eredmények

A Spearman-féle rangkorreláció eredménye a következő lett:

- Korrelációs együttható (ρ): -0,055
- Szignifikancia (2-irányú teszt, p-érték): 0,758

- Minta elemszáma: 34

Az eredmények alapján a korreláció nem szignifikáns, ezért nem utasítottam el a nullhipotézist ($p > 0,05$).

Értelmezés

A vizsgálat nem talált statisztikailag igazolható összefüggést az életkor és a digitális eszközhasználat gyakorisága között a megkérdezett tanárok körében. Ez arra utal, hogy az életkor nem befolyásolja jelentősen a digitális eszközök alkalmazását a tanítási gyakorlatban.

A vizsgálatom célja az volt, hogy feltárjam: vajon a tanárok tanítási tapasztalata (az eltöltött évek száma) hatással van-e arra, milyen arányban alkalmaznak elméleti és gyakorlati módszereket a fogalomalkotás során. Különösen érdekelt, hogy a tapasztalat szintje befolyásolja-e a tanítási megközelítést.

A tanítási tapasztalat és az elmélet–gyakorlat arány kapcsolatának vizsgálata

Ebben a részben azt vizsgáltam, hogy a pedagógusok tanítási tapasztalata hatással van-e arra, milyen arányban alkalmaznak elméleti és gyakorlati módszereket a differenciálszámítás fogalmának kialakítása során. Arra voltam kíváncsi, hogy a tanári pályán eltöltött évek száma befolyásolja-e a tanítási szemléletet.

Kódolási rendszer

Az adatok elemzéséhez a válaszokat számszerűsítettem a következő kódok szerint.

Tapasztalat (év)	Kód
0–5 év	1
6–10 év	2
11–20 év	3
20+ év	4

Табл. 7. Tanítási tapasztalat (év) és kódjai

Arány leírása	Kód
Csak elmélet	1
70% elmélet – 30% gyakorlat	2
50% – 50%	3
30% elmélet – 70% gyakorlat	4
Főként gyakorlati példák	5

Табл. 8. Elmélet–gyakorlat arány a fogalomalkotás során és kódjai

Hipotézisek

Az elemzés során a következő statisztikai hipotéziseket fogalmaztam meg:

- **Nullhipotézis (H_0):** Az elmélet–gyakorlat arány megoszlása nem különbözik szignifikánsan a különböző tanítási tapasztalattal rendelkező csoportok között.
- **Alternatív hipotézis (H_1):** Az elmélet–gyakorlat arány megoszlása legalább egy tapasztalati csoportban eltér a többitől.

Módszer

Mivel a változók ordinális mérési szintűek, és nem feltételezhető normáeloszlás, a nem-paraméteres **Kruskal–Wallis tesztet** alkalmaztam az elmélet–gyakorlat arányok összehasonlítására a tanítási tapasztalat szintjei szerint.

Eredmények

Teszt	Statisztika	Szabadságfok (df)	p-érték	Döntés
Kruskal–Wallis teszt	–	3	0,256	H_0 megtartva

Értelmezés

A p-érték ($p = 0,256$) nagyobb, mint a szignifikancia szint ($\alpha = 0,05$), ezért nem utasítom el a nullhipotézist. Ez azt jelenti, hogy az adataim alapján nem találtam statisztikailag szignifikáns különbséget abban, hogy a különböző tanítási tapasztalattal rendelkező tanárok milyen arányban alkalmaznak elméleti vagy gyakorlati módszereket a fogalomalkotás során.

Következtetés

A vizsgálatom eredménye alapján úgy tűnik, hogy a tanítási tapasztalat önmagában nem befolyásolja szignifikánsan a fogalomalkotási módszerek elmélet–gyakorlat arányát. Ez az eredmény arra enged következtetni, hogy más tényezők – például a tanárképzés tartalma, intézményi elvárások, vagy személyes pedagógiai meggyőződések – sokkal nagyobb szerepet játszhatnak a tanítási gyakorlat kialakításában. A további kutatások során érdemes lenne ezekre a tényezőkre is fókuszálni.

Digitális eszközök használata és a tanulók érdeklődése közötti kapcsolat vizsgálata

A kérdőív egyik célkitűzése az volt, hogy feltárjam, vajon kimutatható-e kapcsolat a tanárok által alkalmazott tanítási módszerek és a tanulók attitűdjei között a deriválás tanítása során. Ennek részeként azt vizsgáltam meg, hogy a digitális eszközök használata összefügg-e a tanulók érdeklődésével.

Az adatokat bináris formában kódoltam: minden tanár esetében rögzítettem, hogy alkalmaz-e digitális eszközöket (igen/nem), illetve hogy beszámolt-e a tanulók érdeklődéséről a témával kapcsolatban (igen/nem). A két változó között kereszttáblás elemzést végeztem.

Digitális eszközök	Érdeklődnek	Nem érdeklődnek	Összesen
Nem (0)	2 fő (10,0%)	18 fő (90,0%)	20 fő
Igen (1)	4 fő (28,6%)	10 fő (71,4%)	14 fő

A khi-négyzet próba eredménye alapján a kapcsolat nem bizonyult szignifikánsnak ($\chi^2(1) = 1,950$, $p = 0,162$). Mivel a táblázat két cellájában a várható gyakoriság nem érte el az 5-öt, ezért a próba megbízhatósága korlátozott. Ennek megfelelően elvégeztem a Fisher-féle egzakt próbát is, amely kifejezetten kis elemszám esetén ad pontos eredményt. A Fisher-próba eredménye ($p = 0,202$) szintén nem mutatott szignifikáns kapcsolatot a két változó között ($p > 0,05$).

Noha statisztikailag nem sikerült igazolnom, hogy a digitális eszközök használata és a tanulói érdeklődés között szignifikáns kapcsolat áll fenn, az arányok alapján mégis megfigyelhető egy bizonyos tendencia. A digitális eszközöket alkalmazó tanárok körében magasabb arányban jelent meg az érdeklődő attitűd (28,6%), mint azoknál, akik nem alkalmaztak ilyen módszert (10%). Ez azt sugallja, hogy a digitális eszközök

szerepet játszhatnak a tanulói motiváció erősítésében, azonban a jelen mintából ez statisztikai úton még nem igazolható.

A frontális magyarázat és a tanulói elutasítás összefüggésének vizsgálata

Arra voltam kíváncsi, vajon összefüggésben áll-e a tanári módszerek típusa azzal, hogy a diákok elutasítóan viszonyulnak-e a deriválás témaköréhez. Különösen a frontális magyarázat alkalmazását vizsgáltam meg abból a szempontból, hogy az ilyen módszert használó tanárok gyakrabban tapasztalnak-e negatív attitűdöt a tanulók részéről.

Ehhez kereszttablás elemzést végeztem, amelyben binárisan kódoltam, hogy egy tanár alkalmaz-e frontális magyarázatot (igen/nem), illetve, hogy számolt-e be elutasító tanulói attitűdről (igen/nem).

Frontális magyarázat	Elutasítják	Nem utasítják el	Összesen
Nem (0)	4 fő (26,7%)	11 fő (73,3%)	15 fő
Igen (1)	6 fő (31,6%)	13 fő (68,4%)	19 fő

A khi-négyzet próba alapján nem mutatható ki szignifikáns kapcsolat a frontális magyarázat alkalmazása és a tanulók elutasító attitűdje között ($\chi^2(1) = 0,097$, $p = 0,755$). Mivel az egyik cellában a várható érték alacsonyabb volt 5-nél, kiegészítésként elvégeztem a Fisher-féle egzakt próbát is. Ennek eredménye: $p = 1,000$, amely szintén azt mutatja, hogy nincs statisztikailag szignifikáns kapcsolat ($p > 0,05$).

Az eredmények alapján nem tudtam igazolni, hogy a frontális magyarázat használata gyakoribb tanulói elutasítással járna együtt. A minta mérete korlátozza az elemzés erejét, de az arányok sem utalnak erős különbségre: a frontális magyarázatot nem használó tanárok 26,7%-a, míg az azt alkalmazók 31,6%-a tapasztalt elutasító hozzáállást. Ezek a különbségek nem meggyőzőek.

A projektalapú tanítás és a tanulók érdeklődése közötti kapcsolat vizsgálata

A kérdőíves adatok alapján megvizsgáltam, hogy a projektalapú tanítási módszer alkalmazása összefüggésben áll-e a tanulók érdeklődésének megjelenésével. A hipotézisem az volt, hogy a projektalapú tanítás – amely aktív részvételre ösztönöz – nagyobb érdeklődést válthat ki a tanulókból.

A vizsgálathoz kereszt táblás elemzést alkalmaztam. Binárisan rögzítettem, hogy az adott tanár használ-e projektalapú tanítást (igen/nem), valamint hogy említette-e, hogy a tanulók érdeklődnek a témakör iránt (igen/nem).

Projektalapú tanítás	Érdeklődnek	Nem érdeklődnek	Összesen
Nem (0)	5 fő (19,2%)	21 fő (80,8%)	26 fő
Igen (1)	1 fő (12,5%)	7 fő (87,5%)	8 fő

A khi-négyzet próba alapján nem volt kimutatható statisztikailag szignifikáns kapcsolat a projektalapú tanítás alkalmazása és a tanulók érdeklődése között ($\chi^2(1) = 0,191$, $p = 0,662$). Mivel két cellában is 5 alatti volt a várható érték, elvégeztem a Fisher-féle egzakt próbát is, amely megbízhatóbb kis elemszám esetén. A Fisher-próba eredménye szintén nem mutatott szignifikáns összefüggést ($p = 1,000$).

Az eredmények tehát nem igazolták azt a feltevésemet, hogy a projektalapú módszert alkalmazó tanárok gyakrabban számolnának be érdeklődő tanulókról. Fontos azonban kiemelni, hogy a projektalapú tanítás csak kevés válaszadónál szerepelt, így az alacsony elemszám miatt az eredményeket óvatosan kell értelmezni.

6.1 Következtetések

Dolgozatomban arra törekedtem, hogy átfogó képet nyújtsak a differenciálszámítás tanításának jelenlegi helyzetéről a középiskolai oktatásban, különös tekintettel az ukrán tanárok módszertani gyakorlatára és tapasztalataira. Céлом az volt, hogy feltárjam, milyen mértékben alkalmazzák a pedagógusok az elméleti és gyakorlati megközelítéseket, milyen tanulói attitűdökkel találkoznak, valamint milyen nehézségeket és fejlesztési lehetőségeket látnak az oktatás során.

A kérdőíves vizsgálat eredményei alapján elmondható, hogy a tanárok között jelentős különbségek mutatkoznak az alkalmazott módszerek tekintetében. A hagyományos

frontális magyarázat továbbra is meghatározó szerepet tölt be, de emellett egyre nagyobb teret kapnak az innovatív, tanulóközpontú megközelítések is – például a problémaalapú, projektalapú vagy felfedezettő tanulás.

Az elemzések során több statisztikai kapcsolatot vizsgáltam meg. A Spearman-féle rangkorreláció nem mutatott szignifikáns összefüggést a tanárok életkora és a digitális eszközök használatának gyakorisága között, ami arra utal, hogy a technológiai eszközök alkalmazása nem életkorfüggő. Hasonlóképpen, a tanítási tapasztalat és az elmélet–gyakorlat arány között sem mutatkozott statisztikailag szignifikáns különbség a Kruskal–Wallis teszt alapján.

Külön keresztábra-elemzés során megvizsgáltam, hogy a projektalapú tanítási módszer alkalmazása összefügg-e a tanulók érdeklődésével a differenciálszámítás iránt. A khi-négyzet próba és a Fisher-féle egzakt próba alapján nem volt kimutatható szignifikáns kapcsolat. Bár a hipotézisem szerint a projektalapú módszert alkalmazó tanárok diákjai nagyobb érdeklődést mutatnának, az alacsony elemszám és a minta aránytalanságai miatt az eredményeket óvatosan kell értelmezni.

Összességében a kutatásom rávilágított arra, hogy a tanári módszerválasztás sokszínű, és nem feltétlenül köthető egyértelműen életkori vagy tapasztalati tényezőkhöz. Az iskolai gyakorlatban továbbra is fontos lenne az aktív, szemléletes, a diákokat bevonó módszerek arányának növelése, különösen a komplex és elvont tananyagrészek, mint a differenciálszámítás esetében. Emellett a tanulói motiváció és a stressz csökkentése érdekében a projektalapú és gyakorlatorientált megközelítések erősítése lehet célravezető.

Úgy gondolom, hogy a kutatásom rávilágított arra, milyen fontos szerepe van a tanítási módszerek tudatos megválasztásának a tanulói attitűdök alakulásában. Bízom benne, hogy ezzel a dolgozattal magam is hozzájárulhatok ahhoz, hogy a differenciálszámítás tanítása még élményszerűbbé, befogadhatóbbá váljon a diákok számára.

Irodalomjegyzék

Література

- [1] Галак Марія-Олена Олександрівна. *Похідна функції та її застосування при розв'язуванні задач прикладного характеру*. Дипломна робота. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2021.
- [2] GEMES, M. *Példatár: A derivált fogalma*. ELTE. [Hivatkozás a weboldalra: https://margitgemes.web.elte.hu/Peldatar_OSZK/bmk/bmk12.html]
- [3] GEMES, M. *Példatár: A derivált fogalma*. ELTE. [Hivatkozás a weboldalra: https://margitgemes.web.elte.hu/Peldatar_OSZK/bmk/bmk12.html]
- [4] *Deriválttáblázat BME*, [Hivatkozás a weboldalra: <https://math.bme.hu/pi-trik/derivalttablazat.pdf>].
- [5] Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona Helén, Bálint Zsuzsanna. *Gyűjtemény a Matematika emelt szintű oktatásához*. Nat 2020. Gimnázium és középiskola, 9–12. évfolyam. Kiadói kód: OH-MAT912AE. Elérhető: <https://www.tankonyvkatalogus.hu/tankonyv/OH-MAT912AE>
- [6] Studium Generale: *Függvények – Analízis*.
Hivatkozás a weboldalra: <https://www.studiumgenerale.hu/matek-erettsegik/>
- [7] Міністерство освіти і науки України. *Офіційний вебсайт*. Доступно за адресою: <https://mon.gov.ua/>, дата звернення: 19 травня 2025 р.
- [8] Katona Edina Mária. *Differenciálszámítás és alkalmazásai*. Szakdolgozat, Matematika BSc szak, tanári szakirány. Témavezető: Sikolya Eszter, adjunktus. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Alkalmazott Analízis és Számításmatematika Tanszék, Budapest. Elérhető: https://sikolyaeszt.web.elte.hu/oktatas/szakdolg/Katona_Edina_szakdolg,
Letöltés ideje: 2025. május 19.
- [9] Mezei István, Faragó István, Simon Péter. *Bevezetés az analízisbe*. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar. Typotex, Budapest,

2013. Elérhető: https://math.bme.hu/~pitrik/2020_21_1/Kalkulus1_segedanyagok/_Mezei_Bev_Anal.pdf,
- [10] Szegedi Tudományegyetem. *Oktatási segédanyag*. Elérhető: <https://www.model.u-szeged.hu/data/etc/edoc/gyth-jegyzet-magyar/Chapter-4.pdf>
- [11] Мерзляк А.Г., Номіровський Д.Є., Полонський В.Б., Якір М.С. *Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія: підручник для 10 класу (рівень стандарту)*. Харків: Гімназія, 2018. Доступно за адресою: <https://shkola.in.ua/1672-matematyka-10-klas-merzliak-2018.html>
- [12] Мерзляк А.Г., Номіровський Д.Є., Полонський В.Б., Якір М.С. *Алгебра (профільний рівень): підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Нова програма*. Харків: Гімназія, 2018. Доступно за адресою: <https://pidruchnyk.com.ua/430-algebra-proflniy-rven-merzlyak-10-klas.html>
- [13] Мерзляк А.Г., Номіровський Д.Є., Полонський В.Б., Якір М.С. *Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти (профільний рівень)*. Харків: Гімназія, 2019. Доступно за адресою: <https://shkola.in.ua/1079-algebra-11-klas-merzliak-2019.html>
- [14] Мерзляк А.Г., Номіровський Д.Є., Полонський В.Б., Якір М.С. *Математика: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти (рівень стандарту)*. Нова програма. Харків: Гімназія, 2019. Доступно за адресою: <https://pidruchnyk.com.ua/1252-matematika-11-klas-merzlyak.html>
- [15] ChatGPT, OpenAI o4-mini nyelvi modell, <https://chat.openai.com/>. Segítség a LaTeX-kódok megírásában, magyar nyelvű stilisztikai finomításokban, valamint fordítási és szerkesztői tanácsadásban.

Ábrajegyzék

Перелік ілюстрацій

1.	Az $f(x) = x^2 - x + 1$ függvény görbéje és az $x_0 = 1$ pontban húzott érintő	10
2.	A szinusz függvény és érintője az $x = \frac{\pi}{4}$ pontban	16
3.	A hely, sebesség és gyorsulás kapcsolata az idő függvényében	17
4.	A mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változása 1970 és 2000 között	25
5.	A válaszadók nemi megoszlása	30
6.	A válaszadók életkori megoszlása	31
7.	Válaszadók iskolatípus szerinti megoszlása	31
8.	Válaszadók matematikatanításban eltöltött évei	32
9.	Differenciálszámítást jelenleg tanítók és nem tanítók aránya	32
10.	A derivált témakörének tanítása évfolyamonként	33
11.	A válaszadók véleménye a 10. évfolyamos óraszám elegendőségéről	34
12.	A válaszadók által túllépett tanórák számának megoszlása	35
13.	A váalszadók véleménye a 11. évfolyamos óraszám elegendőségéről	35
14.	A válaszadók által túllépett tanórák számának megoszlása	36
15.	Elmélet és gyakorlat aránya a tanításban	37
16.	Gyakorlati példák tématerületei a differenciálszámítás tanítása során	38
17.	A derivált megértésének nehézsége évfolyamok szerint	38
18.	A derivált tanulásának legfőbb nehézségei a válaszadók szerint	39
19.	A tanulók viszonyulása a derivált témához	40
20.	A digitális eszközök használatának gyakorisága a tanítás során	41
21.	A leghatékonyabbnak tartott tanítási módszerek megoszlása	42
22.	A legfontosabb fejlesztési irányok megoszlása a válaszadók szerint	43

Mellékletek

Kutatási kérdőív (Google Űrlap)

A differenciálszámítás tanításának gyakorlata és kihívásai a középiskolában / Практика та виклики викладання диференціального числення в середній школі

Tisztelt kitöltő!

Varga Marianna vagyok, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola végzős matematika szakos hallgatója.

Jelen kérdőívet a diplomamunkámhoz kapcsolódóan készítettem el, melynek címe:
„A differenciálszámítás és alkalmazása a gyakorlati problémák megoldásának folyamatában.”

A kérdőív célja, hogy képet adjon arról, miként tanítják a derivált fogalmát az ukrajnai középiskolákban, milyen nehézségekbe ütköznek a tanulók a megértés során, és mely módszertani eszközöket tartják a leghatékonyabbnak.

A kérdőív kitöltése körülbelül 7–10 percet vesz igénybe. A válaszadás teljes mértékben **anonim**, az így szerzett információkat kizárólag a diplomamunkámhoz használom fel.

Előre is köszönöm, hogy válaszaival segíti a munkámat!

Шановний(а) респондент(е)!

Мене звати Варга Маріанна, я – студентка останнього курсу математичного факультету **Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II.**

Цю анкету було створено в рамках моєї дипломної роботи, яка має назву:

„Похідна функції та її застосування в процесі розв'язування задач прикладного характеру”

Метою опитування є з'ясування того, як викладається поняття похідної у ЗЗСО, з якими труднощами стикаються учні під час засвоєння матеріалу, а також які методичні інструменти вважаються педагогами найбільш ефективними.

Заповнення анкети займає приблизно 7–10 хвилин. Відповіді є повністю анонімними, отримана інформація буде використана виключно для написання моєї дипломної роботи.

Заздалегідь дякую за Ваші відповіді та допомогу у моєму дослідженні!

1. Neme: / *Стать*:

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

☐ Nő / Жінка

☐ Férfi / Чоловік

2. Életkora: / *Вік*:

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

☐ 18–24 év / 18–24 роки

☐ 25–34 év / 25–34 роки

☐ 35–44 év / 35–44 роки

☐ 45–54 év / 45–54 роки

☐ 55–64 év / 55–64 роки

☐ 65 év felett / 65 років і більше

☐ Nem kívánom megadni / Не бажаю вказувати

3. Milyen típusú iskolában tanít? / *У якому типі закладу Ви викладаєте?*

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

☐ Líceum / Лицей

☐ Szakgimnázium / Професійний коледж

☐ Technikumi iskola / Технікум

☐ Egyéb: _____

4. Hány éve tanít matematikát? / *Скільки років Ви викладаєте математику?*

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

- ☐ 0–5 év / 0–5 років
☐ 6–10 év / 6–10 років
☐ 11–20 év / 11–20 років
☐ 20+ év / Більше 20 років

5. Tanítja-e jelenleg a differenciálszámítást? / *Чи викладаєте Ви зараз диференціальне числення?*

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

- ☐ Igen / Так
☐ Nem / Ні

6. Mely évfolyamban tanítja a derivált témakörét? / *В якому класі Ви викладаєте тему похідної?*

Válassza ki az összeset, amely érvényes.

- ☐ 10. osztály / 10 клас
☐ 11. osztály / 11 клас
☐ Egyéb: _____

7. A 10. évfolyamos tanmenetben megadott óraszám elegendő volt-e a differenciálszámítás bevezetésére és gyakorlására? / *Чи було достатньо годин у навчальному плані 10 класу для введення та практики диференціального числення?*

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

- ☐ Igen / Так
☐ Nem / Ні

8. (Amennyiben az előző kérdésre „Nem” választ adott.)

Kérem, adja meg, átlagosan hány tanórával lépi túl az előírt keretet! / (У разі відповіді "Ні" на попереднє питання)

Будь ласка, вкажіть, на скільки годин у середньому Ви перевищуєте встановлений ліміт!

9. A 11. évfolyamos tanmenetben megadott óraszám elegendő volt-e a differenciálszámítás elmélyítésére és alkalmazására? / Чи було достатньо годин у навчальному плані 11 класу для поглибленого вивчення та застосування диференціального числення?

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

☐ Igen / Так

☐ Nem / Ні

10. (Amennyiben az előző kérdésre „Nem” választ adott.)

Kérem, adja meg, átlagosan hány tanórával lépi túl az előírt keretet! / (У разі відповіді "Ні" на попереднє питання)

Будь ласка, вкажіть, на скільки годин у середньому Ви перевищуєте встановлений ліміт!

11. Ha más évfolyamban is tanítja a témát (pl. 12. osztály, technikum), kérem, írja le: / Якщо Ви викладаєте цю тему в інших класах (наприклад, 12 клас, технікум), будь ласка, вкажіть:
-

12. Milyen arányban oszlanak meg az elméleti és gyakorlati ismeretek a fogalom kialakítása során? / В якому співвідношенні розподіляються теоретичні та практичні знання при формуванні поняття?

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

- ☐ Csak elmélet / Тільки теорія
- ☐ 70% elmélet – 30% gyakorlat / 70% теорія – 30% практика
- ☐ 50% – 50%
- ☐ 30% elmélet – 70% gyakorlat / 30% теорія – 70% практика
- ☐ Főként gyakorlati példák / Переважно практичні приклади
- ☐ Egyéb: _____

13. Milyen tématerületekről hoz gyakorlati példákat? / З яких предметних областей Ви наводите практичні приклади?

Válassza ki az összeset, amely érvényes.

- ☐ Fizika / Фізика
- ☐ Gazdaság / Економіка
- ☐ Biológia / Біологія
- ☐ Geográfia / Географія
- ☐ Kémia / Хімія
- ☐ Nem alkalmazok ilyen példákat / Не застосовую таких прикладів
- ☐ Egyéb: _____

14. Melyik évfolyamban értik meg legnehezebben a diákok a derivált fogalmát? / В якому класі учням важче зрозуміти зміст і поняття похідної?

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

- ☐ 10. osztály / 10 клас
- ☐ 11. osztály / 11 клас
- ☐ Egyformán nehéz mindenhol / Однаково важко в усіх класах
- ☐ Nem tudom megítélni / Не можу оцінити
- ☐ Egyéb: _____

15. Mi okozza a legnagyobb nehézséget a tanulók számára? / *Що є найбільшою складністю для учнів?*

Válassza ki az összeset, amely érvényes.

- ☐ Elvont elméleti tartalom / Абстрактний теоретичний зміст
- ☐ Geometriai/fizikai értelmezés nehézsége / Труднощі з геометричним/фізичним тлумаченням
- ☐ Túl sok képlet / Занадто багато формул
- ☐ Gyakorlati példa hiánya / Нестача практичних прикладів
- ☐ Időhiány / Нестача часу
- ☐ Egyéb: _____

16. Hogyan viszonyulnak a tanulók a témához? / *Як учні ставляться до цієї теми?*

Válassza ki az összeset, amely érvényes.

- ☐ Érdeklődnek / Цікавляться
- ☐ Elutasítják / Відкидають
- ☐ Mechanikusan megtanulják / Механічно вивчають
- ☐ Elméletben értik, de nem tudják alkalmazni / Розуміють теоретично, але не можуть застосувати
- ☐ Gyakorlatban értik, de nem tudják elmagyarázni / Розуміють на практиці, але не можуть пояснити
- ☐ Szoronganak / Відчувають стрес
- ☐ Egyéb: _____

17. Használ digitális eszközöket a tanítás során? / *Використовуєте цифрові інструменти під час навчання?*

Soronként csak egy oválist jelöljön be.

- ☐ Igen, rendszeresen / Так, регулярно
- ☐ Igen, alkalmanként / Так, час від часу
- ☐ Ritkán / Рідко
- ☐ Soha / Ніколи

18. Mely módszereket tartja a leghatékonyabbnak? / Які методи Ви вважаєте найефективнішими?

Válassza ki az összeset, amely érvényes.

- ☐ Frontális magyarázat / Фронтальне пояснення
- ☐ Projekतालapú tanulás / Проектне навчання
- ☐ Digitális eszközök / Цифрові інструменти
- ☐ Felfedezettő tanulás /
- ☐ Problémaalapú / Метод на основі проблем
- ☐ Egyéb: _____

19. Mit tartana a legfontosabb fejlesztési iránynak? / Що Ви вважаєте найважливішим напрямком для розвитку?

Válassza ki az összeset, amely érvényes.

- ☐ Interaktív példatár / Інтерактивний прикладний ресурс
- ☐ Több gyakorlati példa a tankönyvekben / Більше практичних прикладів у підручниках
- ☐ Vizualizációs lehetőségek / Можливості для візуалізації
- ☐ Tanári továbbképzések / Підвищення кваліфікації вчителів
- ☐ Rugalmasabb tanterv / Гнучкіший навчальний план
- ☐ Egyéb: _____

20. Van olyan tapasztalata vagy ötlete, amit szívesen megosztana? / Чи є у Вас досвід чи ідеї, якими Ви хочете поділитися?

Ezt a tartalmat nem a Google hozta létre, és nem is hagyta azt jóvá.

Google Űrlapok

Висновки

У своїй роботі я прагнув надати всебічну картину сучасного стану викладання диференціального числення в середній школі, з особливим акцентом на методичну практику та досвід українських учителів. Метою дослідження було з'ясувати, якою мірою педагоги поєднують теоретичні та практичні підходи, з якими учнівськими ставленнями стикаються, а також які труднощі та можливості для покращення бачать у процесі викладання.

Результати анкетування свідчать про значні відмінності у використаних педагогічних підходах. Традиційне фронтальне пояснення досі відіграє важливу роль, однак дедалі більше поширюються інноваційні, орієнтовані на учнів методи — зокрема, проблемне, проєктне та дослідницьке навчання.

У ході аналізу я розглянув декілька статистичних залежностей. Кореляція Спірмена не виявила значущого зв'язку між віком учителів та частотою використання цифрових інструментів, що свідчить про те, що застосування технологій не залежить від віку. Так само, за критерієм Краскела–Уолліса, не було встановлено статистично значущої різниці між педагогічним стажем та співвідношенням теорії й практики у викладанні.

За допомогою перехресного аналізу я також дослідив, чи існує зв'язок між використанням проєктного навчання та зацікавленістю учнів у темі диференціального числення. За критеріями ² (хи-квадрат) та точним тестом Фішера не було виявлено статистично значущої залежності. Хоча моя гіпотеза передбачала, що учні, які навчаються за проєктними методами, виявлятимуть вищу зацікавленість, обмежена кількість даних та нерівномірність вибірки вимагають обережного трактування результатів.

Загалом моє дослідження показало, що вибір методів викладання є дуже різноманітним і не обов'язково прямо пов'язаний із віком чи досвідом учителя. У шкільній практиці варто і надалі посилювати частку активних, наочних та інтерактивних методів, особливо під час опрацювання складних і абстрактних тем, таких як диференціальне числення. Для підвищення мотивації учнів і зменшення рівня стресу доцільно застосовувати більше практично орієнтованих і проєктних підходів.

Я вважаю, що моє дослідження підкреслило важливість усвідомленого вибору педагогічних методів для формування позитивного ставлення учнів до навчання. Сподіваюся, що моя робота також зробить свій внесок у те, щоб викладання диференціального числення стало більш захопливим і доступним для школярів.

Nyilatkozat

Alulírott, Varga Marianna, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematika és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) MSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Я, Варга Маріанна Олександрівна, підтверджую, що користувалась Chat GPT (<https://chat.openai.com/>) для редагування, стилізації тексту та перевірки помилок у власній роботі. Я завантажила свою роботу в повному обсязі і ввела наступні дані **у період з березня по 13 травня 2025 року**:

1. Покращення академічного стилю та правильності мови, включаючи граматичні структури, пунктуацію та лексику.
2. Переклад іншомовних текстів та стилістичне редагування українських розділів роботи.
3. Генерація ідей та отримання натхнення для подальшого опрацювання змісту.
4. Технічна допомога у створенні та редагуванні LaTeX-коду, зокрема:
 - оформлення бібліографії,
 - форматування заголовків і розділів,
 - нумерація сторінок,
 - розміщення таблиць і малюнків.

Отримані таким чином дані були використані для доопрацювання та перероблення тексту з метою отримання кінцевого варіанту роботи.

Варга Маріанна Олександрівна

Звіт подібності

метадані

Назва організації
Hungarian College of Higher Education Ferenc Rakoczi II Transcarpathian

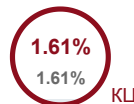
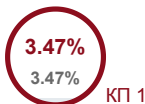
Заголовок
diploma_munka Varga

Науковий керівник / Експерт
Автор **Габрієлла Пап**

підрозділ
Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II

Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.



25

Довжина фрази для коефіцієнта подібності 2

10484

Кількість слів

78119

Кількість символів

Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати навмисний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

Заміна букв	Б	556
Інтервали	A→	0
Мікропробіли	:	0
Білі знаки	Б	0
Парафрази (SmartMarks)	a	22

Подібності за списком джерел

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Колір тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

10 найдовших фраз

Копір тексту

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://bzmatek.eu/wp-content/uploads/2024/03/szelsoertek-1.pdf	102 0.97 %
2	https://bzmatek.eu/wp-content/uploads/2024/03/szelsoertek-1.pdf	40 0.38 %
3	QR-coding technology and its implementation in the educational process of higher school Технологія QR-кодирования и ее внедрение в образовательный процесс высшей школы 10/14/2021 South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky (Бібліотека)	14 0.13 %

4	https://mater78.files.wordpress.com/2013/06/difp_mat4.pdf	14 0.13 %
5	QR-coding technology and its implementation in the educational process of higher school Технологія QR-кодирования и ее внедрение в образовательный процесс высшей школы 10/14/2021 South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky (Бібліотека)	13 0.12 %
6	https://mathweb.ucsd.edu/~mlicht/wina2021/pdf/lecture11.pdf	12 0.11 %
7	QR-coding technology and its implementation in the educational process of higher school Технологія QR-кодирования и ее внедрение в образовательный процесс высшей школы 10/14/2021 South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky (Бібліотека)	12 0.11 %
8	https://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/8224	11 0.10 %
9	https://nice-price.com.ua/product/gramota/istoriya-ukraini-pidruchnik-dlya-10-klasu-zakladiv-zagalnoi-serednoi-osviti-riven-standartu	10 0.10 %
10	https://www.evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/26631/1/makarus_2024.pdf	10 0.10 %

з домашньої бази даних (0.00 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-----------	--

з програми обміну базами даних (0.43 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗАГОЛОВОК	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	QR-coding technology and its implementation in the educational process of higher school Технологія QR-кодирования и ее внедрение в образовательный процесс высшей школы 10/14/2021 South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky (Бібліотека)	45 (4) 0.43 %

з Інтернету (3.04 %)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ДЖЕРЕЛО URL	КІЛЬКІСТЬ ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
1	https://bzmatek.eu/wp-content/uploads/2024/03/szelsoertek-1.pdf	150 (3) 1.43 %
2	https://www.evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/26631/1/makarus_2024.pdf	48 (6) 0.46 %
3	https://mater78.files.wordpress.com/2013/06/difp_mat4.pdf	36 (5) 0.34 %
4	https://mathsolver.microsoft.com/en/solve-problem/f%20(%20x%20)%20%3D%20x%20%5E%20%7B%203%20%7D%20-%203%20x%20%5E%20%7B%202%20%7D%20%2B%202%20x%20%2B%201	15 (2) 0.14 %
5	https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method	14 (2) 0.13 %
6	https://mathweb.ucsd.edu/~mlicht/wina2021/pdf/lecture11.pdf	12 (1) 0.11 %
7	https://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/8224	11 (1) 0.10 %
8	https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_interpolation	11 (2) 0.10 %
9	https://nice-price.com.ua/product/gramota/istoriya-ukraini-pidruchnik-dlya-10-klasu-zakladiv-zagalnoi-serednoi-osviti-riven-standartu	10 (1) 0.10 %
10	http://www.nmc.od.ua/wp-content/uploads/2015/09/Literatura_2015-2016.pdf	7 (1) 0.07 %
11	https://ehazi.hu/q/2530/matematika-az-fd-gt-fuggveny-monoton-novekvo-ha-x1x2d-x1lx2-akkor-az-fd-gt-fuggveny-szigoruan-monot	5 (1) 0.05 %

Список принятых фрагментів (немає принятих фрагментів)

ПОРЯДКОВИЙ НОМЕР	ЗМІСТ	КІЛЬКІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ)
------------------	-------	---------------------------------------